Formación Universitaria
Vol. 15(4), 105-118 (2022)
http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062022000400105

Razonamiento covariacional de estudiantes universitarios en un acercamiento al concepto de integral definida mediante sumas de Riemann

Mihály A. Martínez-Miraval[1,2] y Martha L. García-Rodríguez[2]
(1) Dpto. de Ciencias, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Santiago de Surco-Perú.
(correo-e: pcmammar@upc.edu.pe)
(2) Programa de Matemática Educativa, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, CDMX-México (correo-e: mlgarcia@ipn.mx)

Recibido Ene. 28, 2022; Aceptado Mar. 28, 2022; Versión final Abr.21, 2022, Publicado Ago. 2022

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo analizar el cambio en las acciones mentales asociadas con el razonamiento covariacional de una pareja de estudiantes cuando trabajan en tareas para aproximarse al concepto de integral definida mediante sumas de Riemann. Para conocer sobre las acciones mentales, se utilizan las interacciones en GeoGebra, los reportes escritos y una entrevista semiestructurada aplicada a los estudiantes de una escuela de ingeniería en México. Los datos fueron analizados con el constructo teórico del razonamiento covariacional. Los resultados muestran una evolución en la forma en que coordinan los cambios simultáneos entre las variables involucradas en las tareas, desde el nivel de sin coordinación hasta la covariación continua a trozos. Se concluye que las preguntas para proponer conjeturas sobre el uso de rectángulos en procesos de aproximación al área de una región y su justificación, o inferir resultados sobre situaciones hipotéticas, visibilizan comportamientos asociados con niveles superiores de razonamiento covariacional.

Palabras clave: razonamiento covariacional; sumas de Riemann; integral definida; GeoGebra

Covariational reasoning of university students in an approach to the concept of definite integral through Riemann sums

Abstract

This study aims to analyze changes in mental actions associated with the covariational reasoning of one pair of students when working on tasks to approach the concept of definite integral through Riemann sums. Mental actions are gathered from student interactions in GeoGebra, from their written reports, and from a semi-structured interview applied to one pair of students from an engineering school in Mexico. Data are analyzed with the theoretical construct of covariational reasoning. The results show an evolution in the way students coordinate simultaneous changes between the variables involved in tasks, from the no coordination level to the chunky continuous covariation level. It is concluded that questions to propose conjectures on the use of rectangles in approximation processes to the area of a region, including their justification, and the process of inferring behaviors from hypothetical situations, reveal behaviors associated with higher levels of covariational reasoning.

Keywords: covariational reasoning; Riemann sums; definite integral; GeoGebra

INTRODUCCIÓN

La literatura relacionada con la comprensión de los estudiantes sobre el concepto integral definida incluye trabajos que se orientan a analizar si el estudiante desarrolla un aprendizaje conceptual, a partir de preguntas que involucran el teorema fundamental del cálculo, la relación integral-área y la noción de integral como una suma algebraica de áreas de rectángulos, o un aprendizaje procedimental, donde prevalecen preguntas relacionadas con técnicas de integración (Serhan, 2015); así como trabajos que permiten identificar qué significado prevalece o de qué manera el estudiante interpreta el símbolo de la integral definida de una función (Wagner, 2017). Otros trabajos se orientan al abordaje y uso de la integral definida en el aula, ya sea como el área bajo una curva, antiderivadas (Jones, 2015), mediante procesos de acumulación de áreas (Aranda y Callejo, 2017), utilizando funciones de acumulación (Thompson y Silverman, 2008), o enfocadas en la comprensión de las etapas que componen la integral definida desde una perspectiva de Riemann: partición, producto, suma y límite (Sealey, 2014). Algunas de ellas utilizan la tecnología de lápiz y papel y otras emplean tecnologías digitales, lo que permite representar de forma dinámica el refinamiento de una partición y generar nociones intuitivas del objeto de estudio (Caglayan, 2016).

Kouropatov y Dreyfus (2014) manifiestan que en general, el concepto de integral se puede desarrollar a partir de una estructura jerárquica de cuatro elementos: i. desarrollo del concepto de aproximación con objetos geométricos, ii. cálculo del valor de acumulación para objetos estáticos (integral definida), iii. determinación de la acumulación variando el límite superior del intervalo (función de acumulación), e iv. interacción entre los procesos de integración y diferenciación basada en el conocimiento de la razón de cambio de la función de acumulación. En relación con la interpretación de la integral definida como el límite de una suma por sí sola, no es suficiente para lograr la comprensión del concepto, incluso en estudiantes de buen nivel académico. Al respecto, Jones (2015) menciona que esto dificulta que se desarrolle en los estudiantes un razonamiento centrado en las sumas de Riemann, que es de gran utilidad en la resolución de problemas en otros campos de la matemática, como es el caso de la física. Esto ha generado la necesidad de profundizar en investigaciones que exploren lo que se requiere para favorecer la comprensión de la integral definida desde esta perspectiva, con particular atención en la coordinación de los valores de las variables involucradas en los problemas (Sealey, 2014).

La coordinación simultánea de los cambios de una variable respecto de los cambios de otra variable, se puede analizar a partir del razonamiento covariacional, que se identifica como esencial para la comprensión de conceptos fundamentales de Cálculo (Carlson et al., 2002): para lograr una comprensión del concepto de función mediante la representación e interpretación de sus características dinámicas (Mateus-Nieves y Moreno, 2021) e introducir su definición de forma cualitativa, como una covariación dinámica entre los cambios de los valores de dos variables (Antonini y Lisarelli, 2021); para comprender y desarrollar tareas sobre el concepto de límite (Castillo-Garsow et al., 2013); y para coordinar los valores de una variable y la tasa de variación instantánea de una función, obtenida al realizar refinamientos cada vez más pequeños de la tasa de variación media en un intervalo determinado, como una aproximación al concepto de derivada (Villa-Ochoa et al., 2018). La coordinación simultánea de cambio entre dos variables también ha sido utilizada en investigaciones relacionadas con el estudio de las funciones lineales y cuadráticas (Hohensee et al., 2021; Ramos, 2021), y en otras se describen sistemas de relaciones covariacionales al trabajar con relaciones funcionales, cuando dos cantidades covarían con respecto a una tercera cantidad (Paoletti et al., 2022).

El razonamiento covariacional asociado con el concepto de integral definida también es reportado en la literatura. Thompson y Silverman (2008) hablan sobre la importancia de desarrollar el concepto de acumulación en el estudio de la integración, Aranda y Callejo (2017) sobre la construcción de la función integral, mediante la coordinación de los cambios de tres variables involucradas en este proceso: el extremo derecho de un intervalo, la función bajo la cual se acumula el área, y el valor de la acumulación. Sealey (2014) señala que estudiar la integral a partir de las sumas de Riemann involucra coordinar los cambios que ocurren entre las variables presentes en los procesos de producto, suma, límite y función, por lo que resulta importante investigar sobre el razonamiento del estudiante en cada uno de estos procesos.

