PEDRO ABELLANAS
dell'Università di Madrid

CONJUNTOS PREANALÍTICOS

(*Conferenza tenuta il 14 maggio 1974*) *

SUNTO. — Si studiano le proprietà algebriche degli insiemi preanalitici definiti annullando le funzioni degli ideali dell'anello $\overline{A} = A[|f_1|, \ldots, |f_r|]$, ove A è l'anello delle funzioni analitiche sopra un insieme aperto connesso Ω di $\mathbf{R}^n$, ed $f_i \in A$, $i = 1, \ldots, r$.

La finalidad de esta nota es la definición y estudio de las propiedades fundamentales de unos conjuntos, llamados preanalíticos, que poseen una estructura algebrica sencilla y a partir de los cuales se obtienen los conjuntos semianalíticos mediante diferencia.

1. - R-ÀLGEBRAS ANALÍTICAS VALORADAS.

Sea A la R-álgebra de las funciones analíticas reales definidas sobre un abierto conexo Ω de R^n y sea $B = A\,[X_1, \ldots, X_r]$ el álgebra de polnomios con coeficientes de A en las indeterminadas $X_1, \ldots, X_r$ sobre $A \cdot B$ se puede considerar también como un anillo de funciones analíticas sobre $\Omega \times R^r$, que es también un conjunto conexo.

Es bien conocido y, por otra parte, de comprobación inmediata el siguiente lema:

LEMA 1. - *Toda* R-*álgebra de funciones analíticas sobre un — abierto conexo es un dominio de integridad.*

LEMA 2. - *Los ideales*:

$$B(X_1 - f_1, \ldots, X_s - f_s)\,,\ s \leq r\,,\ f_i \in A\,,\ i = 1, \ldots, s$$

son primos.

---

* Pervenuta in Redazione il 20 settembre 1974.

DEMOSTRACIÓN. - Todo elemento $F(X_1, \ldots, X_r) \in B$ se puede escribir de la siguiente forma: $F(X_1, \ldots, X_r) = G(X_1 - f_1, \ldots, X_s - f_s, X_{s+1}, \ldots, X_r) = G_1(X_1 - f_1, \ldots, X_r)\ (X_1 - f_1) + G'_1 (X_2 - f_2, \ldots, X_s - f_s, X_{s+1}, \ldots, X_r)$ siendo G'_1 un polinomio en el que no figura la variable X_1. Repitiendo el mismo proceso con G'_1, y así siguiendo, se obtiene:

$$F = G_1\ ({}_1X - f_1) + \ldots + G_s\ (X_s - f_s) + G',$$

en donde G' es un polinomio en las variables $X_{s+1}, \ldots, X_r$, con coeficientes en A.

Si F y H son elementos de B tales que:

$$F \cdot H \in B\ (X_1 - f_1, \ldots, X_s - f_s)$$

y si

$$H = L_1\ (X_1 - f_1) + \ldots + L_s\ (X_s - f_s) + L',$$

en donde L' es un polinomio en las variables $X_{s+1}, \ldots, X_s$, de las relaciones anteriores se deduce que

$$G' \cdot L' \in B\ (X_1 - f_1, \ldots, X_s - f_s),$$

esto es

$$G' \cdot L' = P_1\, X_1 - f_1 + \ldots + P_s\ (X_s - f_s),$$

de donde, haciendo $X_i = f_i$, $i = 1, \ldots, s$ y recordando que $G' \cdot L'$ no depende de estas variables, resulta que

$$G' \cdot L' = 0$$

y como G' y L' son funciones analíticas sobre el conjunto conexo $\Omega \times R^r$, resulta, en virtud del lema anterior, que uno de ambos polinomios es cero, con lo que queda probado el lema.

Designamos por I_j al conjunto $[1, -1]^j$. Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in I_t$, pondremos: $J_\alpha = B\ (X_1 - \alpha_1 f_1, \ldots, X_1 - \alpha_t f_t)$, siendo $t \leq r$ y $\{f_1, \ldots, f_r\}$ un conjunto de funciones de A fijado para todo lo que sigue.

