ASOCIACIÓN ESPAÑOLA

PARA EL

PROGRESO DE LAS CIENCIAS

NOVENO CONGRESO

CELEBRADO EN LA CIUDAD DE SALAMANCA
DEL 24 AL 29 DE JUNIO DE 1923

(SEGUNDO CONGRESO DE LA ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA
PARA O PROGRESSO DAS SCIÊNCIAS)

TOMO III

Sección 1.ª · Ciencias Matemáticas.

MADRID
JIMÉNEZ Y MOLINA, IMPRESORES
Teléfono J-315.

1924

CORRESPONDENCIAS ALGEBRAICAS SOBRE CURVAS DE MÓDULOS GENERALES

POR

T. RODRÍGUEZ BACHILLER

DEL LABORATORIO SEMINARIO MATEMÁTICO

(Sesión del 27 de junio de 1923.)

Es este trabajo un avance del que se ha de publicar en la Colección de Trabajos del Laboratorio Seminario Matemático, y en el cual establecemos exclusivamente con recursos algebraico-geométricos el teorema demostrado por vía trascendente por Hurwitz en su célebre Memoria «Über algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprinzip». *Mathematische Annalen*, Band 28, página 561, 1886.

La necesidad de establecer con recursos propios de la Geometría sobre una curva algebraica este importante teorema nos fué sugerida por el profesor Severi, de la Universidad de Roma, que nos propuso este asunto a desarrollar como Tesis de doctorado. Aprovechamos esta ocasión para darle las más rendidas gracias por su amabilidad y por las indicaciones que nos ha dado.

Dividiremos este trabajo en dos partes: en la primera, a modo de introducción, y comprendiendo lo poco difundidos que están en España estos estudios, expondremos los principios generales de la teoría general de las correspondencias algebraicas, enviando al lector que desee más detalles a la obra fundamental del citado profesor Severi, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, traducción del doctor E. Löffler, Teubner, Leipzig, 1921; en la segunda parte exponemos la representación trascendente de las correspondencias y demostramos la parte esencial del teorema mencionado, que en resumen se reduce a establecer que en la familia de curvas canónicas de género p existen curvas racionales con p puntos dobles. Para acabar luego la demostración es preciso un estudio delicado de los casos de degeneración posibles al hacer tender con continuidad la curva hacia una racional. De este estudio se deduce una demostración exclusivamente topológica del teorema citado, pero ésta y aquél formarán la parte principal de la Memoria antes anunciada, ya que aquí el espacio de que disponemos es limitado.

§ 1. Generalidades y operaciones sobre correspondencias algebraicas.

1. Sean dos curvas algebraicas C y C' e indiquemos con x un punto cualquiera de C y con y un punto cualquiera de C'; si el punto y de C' es función algebraica de β valores del punto x de C, será x función algebraica de un cierto número α de valores del punto y, variable sobre C', y se dirá que entre C y C' hay establecida una *correspondencia algebraica de índices* (α, β). A toda correspondencia T de ndices (α, β) corresponde otra T^{-1} de índices (β, α) llamada la *inversa* de la primera, la cual se obtiene aplicando la operación de la T después de haber cambiado el papel de las dos curvas. Para nuestro estudio, en lugar de hablar de dos curvas coincidentes, hablaremos de una sola curva y correspondencias algebraicas definidas sobre ella, y entonces la T y la T^{-1} se miran como dos operaciones, una directa y otra inversa, aplicadas a unos mismos puntos de la curva. Así, indicaremos con a un punto genérico, y respectivamente con x, y, los puntos homólogos de a en la correspondencia directa y en su inversa. Una correspondencia será *simétrica* cuando los homólogos de un punto cualquiera a en la correspondencia directa coinciden con los homólogos del mismo punto en la inversa; las involuciones, por ejemplo, son correspondencias simétricas particulares.

