UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Ecuaciones Funcionales

TESIS DOCTORAL

Lt - Equivalencia

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Juan Carlos Martínez Alonso

Madrid, 2015

Juan Carlos Martínez Alonso

L_t - EQUIVALENCIA

Departamento de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1984

Colección Tesis Doctorales. Nº 214/84

Edita e imprime la Editorial de la Universidad Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1984
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-20416-1984

U N I V E R S I D A D   C O M P L U T E N S E   D E   M A D R I D

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES FUNCIONALES

L_t-EQUIVALENCIA

Director: Jörg Flum, Profesor del Departamento de Lógica y Fundamentos de la Matemática de la Universidad de Friburgo (Alemania).

Ponente: Alberto Dou, Catedrático del Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad Complutense de Madrid.

Memoria que presenta Juan Carlos Martínez Alonso para optar al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Madrid, 1983

INDICE GENERAL

INTRODUCCION

El tema sobre el que trata nuestro trabajo es la equivalencia en los lenguajes topológicos formales. Estos fueron introducidos a mediados de la década de los años setenta y con ellos se produjo, en realidad, el nacimiento de la Teoría de Modelos Topológicos, cuya finalidad se centra en el estudio de las estructuras topológicas mediante dichos lenguajes. Una estructura topológica es un par (A,σ), donde A es una estructura algebraica y σ es una topología sobre A. A partir de $L_{\omega\omega}$ se introduce el lenguaje topológico de primer orden $(L_{\omega\omega})_t$, en el cual se permite, dicho de manera intuitiva, la cuantificación sobre entornos suficientemente pequeños de un punto. De manera análoga, se introducen los lenguajes topológicos infinitarios $(L_{\omega_1\omega})_t$ y $(L_{\infty\omega})_t$. Cualquier sentencia ϕ de un lenguaje topológico es invariante respecto a bases. Esto es, para cualquier estructura topológica (A,σ) y cualquier σ_o base de σ, se tiene:

$$(A,\sigma) \models \phi \iff (A,\sigma_o) \models \phi .$$

En [12, 1ª parte] se demuestra que es posible dar un tratamiento paralelo a la Teoría de Modelos Clásica y a la Teoría de Modelos Topológicos. Se prueba que los teoremas de compacidad, completitud, Löwenheim-Skolem, Lindström e interpolación son generalizables al contexto topológico, al igual que la técnica de los juegos de Ehrenfeucht. No obstante, algunos resultados interesantes en el contexto clásico no son generalizables al contexto topológico. Por ejemplo, el teorema de isomorfismo de Scott.

Tratemos ahora el contenido del trabajo. En 1.1 incluimos las nociones y teoremas centrales de la Teoría de Modelos Topológicos, así como algunos otros resultados de [12, 1ª parte], que nos serán de utilidad a lo largo del trabajo. Esta sección 1.1 concluye con un pequeño estudio sobre las sentencias invariantes respecto a subbases.

En nuestro escrito, L_t simboliza un cierto lenguaje topológico. En 1.2 estudiamos el problema de la definabilidad y la L_t-preservación, para lo cual introducimos la generalización del teorema de Feferman al contexto topológico, cuya demostración, al seguir las mismas directrices que [7], es omitida. Se deduce de inmediato que operaciones como la suma y el producto son $(L_{\omega\omega})_t$-definibles y preservan la $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia. Otras operaciones requieren un estudio más detallado. La operación que a un álgebra de Boole le hace corresponder su espacio de Stone no preserva la equivalencia elemental; sin embargo, la operación inversa sí preserva dicha equivalencia. Para demostrar estos hechos nos apoyamos en la caracterización de la equivalencia elemental para álgebras de Boole de [5]. Mostramos una operación que preserva la $(L_{\omega_1\omega})_t$-equivalencia y no preserva la $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia, que es $(L_{\omega_1\omega})_t$-definible y no es $(L_{\omega\omega})_t$-definible. Esta es la que a una estructura topológica (A,σ) le hace corresponder (A,σ^+), siendo σ^+ la menor topología T_1 que contiene a σ. Demostramos que la compactificación con un punto no preserva la $(L_{\infty\omega})_t$, $(L_{\omega_1\omega})_t$, $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia y que, por tanto, no es $(L_{\omega_1\omega})_t$-definible. Por otra parte, se deduce de inmediato que la compactificación de Stone-Čech tampoco es $(L_{\omega_1\omega})_t$-definible.