LEMA 3. - $\bigcap_{i \in I_t} (J_i + B(X_u^2 - f_u^2)) = (\bigcap_{i \in I_t} J_i) + B(X_u^2 - f_u^2)$, $0 < t < u \leq r$.

DEMOSTRACIÓN. - Si $Q \in J_i$ pondremos, abreviadamente:

$$Q = A_{i1}(X_1 - i_1 f_1) + \ldots + A_{it}(X_t - i_t f_t) = A_i(X - i f), i \in I_t.$$

Para todo

$$P \in \bigcap_{i \in I_t} (J_i + B(X_u^2 - f_u^2)) \quad \text{se verifica que:}$$

(2) $$P = P_i + C_i(X_u^2 - f_u^2)\,, \; P_i \in J_i\,, \; i \in I_t\,.$$

Por tanto,

$$P_i = A_i(X - i\,f)\,,$$

y los polinomios A_{ij} se pueden escribir en la forma:

$$A_{ij} = A'_{ij} + X_u\,A''_{ij} + (X_u^2 - f_u^2)\,A'''_{ij}\,,$$

en donde A'_{ij} y A''_{ij} son polinomios en los que no figura la variable X_u, por consiguiente:

$$P_i = (A'_i + X_u\,A''_i)\,(X - i\,f) + (X_u^2 - f_u^2)\,A'''_i$$

y, sustituyendo en (2)

(3) $$P = (A'_i + X_u\,A''_i)\,(X - i\,f) + D_i(X_u^2 - f_u^2)\,,$$

$$D_i = A'''_i + C_i\,, \; i \in I_t\,.$$

Como el primer miembro de (3) no depende de i, resulta que $\forall i,\ j \in I_t$,

$$(A'_i + X_u\,A''_i)\,(X - i\,f) + D_i\,(X_u^2 - f_u^2) =$$
$$= (A'_j + X_u\,A''_j)\,(X - j\,f) + D_j(X_u^2 - f_u^2)\,,$$

y, haciendo $X_u = f_u$ y a continuación $X_u = - f_u$, se obtiene:

$$(A'_i + f_u\,A''_i)\,(X - i\,f) = (A'_j + f_u\,A''_j)\,(X - j\,f)$$
$$(A'_i - f_u\,A''_i)\,(X - i\,f) = (A'_j - f_u\,A''_j)\,(X - j\,f)$$

de donde

$$A'_i(X - i\,f) = A'_j(X - j\,f)$$

y $$f_u\,A''_i(X - i\,f) = f_u\,A''_j(X - j\,f)$$

y como tanto f_u como las restantes funciones que figuran en la igualdad precedente son analíticas en un conjunto conexo, y $f_u \neq 0$ en él, resulta:

$$A''_i(X - i\,f) = A''_j(X - j\,f)\,,$$

$(A'_t + X_u A''_i)(X - i\,f) \in \bigcap_{i \in I_t} J_i$ y, por tanto, en virtud de (3),

$$P \in \Big(\bigcap_{i \in I_t} J_i\Big) + B(X_u^2 - f_u^2),$$

esto es, se ha probado la inclusión $\subset$. Como la inclusión $\supset$ es obvia, queda probado el lema.

LEMA 4. - $\bigcap_{i \in I_s} J_i = B(X_1^2 - f_1^2, \ldots, X_s^2 - f_s^2)$, $1 \leq s \leq r$.

DEMOSTRACIÓN. - La inclusión $\supset$ es trivial.

Para probar la otra inclusión empleamos inducción respecto de s.