Correspondencia *idéntica* es la que se obtiene llamando homólogo de todo punto el punto mismo.

Se dice que una correspondencia es *degenerada* si existe algún punto (singular) al cual corresponden todos los puntos de la curva. Aquí se considerarán sólo correspondencias no degeneradas, en las que entre los puntos y homólogos de a no exista en general ninguno coincidente con a y que al variar a cambien todos los de y. De esto se deduce que no podrán existir puntos *unidos* más que en número finito.

Llamaremos *suma* de dos correspondencias T_1, T_2 la correspondencia $T_1 + T_2$, que se obtiene llamando homólogos de todo punto a los correspondientes en la T_1 y los correspondientes en la T_2. La suma goza de la propiedad conmutativa y asociativa.

Diremos *producto* de T_1, T_2 la correspondencia que se obtiene aplicando a cada uno de los homólogos de a en la T_1 las operaciones de T_2 y haciendo corresponder a a los puntos así obtenidos. Esta correspondencia producto se indicará con el símbolo $T_2\, T_1$, poniendo a la derecha el símbolo de la primera operación aplicada a a. El producto no goza generalmente de la propiedad conmutativa, pero goza de la asociativa y de la distributiva respecto a la suma.

Son evidentes las relaciones

$$(T_1 + T_2)^{-1} = T_1^{-1} + T_2^{-1}, \quad (T_2\, T_1)^{-1} = T_1^{-1}\, T_2^{-1}.$$

En particular, la inversa de la correspondencia $2\,T_1$ obtenida llamando homólogos del punto a los puntos que le corresponden en T_1, cada uno contado dos veces, es igual al doble de la inversa, etc.

Será conveniente indicar algunas notaciones, de las cuales tendremos ocasión de servirnos.

La escritura $A \equiv B$, donde A, B son grupos de n puntos sobre la curva C, denotará que los dos grupos son *equivalentes;* esto es, que pertenecen a una misma serie lineal de orden n; la escritura λA, donde λ es un entero positivo, representará el grupo de puntos que se obtiene contando λ veces cada uno de los puntos de A.

El significado de la relación

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots \equiv \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \dots \qquad (1)$$

donde λ, μ son enteros positivos o negativos, es obvio siempre que sean posibles las eventuales sustracciones indicadas en cada uno de sus miembros; pero podemos en todo caso dar un sentido a la (1), entendiendo que equivalga a la relación que en ella se deduce transportando de un miembro al otro los términos negativos y cambiándoles el signo.

A veces, para expresar la (1), diremos que los grupos

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots, \quad \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \dots,$$

son *equivalentes*, o también que *pertenecen a una misma serie lineal.*

2. Concepto de valencia.—Sea T una correspondencia entre los puntos de una curva C, y sea Y el grupo de los β puntos, y homólogos de a en la T. En general, al variar a el grupo Y no varía en una serie lineal de orden β; pero puede suceder que el grupo $Y + \gamma a$, donde γ es un entero positivo o negativo o nulo, varíe en una serie lineal de orden $\beta + \gamma$. Se dirá entonces que la correspondencia tiene la *valencia* γ.

En el caso en que γ sea negativo puede suceder que el símbolo $Y + \gamma a$ no represente un grupo efectivo de puntos; pero, de todos modos, también en tal caso nosotros sabemos, por lo dicho antes, qué sentido debe atribuirse a la definición precedente.