La introducción del concepto de integral definida mediante sumas de Riemann no es ajena al uso de tecnologías digitales, ya que es posible identificar investigaciones que incluyen actividades que hacen uso de métodos numéricos de aproximación a la integral definida a través de sumas de Riemann inferiores y superiores, de punto medio y trapezoidal, para funciones positivas y negativas en intervalos cerrados (Martínez-Miraval y García-Cuéllar, 2020; Caglayan, 2016), o que trabajan con la diferencia entre las sumas superior e inferior (Tatar y Zengin, 2016). En las investigaciones revisadas se identifica que son muy escasas aquellas que hacen referencia al razonamiento covariacional como una habilidad que parece ser fundamental cuando se resuelven tareas que involucran el concepto de integral definida en contextos relacionados con fenómenos dinámicos. Es por eso por lo que, se realizó una investigación que tuvo como objetivo *analizar el* *cambio en las acciones mentales asociadas con el razonamiento covariacional de una pareja de estudiantes, cuando trabajan en tareas para aproximarse al concepto de integral definida mediante sumas de Riemann.*

Identificar el cambio en las acciones mentales de los estudiantes implica analizar e interpretar las respuestas, los comportamientos, las explicaciones y las justificaciones de los estudiantes, en las que se observa la coordinación simultánea de los cambios de una variable respecto de los cambios de otra (razonamiento covariacional), proceso que se considera esencial para la comprensión de conceptos fundamentales de Cálculo, como lo es la integral definida.

OTROS ANTECEDENTES

Cuando se habla de razonamiento covariacional implícita o explícitamente se involucran conceptos importantes como: covariación, objetos multiplicativos, imagen de covariación, niveles de razonamiento covariacional, y formas de ver la variación continua, por lo que se considera importante revisar estos conceptos. La covariación es un concepto que se refiere a la coordinación entre dos variables *x* e *y*; una forma de hacerlo es mediante la coordinación de los cambios consecutivos de los valores que toma la variable *y,* considerando los cambios consecutivos de los valores que toma la variable *x*, al recorrer una tabla que contiene estos valores. Esto es, yuxtaponer ambas secuencias a través de la identificación de un patrón en los datos, de modo que sea posible determinar otros valores por interpolación o por extensión de ambas secuencias (Confrey y Smith, 1994).

Sin embargo, resulta útil extender la idea de covariación no solo al empleo de tablas que presentan estados sucesivos de una variación, sino a imaginar dos cantidades covariando, es decir, tener en mente una imagen sostenida de los valores de dos cantidades variando simultáneamente, esto implica acoplar las dos cantidades, de modo que se forme un objeto multiplicativo de los dos (Saldanha y Thompson, 1998). El objeto multiplicativo es un nuevo elemento que incorpora simultáneamente los atributos de dos variables distintas, resulta de crear una imagen de cambio de dos cantidades, coordinar sus valores y formar una imagen de covariación de ambas. Estas imágenes de covariación se desarrollan y evolucionan, lo que se percibe en la manera en que se coordinan los valores de dos cantidades, desde una coordinación inicial en la que se ponen en juego dos variables, hasta imaginar una coordinación continua entre ellas (Carlson et al., 2002).

Carlson et al. (2002) y Thompson y Carlson (2017) clasifican en niveles, los comportamientos de los sujetos involucrados en la resolución de un problema de covariación, en ellos se distinguen sus habilidades de razonar covariacionalmente. Thompson y Carlson (2017) afirman que, si en algún momento un estudiante razona de manera variable entre niveles, se considera que razona en el nivel superior y que ha desarrollado los razonamientos de los niveles inferiores, eso da la idea de evolución en el razonamiento, dado que, según Carlson et al. (2002), “a medida que la imagen de covariación que tiene un individuo se desarrolla, ella sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado” (p. 130). Un razonamiento más sofisticado correspondería a lo que Saldanha y Thompson (1998) llama covariación continua, que ocurre cuando un sujeto asume que, si una de las cantidades toma valores diferentes en momentos distintos, la otra cantidad también cambia y toma todos los valores intermedios. De acuerdo con Castillo-Garsow et al. (2013) la variación continua de una cantidad puede ser concebida de dos maneras: a trozos, que implica pensar la variación en fragmentos, es decir, poner la atención en lo que ocurre en los valores extremos de un intervalo, y no en todos los valores intermedios; o suave, que implica imaginar el cambio de los valores de las cantidades como una experiencia del movimiento en el mundo real. Ideas muy similares se identifican en el constructo teórico de Thompson y Carlson (2017).

Entre los investigadores que han brindado una noción de razonamiento covariacional, figura Thompson cuya postura es “conceptualizar los valores de cantidades individuales como variables y luego conceptualizar dos o más cantidades como que varían simultáneamente” (Thompson y Carlson, 2017, p. 423). La tabla 1 muestra los niveles del constructo teórico de Thompson y Carlson y la descripción de estos niveles de razonamiento covariacional. Carlson et al. (2002) definen el razonamiento covariacional, como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 354). Los investigadores señalan que la imagen de covariación de una persona en un momento dado, está sustentada en las acciones mentales que esa persona realiza. Carlson et al. proponen un marco conceptual de cinco niveles de desarrollo del razonamiento covariacional, y describen un conjunto de acciones mentales y comportamientos asociados identificados previamente en estudiantes que desarrollaban tareas relacionadas con fenómenos dinámicos (tabla 2). En palabras de Carlson et al. (2002): “las acciones mentales del marco conceptual de la covariación proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se pueden ver cuando los estudiantes se involucran en tareas de covariación” (p. 356).

Tabla 1: Niveles de Razonamiento Covariacional y descripción (Tomado de Thompson y Carlson, 2017)

Nivel	Descripción
Covariación continua suave	La persona imagina aumentos o disminuciones (en adelante, cambios) en el valor de una cantidad o variable (en adelante, variable) como si ocurrieran simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y la persona imagina ambas variables variando suave y continuamente.
Covariación continua a trozos	La persona imagina los cambios en el valor de una variable como si ocurrieran simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable, e imagina ambas variables variando con una variación continua a trozos.
Coordinación de valores	La persona coordina los valores de una variable (*x*) con los valores de otra variable (*y*) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (*x*, *y*).
Coordinación gruesa de valores	La persona forma una imagen general de los valores de las cantidades que varían juntos, como "esta cantidad aumenta mientras que la otra cantidad disminuye". La persona no imagina que los valores individuales de las cantidades vayan juntos. En cambio, la persona imagina un vínculo flexible y no multiplicativo entre los cambios generales en los valores de dos cantidades.
Pre-coordinación de valores	La persona imagina que los valores de dos variables varían, pero de forma asincrónica: una variable cambia, luego la segunda variable cambia, luego la primera, y así sucesivamente. La persona no anticipa crear pares de valores como objetos multiplicativos.
Sin coordinación	La persona no tiene una imagen de las variables que varían juntas. La persona se centra en la variación de una u otra variable sin coordinar los valores.

Tabla 2: Acciones mentales y comportamientos asociados (Adaptado de Carlson et al., 2002)

Acción mental	Comportamientos
AM1	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., *y* cambia con cambios en *x*).
AM2	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

En este trabajo se retoma la descripción de los niveles de razonamiento covariacional desarrollado por Thompson y Carlson (2017) y la propuesta de Carlson et al. (2002) de identificar acciones mentales para describir el trabajo de los estudiantes. Como se mencionó anteriormente, las acciones mentales se relacionan con la descripción de los comportamientos asociados con cada nivel de razonamiento covariacional que los estudiantes ponen en juego cuando resuelven un problema, en esta investigación el problema se relaciona con el concepto de integral definida mediante sumas de Riemann y se observan los comportamientos que los estudiantes exteriorizan al interactuar con tecnologías digitales en su resolución.