El segundo capítulo representa, a nuestro entender, una gene ralización al contexto topológico de la técnica de los funtores de Feferman, expuesta en [8]. En 2.1 introducimos la noción de κ-funtor topológico local, siendo κ un cardinal cualquiera ≥ 2. Un funtor topológico es una operación $F : \Pi_I C_i \longrightarrow \mathcal{D}$, donde C_i, $\mathcal{D}$ son clases formadas por estructuras topológicas y por homeomorfismos parciales entre dichas estructuras. Dicho de manera intuitiva y ciñéndonos al caso en el que I es un conjunto unitario, $F : C \longrightarrow \mathcal{D}$ es un κ-funtor topológico local si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) F preserva la relación $\subseteq$ para homeomorfismos parciales.

(ii) Para cualquier $(A,\sigma) \in C$, se tiene que todo abierto de $F((A,\sigma))$ depende de un número finito de abiertos de (A,σ).

(iii) Para cualquier $(A,\sigma) \in C$, se tiene que todo subconjunto de elementos de $F((A,\sigma))$ de cardinal $< \kappa$ depende de un subconjunto de elementos de (A,σ) de cardinal $< \kappa$.

Los fragmentos $(L^{\alpha}_{\infty\kappa})_t$ no se definen a partir del concepto de rango de una fórmula, sino de un concepto similar, al que denominamos característica de una fórmula. La razón estriba en que en la definición de los homeomorfismos parciales consideramos continuidad, y ésta no puede ser tratada con fórmulas de rango cero. El contenido del teorema de preservación es el siguiente: si F es un κ-funtor topológico local, F preserva la $(L_{\infty\kappa})_t$, $(L^{\alpha}_{\infty\kappa})_t$-equivalencia.

En 2.2 mostramos una serie de aplicaciones. La complección para grupos métricos es un ω_1-funtor topológico local y preserva, por tanto, la $(L_{\infty\omega_1})_t$-equivalencia. La geometría de variedades de dimen sión finita para espacios vectoriales topológicos es un ω-funtor topológico local. Las restantes aplicaciones se refieren a los productos generalizados topológicos más usuales. Se tiene que el producto con la topología usual, el producto con la topología caja, la suma directa, la suma y el producto reducido son 2-funtores topológicos locales. La sección 2.2 termina con una generalización inmediata al contexto topológico de los resultados de preservación para productos reducidos de [11] y [21].

Estimamos que en el tercer capítulo, especialmente en 3.3, se encuentran los resultados más interesantes del trabajo. El objeto de este capítulo son los espacios T_3, los cuales son denotados por A,B,... .En este punto cambia la notación con respecto a los dos capítulos precedentes, en los que tales símbolos representan estructuras algebraicas. En la sección 3.1, que es muy breve, incluimos algunos resultados sobre espacios T_3 de [12, 2ª parte], que nos serán de utilidad a lo largo del capítulo. Entre ellos, se encuentra la caracterización de la $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia para espacios T_3 mediante los tipos de Flum-Ziegler.

En la sección 3.2 demostramos algunos resultados de preservación para productos de espacios T_3 con la topología caja. Si $\langle A_i \rangle_I$ es una familia de espacios T_3, denotamos por $X_I A_i$ al producto de los espacios A_i con la topología caja. Definimos para todo $n \in \omega - \{0\}$ una función producto x^n sobre el conjunto de n-tipos en el sentido Flum-Ziegler, tal que para cualquier familia $\langle A_i \rangle_I$ de espacios T_3 y cualquier $(a_i)_I \in X_I A_i$: si el n-tipo de a_i en A_i es α_i $(i \in I)$, el n-tipo de $(a_i)_I$ en $X_I A_i$ es $x_I^n \alpha_i$.