Se puede decir también que T tiene la valencia γ, donde γ es un entero positivo, negativo o nulo, si denotando con Y, Y' los grupos de puntos homólogos en la T de dos puntos cualesquiera de C, siempre es

$$Y + \gamma a \equiv Y' + \gamma a'.$$

Si la curva C no es racional, la correspondencia T no podrá admitir una segunda valencia diversa de γ. En efecto, si la T posee otra valencia γ', tendríamos

$$Y + \gamma' a \equiv Y' + \gamma' a',$$

que, restada de la precedente, da

$$(\gamma - \gamma')a \equiv (\gamma - \gamma')a',$$

o sea

$$Ka \equiv K'a',$$

donde K es un entero positivo (no nulo). La serie lineal g^r_K, que contiene todos los grupos Ka, no estará compuesta con una involución; así que podrá imaginarse cortada sobre una curva Γ de orden K, por los hiperplanos de su espacio S_r. Puesto que en un hiperplano osculador a la Γ en un punto genérico tiene con ella un contacto r-punto, resultará $K = r$, y la Γ será una curva racional (normal). Por tanto, *sobre una curva de género* $p > 0$ *una correspondencia no puede tener dos valencias distintas.*

La suma de dos correspondencias con valencias γ_1, γ_2, *tiene la valencia* $\gamma_1 + \gamma_2$.

Sean T_1 y T_2 las dos correspondencias; Y_1, Y'_1, los grupos de puntos homólogos de a, a' en la T_1; Y_2, Y'_2, los grupos de los homólogos de a, a' en la T_2; tendremos

$$Y_1 + \gamma_1 a \equiv Y'_1 + \gamma_1 a', \qquad Y_2 + \gamma_2 a \equiv Y'_2 + \gamma_2 a';$$

sumando se obtiene

$$(Y_1 + Y_2) + (\gamma_1 + \gamma_2) a \equiv (Y'_1 + Y'_2) + (\gamma'_1 + \gamma'_2)\, a'. \qquad \text{c. q. d.}$$

El producto de dos correspondencias de valencias γ_1, γ_2 *tiene la valencia* $-\gamma_1\gamma_2$.

Llamemos $y_1 \ldots y_\beta$ los puntos del grupo Y_1; $y'_1 \ldots y'_\beta$, los del Y'_1, y Y_{2i}, Y'_{2i}, los grupos de los homólogos de y_i, y'_i en la T_2. Se tendrá entonces

$$Y_1 + \gamma_1 a \equiv Y'_1 + \gamma_1 a', \qquad Y_{2i} + \gamma_2 y_i \equiv Y'_{2i} + \gamma_2 y'_i, \qquad (i = 1, \ldots, \beta).$$

De éstas se deducen las relaciones

$$\gamma_2 Y_1 + \gamma_1\gamma_2 a \equiv \gamma_2 Y'_1 + \gamma_1\gamma_2 a', \qquad \sum_{i=1}^{\beta} Y_{2i} + \gamma_2 Y_1 \equiv \sum_{i=1}^{\beta} Y'_{2i} + \gamma_2 Y'_1.$$

Restando la primera de la segunda, se obtendrá, como se quería,

$$\sum Y_{2i} - \gamma_1\gamma_2 a \equiv \sum Y'_{2i} - \gamma_1\gamma_2 a'.$$

Si sobre la curva C se considera una g^1_n y se llaman homólogos de un punto a variable sobre C los puntos que junto con él dan un grupo de la g^1_n, se tiene una correspondencia involutiva con valencia 1, que llamaremos una *correspondencia elemental* (con valencia).

La suma de γ correspondencias elementales ($\gamma > 0$) da una correspondencia con valencia γ; del producto de tal correspondencia con una correspondencia elemental resulta una correspondencia con valencia $-\gamma$. Y si se hace la suma de una correspondencia de valencia γ con una de valencia $-\gamma$, se obtiene una correspondencia con valencia cero.