También en la literatura se ha documentado que el uso de tecnologías digitales amplía la manera de explorar y resolver problemas y desarrolla en los estudiantes estrategias, como la cuantificación de cantidades, la visualización de cambios simultáneos y el uso de deslizadores (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013). Carlson et al. (2002) señalan que las tecnologías digitales, como sistemas de geometría dinámica, permiten estudiar eventos dinámicos en tiempo real, que posibilitan a los estudiantes experimentar con cantidades que cambian dinámicamente, de modo que “aprendan a aplicar el razonamiento covariacional para analizar e interpretar funciones asociadas con situaciones dinámicas” (Carlson et al., 2002, p. 374). Zengin (2018) señala que el dinamismo que se logra con un sistema de geometría dinámica como GeoGebra a parte de dar movimiento a las construcciones realizadas, genera un entorno de aprendizaje interactivo y visual que permite explorar cómo se relacionan las variables con la solución geométrica en entornos dinámicos, el estudio de conceptos también es documentado por García-Rodríguez y Poveda (en prensa). En el mismo sentido, Santos-Trigo et al. (2016) señalan que, cuando se resuelve un problema mediado por tecnologías digitales, estas brindan maneras de desarrollar y entender un concepto matemático, o la construcción y deducción de propiedas Por tal motivo, surge la necesidad de diseñar ambientes de aprendizaje que incorporen tecnologías digitales que permitan a los estudiantes generar una diversidad de significados e interpretaciones de los objetos matemáticos estudiados en situaciones de modelación (Villa-Ochoa et al., 2018).

METODOLOGIA

La metodología empleada en este trabajo se ubica en una perspectiva cualitativa. Denzin y Lincoln (2011) señalan que, en una investigación cualitativa, el investigador trata de descifrar o dar sentido a los significados que las personas desarrollan sobre un fenómeno, el interés de los investigadores está en el proceso por encima de los resultados o productos. Transforma el entorno en un conjunto de representaciones que incluyen entrevistas, grabaciones, conversaciones, fotografías entre otros elementos. Se considera como entorno un lugar físico o virtual donde los estudiantes cuentan con herramientas tecnológicas para resolver un conjunto de tareas, que en esta investigación se relacionan con el concepto de integral definida. La investigación es de tipo exploratorio y descriptivo, dado que en ella se busca una posible relación e incidencia del razonamiento covariacional durante los procesos de resolución de tareas que involucran la integral definida. Esta posible relación se identifica a partir de los comportamientos que exterioricen los estudiantes al resolver estas tareas, lo que la hace una investigación cualitativa.

El estudio se realizó en tres sesiones de clase con una duración de 1,5 horas, todas las actividades se desarrollaron en un entorno físico en que los estudiantes utilizaron lápiz y papel, y en la tercera actividad se incorporó el uso de GeoGebra. Los dos estudiantes que participaron en las tres sesiones de clases tenían entre 18 y 19 años y pertenecían a una escuela de ingeniería de la Ciudad de México. El trabajo de los estudiantes durante las tres sesiones se recolectó mediante documentos escritos, audios y videos. En la tercera sesión, los dos estudiantes trabajaron en pareja en la actividad 3 y las preguntas de la actividad fueron el eje de la discusión entre el investigador y los estudiantes. La tabla 3 muestra las tareas de la actividad 3. En esta sesión el investigador realizó preguntas adicionales a los estudiantes, con el propósito de obtener más información sobre el proceso de resolución de las tareas presentes en la actividad, y los estudiantes también tuvieron la oportunidad de realizar preguntas y comentarios.

Tabla 3: Tareas de la Actividad 3

Abra el archivo de GeoGebra: Actividad 3.ggb, y desarrolle cada una de las tareas que se muestran a continuación.

Tarea I
Marque la casilla Actividad 3, luego la casilla Opción 1, y manipule el deslizador *k*. Responda a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué calcula S_L? Justifique con ejemplos.
2. Indique ¿qué valores cambian de manera simultánea? ¿Cómo cambian? ¿Cuánto cambian?
3. ¿Por qué a partir de k = 25, el valor de S_L no varía? Explique.
4. Si el deslizador *k* pudiera tomar valores mayores a 50, ¿qué cambios se observarían? Justifique.

Tarea II
Coloque k = 0, luego desmarque la casilla Opción 1. A continuación, marque la casilla Opción 2 y manipule el deslizador *k*. Responda a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué calcula S_R? Justifique con ejemplos.
2. Indique ¿qué valores cambian de manera simultánea? ¿Cómo cambian? ¿Cuánto cambian?
3. ¿Por qué a partir de k = 43, el valor de S_R no varía? Explique.
4. Si el deslizador *k* pudiera tomar valores mayores a 50, ¿qué cambios se observarían? Justifique.

Tarea III
Explique un procedimiento que le permita aproximarse a la medida del área de la región limitada por la gráfica de la función *f*, el eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = 4$. Justifique su procedimiento.

El contenido matemático

Los estudiantes en el bachillerato habían trabajado con funciones reales de variable real, habían estudiado el tema de continuidad mediante límites, reconocían la continuidad de una función a partir de su gráfica, o de forma analítica al utilizar la definición, sabían del concepto de dominio como el conjunto de valores para los cuales una función está definida, de la imagen de una función como los valores que resultan de evaluar en una función los valores de su dominio, y habían realizado el cálculo del área de figuras geométricas, en particular de rectángulos en sus estudios escolares de nivel básico.

Las actividades desarrolladas por los estudiantes en esta investigación están relacionadas con el concepto de integral definida desde un enfoque de sumas Riemann en la forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x, \qquad (1)$$

donde x_i representa cualquier valor de x del i-ésimo subintervalo generado por una partición regular del intervalo [a; b], $f(x)$ es una función continua definida en el intervalo [a; b] y $\Delta x = (b\text{-}a)/n$.

Características de la actividad 3

La actividad 3 constó de tres tareas. En la primera tarea se les proporcionó un applet diseñado en GeoGebra, en el que al marcar la casilla Actividad 3 aparece la gráfica de una función continua en un intervalo cerrado [a; b], su regla de correspondencia y un deslizador k. Al marcar la casilla Opción 1 aparece una variable S_L, que cambia al manipular el deslizador k y de forma simultánea se dibujan rectángulos de bases iguales inscritos en una región que llamaremos R, limitada por la gráfica de la función y el eje x en el intervalo cerrado. Las alturas de estos rectángulos se obtienen al evaluar la función en el extremo derecho de cada base. En la segunda tarea, los estudiantes al marcar la casilla Opción 2 realizaron un proceso similar al de la primera tarea, ahora se presenta una variable S_R que cambia al manipular el deslizador k y simultáneamente se dibujan rectángulos circunscritos a la región R. Las alturas de estos rectángulos se obtienen al evaluar la función en el extremo izquierdo de cada base.

Los valores proporcionados por S_L y S_R son números con enteros y una cifra decimal, y con el deslizador k solo se dibujan hasta 50 rectángulos. Las preguntas de la actividad y las configuraciones en el diseño del applet se hicieron con el objetivo de que los estudiantes construyeran significados de conceptos como área de rectángulos, imagen de funciones, covariación, sumatorias, entre otros, asociados con un proceso de aproximación al área de una región, así como para que emitieran conjeturas sobre el significado de las variables S_L y S_R, sobre la covariación entre ellas y el número de rectángulos, y que exteriorizaran comportamientos que permitieran conocer sobre su razonamiento covariacional durante el proceso de solución a las tareas de la actividad. Se esperaba que al mover el deslizador k, los estudiantes identificaran que los cambios en los valores de las cantidades involucradas ocurren de manera simultánea, es decir, que existe una covariación entre estas cantidades. En la tercera tarea los estudiantes debían exponer un procedimiento que les permitiera aproximar el área de la región R utilizando rectángulos. En esta tarea, se buscó que los estudiantes relacionaran sus conocimientos previos sobre procesos de aproximación y que construyeran nuevos significados acerca de la noción de límite como parte del proceso de aproximación al área de la región R.