Este resultado es el teorema básico. Definimos para todo $n \in \omega - \{0\}$ un orden lineal $<^n$ sobre el conjunto de n-tipos en el sentido Flum-Ziegler satisfactibles. Demostramos que para cualquier familia $\langle\alpha_i\rangle_I$ de n-tipos satisfactibles y cualquier $J \subseteq I$, se tiene que $x^n_J\alpha_j \leq^n x^n_I\alpha_i$. Este resultado contrasta con lo que sucede en el contexto clásico, ya que los tipos de Hintikka-Fraissé, que caracterizan la equivalencia elemental, dan lugar a un álgebra de Boole (véase [5, capítulo 6] y [14]). Se tiene que el orden lineal $<^n$ no es siempre único con respecto al anterior resultado. Nosotros utilizamos el nombre de función decidible en lugar del más comúnmente utilizado de función efectivamente computable. Mediante la función x^n, construimos una función decidible $p : (L_{\omega\omega})_t \longrightarrow \omega$, tal que para cualquier sentencia ϕ de $(L_{\omega\omega})_t$ y cualquier familia $\langle A_i\rangle_I$ de espacios T_3, se tiene:

$X_I A_i \models \phi \implies$ existe $I_o \subseteq I$ con card $(I_o) = p(\phi)$, tal que para todo $I' \subseteq I$ con $I_o \subseteq I'$ se tiene que $X_{I'} A_i \models \phi$.

Es decir, p verifica el teorema de Feferman-Vaught de [9]. Por otra parte, se deduce de inmediato que si consideramos productos de espacios T_3 con la topología usual, no es posible encontrar una función que cumpla dicho teorema. Como la teoría de espacios T_3 es decidible, se prueba fácilmente que cualquier función decidible que cumpla el teorema de Feferman-Vaught para espacios T_3 se puede optimizar de una manera efectiva.

En la sección 3.3 introducimos la noción de conjunto accesible. A partir de este concepto, definimos los tipos para $(L_{\omega_1\omega})_t$.

Mediante ellos, caracterizamos la $(L_{\omega_1\omega})_t$-equivalencia para la clase de los espacios T_3 de tipo finito. Demostramos, por último, que dicha clase está estrictamente contenida en la clase de los espacios T_3 de tipo finito en el sentido Flum-Ziegler. Para introducir la noción de conjunto accesible, definimos previamente para todo A espacio T_3, A^* subconjunto de puntos de A y $n \in \omega$ un juego $J_n(A^*,A)$ de n jugadas entre los participantes I y II. En cada jugada, el participante I escoge un número natural r y una secuencia finita $a_1,\ldots,a_r$ de puntos de A y, a continuación, el participante II escoge una secuencia finita $U_1 \ni a_1,\ldots,U_r \ni a_r$ de abiertos de A. El jugador I vence en $J_n(A^*,A)$, si al final del juego el conjunto A^* queda cubierto por los abiertos escogidos por II a lo largo de las n jugadas. Decimos que A^* es accesible, si existe $n \in \omega$ tal que I tiene una estrategia de victoria en $J_n(A^*,A)$. Para cualquier $a \in A$, decimos que A^* converge contra a, si a es punto de acumulación de A^*. A partir de la noción de conjunto accesible, establecemos una clasificación de las formas de convergencia. Si A^* converge contra a, distinguimos las tres siguientes posibilidades:

(a) A^* es accesible.

(b) A^* no es accesible, y existe un abierto $U \ni a$ tal que $A^* \cap U$ es accesible.

(c) Para todo abierto $U \ni a$, $A^* \cap U$ no es accesible.

A partir de esta clasificación de las formas de convergencia, definimos los tipos para $(L_{\omega_1\omega})_t$. Para todo $n \in \omega$ definimos un con junto finito S_n de tipos. Para todo A espacio T_3 y $a \in A$ definimos el n-tipo de a en A, $s_n(a,A)$. Demostramos que ciertas propiedades de interés que cumplen los tipos de Flum-Ziegler para $(L_{\omega\omega})_t$ son verificadas por nuestros tipos. Sin embargo, y al contrario de lo que ocurre con los tipos para $(L_{\omega\omega})_t$, no es cierto en general que dados A espacio T_3, U abierto de A, $a \in U$ y $n \in \omega$, se tenga que $s_n(a,A) = s_n(a,U)$. Un tipo completo es una secuencia $(\alpha_n)_\omega$ con $\alpha_n \in S_n$ $(n \in \omega)$. En nuestro sentido, diremos que un espacio T_3 es de tipo finito, si el conjunto de los tipos completos satisfactibles en dicho espacio es finito. Este concepto es expresable en $(L_{\omega_1\omega})_t$, al serlo nuestros tipos. Para todo A espacio T_3 y $n \in \omega$ definimos la función $E_n^A : S_n \longrightarrow \omega \cup \{\infty\}$ por $E_n^A(\alpha)$ = número de elementos de A de n-tipo α. Consideramos la función $E^A = \bigcup_{n\in\omega} E_n^A$, que está bien definida. El teorema principal afirma que para todo A, B espacios T_3 numerables con A de tipo finito:

$$A \text{ y } B \text{ son homeomorfos} \iff E^A = E^B.$$

En la demostración de este resultado se prueba, en realidad, que es posible encontrar una estrategia de victoria del participante II en el juego de Ehrenfeucht de infinitas jugadas, a partir de ciertas propiedades de los conjuntos accesibles. Como consecuencia de este teorema, se tiene que todo espacio T_3 numerable de tipo finito tiene sentencia de Scott. Mediante una sencilla aplicación del teorema de Löwenheim-Skolem, demostramos que nuestros tipos caracterizan la $(L_{\omega_1\omega})_t$-equivalencia para la clase de los espacios T_3 de tipo finito. Mediante un contraejemplo, probamos que este resultado no es cierto, si no suponemos que uno de los dos espacios en cuestión es de tipo finito. La razón de este hecho estriba en que al efectuar el juego de Ehrenfeucht de infinitas jugadas para espacios T_3 numerables, el participante II no puede escoger entornos suficientemente pequeños. Es inmediato que todo espacio T_3 de tipo finito en nuestro sentido es de tipo finito en el sentido Flum-Ziegler. En el último apartado de esta sección 3.3 demostramos que el recíproco no es cierto. Para ello, construimos para todo número natural $n \geq 1$ un ω-árbol T^n con la topología inducida, que verifica más de n tipos completos en nuestro sentido y siempre los mismos tres tipos completos, exactamente, en el sentido Flum-Ziegler. Es suficiente, entonces, considerar la suma de los espacios T^n. Comprobamos, por último, que los llamados espacios T_3 de tipo finito en el sentido Flum-Ziegler sin convergencias mixtas (o espacios en el sentido Ahlbrand) son de tipo finito en nuestro sentido.

Deseo expresar, por último, mi sincera gratitud al Profesor Jörg Flum, del cual he recibido siempre estímulo y asesoramiento para realizar este trabajo.

CAPITULO I

LENGUAJES TOPOLOGICOS Y PRESERVACION

1.1. Preliminares.

Un tipo de similaridad es un conjunto de símbolos de predicado, de función y de constante. Los tipos de similaridad serán denotados por K, $K_1, K_2, \ldots$. Una estructura débil para K es un par (A,σ), donde A es una estructura para K en el sentido usual y σ es un conjunto de partes de A. Si σ es una topología, diremos que (A,σ) es una estructura topológica para K. Siempre que no haya lugar a confusión, omitiremos mencionar el tipo de similaridad.

Las estructuras algebraicas serán denotadas por A, $B, \ldots$.

Las nociones y resultados que vamos a mencionar en esta sección 1.1 están expuestos en [12, 1ª parte].

Designemos por $L_{\omega\omega}$ al lenguaje de primer orden. A partir de $L_{\omega\omega}$ se define el lenguaje de segundo orden $(L_{\omega\omega})_2$, añadiendo una serie de nuevas variables para conjuntos $W_o, W_1, \ldots$ (que denotaremos por X, $Y, \ldots$) y un símbolo $\in$ de dos argumentos, y añadiendo las dos siguientes reglas a las que tenemos en $L_{\omega\omega}$:

(i) Las expresiones del tipo $t \in X$ (donde t es un término y X una variable de conjunto) son fórmulas atómicas.

(ii) Si ϕ es una fórmula, $\exists X\phi$ y $\forall X\phi$ son fórmulas.

Muchos conceptos de la Topología son expresables en $(L_{\omega\omega})_2$.

