FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
Y EMPRESARIALES

ACTUALIDAD Y APLICACIONES DE LA TOPOLOGÍA Y EL ANÁLISIS FUNCIONAL

Andrés Fernández Díaz

Working Papers / Documentos de Trabajo. ISSN: 2255-5471
DT CCEE-1701 Enero 2017
http://eprints.ucm.es/40910/

PRESENT AND APPLICATIONS OF TOPOLOGY AND FUNCTIONAL ANALYSIS

Abstract:

Our aim in this article is to consider Topology and Functional Analysis as closely related branches of mathematics, highlighting the role of the use of algebraic topology in the treatment of certain issues in different fields of Science, as well as the great help of using functional analysis in solving important problems that arise in these fields. With regard to Topology, in addition to a synthesis on the essential of its evolution and content, is carried out as derived from it, a properly formalized exposition of the Catastrophe Theory and the Mathematics of Chaos. Insofar as the Functional Analysis, inseparable from the Topology, we studied the topological vector spaces, the normed spaces, and among them the Banach one, the dual topological space, the operational calculation, the notion of spectrum of the operator, and the Hilbert space. Finally, the application of Functional Analysis to two specific branches of Science is addressed: Quantum Mechanics and Economics.

Keywords: Algebraic Topology, Functional Analysis, Catastrophe Theory, Mathematics of Chaos, vector spaces, Banach space, Hilbert space, Quantum Mechanics, Economics.

ACTUALIDAD Y APLICACIONES DE LA TOPOLOGÍA Y EL ANÁLISIS FUNCIONAL

Resumen:

El principal objetivo que se persigue en este artículo es el tratamiento conjunto de la Topología y el Análisis Funcional como dos ramas inseparables de las matemáticas, destacando el papel de la Topología algebraica en el estudio de determinadas cuestiones en los diferentes campos de la Ciencia, así como la gran ayuda que supone el Análisis Funcional en la solución de importantes problemas que se plantean en dichos campos. Por lo que respecta a la Topología, además de una síntesis sobre lo esencial de su evolución y contenido, se hace una incursión en la Teoría de Catástrofe y en las Matemáticas del Caos como ramas emanadas de la misma. Por lo que respecta al Análisis Funcional estudiamos los espacios vectoriales topológicos, los espacios normados, los espacios de Banach, el espacio topológico dual, el cálculo operacional, la noción de espectro del operador, y el espacio de Hilbert. Finalmente se pone de relieve la aplicación del Análisis Funcional a dos ramas bien distintas de la Ciencia: la Mecánica Cuántica y la Economía.

Palabras clave: Topología, Análisis Funcional, Teoría de Catástrofes, Matemáticas del Caos, espacios vectoriales, espacios de Banach, espacio de Hilbert, Mecánica Cuántica, Economía.
Materia: Análisis funcional

Andrés Fernández Díaz
Catedrático de Economía Aplicada,
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad Complutense de Madrid
Ancien Professeur. Université Paris-Sorbonne
Professor of Economics. Emeritus Member of the
Spanish Court of Accounts

Enero 2017 (fecha de recepción)

Introducción

La Topología y el Análisis Funcional, íntimamente relacionados, constituyen dos componentes o ramas de la matemática que, aunque tienen su historia, sus autores y sus estudios y publicaciones, no han sido objeto en los últimos tiempos de la atención y del aprovechamiento suficiente por parte de los matemáticos de nuestros días. En cuanto al primero de los componentes, algunos problemas topológicos se encuentran en las obras de Leonard Euler, August Ferdinand Möbius, y Georg Cantor, aunque el término parece haberse utilizado ya en el título de la obra *Vorstudien zur Topologie* publicada por Johann Benedict Listing en el año 1847. Pero el momento cumbre en el desarrollo de esta rama de la matemática tiene un protagonista indiscutible, el matemático francés Henri Poincaré, y una fecha concreta, 1895, año en el que publicara su *Analysis Situs* en el que se daba por primera vez un desarrollo sistemático de la materia, permitiendo, asimismo, una sencilla definición de ***topología como aquella parte de la matemática que estudia las propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones constantes.***[1]

En una primera aproximación la Topología puede subdividirse a grandes rasgos en dos ramas distintas: la topología combinatoria o algebraica, y la topología conjuntista. La primera de ellas, que era la que desarrolló Poincaré, consiste en el estudio de los aspectos cualitativos intrínsecos de las configuraciones espaciales que permanecen invariantes bajo transformaciones biunívocas y bicontinuas. En un enfoque más completo y actualizado, y como veremos más adelante, podemos distinguir entre topología general, topología algebraica y topología diferencial.

La otra rama de la que nos vamos a ocupar trata del estudio de espacios de funciones, y sus orígenes podemos encontrarlos en el análisis de transformaciones, de las ecuaciones diferenciales y de las ecuaciones integrales, sin olvidar su relación con el cálculo de variaciones. En esencia, y en términos muy generales, podemos decir que en el Análisis Funcional se trabaja con relaciones entre funciones, es decir, más allá de la simple relación entre variables.

De una forma más completa podemos acudir a la definición de Jean Dieudonné en su obra "History of Functional Analysis", según la cual el…***Análisis Funcional es el estudio de los espacios vectoriales topológicos y de las aplicaciones definidas entre subconjuntos de los mismos, sujetas a distintas condiciones algebraicas y topológicas.***[2] Avanzando algo más, la definición inspirada en Dieudonné diríamos que *el Análisis Funcional es la rama de las Matemáticas que estudia los espacios vectoriales topológicos y las aplicaciones* $U: \Omega \rightarrow F$ *de una parte de* Ω *de un espacio vectorial topológico E en un espacio vectorial topológico F, donde sus aplicaciones se supone que verifican ciertas condiciones algebraicas y topológicas.*[3]

1 Boyer, Carl B. (1987): pp. 744-746.
2 Ver: Bombal, Fernando (1994): p. 1.
3 Cascales, Bernardo; Mira, José Manuel; Orihuela, José; Raja, Matías (2012): p. 2.

En este artículo pretendemos conjugar la topología algebraica con el análisis funcional, sendas ramas de la matemáticas, como hemos dicho y que de forma muy simple acabamos de definir, buscando recuperar la importancia y la inseparabilidad de las mismas, así como poner de manifiesto el apoyo logístico que suponen en cuestiones importantes de las diferentes parcelas de la Ciencia. Recordemos, a modo de ejemplo, que Poincaré, al igual que sucedía con Riemann, era especialmente hábil en el manejo de problemas de tipo topológico, tales como el de averiguar las propiedades de una función sin disponer de su representación formal en el sentido clásico, y ello porque ambos tenían una aguda intuición con un razonamiento sólido, algo consustancial a la geometría.

Sin más consideraciones por el momento, vamos a pasar a continuación a exponer lo esencial de la topología, destacando desde nuestro punto de vista una concepción especial de la misma, y abordando como áreas conexas o derivadas la Teoría de Catástrofes y las Matemáticas del Caos que, desde esta perspectiva, ofrecen nuevas y valiosas posibilidades de investigación.

Sin solución de continuidad, y en cuanto al Análisis Funcional se refiere, nos ocuparemos. entre otras cuestiones, de los espacios vectoriales topológicos, de los espacios normados, de los espacios de Banach, del cálculo operacional, de la noción de espectro del operador, y del espacio de Hilbert. A ello seguirá, en una última parte de nuestro trabajo, el enunciado de algunas aplicaciones en varios campos de la Ciencia, y de manera especial, en la Mecánica Cuántica y en la Economía. Todo ello, obviamente, con la intención de poner de relieve la actualidad que están cobrando estas dos áreas fundamentales de las matemáticas que, en nuestra opinión, ni fueron aceptadas con demasiado entusiasmo en sus primeros momentos, manteniéndose casi exclusivamente por el empuje de Henri Poincaré, ni, hasta época muy reciente, han sido objeto de la debida atención y estudio.

Topología: Algunas consideraciones generales

La Topología, como hemos anticipado, constituye una parte de las matemáticas que estudia las propiedades de los objetos geométricos que permanecen invariantes cuando se ven sometidos a transformaciones continuas que pueden consistir en doblar, estirar, encoger, alargar o retorcer, dichos objetos, pero sin cortar o separar lo que estaba unido, ni pegar lo que estaba separado. Sobre esta base podemos afirmar, por ejemplo, que un triángulo es topológicamente lo mismo que una circunferencia, pero una circunferencia no es lo mismo que un segmento. En este proceso se exige como condición esencial que los puntos del cuerpo geométrico que estaban juntos los unos a los otros antes de la transformación permanezcan próximos en el cuerpo u objeto después de que la misma se haya llevado a cabo.