En este documento se reporta el trabajo realizado por los dos estudiantes que participaron en las tres actividades. Se tomó la información del trabajo escrito, de la entrevista semiestructurada y de los videos para identificar en ellos los comportamientos asociados con las acciones mentales que informaran sobre su razonamiento covariacional. Para presentar la información de estas tres fuentes: 1) se describen las acciones realizadas por los estudiantes en GeoGebra, como marcar casillas, manipular el deslizador, cambiar la configuración del applet, entre otros; 2) se presentan extractos de la entrevista donde se muestra la interacción entre los estudiantes y el investigador, así como imágenes de la vista gráfica de GeoGebra que respaldan algunos resultados; y 3) se mencionan las acciones mentales identificadas en el trabajo de los estudiantes y los comportamientos asociados con estas.

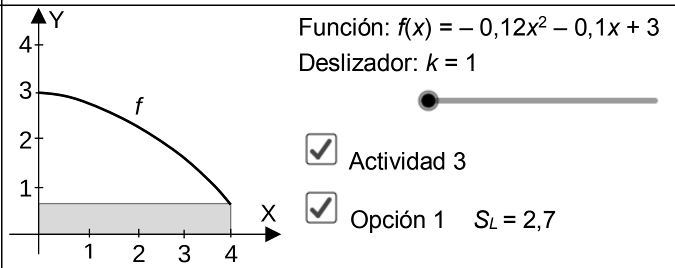
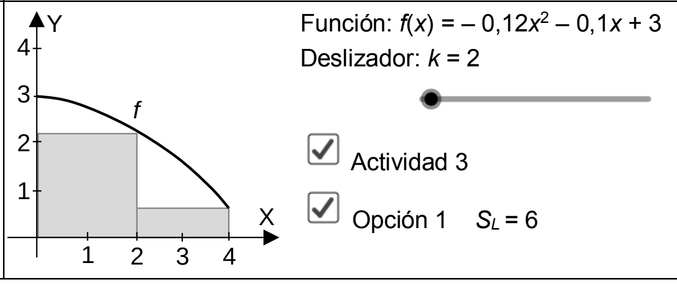
Análisis de la información recolectada

Para responder a la pregunta 1 de la tarea I, los estudiantes que nombraremos como estudiante A1 y estudiante A2, marcaron la casilla Actividad 3, luego la casilla Opción 1, y manipularon el deslizador k. Reconocieron que el deslizador k dibuja rectángulos inscritos a la región R, e infirieron que S_L determinaba la suma de las áreas de los rectángulos. La tabla 4 muestra las operaciones aritméticas que realizaron los estudiantes para determinar el área de uno y dos rectángulos con el fin de justificar la información que brindaba S_L. Para determinar el área, identificaron la medida de la base y la altura de cada rectángulo, como se muestra en el extracto de la entrevista.

4. [Los estudiantes colocan k = 1] *Investigador pregunta*: ¿cuál es su área?
5. *A1*: Hallaría el producto de la base por la altura.
6. *Investigador pregunta*: ¿cuál sería la altura?
7. *A1*: Hallo la distancia entre puntos. El punto (4; 0) y este punto no sabemos [se refiere al vértice superior derecho del rectángulo que toca a la gráfica de la función]. ¿Se puede agrandar la gráfica?

8. *Investigador pregunta*: ¿cómo pueden saber con exactitud cuál es la altura?
9. *A2*: ¿Con la función?
10. *A1*: Claro, sí se puede, se sustituye 4 en las *x.*
11. *A2*: Sale 0,68.
12. *A1*: Con eso ya tendíamos la altura y ya se puede calcular el área. Entonces es 4 por 0,68.
13. *A2*: 2,72
14. *Investigador pregunta*: ¿y con dos rectángulos?
15. *A2*: Aquí está [el estudiante señala el valor de S_L mostrado en GeoGebra].
16. *A1*: Lo hacemos también [los estudiantes determinan el área de cada rectángulo]. El resultado da 6.
17. *Investigador pregunta*: ¿qué información da S_L?
18. *A2*: El área de los rectángulos.

Tabla 4: Identificación de la variable S_L

Número de rectángulos	Vista gráfica de GeoGebra	Operaciones matemáticas
1		$-0{,}12(4)^2 - 0{,}1(4) + 3 = 0{,}68$ $4 \times 0{,}68 = 2{,}72\ u^2$
2		$-0{,}12(2)^2 - 0{,}1(2) + 3 = 2{,}32$ $A_1 = 2 \times 2{,}32 = 4{,}64\ u^2$ $-0{,}12(4)^2 - 0{,}1(4) + 3 = 0{,}68$ $A_2 = 2 \times 0{,}68 = 1{,}36\ u^2$ $A_1 + A_2 = 6\ u^2$

El comportamiento mostrado por los estudiantes en esta parte de la actividad, se asocia con la acción mental 1 (AM1): *realizar operaciones aritméticas para dar sentido a los valores mostrados por el programa, como la suma de áreas de los rectángulos*, que se hacen evidentes cuando los estudiantes calculan la altura de uno de los rectángulos al utilizar la función. También se dieron cuenta que el número de rectángulos varía y que la suma de sus áreas varía al manipular el deslizador *k*, pero al realizar las operaciones matemáticas, no manifestaron verbalmente que los cambios de ambas variables estuvieran relacionados. Para responder a la pregunta 2: ¿qué valores cambian de forma simultánea?, los estudiantes se enfocaron en los cambios de las distintas magnitudes que se ponen en juego al manipular el deslizador *k*, como el número de rectángulos, la suma de áreas de rectángulos y la medida de la base de los rectángulos. Los estudiantes primero se fijaron en el número de rectángulos y la suma de sus áreas, luego hicieron referencia a la medida de cada base, como se observa en el extracto de la entrevista.

19. *Investigador pregunta:* ¿qué valores cambian de forma simultánea? ¿cómo cambian? ¿cuánto cambian?
20. *A1*: Nos preguntan qué valores cambian. Entonces cambiarían el área total [se refiere a la suma de áreas de rectángulos] y la cantidad de rectángulos que se pueden formar adentro del área que se está marcando [se refiere al área de la región R]. A la hora que cambia el total de los rectángulos, también cambia el ancho, bueno la base de los rectángulos.

Para responder a la pregunta: ¿cuánto cambian? los estudiantes volvieron a fijarse en la cantidad de rectángulos que se dibujan al mover el deslizador *k*, luego, pusieron atención a las regiones de R no cubiertas por los rectángulos haciendo referencia a ellas como triángulos pequeños que disminuyen su área al aumentar el número de rectángulos.

21. *A2*: Luego dice, ¿cuánto cambian?
22. *A1*: El área total se va dividiendo en la cantidad de rectángulos. Se va abarcando más área porque se van haciendo más rectángulos, se pueden dividir en más partes y hay menos triángulos pequeños aquí [se refiere a las regiones no cubiertas]. Hay más triángulos, pero abarcan menos áreas, se vuelven más chicos.

El comportamiento mostrado por los estudiantes en la parte inicial de esta actividad, puede ser asociado con la acción mental 2 (AM2): *establecer de forma asincrónica relaciones entre los valores de diversas magnitudes, como el número de rectángulos y la suma de áreas de rectángulos*; *la cantidad de regiones no cubiertas (triángulos pequeños) y sus áreas*. Los estudiantes identifican que se dan cambios simultáneos entre los valores de las variables, en la explicación de cómo se relacionan estos cambios, pensaron primero en la variable número de rectángulos, luego en la suma de las áreas de los rectángulos, luego en la primera, y así sucesivamente. En la parte final de la intervención del estudiante A1 se identifica un comportamiento asociado con una acción mental superior, cuando los estudiantes se refieren a las regiones de R no cubiertas por los rectángulos y a sus áreas.