Por tanto, *sobre toda curva existen correspondencias con valencia arbitraria (positiva, negativa o nula)*. Y además, *si una correspondencia posee valencia, su inversa tiene la misma valencia;* esto último se justifica observando ante todo que la inversa de la correspondencia S, suma de K (> 0) correspondencias elementales, tiene valencia K, y que la inversa del producto de S por una correspondencia elemental tiene la valencia $-K$; luego si T es una correspondencia cualquiera de valencia γ (positiva o negativa), y X, X' son los grupos de los homólogos de a, a' en la T^{-1}, y si T_1 es otra correspondencia con valencia $-\gamma$, compuesta por medio de correspondencias elementales, y X_1, X_1' son los grupos de los homólogos de a, a' en la T_1^{-1}, entonces la suma $T + T_1$ tiene la valencia cero, y la correspondencia

$$(T + T_1)^{-1} = T^{-1} + T_1^{-1}$$

también tendá valencia nula, y por tanto subsistirá la relación

$$X + X_1 \equiv X' + X'_1,$$

por ser

$$X_1 - \gamma a \equiv X_1' - \gamma a'.$$

Restando de la segunda la primera,

$$X + \gamma a \equiv X' + \gamma a'. \qquad \text{c. q. d.}$$

§ 2. Representación trascendente y curvas canónicas.

1. Recordemos ahora brevemente la representación trascendente de Hurwitz de las correspondencias algebraicas [1], para luego demostrar, utilizando estos resultados, que sobre toda curva de módulos generales y género p cualquiera no existen más que correspondencias con valencia.

Sea C una curva algebraica irreducible de género p, y consideremos su superficie de Riemann correspondiente (v. Klein-Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, tomo II, página 518, o Baker, *Abel's theorem and the allied theory*, pág. 639).

Indicaremos con

$$(S_1, S_{p+1}), (S_2, S_{p+2}) \ldots, (S_p, S_{2p}),$$

p pares de retrosecciones riemannianas de dicha superficie de Riemann y con

$$\omega_{h1}, \omega_{h2}, \ldots \omega_{h2p}$$

[1] Hurwitz: «Über algebraische Korrespondenzen und das verallgemeinerte Korrespondenzprinzip.» *Math. Annalen*, Bd. 28, 1886, pág. 561; y también «Über diejenigen algebraischen Gebilde welche eindeutige Transformationen in sich zulassen.» *Math. Annalen*, Bd. 31, 1888, pág. 290.

los períodos normales a lo largo de los ciclos S de una integral abeliana de primera especie u_h perteneciente a C. Demostraremos que entre dichos períodos normales no pueden existir p relaciones del tipo

$$\sum_{i=1}^{2p} a_i \omega_{h\,i} = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

para valores reales, no todos nulos de las a. Este lema es la generalización del que se encuentra en el libro antes citado de Klein-Fricke, Bd. II, pág. 540, ya que en éste se limita a considerar el que las integrales u_h sean también normales.

Supongamos que entre las ω existan relaciones del tipo citado. Formemos las p integrales normales de primera especie $I_1\, I_2 \ldots I_p$ correspondientes a las retrosecciones S; esto es, establezcamos que

$$I_h = \lambda_{h\,1} u_2 + \lambda_{h\,2} u_2 + \ldots + \lambda_{h\,p} u_p \; (h = 1, 2, \ldots, p),$$

en donde las λ satisfacen a las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{h1}\omega_{1i} + \lambda_{h2}\omega_{2i} + \ldots + \lambda_{h\,p}\omega_{p\,i} = 0 \\ \lambda_{h1}\omega_{1h} + \lambda_{h2}\omega_{2h} + \ldots + \lambda_{h\,p}\omega_{p\,h} = 0 \end{array}\right. (i = 1, 2, \ldots h - 1, h + 1, \ldots, p).$$

Si además hacemos

$$\tau_{h\,r} = \lambda_{h\,1}\omega_{1\cdot p+r} + \lambda_{h\,2}\omega_{2\cdot p+r} + \ldots + \lambda_{h\,p}\omega_{p\cdot p+r} \; (r = 1, 2, \ldots, p),$$

las τ serán los períodos de las integrales normales de los ciclos $S_{p+1}, \ldots, S_{2p}$, y entre ellos, como es bien sabido, existirán las relaciones

$$\tau_{h\,r} = \tau_{r\,h}. \tag{1}$$

Multiplicando ahora los dos miembros de $\sum_{i=1}^{2p} a_i \omega_{h\,i} = 0$ por $\lambda_{r\,h}$, y sumando respecto del índice h de 1 a p, tendremos

$$\sum_{i=1}^{2p} a_i \sum_{h=1}^{p} \lambda_{r\,h}\omega_{h\,i} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, p).$$