Para $s = 1$, si $F \in B(X_1 - f_1) \cap B(X_1 + f_1)$, será $F = F_1(X_1 - f_1) \in B(X_1 + f_1)$ y como, por el lema 2, el ideal $B(X_1 + f_1)$ es primo, uno de los dos factores pertenecerá a este ideal. Ahora bien, si $X_1 - f_1 \in B(X_1 + f_1)$ será

$$X_1 - f_1 = P(X)\,(X_1 + f_1)$$

y haciendo $X_1 = -f_1$, resulta $f_1 = 0$, contradicción. Por tanto, $F_1 \in B(X_1 + f_1)$, esto es, $F_1 = Q(X)\,(X_1 + f_1)$ y

$$F = Q(X_1 - f_1)\,(X_1 + f_1).$$

Supuesta demostrada la inclusión $\subset$ para $s \leq t$, sea

$$F \in \bigcap_{i \in I_{t+1}} J_i,$$

esto es

$$F = F_i(X - i\,f), \quad i \in I_{t+1}.$$

Considerando, en particular,

$$i = (i_1, \ldots, i_t, 1), \quad j = (i_1, \ldots, i_t, -1),$$

resulta que

$$F_{i,\,t+1}\,(X_{t+1} - f_{t+1}) \in J_j.$$

Si $X_{t+1} - f_{t+1}$ perteneciese a J_j, sería

$$X_{t+1} - f_{t+1} = E_1(X_1 - i_1 f_1) + \ldots + E_t(X_t - i_t f_t) + \\ + E_{t+1}(X_{t+1} + f_{t+1})$$

y haciendo $X_j = i_j f_j$, $j = 1, \ldots, t$ y $X_{t+1} = -f_{t+1}$, se obtiene $f_{t+1} = 0$, contradicción, luego $X_{t+1} - f_{t+1} \in J_j$ y como este ideal es primo, resulta:

$$F_{i,t+1} \in J_j ,$$

esto es,

$$F_{i,t+1} = F'_1(X_1 - i_1 f_1) + \ldots + F'_t(X_t - i_t f_t) + F'_{t+1}(X_{t+1} + f_{t+1}) ,$$

luego

$$F = M_1(X_1 - i_1 f_1) + \ldots + M_t(X_t - i_t f_t) + \\ + F'_{t+1}(X^2_{t+1} - f^2_{t+1}), i \in I_t ,$$

esto es:

$$F \in \bigcap_{i \in I_t} [J_i + B(X^2_{t+1} - f^2_{t+1})]$$

y, por el L. 3,

$$F \in (\bigcap_{i \in I_t} J_i) + B(X^2_{t+1} - f^2_{t+1}) ,$$

pero, por la hipótesis de inducción y la inclusión $\supset$ válida para todo s, se verifica que

$$\bigcap_{i \in I_t} J_i = B(X^2_1 - f^2_1, \ldots, X^2_t - f^2_t) ,$$

con lo que queda probada la inclusion $\subset$ para $t + 1$, y por tanto el Lema,

NOTACIÓN. - Sea $L \subset I_r = \{1, -1\}^r$ el conjunto de indices tal que para todo $i \in L$ se verifique que el interior de V_i sea distinto del conjunto vacio, y recíprocamente. Siendo V_i el conjunto de puntos de Ω en que se anulan todas las funciones de

$$I_i = A[|f_1|, \ldots, |f_r|] \; (|f_1| - i_1 f_1, \ldots, |f_r| - i_r f_r).$$

Se designará por F_i el conjunto de todos los puntos $x \in \Omega$ tales que $f_i(x) = 0$. Se designará por $\bar{A}$ al anillo $A[|f_1|, \ldots, |f_r|]$ y por u al homomorfismo $B \to \bar{A}$, definido por $u(X_i) = |f_i|$, $i = 1, \ldots, r$.

LEMA 5. - Ker $u = \bigcap_{i \in L} J_i$.

DEMONSTRACIÓN. - Sea $J = \bigcap_{i \in L} J_i$.