Es importante notar que la pregunta: ¿qué valores cambian de forma simultánea? hizo visible el tránsito de una AM1 a una AM2, porque los estudiantes empezaron a pensar en los cambios que ocurren entre las variables involucradas. Así como la pregunta: ¿cuánto cambian? hizo visible el tránsito de una AM2 a una acción mental superior (que describiremos posteriormente) al expresar frases como: *“Se va abarcando más área porque se van haciendo más rectángulos”, “se van haciendo más rectángulos, (…) hay menos triángulos pequeños aquí, (…) hay más triángulos, pero abarcan menos áreas”*, frases que evidencian que surgió en los estudiantes la idea de cuantificación del cambio.

En la pregunta 3 los estudiantes se enfocaron en los cambios del número de rectángulos y de la suma de sus áreas. El estudiante A2 manipuló el deslizador k desde 0 hasta 50 y se percató de que a partir de $k = 25$, S_L ya no variaba. Sin embargo, observó que el número de rectángulos seguía aumentando y cubría mayor área de la región R. Los estudiantes entonces construyeron una tabla para relacionar ambas variables, observaron el valor de k, luego el valor de S_L y lo registraron, y repitieron lo mismo aumentando el valor de k hasta 10 (tabla 5). En el video del desarrollo de la actividad se identifica que la tabla permitió que los estudiantes se enfocaran en los incrementos en el valor de S_L al aumentar el valor de k.

Tabla 5: Valores de S_L cuando k cambia de 1 hasta 10

k	S_L
1	2,7
2	6,0
3	7,0
4	7,4
5	7,7
6	7,8
7	8,0
8	8,0
9	8,1
10	8,2

32. *Investigador pregunta*: ¿por qué a partir de $k = 25$ los valores de S_L no varían?
33. *A2*: Va aumentando, pero cada vez menos [se refiere al valor de S_L].
34. *A1*: No puede ser porque son valores ya muy pequeños los que van cambiando, y como no me está copando una cifra significativa, puede ser que ya no cambie.

Los estudiantes consideraron la posibilidad de modificar el número de cifras decimales con la herramienta *redondeo* de GeoGebra.

35. *A2*: ¿Puedo poner como hasta 15 decimales?
36. *A1*: Ponle 10.
37. *A2*: Es un cambio super pequeño.
38. *A1*: Por eso se mantiene. Sí cambia, pero son muy pequeños los cambios.

La figura 1 muestra el valor de S_L con un solo decimal, y luego de que los estudiantes modificaron la opción de redondeo, se observa S_L con 10 decimales.

El comportamiento mostrado por los estudiantes en esta parte de la actividad, puede ser asociado con la acción mental 3 (AM3): *expresar verbalmente cómo coordinan los cambios entre el número de rectángulos y la suma de sus áreas en términos de aumentos o disminuciones.* Los estudiantes confirman que cuando el número de rectángulos k aumenta, la suma S_L de las áreas de los rectángulos también aumenta.

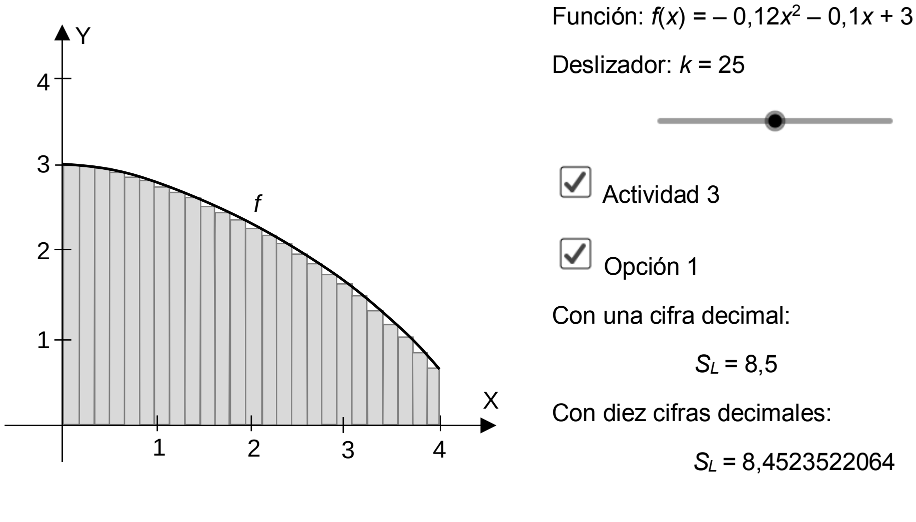


Fig. 1: Cambio en la cantidad de decimales del valor S_L

La pregunta 3, además de hacer visible una AM3, también favoreció el tránsito hacia una acción mental superior AM4, como se identifica en la respuesta del estudiante A2: *“[S_L] va aumentando, pero cada vez menos”*, que observó el decremento en la rapidez de aumento de S_L a partir de la tabla que construyeron. También, utilizar la herramienta redondeo permitió que confirmaran la idea que surgió en ellos, de que, para valores de *k* mayores de 25, el valor de S_L sigue aumentando. En el trabajo de los estudiantes al abordar la pregunta 4 se identifica que coordinaron los cambios entre el número de rectángulos y la suma de sus áreas en términos de cantidades.

39. *Investigador pregunta:* Si el deslizador *k* pudiera tomar valores mayores a 50, ¿qué cambios se observarían?
40. *A1*: Ya ni se ven los espacios. Los espacios casi desaparecen. Nos estamos aproximando al valor total del área [se refiere al área de la región R]. Es como un límite, por decirlo de alguna manera, que se va acercando no a 0, sino a 8,6, no sé, no sé cuál es el área total.

El comportamiento mostrado por los estudiantes en esta parte de la actividad, puede ser asociado con la acción mental 4 (AM4): *imaginar que los valores individuales de las cantidades van juntos*. El estudiante A1 intuye que los valores de las áreas de las regiones no cubiertas tienden a 0: *“ya ni se ven los espacios. Los espacios casi desaparecen”*; y la suma de las áreas de los rectángulos para valores mayores a 50 tiende al valor del área de la región R: *“nos estamos aproximando al valor total del área, (…) no sé cuál es el área total …”*.

Con la intención de corroborar sus predicciones y conocer el valor del área total, los estudiantes sugirieron cambiar el valor máximo del deslizador. El investigador explicó cómo cambiar la configuración del deslizador y los estudiantes colocaron el valor máximo de 1000 para *k*. La figura 2 muestra la gráfica que observaron los estudiantes y los valores de S_L que obtuvieron de la vista gráfica de GeoGebra para $k = 350$ y $k = 1000$.
Los estudiantes intuyeron el valor al que se aproximaba la suma S_L luego de refinar la partición del intervalo [0; 4].

41. *Investigador pregunta:* ¿pero a qué creen que se acerque S_L?
42. *A1*: Al área total.
43. *A2*: Creo que a 8,63.
44. *A1*: Pero mira, ahorita *k* está en 350, si lo acercamos a 1000, se va acercando más a 8,64.

En el siguiente extracto, los estudiantes abordan la tarea II de la actividad en la que se incluye la casilla Opción 2 y el deslizador *k* que dibuja rectángulos circunscritos a la región R; la suma de áreas de estos rectángulos se muestra como S_R. Las respuestas de los estudiantes son evidencia de que reconocen la similitud del comportamiento de los rectángulos inscritos con el de los rectángulos circunscritos e identifican que la suma de áreas de estos últimos es el valor de S_R y pueden predecirlo como 8,64.