Dicho lenguaje es reducible a uno de primer orden, cuyos modelos tienen dos universos. Por tanto, $(L_{\omega\omega})_2$ cumple los teoremas de compacidad, completitud y Löwenheim-Skolem. Sin embargo, estos teoremas centrales no se cumplen, si nos ceñimos a estructuras topológicas. No existe una sentencia ϕ de $(L_{\omega\omega})_2$, tal que para cualquier estructura débil (A,σ):

$$(A,\sigma) \models \phi \iff \sigma \text{ es una topología de } A.$$

Sin embargo, podemos encontrar una sentencia <u>bas</u> de $(L_{\omega\omega})_2$, tal que para cualquier estructura débil (A,σ):

$$(A,\sigma) \models \underline{bas} \iff \sigma \text{ es base de una topología de } A.$$

Dada una base σ de una topología de A, denotaremos por $\dot{\sigma}$ a la topología generada por σ.

1.1.1. <u>Definición</u>.- Sea ϕ una sentencia de $(L_{\omega\omega})_2$. Se dice que <u>ϕ es invariante respecto a bases</u>, si para cualquier estructura débil (A,σ) con σ base de una topología de A, se tiene:

$$(A,\sigma) \models \phi \iff (A,\dot{\sigma}) \models \phi.$$

Se dice que una fórmula de $(L_{\omega\omega})_2$ está en <u>forma normal negativa</u>, si el símbolo de negación tan sólo afecta a fórmulas atómicas. Por ejemplo,

$$\exists X \ \neg t \in X \ \vee (c \in X \ \wedge \neg c \in Y \ \wedge \ \exists y \ (y \in X \wedge y \in Y))$$

está en forma normal negativa. Cada fórmula ϕ tiene su forma normal negativa, la cual es una fórmula equivalente a ϕ. Se dice que <u>una fórmula ϕ de $(L_{\omega\omega})_2$ es positiva en una variable de conjunto X</u>, si cualquier subfórmula atómica del tipo $t \in X$ de la forma normal negativa de ϕ en la que X esté libre no está precedida por el símbolo de negación. Análogamente, se dice que <u>ϕ es negativa en X</u>, si cualquier subfórmula atómica del tipo $t \in X$ de la forma normal negativa de ϕ en la que X esté libre está precedida por el símbolo de negación.

1.1.2. <u>Definición</u>.- Se define <u>el lenguaje $(L_{\omega\omega})_t$</u>, a partir de las fórmulas atómicas de $(L_{\omega\omega})_2$, de las reglas de $L_{\omega\omega}$ y de la regla que expresa que para cualquier término t y cualquier fórmula ϕ:

1. Si ϕ es positiva en X, $\forall X\ (t \in X \longrightarrow \phi)$ es una fórmula.
2. Si ϕ es negativa en X, $\exists X\ (t \in X \wedge \phi)$ es una fórmula.

Escribiremos $\forall X \ni t\phi$, $\exists X \ni t\phi$ en lugar de $\forall X\ (t \in X \longrightarrow \phi)$, $\exists X\ (t \in X \wedge \phi)$, respectivamente. Obsérvese que $(L_{\omega\omega})_t$ es un sublenguaje de $(L_{\omega\omega})_2$.

Se puede demostrar (procediendo por inducción) que las sentencias de $(L_{\omega\omega})_t$ son invariantes respecto a bases. Por tanto, dadas dos bases σ_1, σ_2 de una misma topología sobre A y una sentencia ϕ de $(L_{\omega\omega})_t$, se tiene:

$$(A, \sigma_1) \models \phi \iff (A, \sigma_2) \models \phi.$$

Además, (véase [12, 1ª parte, sección 4]), toda sentencia de $(L_{\omega\omega})_2$ invariante respecto a bases es equivalente en estructuras topológicas a una sentencia de $(L_{\omega\omega})_t$.

El poder expresivo de $(L_{\omega\omega})_t$ es inferior al de $(L_{\omega\omega})_2$. Por ejemplo, la conexión no es expresable en $(L_{\omega\omega})_t$. Sin embargo, muchas nociones topológicas son expresables en este lenguaje. Veamos algunas. El concepto de base de una topología se puede expresar por

$$\underline{\text{bas}} = \forall x \;\; \exists X \ni x \;\; \forall x \;\; \forall X_1 \ni x \;\; \forall X_2 \ni x \;\; \exists Y \ni x \;\; \forall y \;\; (\neg y \in Y \lor (y \in X_1 \land y \in X_2)).$$