En la introducción hemos señalado que la Topología puede subdividirse en topología combinatoria y conjuntista, por una parte, o en topología general, algebraica y diferencial, por otra. Pero con frecuencia, como tercera opción, suele distinguirse entre la teoría de nudos y la teoría de variedades, siendo esta última considerada por la mayor parte de los topólogos como el punto central de su disciplina. Con el fin de obviar una exposición compleja y excesivamente formalizada, vamos a basar y resumir nuestras consideraciones sobre la naturaleza y el contenido de la Topología abordando algunas cuestiones y problemas planteados, estudiados y resueltos por dos grandes figuras que se ocuparon de la materia, y que ya fueron mencionadas en la introducción. Nos referimos a Leonhard Euler, por una parte, y a Henri Poincaré, por otra, iniciador el primero de ellos, y gran protagonista y referente el segundo.

El matemático y físico suizo Leonhard Euler halló la solución en 1736 del conocido como problema de los puentes de Königsberb, solución considerada el primer teorema de la teoría de grafos. Años más tardes, en 1750, publicó el que se conoce como el teorema de poliedros de Euler, que consiste en buscar una relación entre número de caras, aristas y vértices en los poliedros, y que de forma muy sencilla puede expresarse así:

Si V, A y C denotan respectivamente el número de vértices, aristas y caras de cualquiera de los poliedros regulares, siempre es cierto que

$$V - A + C = 2 \qquad (1)$$

o lo que es lo mismo, el número de caras (C) más el número de vértices (V) es igual al número de aristas (A) más 2.

Esta fórmula es válida también para todo poliedro irregular siempre que sea simple, lo que quiere decir que no tiene huecos, de manera que su superficie puede ser deformada de modo continuo en la de una esfera. La fórmula de Euler se extiende entonces en la forma

$$V - A + C = 2 - 2p \qquad (2)$$

para poliedros con p huecos, teniendo en cuenta que un poliedro simple es aquel para el cual $p = 0$.

Si imaginamos una figura hueca con la superficie flexible que se hincha hasta que sea suave, ya no tendremos caras planas ni aristas rectas, sino una especie de mapa sobre la superficie con caras curvadas, sus curvas fronteras y puntos en los que éstas se encuentran. El número $V - A + C$ tiene el mismo valor para todos los mapas de nuestra superficie y se llama *característica de Euler* de esa superficie. A su vez, el número p se llama *género* de la superficie. Estos dos números y la relación entre ellos que proporciona la ecuación (2) permanecen evidentemente invariantes cuando la superficie se deforma continuamente. Las propiedades geométricas intrínsecas de este tipo, que tienen poca relación con la geometría dedicada a longitudes, áreas y volúmenes, se llaman topológicas, y su estudio ha ofrecido y continúa ofreciendo perspectivas muy valiosas a diferentes campos de las matemáticas y de importantes ramas de la ciencia.[4]

En el mundo ambicioso, devorador de conocimiento y polifacético del gran matemático y físico francés Henri Poincaré hay, sin duda alguna, un lugar para la topología. En efecto, el científico inquieto e incansable que había estudiado el problema de los tres cuerpos, la mecánica celeste, la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, la teoría de las ecuaciones diofánticas, la teoría de números, y la teoría de la relatividad especial, no podía ignorar la importancia creciente de la topología algebraica, de la que se ocuparía en su obra Analysis Situs, ya mencionada.[5]

Aunque la aportación de Poincaré a la topología procede de fuentes y vías diferentes, podemos proporcionar una idea aproximada de lo que supuso su obra considerando su famosa y polémica conjetura, por una parte, y el no menos discutido problema de los tres cuerpos, por otra. En cuanto a la conjetura recordemos, como punto de partida, la noción de superficie entendida como una figura geométrica que puede obtenerse deformando, curvando y reuniendo convenientemente uno o varios trozos del plano. La manera en que se realizan estas deformaciones conduce a distintos tipos de superficies, cada una de ellas con propiedades diferentes, pudiendo citar a modo de ejemplos los cilindros, las esferas, los elipsoides, y los paraboloides o toros.

Decimos que las superficies son acotadas cuando las podemos inscribir en una región limitada del espacio, y se denominan cerradas si dividen el espacio en dos áreas separadas, una interna a la superficie y acotada, y otra exterior y no acotada. En concreto, la esfera y el toro son superficies cerradas mientras que no lo son, en el sentido anterior, el cilindro, el paraboloide o el plano. Una superficie cerrada y acotada se dice que es compacta. Otra característica que podemos observar a simple vista en una superficie es si ésta posee agujeros, como el toro o el cilindro, o si por el contrario carece de ellos, como sucede en el caso de la esfera, el paraboloide o el plano. El ser cerrada, acotada o el poseer o no agujeros son propiedades topológicas, y se dice que dos superficies son homeomorfas cuando tienen siempre las mismas propiedades topológicas. Así, las propiedades de la esfera son las mismas que las del elipsoide, o las del cilindro son iguales a las de la corona circular. Por el contrario, una esfera y un toro no son topológicamente equivalentes, debido a que tienen propiedades topológicas diferentes, pues el toro tiene agujeros mientras que la esfera no los tiene.(Ver sobre la materia el sencillo y claro resumen de López Moreno, Antonio J, 2006).

Teniendo todo esto en cuenta, Poincaré plantea como conjetura, ya que realmente no llegó a resolver el caso n= 3, que ***la única variedad compacta y simplemente conexa de dimensión 3 es la esfera tridimensional S^3***. En realidad, como toda conjetura, el célebre matemático francés se preguntaba si la esfera tridimensional S^3 es realmente la única

4 Simmons, George F. (1995): pp. 150-152.

5 Es preciso poner de relieve que Poincaré publicó su Teoría de la Relatividad Especial en el Circolo Matematico di Palermo, en 1905, al mismo tiempo que Einstein lo hacía en la revista Annalen der Physik.

variedad cerrada de dimensión tres tal que todo lazo se contrae. Para dimensión $n \geq 5$ el teorema fue demostrado en 1960 por el matemático americano Stephen Smale, y en 1982 Michael Friedman demostraba asimismo la conjetura en dimensión 4. Pero la solución definitiva de uno de los problemas pendientes de la topología vendría de la mano del matemático ruso Grigori Perelman en el año 2006.[6]

El "problema de los tres cuerpos" constituye uno de los capítulos más originales de Henri Poincaré así como una prueba palpable de la amplitud y variedad de sus conocimientos. Se trata de abordar el problema planteado y no resuelto por Isaac Newton en su obra *Philosophiae Naturalis Principa Mathematica* publicada en 1687, relativo a cuestiones sobre la estabilidad del sistema solar, y a la posibilidad de predecir la situación relativa de tres cuerpos celestes a lo largo del tiempo. La forma de llevar acabo esa tarea no deja de ser un tanto atípica y original, pues su tarea en torno a la materia tiene como punto de partida la convocatoria en 1884 por parte del Rey de Suecia, Óscar II, de un Concurso Internacional de Matemáticas para celebrar el haber cumplido sesenta años de edad.

El concurso consistía en proponer a la comunidad de matemáticos cuatro problemas que estaban aún sin resolver. El primero de ellos fue presentado por Karl Weierstrass, miembro del jurado, y trataba precisamente del problema de los tres cuerpos. El maestro francés entregó en 1889 su investigación sobre el problema de los tres cuerpos, siendo la conclusión principal en dicha memoria que la evolución del sistema era en extremo caótica, pues una pequeñísima variación en el estado inicial de cualquiera de los cuerpos, como por ejemplo, las debidas a los errores de medición por pequeños que fuesen, podría conducir a resultados completamente diferentes, siendo la desviación creciente con el tiempo.

Es bien sabido que el autor cometió un error importante en el que él mismo reparó de inmediato, pero que dio lugar a un cierto escándalo, obligando a retirar toda la edición, siendo sustituida por una nueva memoria, ya corregida, que aparecería en 1890 en *Acta Mathematica* con el título *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.* A pesar de tantos avatares y del hecho de que realmente no se encontró la solución al problema que Newton había dejado pendiente, a propuesta de Weierstrass se le concedió el premio a Poincaré *por su brillante contribución a la Mecánica Celeste* y porque, aunque entonces no eran conscientes de ello, había abierto las puerta a lo que más tarde sería la Teoría de la Complejidad y las Matemáticas del Caos, temas sobre los que hablaremos a continuación y más adelante, y que, como podrá comprobarse, se relacionan muy estrechamente con los principios y fundamentos de la topología.[7]

En la línea de lo expuesto hasta el momento en este apartado vamos a dar una breve pincelada sobre la complejidad y el caos como nuevas ramas del conocimiento que, como acabamos de decir, tienen que ver con la insaciable y multidisciplinaria tarea

6 Delvin, Keith (1992): pp. 224-226.
7 Peterson, Ivars (1993): pp. 159-169. Ver también: Barrow-Green, June (1999): pp. 175-178.

acometida y desarrollada por el reiteradamente mencionado Henri Poincaré elegido, junto a Leonhard Euler, como referencias en nuestro trabajo.