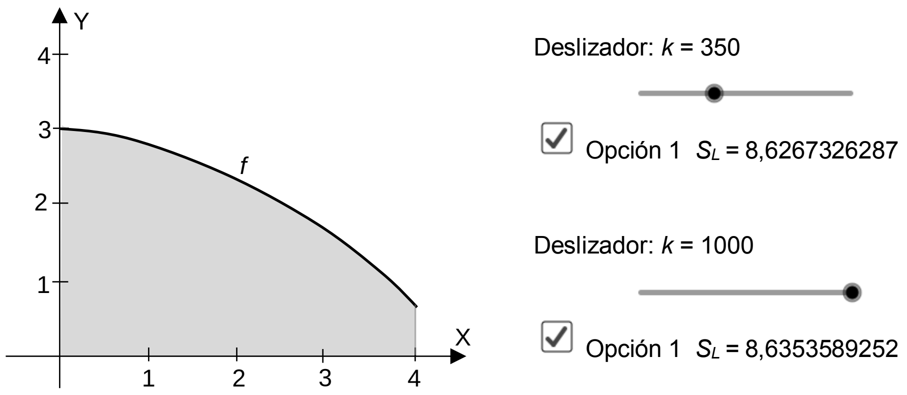


Fig. 2: Cambio en la cantidad de rectángulos y en los valores de S_L

45. *Investigador pregunta:* Ahora marca la opción 2, ¿qué pasa?
46. *A1*: Este caso es como el anterior que se pasa. En la opción 1 como que le faltaba, ahora le sobra.
47. *A2*: Ahora sí tiene desperdicio.
48. *A1*: S_R es el área total.
49. *A2*: Para 2 rectángulos es 10,6. Hallamos las alturas con la función.
50. *A1*: En este caso se está haciendo más pequeño [se refiere a la suma de áreas de los rectángulos], ok, entonces también vamos a aproximarnos a 8.64, porque va bajando.
51. *A2*: Mientras más chiquito, menos desperdicio tenía.
52. *A1*: Nos vamos aproximando al valor del área total, porque es menos lo que va sobrando, se va acercando más al valor real.
53. *A2*: Igual se necesita aumentar el número de decimales.

La figura 3 muestra las gráficas y los valores de S_R que los estudiantes obtuvieron de la vista gráfica de GeoGebra. Estos resultados fueron relacionados con los valores de S_L al expresar: *“entonces también vamos a aproximarnos a 8.64, porque va bajando”.*

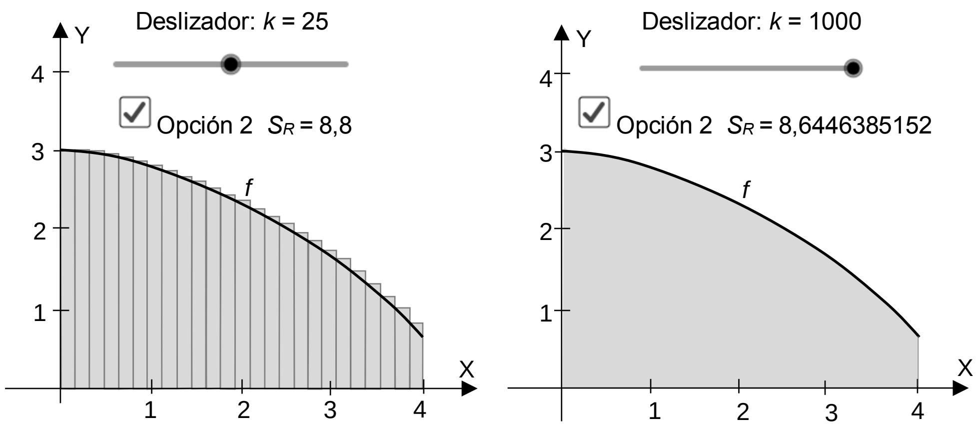


Fig. 3: Cambio en la cantidad de rectángulos y decimales

En la conversación siguiente, los estudiantes evidencian comportamientos asociados con una acción mental 5 (AM5): *extender la idea de coordinación simultánea entre el número de rectángulos y la suma de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos con la intención de aproximar el área de la región R, al aumentar el valor de k.* Debido a que al aumentar el número de rectángulos inscritos o circunscritos a la región *R* en la vista gráfica de GeoGebra, ya no se apreciaban cambios en la gráfica, los estudiantes cambiaron la configuración del valor máximo que tomaba el deslizador y compararon la suma de las áreas de los rectángulos inscritos (S_L) con la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos (S_R) para diferentes valores de *k*.

55. *A1*: Mientras S_L va aumentando, S_R va disminuyendo.
56. *Investigador pregunta:* ¿y de qué depende que se vayan aproximando más entre ellos?
58. *A1:* De la cantidad de rectángulos que se formen. Mientras más rectángulos se obtienen más área o menos desperdicio.

La extensión de esta idea de coordinación simultánea parece que llevó a los estudiantes a considerar un número máximo de 1000 rectángulos y comparar los valores S_L = 8,6353589252 y S_R = 8,6446385152. Este cambio en el valor de *k* muestra que los estudiantes conciben una relación entre el número de rectángulos, la suma de las áreas de los rectángulos inscritos y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos a la región R de la tarea: *"De la cantidad de rectángulos que se formen. Mientras más rectángulos se obtienen más área o menos desperdicio".*

La pregunta de la tarea III se diseñó para observar si el trabajo que realizaron los estudiantes con los valores discretos de la variable *k* (número de rectángulos), les ayudó a pensar en la idea de que cuando el número de rectángulos tiende al infinito, la suma de las áreas de rectángulos corresponde al valor del área de la región R, y, simultáneamente, que la medida de la base de cada rectángulo tiende a 0.

59. *A2*: Va a llegar un punto que van a tomar valores micro decimales [se refiere a la medida de base de cada rectángulo]
60. *A1*: Mientras más grande sea el número [se refiere al número de rectángulos], más se irán aproximando [se refiere a los valores de S_L *y* S_R].
73: *Investigador pregunta:* ¿llegará algún momento que coincidan los valores? [se refiere a los valores de S_L *y* S_R]
74. *A1*: No, como que siempre va a faltar una parte.
75. *A2*: Por más pequeño que sea el espacio siempre va a faltar algo.
76. *Investigador pregunta*: ¿y si es un número infinito de rectángulos?
77. *A1*: Igual, siempre va a faltar algo. Como son rectos y esto es curvo van a haber partes que no queden exactamente.
78. *Investigador pregunta*: ¿cuál es la característica de los rectángulos?
79. *A2*: Son más chiquitos.
80. *A1*: La base se está haciendo más y más pequeña.
82. *A1*: Algo así como un límite. Cuando la cantidad de rectángulos tiende al infinito, la base se va haciendo más pequeña.
83. *A2*: Tiende a 0.