(i) Para todo $F \in J$, sea $F' = u(F)$. Para todo punto $x \in \Omega$ tal que $x \notin \bigcup_{i=1}^{r} F_i$, existe un $i \in L$ tal que $x \in V_i$ y como $F \in J \subset J_i$, será $F'(x) = 0$. Por consiguiente, $F'(x) = 0$ para todo punto x de $\Omega - \bigcup_{i=1}^{r} F_i$ y como $\bigcup_{i=1}^{r} F_i$ es un conjunto raro en Ω y como el conjunto de los puntos en que se anula F' es cerrado, por ser F' función continua, resulta que F' se anula en Ω, esto es F' es la función cero sobre Ω y, por tanto, $F \in k$ er u.

(ii) Para todo $F \in B$ y para todo $i \in L$, se puede escribir:

$$F = \sum_{k=1}^{r} g_{k_i} (X_k - i_k f_k) + h_i , \tag{5}$$

en dond $g_{k_i} \in B$, $k = 1, \ldots, r$, y $h_i \in A$, $i \in L$.

Si $F \in ker\, u$, será:

$$0 = u(F) = \sum_{k=1}^{r} u(g_{k_i}) (|f_k| - i_k f_k) + h_i ,$$

de donde, en virtud del L. 1 de 2.,

$$\sum_{k=1}^{r} u\, (g_{k_i}) (|f_k| - i_k f_k) = - h_i \in I_i \cap A = \{0\} ,$$

y, teniendo en cuenta (5),

$$F = \sum_{k=1}^{r} g_{k_i} (X_k - i_k f_k) \in J_i ,$$

para todo $i \in L$, luego $F \in J$.

Escolio 2. - $u(\bigcap_{i \in L} J_i) = \bigcap_{i \in L} u(J_i)$.

En efecto, le inclusión $\subset$ es obvia. Para todo $F' \in \bigcap_{i \in L} u(J_i)$ se verifica que:

$$F' = \sum_{j=1}^{r} g_{i_j} (|f_j| - i_j f_j) = \sum_{j=1}^{r} g_{k_j} (|f_j| - k_j f_j);\ i, k \in L . \tag{6}$$

Sea

$$F_i = \sum_{j=i}^{r} g_{i_j} (X_j - i_j f_j) . \tag{7}$$

De (6) y (7) se deduce que

$$u(F_i - F_j) = 0\,,\ F_i - F_j \in ker\, u = \bigcap_{i \in L} J_i\,,$$

luego,

$$(8) \qquad F_i = F_j + F_{ij} \in J_j\,,\ F_{ij} \in \bigcap_{i \in L} J_i\,,\ j \in L\,,$$

luego,

$$F_i \in \bigcap_{j \in L} J_j\,,$$

luego,

$$(9) \qquad F' = u(F_i) \in u(\bigcap_{j \in L} J_j)\,.$$

Escolio 3. - $\{0\} = \bigcap_{j=L} I_j$. Siendo $I_j = u(J_j)$.

Escolio 4. - Los ideales I_j, $j \in L$, son primos.

Se ha obtenido el siguiente:

TEOREMA 1. - *En las hipótesis anteriores, se verifica que:*

$$(10) \qquad 0 \to \bigcap_{i \in L} J_i \to A\ [X_1\,, \ldots, X_r] \xrightarrow{u} A\ [|f_1|\,, \ldots, |f_r|] \to 0\,,$$

es una sucesión exacta.

2. - RELACIONES ENTRE LOS IDEALES DE A Y $\bar{\text{A}}$.

Si $V_j = \{x \in \Omega | G(x) = 0,\ \forall G \in I_j\}$, se verifica que existe algún $j \in I_r$ tal que $\mathring{V}_j \neq \Phi$, ya que $\bigcup_{j \in I_r} V_j = \Omega$ y $\bigcup_{i=1}^{r} F_i$ es un conjunto raro en Ω.

LEMA 1. - *Si* $\mathring{\text{V}}_j \neq \Phi$ *se verifica que* $\text{I}_j \cap \text{A} = \{0\}$.

DEMOSTRACIÓN. - Si $F \in I_j \cap A$ y $V(F) = \{x \in \Omega | F(x) = 0\}$, de $\{F\} \subset I_j$ se deduce que $V(F) \supset V_j$, luego $V(F)$ contiene un abierto no vacio de Ω y, por ser Ω conexo y F analítico sería $F = 0$ sobre Ω.