Sabemos que la irregularidad y la no-linealidad constituyen características esenciales de la complejidad entendida como el comportamiento de un Sistema en el que se manifiestan interacciones mutuas entre niveles diferentes, lo que supone admitir la existencia simultánea de una heterogeneidad estructural y de una reciprocidad funcional. La complejidad se presenta como una relación de conocimiento donde el acto de conocer se une al objeto, donde lo ontológico se articula a lo epistémico, o lo que es lo mismo, lo real a la teoría. Ciertamente así es la complejidad en la Física, desde la mecánica cuántica hasta las estructuras disipativas, y lo mismo podríamos decir de lo que ha supuesto y supone en la historia reciente de la Biología y en la Economía, entre otros campos de la Ciencia. Estas características obligan a la utilización de conceptos y de nuevos instrumentos de análisis especialmente concebidos para hacer frente a los desafíos que se derivan del comportamiento de los sistemas complejos. Entre dichos instrumentos destacamos la Teoría de Catástrofes y las Matemáticas del Caos, de las que haremos las correspondientes síntesis. En los orígenes de ambas nos encontramos una vez más con la figura del matemático de Nancy en su calidad de defensor y paladín de la geometría cualitativa, es decir, de la topología, en aquellos tiempos no demasiado bien vista.

Antes de continuar con el desarrollo que nos hemos planteado en torno al tema objeto de nuestro estudio deseamos intercalar una interpretación a ***nôtre soins*** del concepto o significado de Topología, pues entendemos que puede contribuir a un mejor entendimiento de esta rama tan particular de la geometría, en especial, y de las matemáticas, en general

Una interpretación especial de la topología

En el campo de la concepción del espacio en la física nos encontramos con el hecho de que la base del concepto clásico de movimiento residía en la distinción entre el recipiente métrico subyacente y su contenido físico variable, esto es, entre “vacío” y “lleno”. Si según la expresión de Emile Meyerson la materia se halla “reabsorbida” en el espacio, éste no puede considerarse como recipiente pasivo, totalmente indiferente a los cambios de su contenido físico, y por tanto desaparece la distinción clásica.

Como son confusos los límites entre la materia y el espacio circundante, el movimiento significa no sólo el desplazamiento de una partícula visible y aislada en el espacio, sino también un desplazamiento simultáneo de todo el complejo de los sutiles eslabones gravitatorios y electromagnéticos mediante los cuales una partícula tiene conexión con el resto del Universo.[8]

Ese recipiente geométrico indiferente no existe en la teoría general de la relatividad. De ese modo la materia se convierte en deformación local del medio espacio-temporal. Más

[8] Čapek, Milič (1965): pp. 268-272.

exactamente, lo que se consideraba como cuerpo material no es nada más que un centro de esta deformación, cuyo movimiento va acompañado del movimiento concomitante de toda la deformación.

Este concepto físico de deformación es el que sirve de base al concepto matemático de Topología, y no es la primera vez que la Física se muestra agradecida con la Matemática a la que tanto debe. Ciertamente, y como veremos seguidamente, la deformación es una propiedad fundamental de los cuerpos topológicos. A este respecto es preciso recordar que la matemática moderna, en su afán de proporcionar una visión a la vez más amplia y concisa de su contenido, descansa sobre la noción de "estructura" que se define por las propiedades de las operaciones que se establecen sobre objetos indeterminados, pero mentales, no físicos. Así, dos teorías con objetos distintos y operaciones también de distinta índole pueden tener de común las leyes a que están sometidas esas operaciones. Se dirá entonces que esas dos teorías matemáticas tienen la misma estructura. Teniendo en cuenta los diversos tipos de relaciones se establecen cuatro clases de estructuras: algebraicas, de orden, topológicas y complejas. Las estructuras topológicas, que son las que ahora nos interesan, se refieren a relaciones de vecindad, límite y continuidad.[9]

La Topología, tal como la estamos planteando en este apartado supone una ampliación dentro del campo de la geometría. Efectivamente, sobre la geometría métrica y la proyectiva, inspiradas en las nociones de distancia y de línea recta, respectivamente, aparece una tercera geometría, la "cualitativa", en la que no interviene la cantidad: se trata de la Topología. En ella dos figuras son equivalentes siempre que se pueda pasar de una a otra por una deformación continua. Supóngase, por ejemplo, que tenemos una figura de goma: si mediante una presión la vamos deformando sin romperla ni alterar su naturaleza, habrá propiedades de la primitiva figura que cambiarán, pero otras permanecerán invariables: éstas son las propiedades topológicas. Esto supone el abandono de la idea del cuerpo geométrico como cuerpo rígido. Supone, en consecuencia, sustituir la concepción estática-comparativa del movimiento de esos cuerpos por su análisis continuo. Y hay que añadir, finalmente, que el desarrollo de las propiedades de las estructuras topológicas ha permitido, entre otras cosas, el tratamiento y la sistematización de cuestiones como la teoría de la dimensión, la geometría diferencial de curvas y superficies, los polígonos de Poincaré, etc.

Topología, Teoría de Catástrofes y Matemáticas del Caos

La mayoría de los autores coinciden en que la Teoría de Catástrofes y la Matemática del Caos pueden considerarse dos enfoques de una teoría general de la dinámica de las discontinuidades. Ambos tienen de común tomar como base de partida la idea de bifurcación o desdoblamiento del equilibrio en puntos críticos, así como el hecho de que las relaciones funcionales son con mayor frecuencia del tipo no-lineal. Pero difieren en que unas discontinuidades se plantean a gran escala, la Teoría de Catástrofes, y otras a pequeña escala, la Teoría o Matemática del Caos. La Teoría de Catástrofes es, pues, un caso especial de la teoría de la bifurcación debida originariamente a Poincaré, que

9 Fernández Díaz, Andrés (1965): pp. 587-588.

contempla el mundo como esencialmente uniforme y estable, pero sujeto a cambios súbitos e imprevistos o discontinuidades a gran escala que se producen en determinadas variables de estado.[10]

Como es bien sabido, el punto de partida de la Teoría de Catástrofes puede encontrarse en los trabajos de René Thom y de Christopher Zeeman a finales de los sesenta y principio de los setenta. Aunque nos hemos ocupado en otras ocasiones con cierto detenimiento de este nuevo método matemático para describir la evolución de formas en la naturaleza, vamos a recordar a continuación lo más esencial.

Supongamos que partimos del sistema dinámico

$$\frac{dx_i}{dt} = \phi_i(x_{i,}\ v_{h,}t) \rightarrow \begin{cases} i = 1, 2, \ldots., n \\ h = 1,2, \ldots., m \end{cases}$$

donde representamos con x las variables de estado, de dimensión *n*, y con v las variables de entrada, exógenas o de control, de dimensión *m.*

Las trayectorias del sistema definen un campo vectorial X en el espacio

$$M^{(n+m)} \rightarrow R$$

El comportamiento de este sistema y de sus deformaciones puede describirse asociándole un conjunto de aplicaciones diferenciales o de funciones equivalentes

$$V_{(x,p)}:\ M^{(n+k)} \rightarrow R$$

Estas funciones, que son las catástrofes elementales de René Thom son de dimensión n + k, representando con x el conjunto de n variables de estado, rápidas o de comportamiento, y con p el conjunto de k parámetros de control o variables lentas. El sistema obtiene su punto de equilibrio para

$$\frac{dV}{dx} = V(x^*, p) = 0$$

Se denomina espacio de estabilidad o espacio de despliegue universal de la *catástrofe (o "manifold") M*, el definido por el conjunto de puntos de equilibrio X^* correspondientes a los diferentes valores de p. La proyección de M sobre el espacio definido por los ejes de las variables lentas se llama espacio de control *C*. Mediante estas funciones se da una interpretación topológica de las discontinuidades observadas en el comportamiento de los sistemas, siendo la proyección de estas discontinuidades sobre *C* los puntos de singularidades de las catástrofes.[11]

El análisis de las catástrofes elementales constituye el punto central de la teoría, especialmente si se contempla con la óptica de las aplicaciones a los diversos campos de

10 Fernández Díaz, Andrés (2016): pp. 5-6.
11 Fernández Díaz, Andrés (1987): pp. 104-111.

la Ciencia, entre los que destacan las ciencias sociales, las ciencias biológicas y determinadas ramas de la Física. En 1969 René Thom estudió siete catástrofes elementales, aunque en realidad el número de estas catástrofes depende del número de parámetros k: cuando $k \leq 4$ tenemos las siete catástrofes habitualmente conocidas y manejadas, y si $k \leq 5$, se obtendría el número total de once catástrofes elementales. Las siete catástrofes de Thom se denominan respectivamente así: pliegue, cúspide, cola de milano, mariposa, umbílica hiperbólica, umbílica elíptica, y umbílica parabólica.