Ahora, como $\sum_{h=1}^{p} \lambda_{r\,h}\omega_{h\,i}$ es el período de I_r a lo largo del ciclo S_i, se obtiene finalmente

$$a_r + \sum_{i=1}^{p} a_{p+i}\tau_{r\,i} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, p). \tag{2}$$

Formando la integral de primera especie

$$\mathcal{J} = a_{p+1} I_1 + \dots + a_{2p} I_p,$$

cuyo período a lo largo de S_r $(r = 1, 2, \dots p)$ es a_{p+r}, en virtud de (1) y (2), su período a lo largo de S_{p+i} $(i = 1, \dots p)$ es $-a_i$; así que $\mathcal{J}$, que tiene todos sus períodos reales, debe reducirse a una constante y las a deben ser todas nulas. Por tanto, si existen relaciones del tipo supuesto entre las ω para valores reales de las a, éstas deben ser todas nulas.

Este lema establecido, sea una correspondencia algebraica T de índices (α, β) que permita pasar de un punto x a β puntos y, mientras su inversa T^{-1} hace pasar de y a α puntos x. Es bien sabido que los valores de una integral u_h en los β puntos $y', y'', \dots y^{(\beta)}$, correspondientes a x, dan una integral de primera especie en el punto x, y por tanto, se tendrá

$$u_h(y') + \dots + u_h(y^{(\beta)}) = \sum_{i=1}^{p} \pi_{hi} u_i(x) + \pi_h$$

(módulos, los períodos),

donde las π son constantes, independientes de la posición de x. Si hacemos describir a x el ciclo S_r $(r = 1, 2, \dots 2p)$, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{p} \pi_{hi} \omega_{ir} = \sum_{i=1}^{2p} a_{ir} \omega_{hi} \quad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \dots, 2p \\ h = 1, 2, \dots, p \end{pmatrix} \tag{3}$$

en las cuales las a dependen sólo del ciclo considerado.

Como el determinante de los períodos ω en los ciclos $S_1, S_2 \dots S_p$ es $\neq 0$, resolvamos las p primeras ecuaciones (3) para un valor de h fijo, respecto a $\pi_{h1}, \dots \pi_{hp}$; del mismo modo el grupo de p ecuaciones siguiente se podrá resolver respecto a las mismas π, puesto que el determinante de los períodos ω correspondientes a los ciclos $S_{p+1}, \dots S_{2p}$ es $\neq 0$. Entre los dos grupos de relaciones se pueden eliminar las π y obtendremos p^2 relaciones algebraicas del tipo

$$R_{hl}(a, \omega) = 0 \quad (h, l = 1, 2, \dots, p). \tag{4}$$

Precisamente estas relaciones se reducen a *identidades* cuando la correspondencia T sobre C tiene *valencia*. (La demostración es fácil y puede verse, bien en las memorias citadas de Hurwitz o en la obra de Klein-Fricke.) Vemos, pues, cómo una vez elegidas las integrales u_h y los ciclos normales S_r, toda correspondencia *individualiza* los valores a de los enteros a, que llamaremos *enteros característicos* de la T.