LEMA 2. - *Si* m *es un ideal de* A, *se verifica que*

$$\bar{A} m \cap A = m\,.$$

DEMOSTRACIÓN. - Evidentemente es $m \subset \bar{A} m \cap A$. Para todo $F \in \bar{A} m \cap A$ y para todo I_j tal que $\mathring{V}_j \neq \Phi$, se verifica que:

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} H_i p_i , \; H_i \in \bar{A} , \; p_i \in m , \; i = 1, \ldots, s .$$

Ahora bien, H_i se puede escribir en la forma:

$$H_i = H'_i + h_i , \; H'_i \in I_j , \; h_i \in A ,$$

luego,

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} H'_i p_i + \sum_{i=1}^{i=s} h_i p_i ,$$

de donde,

$$F - \sum_{i=1}^{i=s} h_i p_i = \sum_{i=1}^{i=s} H'_i p_i \in I_j \cap A = \{0\} ,$$

esto es, $F = \sum_{i=1}^{i=s} h_i p_i \in m$.

Escolio. - $(I_j + \bar{A}m) \cap A = m$, siendo $\mathring{V}_j \neq \Phi$.

Lema 3. - *Si* p *es un ideal primo de* A *y* $\mathring{\mathrm{V}}_{\mathrm{j}} \neq \Phi$, *se verifica que*

$$P = I_j + \bar{A} p$$

es ideal primo de $\bar{\mathrm{A}}$.

Demonstración. - Sea $F \cdot G \in P$. Poniendo

$$F = F' + f , \; G = G' + g , \; F', G' \in I_j ; \; f, g \in A ,$$

resulta que

$$FG = H + fg , \; H \in I_j .$$

Pero, por hipótesis,

$$FG = H' + \sum_{i=1}^{i=t} L_i p_i , \; L_i \in \bar{A} , \; p_i \in p ,$$

y poniendo $L_i = L'_i + l_i$, $L'_i \in I_j$, $l_i \in A$, $i = 1, \ldots, t$, resulta:

$$H + fg = H' + \sum_{i=1}^{t} L'_i p_i + \sum_{i=1}^{t} l_i p_i ,$$

de donde

$$H - H' - \sum_{i=1}^{t} L'_i p_i = \sum_{i=1}^{t} l_i p_i - fg \in I_j \cap A = \{0\} ,$$

luego

$$fg = \sum_{i=1}^{t} l_i p_i \in p$$

y, por ser p primo, uno, por lo menos de los dos factores pertenece a p. Si $f \in p$ será $F = F' + f \in I_j + \bar{A}p = P$.

Corolario. - *Si* q *es un ideal primario de* A *y* $\sqrt{\mathrm{q}} = \mathrm{p}$, *se verifica que* $\mathrm{I_j} + \bar{\mathrm{A}}\mathrm{q}$ *es un ideal primario y* $\sqrt{\mathrm{I_j} + \bar{\mathrm{A}}\mathrm{q}} = \mathrm{I_j} \mp \mathrm{Ap}$, *siendo* $\mathring{\mathrm{V}}_{\mathrm{j}} \neq \Phi$.

Lema 4. - *Si* P *es un ideal primo de* $\bar{\mathrm{A}}$ *y* $\mathrm{p} = \mathrm{P} \cap \mathrm{A}$, *existe un* $\mathrm{k} \in \mathrm{I_r}$ *tal que*

$$P = I_k + \bar{A}p\,.$$

Demostración. - De $\{0\} = \bigcap_{i \in I_r} I_i \subset P$ y de ser los ideales I_i primos resulta que P divide a uno, por lo menos, de los ideales I_i. Sea $I_k \subset P$. Por tanto, $I_k + \bar{A}p \subset P$. Para todo $F \in P$ se verifica que

$$F = H + h\,,\ H \in I_k\,,\ h \in A\,,$$

luego $H \in P$ y, por tanto, $F - H = h \in P$, luego, $h \in p$.