Vamos a elegir para un análisis más completo la catástrofe que denominamos "cúspide", que será la que empleemos para considerar, a modo de ejemplo, una aplicación al campo concreto de la Economía. Su formulación sería la siguiente:

$$V(x)= x^4 + ux^2 + vx \qquad (1)$$

Derivando, se obtendría:

$$4x^3 + 2ux + v = 0 \qquad (2)$$

y la segunda derivada sería

$$12x^2 + 2u= 0 \qquad (3)$$

Si de estas dos últimas ecuaciones eliminamos la X y sustituimos en la (2), dando los pasos correspondientes, se tendría[12]

$$8u^3 + 27v^3 = 0 \qquad (4)$$

La primera derivada, es decir, la ecuación (2), representa la superficie de despliegue *M* ("manifold"), correspondiendo la (4) a la proyección de la curva situada en la superficie *M* en la que se produce el pliegue ("fold-curves") sobre el plano horizontal de control *C*. Esta proyección se denomina también "conjunto bifurcación", y tiene un punto final de cierre delimitando una figura que es la que justifica el nombre de cúspide con el que se conoce esta catástrofe, aunque la traducción francesa permitiría emplear alternativamente la palabra "frunce".

A los efectos de una mejor comprensión de cuanto hemos expuesto vamos a utilizar este tipo de catástrofe para analizar un problema económico, de la misma forma que podríamos hacerlo en otros campos del conocimiento donde esta teoría puede ser aplicable. El problema en cuestión se refiere a la crisis que tuvo lugar en el período 1974-1983 en las economías occidentales y que fue bautizada con el "singular" nombre de "stagflation", y que en esencia consistía en la existencia simultánea de altas tasas de inflación y elevados porcentajes de paro.

[12] Para seguir el desarrollo completo de este paso ver:
Fernández Díaz, Andrés (1987): pp. 107-108.
Ver también: Castrigiano, Domenico P.L. and Hayes, Sandra A. (1993): pp. 45-57.

Si tomamos las variables $\dot{W}$, $\dot{P}^e$, U, es decir, el crecimiento de los salarios monetarios, la inflación esperada y el porcentaje de paro, tendríamos la relación

$$\dot{W}_t = f(U) + a_0\ \dot{P}^e_t$$

conocida como ecuación o curva de Phillips en su versión original y más simplificada.

Utilizando una catástrofe elemental del tipo cúspide, puede estudiarse el comportamiento dinámico de esta relación, especificando el fenómeno de la inflación con paro (stagflation). Las variables de control serían $(\dot{P}^e, U)$, comportándose $\dot{W}$ como variable de estado.

Gráficamente tendríamos la cúspide

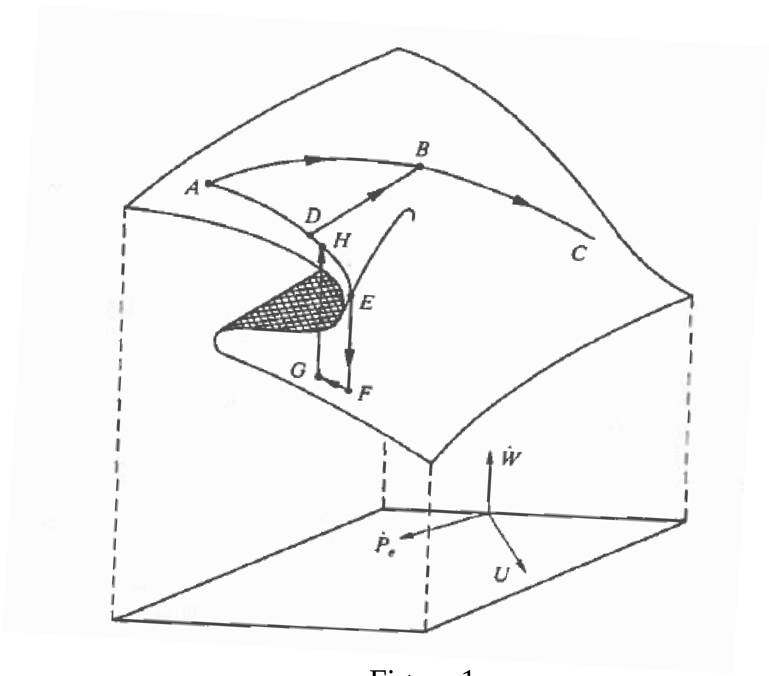

Figura 1

La posición marcada por el punto A indica una alta expectativa de crecimiento de los precios. La intención de reducirla supondría un aumento del paro, siguiendo la trayectoria $\underset{ABC}{\longrightarrow}$, aunque también podría darse un aumento del desempleo sin que cediera la expectativa de inflación, lo que supondría seguir la trayectoria $\underset{AD}{\rightarrow}$, que correspondería a la situación de stagflation.

La salida de esta zona crítica puede producirse de dos maneras diferentes: eligiendo la opción de un aumento no excesivamente acelerado del paro a la vez que se inicien acciones que garanticen una clara mejora en la inflación esperada (trayectoria $\underset{DB}{\rightarrow}$), o bien "desplomando" la situación mediante un descenso de la inflación a cambio de un drástico crecimiento del paro (trayectoria $\underset{DEF}{\longrightarrow}$).

Existe, asimismo, la posibilidad de contemplar un intento de reducir el paro desde esa última posición (punto *F*), aunque ello suponga retornar a mayores niveles de inflación. Ello supondría una nueva discontinuidad o catástrofe a través de una trayectoria como la $\overrightarrow{FGH}$, en la que obviamente se cumple el principio o fenómeno de histéresis.

Quizás no sea necesario, pero deseamos llamar la atención sobre algo que podría inducir a dudas y confusión al manejar e interpretar la catástrofe representada en la figura 1, y es el hecho de que siendo la continuidad en el proceso de deformación sustancial en topología, podamos considerar que aquella se rompe cuando se produce el desplome al pasar del punto H al punto G de la cúspide, aunque de hecho no es así. Efectivamente, si vemos la superficie como si fuese una hoja de papel que se dobla suavemente sobre sí misma formando su perfil una especie de S mayúscula, puede comprobarse que la continuidad no se altera cumpliéndose, pues, con esa exigencia. La caída brusca de la parte superior del doblez de la hoja sobre la superficie inferior de la misma puede considerarse un camino alternativo que, de hecho constituye una discontinuidad, la primera de las cincos propiedades, por otra parte, que según Zeeman tiene la catástrofe en cúspide, y que consiste en que a variaciones mínimas de las variables lentas siguen saltos bruscos en el comportamiento del sistema. La línea que une los puntos H y G representaría, en el problema económico planteado, la curva correspondiente a la ecuación de Phillips ampliada a largo plazo, que en vez de ser una parábola de tercer orden, como se comprobó para el período de la crisis de los setenta, se convirtió, "en teoría", en una línea vertical cuyo punto de abscisa venía a indicar la tasa de paro no aceleradora de la inflación, más conocida como tasa natural de paro. Esta interpretación nos trae a la memoria, no sin un cierto voluntarismo, la idea de "discontinuidad disfrazada" relativa a la microfísica contemporánea, que fue reconocida por pensadores tan distintos como Poincaré, Bergson, Weyl y Cassirer.

Y para concluir este apartado entramos ahora en la difícil tarea de ofrecer una visión sintética, pero convincente e ilustrativa, sobre el amplio campo que supone la Teoría del Caos y sus aplicaciones, enlazándola, en lo que proceda, con el significado y alcance de la topología. Para ello resulta necesario empezar delimitando con precisión el contenido de la expresión "caos determinista", ya consolidada y generalmente aceptada en el ámbito de la dinámica caótica y de la complejidad. Si partimos como principio básico de un respeto irrenunciable y exigible de la realidad, nos encontramos en nuestro análisis con el hecho inevitable de que entramos en los momentos actuales en un mundo en el que el desorden resulta creador, la simetría se quiebra, los defectos pueden ser fértiles, los desequilibrios son permanentes, y las causas y los efectos se relacionan de forma compleja. Admitirlo con seriedad y rigor, y actuar de manera consecuente, constituye una postura intelectual sana e inequívoca, por una parte, y con posibilidades creadoras y de avance científico, por otra.[13]

[13] Fernández Díaz, Andrés (2013): pp. 94-95.
Allègre, Claude (1995) : p. 364.