Podemos ahora probar que justamente *para una curva de módulos generales las relaciones del tipo* (4) *se reducen necesariamente a identidades.*

Supongamos, en efecto, que sucediera lo contrario; esto es, que para un valor $a = a_0$ las relaciones citadas fueran válidas para cualquier curva C del género p, suponiendo la solución $a = a_0$ no idéntica. Entonces esas relaciones subsistirán indudablemente en el caso particular en que C varíe dentro de un sistema lineal de dimensión 2 al menos, y definido sobre una superficie regular [1] S. Sean, pues, $u_1, u_2, \ldots, u_p$, p integrales abelianas de primera especie, *racionalmente* especificadas sobre C [fijando p curvas adjuntas linealmente independientes, cosa posible, puesto que el sistema (C') adjunto a (C) determina sobre la C la serie canónica completa [2]], y sean las ω los períodos de estas integrales definidos así. Sobre toda curva C los ciclos S están determinados, salvo respecto a las sustituciones lineales (de módulo ± 1 y coeficientes enteros), de un cierto grupo G, que no es otro que el grupo correspondiente a la ecuación diferencial de Fuchs-Picard, de orden $2p$, a la cual satisfacen los períodos de una integral abeliana u, dada racionalmente sobre la C del sistema lineal [3], y cuyos coeficientes son funciones de λ, parámetro que determina C; así, pues, los períodos $\omega_{h1}\ \omega_{h2} \ldots \omega_{h2p}$ de las integrales u_h $(h = 1, \ldots, p)$ se transforman en las circulaciones o ciclos de C por las sustituciones de G. Representemos λ en un plano complejo y marquemos los puntos $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\delta$ co-

[1] Una superficie se llama regular cuando su género aritmético es igual a su género geométrico. En el caso en que ambos sean diferentes, la superficie se llama irregular y la diferencia entre dichos números indica la irregularidad, que desde un punto de vista trascendente no es más que el número de integrales simples de primera especie independientes y el doble del de integrales simples de segunda especie independientes, poseídas por la superficie.

[2] Véase a este propósito la memoria de Castelnuovo: *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* Memorias de la Sociedad Italiana de las Ciencias, serie 3.ª, tomo x (1896), núm. 7.

[3] Véase Picard Simart: *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* tomo I, pág. 93 y siguientes; tomo II, pág. 387 y siguientes, y páginas 421-24.

rrespondientes a C_0 (género mayor que p) y a las δ curvas $C_1 \dots C_\delta$ de género $p - 1$; entonces, según ya estableció Picard, estos puntos $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\delta$ son los puntos críticos de la ecuación diferencial citada, a cada uno de los cuales corresponde una raíz doble de la ecuación determinante fundamental, y si $\bar{S}_i$ es el ciclo lineal bien definido de C_0 que envuelve a los dos puntos de ramificación que tienden a coincidir cuando $\lambda \longrightarrow \lambda_i$ a lo largo del lazo $\lambda_0 \lambda_i$, en los ciclos $\bar{S}$ hay precisamente $2p$ linealmente independientes distintos, con los cuales se puede formar un sistema de p retrosecciones. Entonces, siendo $\omega_1, \dots \omega_{2p}$ los períodos de u a lo largo de los ciclos $S_1, \dots S_{2p}$, cada uno de ellos $\omega_l(\lambda)$ es una función holomorfa de λ en el entorno de uno o más puntos críticos, de λ_l por ejemplo; asociaremos a $\omega_l(\lambda)$ otro período $\omega_m(\lambda)$, $(m \neq l)$, no holomorfo en el entorno de λ_l, pero tal que, al recorrer el lazo $\lambda_0 \lambda_l$, ω_m, se cambie en $\omega_l(\lambda) + \omega_m(\lambda)$, mientras que los demás períodos permanecen invariantes. Se obtiene así entre los ciclos S la substitución

$$(S_{lm}) \begin{cases} S'_m \sim S_l + S_m \\ S'_i \sim S_i \end{cases} \qquad (i \neq m).$$

(El signo $\sim$ se leerá *homólogo de*, y está usado en el sentido que le da Poincaré en sus trabajos de *Analysis Situs;* v. Severi, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, pág. 218 y siguientes). El grupo G está formado por estas sustituciones.