Lema 5. - *Si* $\mathrm{q_i}$, $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{r}$ *son ideales de* A *y si* $\mathrm{I_j}$ *es tal que* $\mathring{\mathrm{V}}_{\mathrm{j}} \neq \Phi$, *se verifica que*

$$I_j + \bar{A}(q_1 \cap \ldots \cap q_r) = I_j + (\bar{A}q_1 \cap \ldots \cap \bar{A}q_r)\,.$$

Demostración. - La inclusión $\subset$ es obvia. Para todo

$$F \in I_j + (\bar{A}q_1 \cap \ldots \cap \bar{A}q_r)\,,$$

se verifica que

$$F = H_1 + h_1 = \ldots = H_r + h_r\,,\quad H_i \in I_j\,,\quad h_i \in q_i\,,\quad i = 1, \ldots, r\,.$$

Por tanto,

$$H_k - H_l = h_l - h_k \in I_j \cap A = \{0\}\,.$$

luego,

$$h_1 \in \bigcap_{i=1}^{r} q_i$$

y

$$F = H_1 + h_1 \in I_j + \bar{A}(q_1 \cap \ldots \cap q_r).$$

LEMA 6. - *En las mismas hipótesis del lema anterior,*

$$(I_j + \bar{A}q_1) \cap \ldots \cap (I_j + \bar{A}q_r) = I_j + (\bar{A}q_1 \cap \ldots \cap \bar{A}q_r).$$

La inclusión $\supset$ es obvia. Para todo

$$F \in (I_j + \bar{A}q_1) \cap \ldots \cap (I_j + \bar{A}q_r)$$

se verifica que

$$F = H_1 + h_1 = \ldots = H_r + h_r, \quad H_i \in I_j, \quad h_i \in q_i, \quad i = 1, \ldots, r,$$

de donde, como en el lema anterior,

$$F \in I_j + (\bar{A}q_1 \cap \ldots \cap \bar{A}q_r).$$

LEMA 7. - *Si* I_j *es tal que* $\mathring{V}_j \neq \Phi$ *y* m *es un ideal de* A, *se verifica que*

$$(I_j + \bar{A}m) \cap A = m.$$

En efecto, si $f \in (I_j + \bar{A}m) \cap A$, se verifica que

$$f = H + h, \; H \in I_j, \; h \in m,$$

luego $f - h = H \in I_j \cap A = \{0\}$, y $f = h \in m$.

De los lemas anteriores resulta le siguiente:

PROPOSICIÓN. - *Si*

$$m = q_1 \cap \ldots \cap q_r$$

es un ideal de A, *siendo* q_i $i = 1, \ldots, r$, *ideales primarios y* $\sqrt{q_i} = p_1$, se verifica que, para todo I_j tal que $\mathring{V}_j \neq \emptyset$,

$$I_j + \bar{A}(q_1 \cap \ldots \cap q_r) = (I_j + \bar{A}q_1) \cap \ldots \cap (I_j + \bar{A}q_r)$$

en donde los ideales $I_j + \bar{A}q_k$, $k = 1, \ldots, r$, son primarios yacen sobre q_k y

$$\sqrt{I_j + \bar{A}q_k} = I_i + \bar{A}p_k\,,\ k = 1, \ldots, r\,.$$

SUMMARY. — In this paper one study the algebraic properties of some sets, called preanalitic sets, defined by the vanishing of the functions of the ideals of the ring $\bar{A} = A[|f_1|, \ldots, |f_r|]$, where A is the ring of analitic functions over a connected open set Ω of $\mathbf{R}^n$ and $f_i \in A$, $i = 1, \ldots, r$.

REFERENCIAS

[1] LOJASIEWICZ S., *Ensembles Semi-Analytiques*. Centre de Physique théorique de l'Ecole Polytechnique. (Policopié). 1965.

[2] HIRONAKA H., *Subanalytic sets*. Number Theory, Algebraic Geometry, and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973, 453-493.