¿Qué es el determinismo?; una vanidad, un recurso perfeccionista, el resultado de una simplificación forzada, una necesidad metodológica, una opción estética?. Comencemos por decir que el determinismo, en principio, constituye la postura u opción más acorde con la ciencia y con sus exigencias de rigor y racionalidad, en tanto que el indeterminismo se presenta como algo hacía lo que nos sentimos irremediablemente arrastrados, con o sin nuestro consentimiento explícito. En esta misma línea argumental no son pocos los que opinan que la tendencia indeterminista de la ciencia moderna hay que interpretarla más como una conquista definitiva que como un estado provisional. No sería lícito, sin embargo, identificar de forma excluyente determinismo con racionalidad, pues el indeterminismo, en la medida en que refiere a lo real y complejo, también la asume e incorpora de manera plena.

Recientemente el determinismo está tratando de volver por sus fueros mediante diferentes caminos y fórmulas. En efecto, por una parte se habla de procesos o fenómenos deterministas pero "aleatorios", y todo ello al mismo tiempo. El lanzamiento de los dados constituye el ejemplo básico; en él se siguen las leyes puramente deterministas, ya que se halla sometido a principios bien conocidos de la mecánica, y por ello, una vez dado el impulso inicial, puede determinarse el comportamiento posterior mediante el cálculo. Sin embargo parece evidente que nada resulta más aleatorio que el lanzamiento de un dado. Algunos autores consideran que en este fenómeno se da un problema de escala; el fenómeno es determinista a pequeña escala, y aleatorio a gran escala. En el segundo enfoque el resultado final se obtiene por la suma de multitud de causas microscópicas, pudiéndose describir perfectamente el efecto individual de cada una, siendo imposible, por el contrario, llevar a cabo el cálculo del impacto global o conjunto. Se afirma, asimismo, que hay procesos deterministas en los que, debido al mínimo cambio en las condiciones iniciales, se producen comportamientos extraños como consecuencia de efectos amplificadores o "efecto mariposa", en la terminología del célebre meteorólogo Lorenz. Este tipo de sistemas, deterministas pero imprevisibles porque son inestables, fueron estudiados, como ya sabemos, por Maxwell y Poincaré. Todo ello nos remite a la necesidad de emplear un enfoque cualitativo en el estudio de los sistemas dinámicos, y adentrarnos en el campo de la Matemática del Caos y de la Teoría de la Complejidad, en cuyo ámbito surge y se sitúa el concepto básico de caos determinista.

Se dice con frecuencia que el caos es un fenómeno ubicuo, que se produce por doquier, y que puede observarse en todos los campo de la Ciencia. Así encontramos sistemas caóticos en los hamiltonianos, en el problema de los tres cuerpos de la mecánica celeste, en la física de fluidos, en los aceleradores de partículas, en los sistemas biológicos, en las reacciones químicas, y con gran frecuencia en el campo de la economía. El caos podemos localizarlo a través del funcionamiento de los atractores extraños, siguiendo los diagramas de bifurcación, o analizando el intrincado perfil de figuras de la geometría fractal, a lo que hay que añadir como instrumento fundamental el exponente de Liapunov.

La esencia geométrica del caos consiste en estirar y doblar, como ya puso de relieve Stephen Smale con sus transformaciones topológicas. En efecto, la irregularidad del movimiento se produce por un mecanismo que se descompone en dos acciones. Por una parte el espacio de fase se estira, separándose las trayectorias, y luego se pliega sobre sí mismo. Los exponentes de Liapunov sirven para explicar la primera parte de este proceso, al dar una medida de la separación exponencial de dos trayectorias próximas.

Podemos estudiar la inestabilidad local de un sistema discreto $x_{n+1} = f(x_n)$ en el sentido de que, como hemos dicho, el exponente de Liapunov mide cómo dos puntos adyacentes se separan con la aplicación iterada de la función, es decir,

$$|f^n(\mathrm{x}_0 + \epsilon) - f^n(\mathrm{x}_0)| = \epsilon^{n\lambda(x_0)} \qquad (1)$$

y en el límite

$$\lambda(x_0) = \lim_{n\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{n} \log \left|\frac{f^n(x_0+\epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon}\right| \qquad (2)$$

o también:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left|\frac{df^n(x_0)}{dx_0}\right| \qquad (3)$$

constituyendo tanto la (2) como la (3) sendas expresiones del exponente de Lyapunov. Un exponente positivo supone una condición necesaria para la existencia de caos, y si además hay plegamiento, lo que sucede cuando la región está acotada, entonces el exponente de Liapunov se convertirá en condición necesaria y suficiente para poder hablar de comportamiento o movimiento caótico.

Los exponentes de Liapunov sirven para distinguir entre atractores dinámicos simples (puntos fijos, ciclos límites y toros cuasiperiódicos), y atractores extraños o caóticos.[14]

Si nos situamos en una dimensión tenemos tan solo puntos fijos estables con los exponentes λ negativos. Para el caso de dos dimensiones los atractores serían puntos fijos con exponentes negativos, y ciclos límites con $(\lambda_1, \lambda_2) = (-, 0)$. En tres dimensiones tendríamos:

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-,-,-)$; (punto fijo estable)

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,-,-)$; (ciclo límite estable)

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-,0,0)$; (toro estable)

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+,0,-)$; (atractor extraño)

14 Fernández Díaz, Andrés (1994): pp. 85-87.
Fernández Díaz, Andrés (2015): pp. 7-8.

Hay muchos ejemplos de atractores en la literatura especializada, comenzando con el de Smale, ya mencionado, que proporciona a través de una transformación topológica las bases para entender las propiedades caóticas de los sistemas dinámicos. Entre otros, destacan el emblemático atractor de Lorenz, del que ya hemos hablado, al que podríamos añadir el no menos conocido de Rössler, así como el de Hénon, que posee una estructura elegante y totalmente compleja. Pero no podemos hablar de atractores extraños sin penetrar en el campo atractivo y fascinante de los fractales.

Los atractores caóticos son fractales, figuras geométricas que tienen una bella estructura microscópica y que se han desarrollado en el marco de una nueva geometría de la naturaleza o de la complejidad creada por Benoît Mandelbrot, quien en 1975 publicaba su famoso trabajo titulado ***The Fractal Geometry of Nature***. Educado en la Ecole Normale y en la Polytechnique, consiguió con su original formulación enfrentarse a la exagerada formalización del grupo Bourbaki y restablecer la imagen y el prestigio de Poincaré.

El fractal hay que entenderlo como una forma geométrica que permanece inalterada cualquiera que sea el aumento con el que se le observa. Podría decirse que, dentro de lo razonable, el fractal tiene la misma estructura a todas las escalas, lo contrario de lo que sucede con el fenómeno de la renormalización, en el que las figuras se alteran sensiblemente cuando aquellas se modifican o varían.

El problema fundamental de los fractales reside en conocer su dimensión que, como sabemos, no necesita ser un número entero. Originariamente la medida numérica del grado de rugosidad se denominaba dimensión de Hausdorff-Besicovitch: hoy se llama dimensión fractal. Uno de los métodos empleados para llevar a cabo la medición se basa en la aplicación del concepto de homotecia de la geometría euclidiana, pudiéndose calcular también la dimensión fractal basándonos en el concepto de capacidad:

$$D_0(S) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log M(\epsilon)}{\log\left(\frac{1}{n}\right)} \tag{4}$$

donde S es un subconjunto del espacio n-dimensional y M (ε) el número mínimo de cubos n-dimensionales de lado ε necesario para cubrir dicho subconjunto. Para valores pequeños de ε la definición implícita en la (4) implica que

$$M(\epsilon) \propto K \cdot \epsilon^{-D_0} \tag{5}$$

La dimensión de la curva de Koch y del conjunto de Cantor, que constituyen ejemplos típicos de fractales, sería, respectivamente[15]

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2619 \qquad y \qquad d = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309 \tag{6}$$

[15] No incorporamos las figuras correspondientes dado que estamos haciendo una breve síntesis de la materia, remitiendo al lector interesado a varios de los trabajos que hemos publicado sobre la misma, y que se recogen en las referencias bibliográficas.

La estimación de la dimensión fractal y el espectro de exponentes de Liapunov permiten detectar si un sistema dinámico se encuentra en situación caótica.

Otro de los conceptos claves en la Matemática del Caos es el de bifurcación, que podría definirse como la secuencia de soluciones de un sistema no lineal que aparece a medida que aumenta el valor de algún parámetro de control, configurándose los atractores extraños a partir de determinados valores críticos del mismo. La bifurcación de Feigenbaum puede considerarse la más conocida e ilustrativa, sin olvidar las aportaciones de Yorke y May y, por supuesto, la clara y decisiva inspiración de Smale.