Los comentarios de los estudiantes dan evidencia de rasgos asociados con una acción mental 6 (AM6), aunque no llegan a evidenciar los comportamientos que corresponden a esta acción mental: *extender la idea de coordinación simultánea entre la medida de la base de cada rectángulo y la suma de las áreas de los rectángulos* inscritos (S_L) *cuando el valor de k tiende a infinito.* En relación con la suma de áreas de rectángulos comentan: *"siempre va a faltar algo. Como son rectos y esto es curvo van a haber partes que no queden exactamente*", y cuando se refieren a la medida de base de cada rectángulo señalan: *"va a llegar un punto que van a tomar valores microdecimales", "la base se está haciendo más y más pequeña"* y *"tiende a 0".* Estos comentarios reflejan que los estudiantes, por un lado, reconocen que la base tiende a 0 cuando *k* tiende al infinito, al mismo tiempo, consideran que la suma de las áreas de los rectángulos no corresponde al área de la región R. Los estudiantes argumentan que siempre habrá regiones que no se cubren con los rectángulos, lo que lleva a pensar en su concepción del infinito.

DISCUSIÓN

Con el fin *analizar el cambio en las acciones mentales asociadas con el razonamiento covariacional de una pareja de estudiantes, cuando trabajan en tareas para aproximarse al concepto de integral definida mediante sumas de Riemann*, se examinaron las interacciones realizadas en GeoGebra, los documentos escritos y las respuestas de los estudiantes en la entrevista semiestructurada realizadas al finalizar su trabajo.

Del análisis presentado, se infiere que el diseño de la actividad en GeoGebra, las preguntas propuestas a los estudiantes y los cambios observados en la vista gráfica de GeoGebra al manipular el deslizador *k* hicieron visibles los comportamientos asociados con las acciones mentales de los estudiantes y el tránsito entre ellas. Por un lado, las preguntas orientadas a generar significados del valor S_L, e identificar qué valores cambian de forma simultánea y cuánto cambian, sin que los estudiantes modificaran la configuración de GeoGebra, hizo que evidenciaran comportamientos de una AM1 y el tránsito hacia comportamientos de una AM3. En este proceso, los estudiantes presentaron dificultades para reconocer que la imagen de la función en el extremo derecho de la base de cada rectángulo corresponde a la altura de estos, dificultad de carácter procedimental y de interpretación que también es reportada en Martínez-Miraval y García-Cuéllar (2020).

Por otro lado, las respuestas de los estudiantes, orientadas a realizar conjeturas sobre los cambios entre las variables y justificar los resultados como la modificación del número de cifras decimales para explicar la correspondencia entre la modificación del número de rectángulos y el valor de S_L, hizo visibles comportamientos que sustentan acciones mentales superiores AM3 y AM4, así como el tránsito de una hacia otra. Esto fue previsto en el diseño de la actividad, las preguntas propuestas a los estudiantes hicieron visibles estos comportamientos, que en ocasiones no son exteriorizadas por ellos. Cuando los estudiantes mantienen en su mente que, al aumentar el número de rectángulos, los valores de las regiones no cubiertas tienden a 0 y la suma de las áreas de los rectángulos tiende al área de la región R, están coordinando simultáneamente los cambios de tres variables distintas. Este comportamiento es descrito por Kouropatov y Dreyfus (2014), como una covariación compleja entre los valores de tres o más variables, pero en procesos de acumulación.

Cuando los estudiantes marcan la opción 2 para dar respuesta a la segunda parte de la actividad, reconocen que trabajar con los rectángulos circunscritos a la región R es análogo a lo que realizaron en la primera parte de la actividad. Por lo que, ya no mostraron dificultades y respondieron sin problemas las preguntas propuestas. Con esto es posible afirmar que, como en la parte anterior, pusieron en juego hasta una AM4. Lo anterior coincide con lo señalado por Carlson et al. (2002), cuando afirman que, si un estudiante alcanza un nivel de razonamiento covariacional, sustenta a las acciones mentales asociadas con ese nivel y a las acciones mentales inferiores. En la parte III de la actividad, los estudiantes explicaron un procedimiento para aproximar el valor del área de una región, en donde se hizo visible una AM5 y el tránsito hacia una AM6. Según el constructo teórico de Thompson y Carlson (2017), estas acciones mentales corresponden a un nivel de *covariación continua a trozos*. En la tabla 6 se incluyen los comportamientos asociados con las acciones mentales observadas en el trabajo de la pareja de estudiantes.

Tabla 6: Acciones mentales relacionadas a cada nivel y comportamientos asociados identificados en la Actividad 3. (Elaborada a partir de Thompson y Carlson (2017) y Carlson et al. (2002))

Nivel	Comportamientos
Covariación continua suave	AM6: Extender la idea de coordinación simultánea entre la medida de la base de cada rectángulo y la suma de las áreas de los rectángulos inscritos (S_L) cuando el valor de k tiende a infinito.
Covariación continua a trozos	AM5: Extender la idea de coordinación simultánea entre el número de rectángulos y la suma de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos con la intención de aproximar el área de la región R, al aumentar el valor de k.
Coordinación de valores	AM4: Imaginar que los valores individuales de las cantidades van juntos.
Coordinación gruesa de valores	AM3: Expresar verbalmente cómo coordinan los cambios entre el número de rectángulos y la suma de sus áreas en términos de aumentos o disminuciones.
Pre-coordinación de valores	AM2: Establecer de forma asincrónica relaciones entre los valores de diversas magnitudes, como el número de rectángulos y la suma de áreas de rectángulos; la cantidad de regiones no cubiertas (triángulos pequeños) y sus áreas.
Sin coordinación	AM1: Realizar operaciones aritméticas para dar sentido a los valores mostrados por el programa, como la suma de áreas de los rectángulos

En esta parte de la actividad, las respuestas de los estudiantes permiten identificar en ellos una concepción del infinito potencial, debido a que, por más que pensaron en aumentar el número de rectángulos hacia el infinito, ellos se mostraron convencidos de que la suma de las áreas de los rectángulos, representada por S_L, nunca llegaría al valor del área de la región R. La justificación que dieron fue que siempre quedarían partes de la región R sin cubrir por los rectángulos, lo que coincide con lo reportado por Roa-Fuentes y Oktaç (2014) quienes indican que el infinito potencial es concebido como una transformación que se repite sin fin y por más que se generen o agreguen tantos elementos como uno desee no se piensa en algo terminado. Al aumentar el número de rectángulos surgió en ellos la idea de infinito, al respecto Mena-Lorca et al. (2015) señalan que, el uso de modelos con tecnologías puede ayudar a los estudiantes a aproximarse al obstáculo de la tarea, en nuestro caso la idea de infinito, sin embargo, afirman que transitar del infinito potencial al infinito actual es un proceso complejo.

Aunque no es el foco de atención del presente trabajo, es importante mencionar que, con el uso de GeoGebra, los estudiantes mostraron comportamientos asociados con la evolución de su razonamiento covariacional. Al interactuar con el deslizador observaron la construcción de rectángulos inscritos y circunscritos a una región R, con los que trabajaron numérica y gráficamente la noción de aproximación del área mediante sumas de Riemann, al mismo tiempo que coordinaron los cambios simultáneos entre las diferentes variables implícitas en la actividad. Coincidimos con Zengin (2018) al afirmar que el entorno generado por GeoGebra permite a los estudiantes explorar cómo se relacionan las variables dinámicamente tanto numérica como de forma geométrica.

CONCLUSIONES

El razonamiento covariacional de los estudiantes se pone de manifiesto en un acercamiento al concepto de integral definida mediante un proceso de aproximación con sumas de Riemann. Tener en mente los rectángulos inscritos, circunscritos y la coordinación simultánea de las variables: medida de la base, suma de las áreas, espacios de la región no cubiertos y partes excedentes a la región, cuando el número de rectángulos varía, está asociado con la habilidad de razonar covariacionalmente.