Una vez fijados con precisión los períodos de las p integrales abelianas de primera especie $u_1, \dots u_p$, apliquemos el teorema de Abel y tendremos las relaciones

$$u_h(y') + u_h(y'') + \dots + u_h(y^{(p)}) = \sum_{i=1}^{p} \pi^0_{hi} u_h(x) + \pi^0_h \quad (h = 1, 2, \dots p),$$

donde π^0_{hi} son los valores de π_{hi} para $a = a_0$ (3), π^0_h son constantes y $x\,y'\,y'' \dots y^{(p)}$ son puntos variables sobre C. Estas relaciones así determinadas definen sobre C un sistema continuo ∞^p de correspondencias algebraicas de T, de índices (α', p), y que al mismo tiempo que C varían con continuidad; esto no es conciliable con la hipótesis de que la solución $a = a_0$ de las (4) no sea idéntica, y, por tanto, es absurdo el supuesto hecho, c. q. d.

2. *Curvas canónicas del género* p.—Antes de terminar estableceremos un teorema sobre las curvas canónicas de género p, que hemos de utilizar en nuestra *Tesis* para la demostración algebraico-geométrica de la anterior proposición. El lector puede ponerse al corriente de la terminología empleada, bien estudiando la citada obra del profesor Severi o leyendo la Memoria del Dr. Fernández Baños, publicada en la *Revista de la Academia de Ciencias*, de Madrid (1921), en la cual se encuentra un resumen de las cuestiones fundamentales de Geometría algebraica.

Demostraremos que *el conjunto* M *de las curvas canónicas de género* p *contiene a todas las curvas racionales de orden* 2p — 2 *y con* p *puntos dobles situados en un espacio* E_{p-1}.

En efecto, todas las curvas canónicas C de género p, pertenecientes a un E_{p-1}, forman una variedad irreducible, puesto que lo es la familia de curvas de género dado [1], y además porque dos curvas canónicas birracionalmente equivalentes son colineales. Determinemos la dimensión d de la variedad; la obtendremos añadiendo al número $3p - 3$ de módulos de una curva de género p el número de parámetros $p^2 - 1$ de una colineación en un E_{p-1}; luego

$$d = (p^2 - 1) + 3p - 3 = (p - 1)(p + 4).$$

Si proyectamos ahora la curva general C desde un S_{p-4} (espacio de unión de $(p - 3)$ puntos de C) sobre un plano, obtenemos sobre éste una curva normal C' de orden $n = p + 1$ y con

$$h = \frac{p(p-1)}{2} - p = \frac{p(p-3)}{2}$$

puntos dobles [2], la cual, al variar C dentro de la variedad irreducible M, describe un sistema irreducible también de curvas C'. Una de estas curvas irreducibles es necesariamente especial, puesto que para la serie g^2_n determinadas sobre C' por las rectas del plano se verifica

[1] Véase para demostración Klein: *Über Riemannsche Theorie der algebraischen Funktionen*, Leipzig, 1882 (Gesammelte Abhandlungen. Springer), o *Riemannsche Fläche* (Autogr. Vorlesungen Göttingen, 1894). También Severi: *Vorlesungen u. alg. Geom.*, págs. 340 y 158.

[2] Severi: *Obra cit.*, pág. 85.

que $n - 2 < p$; esa serie $g^2{}_n$ está contenida como parte en la serie canónica g^{p-1}_{2p-2}; es decir, que una curva normal de orden n y con h puntos dobles se puede siempre obtener por proyección de una curva canónica C desde un espacio que una $p - 3$ puntos de C. Ahora bien: al anterior sistema irreducible pertenecen las curvas C'_n irreducibles de orden $p + 1$ y con $h + K$ puntos dobles ($K = 1, \ldots p$); luego en el caso $K = p$ se obtiene la familia de curvas racionales de orden $2p - 2$ con p puntos dobles.