Tomemos la aplicación logística

$$x_{t+1} = \mu x_t (1 - x_t) \tag{7}$$

donde μ es una constante situada en el intervalo [0,4]. Dependiendo de los valores que le asignemos a μ, resultará un determinado comportamiento del sistema. Así tendríamos:

Si	$0 \leq \mu < 3$	$\rightarrow$	un punto fijo estable único
	$\mu=3$	$\rightarrow$	un punto fijo marginalmente estable
	$\mu>3$	$\rightarrow$	el punto fijo se vuelve inestable
	$\mu=3{,}2$	$\rightarrow$	ciclo de período dos
	$\mu=3{,}5$	$\rightarrow$	ciclo de período cuatro
	$\mu=3{,}56$	$\rightarrow$	el período se ha doblado a ocho
	$\mu=3{,}567$	$\rightarrow$	el período se ha doblado a dieciséis
	$\mu=3{,}58$	$\rightarrow$	la aplicación logística se vuelve caótica

y el gráfico de bifurcación sería el siguiente:

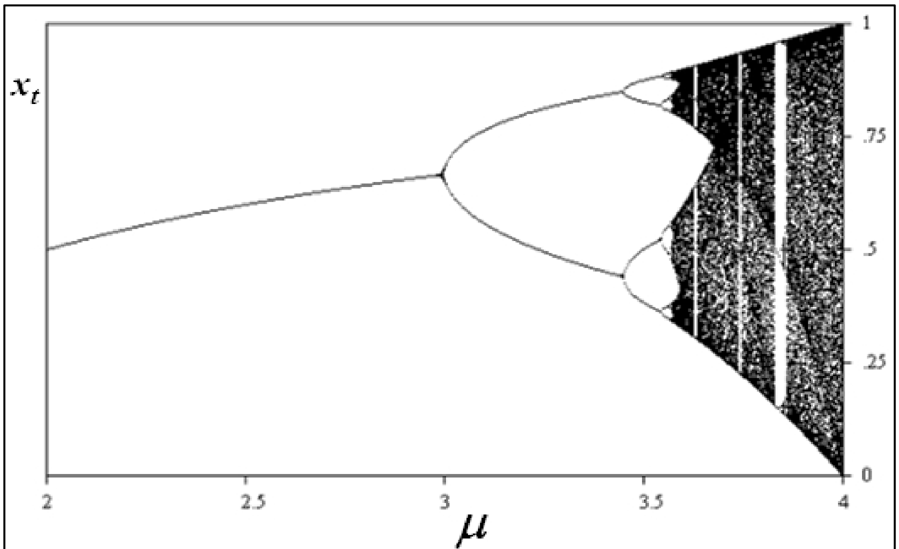

Figura 2

En el estudio de las matemáticas del caos y sus aplicaciones en los diferentes campos de la Ciencia, además de los exponentes de Liapunov, de los atractores extraños, de los fractales y de las bifurcaciones como conceptos e instrumentos básicos, contamos con otros modelos y técnicas de gran relevancia para detectar si el fenómeno que en cada caso estuviésemos considerando se comporta de forma aleatoria o si por el contrario obedece a algún tipo de ley o proceso determinista que se presenta con el disfraz de la irregularidad. Uno de los casos más importantes e ilustrativos es el de la evolución de los Mercados de Capitales, a cuyas series temporales podemos aplicar test como el análisis R/S, el estadístico BDS, el Análisis Espectral o el Movimiento Browniano.[16]

Queremos destacar al respecto, y dentro de las aplicaciones más recientes, al menos en el campo de la economía, la que se refiere a la verificación de si durante la reciente etapa de crisis que hemos estado padeciendo (2006-2013), la Bolsa de Madrid ha funcionado de manera aleatoria, o por el contrario ha sido el resultado de un proceso determinista caracterizado por una manipulación y control permanente del mercado por parte de determinadas agencias y sus agentes. En el análisis realizado hemos utilizado la serie temporal de datos diarios del IBEX35 durante el período mencionado, que incluye un año antes del comienzo de la crisis pero que puede ser importante en el estudio de la dinámica del sistema. En concreto se estudia la evolución temporal de los rendimientos diarios del IBEX calculados como los rendimientos compuestos o la primera diferencia del logaritmo de las cotizaciones, obteniéndose una serie de 2019 datos. Después de calcular la distribución de frecuencias de la serie de rendimientos respecto a la distribución normal, de utilizar el análisis R/S o la técnica de DFA (*Detrended Fluctuation*) para estimar el exponente de Hurst, de calcular la integral de correlación para la serie, de obtener el exponente de Liapunov, de deducir el gráfico de recurrencia, y de aplicar el estadístico BDS, se llega a la conclusión que la serie podría describirse como un sistema dinámico no lineal con ruido lejos del equilibrio, sometido a bifurcaciones o cambios en la dinámica del sistema, pudiéndose interpretar todo ello como indicios de que ha habido algo más que el azar, o lo que es lo mismo, que se ha dado un comportamiento caótico en la evolución de la serie de valores como consecuencia de factores institucionales, políticos y éticos durante el período analizado.[17]

Análisis Funcional

Considerado una rama del análisis matemático moderno, el análisis funcional tiene por objeto el estudio de las funciones y=f(x), donde por lo menos una de las magnitudes x, y varía en un espacio de dimensión infinita, pudiéndose dividir dicho estudio en tres apartados: la introducción y estudio de espacios de dimensión infinita como tales; el estudio de funciones elementales, a las que llamamos funcionales, como cuando x es de dimensión infinita e y es unidimensional; y el estudio de funciones generales del tipo

[16] Para un estudio detallado ver:
Fernández Díaz, Andrés (1999): pp. 88-143.
Fernández Díaz, Andrés (2001): pp. 224-242.

[17] Fernández Díaz, Andrés y Grau-Carles, Pilar (2014): pp. 251-260.

indicado, o lo que es lo mismo, de operadores. Las que mejor se han analizado son las funciones lineales,

$$\mathrm{X} \ni x \leftrightarrow f(x) = y \in Y \tag{1}$$

es decir, los operadores lineales, donde X, Y son espacios vectoriales topológicos, en su mayoría normados o hilbertianos.

Los espacios más generales que figuran en el Análisis Funcional son los espacios vectoriales topológicos. Así podemos llamar espacio lineal X sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$, que a la vez es un espacio topológico, o sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$. Por otra parte hay que poner de relieve que la topología y la estructura lineal concuerdan desde el punto de vista de que las operaciones lineales son continuas en la topología sometida a estudio. En particular, si X es un espacio métrico, se trata de un espacio vectorial métrico. Cuando de forma más concreta en el espacio vectorial se introduce axiomáticamente el concepto de norma $\| x \|$ de los vectores x $\in X$, dicho espacio vectorial lo denominamos ***espacio normado*** en el que la métrica ϱ se introduce mediante la fórmula

$$\varrho\ (x, y) = \| \ x - y \ \| \tag{2}$$

A su turno, un espacio vectorial con norma se llama ***espacio de Banach*** siempre que el mismo sea completo respecto a la métrica indicada.[18] También podemos decir que un espacio normado X es un espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy en X es convergente a un punto X. En este caso diremos que la norma de X es completa.

Conviene advertir que en algunas ocasiones podemos emplear $\mathbb{K}$ para denotar indistintamente el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o el cuerpo $\mathbb{C}$ de los complejos, y los espacios vectoriales que aparezcan se consideran definidos sobre $\mathbb{K}$. Las aplicaciones lineales de X en $\mathbb{K}$ se suelen llamar formas lineales, y el conjunto de las mismas recibe el nombre de ***dual algebraico***. A su vez, si X es un espacio normado, el espacio de Banach L(X, $\mathbb{K}$), que se denota con X*, se llama ***dual topológico***.[19]

Hemos dicho que los principales objetos de estudio en el Análisis Funcional son los operadores del tipo del que recogemos en la (1) y en sus distintas clases y variantes. Respecto a los operadores que operan en el espacio de Banach X, cabe destacar la construcción del cálculo operacional de las funciones analíticas de dichos operadores. Partamos para ello del operador $R_z = (A - zI)^{-1}$ donde I es un operador unidad y z $\in \mathbb{C}$. Los puntos z para los que existe un operador inverso $(A - zI)^{-1}$ se denominan puntos regulares del operador A, y el complemento del conjunto de puntos regulares recibe el nombre de ***espectro*** s(A) del operador A. Si $f(z)$ es una función analítica

---

18 Berezanski, Yu. M. y Levitán, Boris .M. (1993): pp. 254-262.
Schwartz, Laurent (1993): pp. 164-170.

19 Cascales, Bernardo; Mira, José Manuel; Orihuela, José; Raja, Matías (2012): pp. 14-15.
Schwart, Laurent (1993): p. 149.

definida en un entorno de *s(A)*, y Γ es cierto contorno cerrado que rodea s(A) y entra en el dominio de analiticidad[20] de f(z), se tendría que

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z) R_z \, dz \qquad (3)$$

a la que se llama ***función del operador.*** Si *f(z)* es un polinomio, *f(A)* se obtiene sustituyendo simplemente z por A en este polinomio, siendo interesante señalar que la correspondencia $f(z) \rightarrow f(A)$ posee una propiedad importante de holomorfismo:

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A), \qquad (fg)(A) = f(A)\, g(A).$$

(4)

Entre las clases de operadores especiales que operan en el espacio de Banach X desempeñan el papel más importante los llamados operadores totalmente continuos u operadores compactos. Si *A* es compacto, la ecuación del tipo

$$x - Ax = y$$

está bien estudiada y para ella son válidos los hechos análogos a los que tiene lugar en el caso de las ecuaciones lineales en un espacio de dimensión finita.