El diseño del applet asociado con las preguntas cumple un rol importante, tanto para identificar los comportamientos asociados con las acciones mentales que ponen en juego los estudiantes cuando trabajan con GeoGebra, como para generar ideas intuitivas y dar sentido a los procesos matemáticos involucrados en la aproximación a la medida de un área. Preguntas orientadas a describir los cambios observados, *¿cómo cambia?* o *¿cuánto cambia?*, evidencian comportamientos asociados con los niveles inferiores de razonamiento covariacional. Preguntas orientadas a proponer conjeturas y justificarlas, o a inferir comportamientos de situaciones hipotéticas a partir de la intuición de los estudiantes, *si el deslizador k pudiera tomar valores mayores a 50, ¿qué cambios se observarían?*, evidencian comportamientos asociados con los niveles superiores de razonamiento covariacional.

En el trabajo de los estudiantes, fue posible identificar comportamientos asociados con acciones mentales que no corresponden con un nivel determinado de razonamiento covariacional, y al parecer se ubican en el tránsito de un nivel hacia otro. Esto nos hace pensar que las descripciones del constructo teórico relacionadas con cada nivel de razonamiento covariacional, si bien son generales y permiten medir la habilidad de un estudiante de razonar covariacionalmente, podría refinarse con la intención de describir mejor cuándo un estudiante está en proceso de pasar de un nivel a otro, lo cual se relaciona con la evolución en su razonamiento.

Para que el estudiante identifique la utilidad de este proceso de aproximación y conciba la integral definida como el valor del límite de una suma de Riemann, cuando el número de rectángulos tiende a infinito, parece necesario complementar el trabajo realizado mediante tareas orientadas hacia un proceso de acumulación de área. Al aproximarse de esta forma, el estudiante no utiliza la variable discreta número de rectángulos, por lo que la idea de las regiones que no se cubren con los rectángulos por más pequeñas que sean no estaría presente, y mediante la acumulación de áreas en todo el dominio de función, la región quedaría completamente cubierta.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Dirección de Investigación de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas por el apoyo brindado para la realización de este trabajo de investigación a través del incentivo UPC-A-033-2021-2, al CICATA-Legaria del Instituto Politécnico Nacional por el apoyo brindado, y a los estudiantes que participaron en el desarrollo de la presente investigación.

REFERENCIAS

Antonini, S., y Lisarelli, G., Designing Tasks for Introducing Functions and Graphs within Dynamic Interactive Environments, https://doi.org/10.3390/math9050572, Mathematics, 9, 572 (2021)

Aranda, M. C., y Callejo, M. L., Construcción de la Función Integral y Razonamiento Covariacional: dos Estudios de Casos, http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a13, Bolema, 31(58), 777-798 (2017)

Caglayan, G., Teaching ideas and activities for classroom: integrating technology into the pedagogy of integral calculus and the approximation of definite integrals, http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2016.1176261, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47(8), 1-19 (2016)

Carlson, M. P., Jacobs, S., y otros tres autores, Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study, https://doi.org/10.2307/4149958, Journal for Research in Mathematics Education, 33(5), 352-378 (2002)

Castillo-Garsow, C. C., Lynn, H., y Moore, K. C., Chunky and Smooth Images of Change, For the Learning of Mathematics, ISNN: 02280671, 33(3), 31-37 (2013)

Confrey, J., y Smith, E., Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit, https://doi.org/10.1007/BF01273661, Educational Studies in Mathematics, 26, 135-164 (1994)

Denzin, N. K., y Lincoln, Y. S., Sage Handbook of Qualitative Research, ISBN: 1412974178, California, USA (2011)

García-Rodríguez, M. L., y Poveda, W., El MOOC, un entorno virtual para la resolución de problemas matemáticos, Educación Matemática (en prensa) (2022)

Hohensee, C., Gartland, S., Willoughby, L., y Melville, M., Backward transfer influences from quadratic functions instruction on students' prior ways of covariational reasoning about linear functions, doi:10.1016/j.jmathb.2020.100834, The Journal of Mathematical Behavior, 61 (2021)

Jones, S., The prevalence of area-under-a-curve and anti-derivative conceptions over Riemann sum-based conceptions in students' explanations of definite integrals, https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.1001454, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46(5), 721-736 (2015)

Kouropatov, A., y Dreyfus, T., Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation, https://doi.org/10.1007/s11858-014-0571-5, ZDM Mathematics Education, 46(4), 533-548 (2014)

Martínez-Miraval, M. A., y García-Cuéllar, D. J., Estudio de las Aprehensiones en el Registro Gráfico y Génesis Instrumental de la Integral Definida, http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000500177, Formación Universitaria 13(5), 177-190 (2020)

Mateus-Nieves, E., y Moreno, E., Desarrollo del Pensamiento Variacional para la Enseñanza de Nociones Preliminares de Cálculo. Una Experiencia de Aula en la Educación Básica, https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5716, Acta Scientiae, 3(2), 113-135 (2021)

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., y otros tres autores, El obstáculo epistemológico del infinito actual: Persistencia, resistencia y categorías de análisis, https://doi.org/10.12802/relime.13.1832, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18(3), 329-358 (2015)

Paoletti, T., Gantt, A., y Vishnubhotla, M., Constructing a system of covariational relationships: two contrasting cases, https://doi.org/10.1007/s10649-021-10134-0, Educational Studies in Mathematics (2022)

Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A., El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas, Educación Matemática, ISSN 1665-5826, 26(1), 73-101 (2014)

Ramos, J. E., Razonamiento covariacional de estudiantes de tercero de secundaria con respecto a funciones de variable continua y discreta [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú], Repositorio Institucional - Pontificia Universidad Católica del Perú (2021)

Saldanha, L. A., y Thompson, P. W., Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation, in Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America by S. B. Berenson y W. N. Coulombe, vol 1, 298-304, North Carolina, USA (1998)

Santos-Trigo, M., y Camacho-Machín, M., Framing the use of computational technology in problem solving approaches, The Mathematics Enthusiast, ISSN: 15513440, 10(1), 279-302 (2013)

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., y Camacho-Machín, M., Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework, https://doi.org/10.1007/s11858-016-0757-0, ZDM Mathematics Education, 48, 827-842 (2016)

Sealey, V., A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals, https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.12.002, Journal of Mathematical Behavior, 33, 230-245 (2014)

Serhan, D., Students' understanding of the definite integral concept, International Journal of Research in Education and Science, ISNN: 21489955, 1(1), 84-88 (2015)

Tatar, E., y Zengin, Y., Conceptual Understanding of Definite Integral with GeoGebra, https://doi.org/10.1080/07380569.2016.1177480, Computers in the Schools, 33(2), 120-132 (2016)

Thompson, P. W., y Carlson, M., Variation, Covariation, and Functions: Foundational Ways of Thinking Mathematically, in Compendium for Research in Mathematics Education by J. Cai, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, ISBN 9780873537117, 421-456, Virginia, USA (2017)

Thompson, P. W., y Silverman, J., The Concept of Accumulation in Calculus, in Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education, Mathematical Association of America by M. P. Carlson y C. Rasmussen, https://doi.org/10.5948/UPO9780883859759.005, vol. 73, 43-52, Washington, DC, USA (2008)

Villa-Ochoa, J. A., González-Gómez, D., y Carmona-Mesa, J. A., Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea de Matemáticas, https://doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025, Formación Universitaria, 11(2), 25-34 (2018)

Wagner, J. F., Students' Obstacles to Using Riemann Sum Interpretations of the Definite Integral, https://doi.org/10.1007/s40753-017-0060-7, International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4(3), 327-356 (2017)

Zengin, Y., Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course, DOI: 10.1080/0020739X.2018.1431850, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49(7), 1083-1098 (2018)