Procede ahora poner de relieve que en el análisis funcional no lineal uno de los problemas más importantes es el estudio de las aplicaciones de un espacio en otro, llamándose funcional a la aplicación de un espacio en números reales o complejos, y siempre que se trate de aplicaciones no lineales, especialmente de funcionales no lineales, es posible definir los conceptos de diferencial, de derivada respecto a la dirección, etc., análogos a los conceptos respectivos del análisis matemático clásico. Por otra parte, el análisis funcional no lineal está relacionado con la determinación de los puntos fijos de la aplicación y de los denominados puntos de ramificación. En el estudio de ambos se utilizan en gran escala los métodos topológicos, como sucede con el teorema de Brouwer-Bohl sobre la existencia de puntos fijos en las aplicaciones de los espacios de dimensión finita.[21]

La teoría general de las ecuaciones integrales se inició en la última década del siglo XIX por parte de Vito Volterra y desarrollada en la primera década del siglo XX por David Hilbert, poniendo de relieve estos avances que en matemática se trabaja muy a menudo no solamente con funciones que operan con números, sino con funcionales que operan con funciones. De la misma manera en que una ecuación define implícitamente uno o más número, es decir, sus soluciones, así una ecuación diferencial o integral define de forma implícita una o más funciones, o lo que es igual, sus soluciones. En el caso, `por ejemplo, de un espacio de *n* dimensiones, un punto viene identificado con *n* números

[20] Se conoce como dominio de analiticidad de f al mayor subconjunto de su dominio donde f es analítica.

[21] Berezanski, Yu. M. y Levitán., R.M. (1993): pp. 259-260.

x_1, …., x_n, y la distancia de ese punto al origen se calcula con el teorema de Pitágoras mediante la expresión

$$\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

En su análisis sobre las ecuaciones integrales Hilbert tenía que trabajar con funciones que se pudiesen expresar mediante una suma infinita, conocida como serie de Fourier, con infinitos coeficientes x_1, x_2,……, y descubrió que las condiciones para que las funciones pudiesen ser tratadas en su teoría eran que la suma $x_1^2 + x_2^2 + \ldots..$ fuese finita. Pero si esta suma fuese finita, también lo sería sus raíces cuadradas, pudiéndose considerar estas sucesiones de números como las coordenadas de puntos de un espacio euclídeo de infinitas dimensiones, para el cual el teorema de Pitágoras seguiría valiendo. Dichos puntos, como demostrarían en 1907 Erhard Schmidt y Maurice Fréchet serían los elementos del espacio de Hilbert H. Dado que las sucesiones eran para Hilbert tan sólo un modo de manejar funciones, Schmidt y Fréchet introdujeron también un espacio funcional L^2, cuyos puntos son las funciones que, para un intervalo definido, satisfacen las mismas condiciones de Hilbert, a saber, que la integral de Lebesgue de su cuadrado sea finita: de ahí la expresión L^2. Hay que hacer notar que el espacio de Hilbert H y el espacio funcional L^2 son la misma cosa, como puede deducirse del contenido del teorema de *representación* de Friedrich Riesz y Ernst Fischer. Ambos espacios constituyen casos particulares de la amplia clase de espacios introducidos por Stefan Banach en 1922.[22]

Toca el turno ahora de las aplicaciones del Análisis Funcional a las distintas áreas de la ciencia, y destacamos en primer lugar la que se llevó a cabo de manera inmediata en el campo de la mecánica cuántica, y más concretamente en las decisivas aportaciones de Werner Heisenberg en 1925, y de Erwin Schrödinger un año después. A ello hay que añadir, entre otras, la aplicación del álgebra de Banach en la llamada teoría axiomática de campo, al estudiar distintos modelos integrables del campo cuántico y de la física estadística. Es preciso advertir, y así lo han reconocido eminentes físicos y matemáticos, que aunque la mayoría de sus apartados se puede analizar o manejar con álgebra ordinaria, es mucho más fácil hacer los cálculos y más simple explicar los diferentes componentes y problemas de la mecánica cuántica usando los conceptos de **vector de estado,** de **operador** y el de **ecuación operacional,** es decir, acudiendo a las posibilidades que ofrece el Análisis Funcional.[23]

Con independencia de aplicaciones en otros campos científicos de gran importancia, nos parece oportuno desarrollar una aplicación al campo de la Economía, y de forma más específica a la teoría del control óptimo, fundamental en la toma de decisiones de política económica.

---

22 Odifreddi, Piergiorgio (2000): pp. 112-116.

23 Para una idea más completa de esta aplicación a la mecánica cuántica ver:
Feynman, Richard (1987): Volumen III, capítulo 20.
Ranade, Kedar S. (2015): pp. 644-658.

Tomemos como punto de partida el vector de las variables de estado u objetivos, **x,** y el vector de variables instrumentos o de control **u.** Tendríamos entonces:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$$

donde $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ indica el conjunto de variables objetivos, y $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$ el conjunto de las variables instrumentos. Obviamente las variables de ambos vectores no son tan sólo aquéllas estrictamente económicas, sino también las relativas a otros campos del conocimiento relacionados con la economía, tales como la física, la biología, la sociología, la psicología, etc, como algo característico de la complejidad.

El proceso de retroalimentación entre los instrumentos o variables de control y las variables de estado u objetivos, permite definir una evolución óptima de la economía si se cumple la condición de maximizar la funcional que expresamos a continuación:

$$J[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int_0^T \mathrm{F}[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t]\mathrm{dt}$$

estando definida la evolución del sistema por las ecuaciones de estado

$$\dot{x}_i = \frac{\mathrm{dx_i}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{f_i}[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathrm{t}] \qquad\qquad (\mathrm{i} = 1, \mathrm{n})$$

Las variables de control pueden considerarse observables, y solamente toma valores dentro de un conjunto restringido Ω. Además mantienen una componente cualitativa que es necesaria para cuantificar su impacto sobre las variables objetivos. Por otra parte, y dado que estamos tratando con un enfoque cardinal, es preciso contar con instrumentos y procedimientos matemáticos con el fin de encontrar una solución cuantitativa. Para resolver los problemas derivados de este enfoque existen tres técnicas básicas: el cálculo de variaciones, el principio de Pontryagin y la programación dinámica.[24] A este respecto hay que poner de relieve que el concepto de funcional, y más precisamente de Análisis Funcional, constituye un poderoso instrumento matemático que aún no ha sido suficientemente explotado en el campo de la Economía.

El cálculo de variaciones, del que a continuación vamos a ocuparnos brevemente, constituye una parte de las matemáticas dedicada a la investigación de los métodos de determinación de los extremos de las funcionales dependientes de la elección de una o varias funciones con restricciones de diferentes tipos aplicadas a estas funciones. En un planteamiento general la función objetivo adopta la forma siguiente:

[24] Ver: Fernández Díaz, Andrés (1976): pp. 169-183

$$J[\mathbf{x}, \dot{\boldsymbol{x}}] = \int_0^T \mathrm{L}[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{u}}, t]\mathrm{dt}$$

El resto del planteamiento se mantiene igual, pero esto no es un problema grave, ya que siempre cabe la posibilidad de identificar $\dot{x}_i(t)$ con la *i-nsima variable de control.* Este modo de proceder, si bien desde el punto de vista metodológico es incorrecto, da unos resultados excelentes desde el punto de vista práctico.

De fundamental importancia en el cálculo de variaciones es la llamada ecuación de Euler, la cual expresa que para la evolución óptima del sistema es condición necesaria que se verifique la relación

$$\frac{\partial L\,[\,x\,(t),\;\dot{x}\,(t\,]}{\partial x_i(t)} - \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L\,[\,\boldsymbol{x}(t),\;\dot{\boldsymbol{x}},(t),\;t]}{\partial\,\dot{x}_i\,(t)}\right\} = 0$$

para (i = 1, n)

Resolviendo este sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden se obtiene el vector de estado óptimo **x** (t). Para poder resolver el sistema son necesarias 2 n condiciones de contorno:

$x_i\,(0)=a_i$ $\qquad$ $x_i\,(t)= b_i$ $\qquad$ (i= 1, n)

En el caso de que exista alguna variable de estado cuyo valor final no esté definido, se ha de calcular aplicando la condición de transversalidad, que se expresa así:

$$\left\{\frac{\partial L\,[\,\boldsymbol{x}(t),\;\dot{\boldsymbol{x}},(t),\;t]}{\partial\,\dot{x}_j\,(t)}\right\} = 0 \quad \rightarrow \mathrm{t=T}$$

Ya que la ecuación de Euler sólo enuncia una condición necesaria de máximo, se debe estudiar si el vector $\overline{\boldsymbol{x}}(t)$ cumple las condiciones de Legendre y Weiertrass.

La condición de Legendre enuncia que si la trayectoria $\overline{\boldsymbol{x}}(t)$ corresponde a un máximo, entonces la matriz de los elementos

$$\frac{\partial^2 L\,[\,\boldsymbol{x}(t),\;\dot{\boldsymbol{x}},(t),\;t]}{\partial\,\dot{x}_i\;\;\partial\,\dot{x}_j}$$

es en cada instante t del período [o, T], definida no positiva.

La condición de Weiertrass permite distinguir un máximo local del absoluto. Si la trayectoria $\overline{\boldsymbol{x}}(t)$ corresponde a un máximo absoluto, la función de exceso de Weiertrass

$$\mathrm{E}\;[\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t] = \mathrm{L}\;[\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t] - \mathrm{L}\left[\overline{\boldsymbol{x}}, \dot{\overline{\boldsymbol{x}}}, t\right] - \sum_1^n\;(\,\dot{x}_i\;\;-\;\dot{\bar{x}})\;\frac{\partial \mathrm{L}\,[\bar{x},\;\dot{\bar{x}},\;\;t]}{\partial\,\dot{x}_i}$$

debe ser negativa o nula.

Nota conclusiva

La propia definición de Análisis Funcional que da Jean Dieudonné, recogida en sendos trabajos de Fernado Bombat y Bernado Cascales *et al*, ya mencionados, y que, a su vez, hemos incorporado en la Introducción, pone claramente de manifiesto la imposibilidad de disociar la Topología del Análisis Funcional. Como afirma Bombat, dentro de su ambigüedad, la definición nos remite a algunas de las características más importantes del Análisis Funcional: la tendencia hacia la algebrización del Análisis, el énfasis en los resultados de carácter estructural, y la fuerte influencia de la topología. En cualquier caso, como toda otra parcela o rama de la matemática, el Análisis Funcional surge de la necesidad de encontrar nuevas técnicas para abordar una serie de problemas que los métodos tradicionales no podían resolver.

En la exposición que hemos realizado de la Topología General y de la Algebraica, por una parte, y del Análisis Funcional, por otra, nos hemos guiado por textos y artículos que ya habíamos publicados con anterioridad, así como por una parte de la literatura sobre la materia, que no es precisamente abundante, y en la que son pocas las obras rigurosas y claras que, a pesar de su insoslayable complejidad, no han traspasado los límites razonables de una desproporcionada formalización. A este respecto contamos afortunadamente con obras de referencia como las de Frigyes Riesz y Béla Sz.-Nagy, y la del prestigioso matemático francés Laurent Schwartz, ya citados a lo largo de estas páginas.

El lector habrá reparado, y este es el momento de decirlo, que en nuestro análisis no nos hemos detenido en el tema específico de los **teoremas del punto fijo,** de gran importancia en la teoría del equilibrio general como un capítulo decisivo en el ámbito de la Economía, dado que se puede transformar un problema de equilibrio en un problema de punto fijo, y *viceversa.* En efecto, si x es un punto fijo para la función f, y si I es la función idéntica, es decir, la función que transforma todo punto en sí mismo, x es un punto de equilibrio para la función $f - I$. La recíproca es evidente.˙ Se puede por tanto demostrar que un equilibrio existe si se transforma el problema de equilibrio en un problema de punto fijo, y si logramos demostrar, con el arsenal de la teoría de puntos fijos, que este último problema admite una solución.

Con todo ello deseamos poner de manifiesto que se asiste al paso de una concepción dinámica, concreta y temporal de los hechos, a una visión formal y abstracta conducente a determinar las condiciones que hacen que los hechos sean compatibles, coherentes y posibles. El reflejo matemático de esta transformación es el paso del cálculo infinitesimal a las matemáticas del punto fijo, y a los métodos de geometría topológica, así como al análisis funcional y al álgebra de las inecuaciones.[25] En el acertado enfoque interdisciplinar que cada vez con más frecuencia se practica en el ámbito de la investigación científica, la reconsideración y puesta al día de instrumentos matemáticos

[25] Israel, Giorgio (1996): pp. 227-231.

tan polivalentes y valiosos como los que en este trabajo hemos abordado constituye un reto estimulante que debemos asumir sin recelos ni “discontinuidades”.

Madrid, 15 de diciembre de 2016.

REFERENCIAS

Allègre, Claude (1995): “La défaite de Platon”, Fayard, Paris.

Barrow-Green, June (1999): “Poincaré and the Three-Body Problem”, *Historia Mathematica,* Vol. 26, Issue 2, Elsevier.

Berezanski, Yu. M. y Levitán, Boris .M. (1993): “Análisis Funcional”, Enciclopedia de las Matemáticas, Tomo 1, Editorial Mir, Moscú-Madrid.

Bombal, Fernando (1994): “Los Orígenes del Análisis Funcional”, en Historia de la Matemática en el Siglo XIX, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

Boyer, Carl B. (1987): “Historia de la matemática”, Alianza Editorial, Madrid.

Čapek, Milič (1965): “El impacto filosófico de la física contemporánea”, Estructura y Función, Editorial Tecnos, Madrid.

Cascales, Bernardo; Mira, José Manuel; Orihuela, José; Raja, Matías (2012): “Análisis Funcional”, Ediciones Electrolibris y Real Sociedad Matemática Española (RSME), Murcia.

Castrigiano, Domenico P.L. and Hayes, Sandra A. (1993): “Catastrophe Theory”, Foreword by René Thom, Addison-Wesley Publishing Company, New York.

Devlin, Keith (1992): “Mathématiques. Un nouvel âge d´or”, MASSON, Paris.

Fernández Díaz, Andrés (1965): “Notas al artículo de Arnold Heertje, Economía: Ciencia y Arte”, *Revista De Economía*, nº 88, Madrid.

Fernández Díaz, Andrés (1976): “Introducción y metodología de la Política Económica”, Ediciones ICE, Madrid.

Fernández Díaz, Andrés (1987): “Política Económica Coyuntural”, 3ª Edición, Editorial AC, Madrid.

Fernández Díaz, Andrés (1994): “La Economía de la Complejidad”, McGraw-Hill, Madrid.

Fernández Díaz, Andrés (2001): “Entre el ruido blanco y el ruido negro: Nuevos enfoques en el análisis de los Mercados Financieros”, en Pedro García Barreno, Sixto Ríos García y Javier Girón González (Coordinadores), Toma de decisiones en ambientes profesionales, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Instituto de España, Madrid.

Fernández Díaz, Andrés (2013): “Ensayos de Filosofía, Ciencia y Sociedad”, Delta Publicaciones, Madrid.

Fernández Díaz, Andrés (2015): “Chaos and Fractals Impact on Economics”, E-Prints Complutense, Madrid.

Fernández Díaz, Andrés (2016): “Complexity in Economics: An Up to Day View”, E-Prints Complutense, Madrid.

Feynman, Richard (1987): “Física. Volumen III: Mecánica Cuántica”, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware.

Heertje, Arnold (1965): “Economía: Ciencia y Arte”, *Revista De Economía*, nº 88, Madrid.

Israel, Giorgio (1996): “La mathématisation du réel”, Éditions du Seuil, Paris.

López Moreno, Antonio J. (2006): “Demostración de la Conjetura de Poincaré”, *Matematicalia*, Vol. 2, nº 3.

Odifreddi, Piergiorgio (2000): “La matematica del novecento”, Einaui Editore, Torino.

Peterson, Ivars (1993): “Newton´s Clock.” W.H. Freeman and Company, New York.

Ranade, Kedar S. (2015): “Functional analysis and quantum mechanics: an introduction for physicists”, Fortschritte der Physik, Vol. 63, Issue 9-10., Wiley-VCH.

Riesz, Frigyes and Sz.-Nagy, Béla (1990):“Functional Analysis”, Dover Publications, Inc, New York.

Simmons, George F. (1995): “Ecuaciones Diferenciales”, McGraw-Hill, Madrid.

Schwartz, Laurent (1993): “Topologie Générale et analyse fonctionnelle”, Hermann Editeurs, Paris.