De esta forma, para cualquier estructura débil (A,σ), tenemos:

$$(A,\sigma) \models \underline{\text{bas}} \iff \sigma \text{ es base de una topología de } A.$$

Si f es un símbolo de función de n argumentos, la continuidad de f es expresable por

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \;\; \forall X \ni f(x_1,\ldots,x_n) \;\; \exists X_1 \ni x_1 \ldots \exists X_n \ni x_n \; \forall y_1 \ldots \forall y_n$$
$$((y_1 \in X_1 \land \ldots \land y_n \in X_n) \longrightarrow f(y_1,\ldots,y_n) \in X).$$

Otros conceptos de interés expresables en $(L_{\omega\omega})_t$ son T_o, T_1, T_2, regularidad, T_3 y los conceptos de topología discreta y topología trivial. Las sentencias correspondientes son las siguientes:

$$\underline{T_o} = \forall x \forall y \;(x \neq y \longrightarrow \exists X \ni x \;(y \notin X) \lor \exists Y \ni y \;\;(x \notin Y)).$$

$$\underline{T_1} = \forall x \forall y \;\;(x \neq y \longrightarrow \;\; \exists X \ni x \;\;(y \notin X)).$$

$$\underline{T_2} = \forall x \forall y \;\;(x \neq y \longrightarrow \;\; \exists X \ni x \;\; \exists Y \ni y \;\;(\text{"}X \cap Y = \emptyset\text{"})).$$

$$\underline{\text{reg}} = \forall x \forall X \ni x \;\; \exists Y \ni x \; \forall z \;\;(z \notin X \longrightarrow \;\; \exists Z \ni z \;\;(\text{"}Z \cap Y = \emptyset\text{"})).$$

$$\underline{T_3} = \underline{\text{reg}} \land \underline{T_2}.$$

$$\underline{\text{disc}} = \forall x \;\; \exists X \ni x \;\; \forall y \;\;(y \in X \longrightarrow \;\; y = x).$$

$$\underline{\text{triv}} = \forall x \; \forall X \ni x \;\; \forall y \;\;(y \in X).$$

Naturalmente, $t_1 \neq t_2$, $t \notin X$ son abreviaturas de $\neg t_1 = t_2$, $\neg t \in X$. Otros conceptos expresables en $(L_{\omega\omega})_t$ son el de grupo topológico y el de cuerpo topológico. El primero de ellos tiene como tipo de similaridad a $\{+, -, 0\}$, donde $+$ es un símbolo de función de dos argumentos y $-$ es un símbolo de función de un argumento, que representa la función inversa. Los grupos topológicos son aquellas estructuras topológicas que son modelos de los axiomas de grupo y de las sentencias "$+$ es continua" y "$-$ es continua".

Obsérvese que si una variable de conjunto X está libre en una subfórmula ϕ de una sentencia de $(L_{\omega\omega})_t$, se tiene que X es positiva en ϕ o X es negativa en ϕ. Si las variables libres de ϕ están comprendidas entre $x_1,\ldots,x_n$, $X_1,\ldots,X_r$, $Y_1,\ldots,Y_s$ y ϕ es positiva en $X_1,\ldots,X_r$ y negativa en $Y_1,\ldots,Y_s$, escribiremos $\phi(x_1,\ldots,x_n, X_1^+,\ldots,X_r^+, Y_1^-,\ldots,Y_s^-)$ o, más abreviadamente, $\phi(\overline{x},\overline{X}^+,\overline{Y}^-)$.

Diremos que <u>una estructura topológica (A,σ) es numerable</u>, si A es numerable y σ tiene una base numerable.

1.1.3. <u>Definición</u>.- (a) Se define <u>el lenguaje $(L_{\omega_1\omega})_t$</u>, a partir de las fórmulas y reglas de $(L_{\omega\omega})_t$ y de la siguiente regla:

Si Φ es un conjunto no vacío y numerable de fórmulas de $(L_{\omega_1\omega})_t$, $\bigwedge\Phi$ y $\bigvee\Phi$ son fórmulas de $(L_{\omega_1\omega})_t$.

(b) Se define <u>el lenguaje $(L_{\infty\omega})_t$</u>, a partir de las fórmulas y reglas de $(L_{\omega\omega})_t$ y de la siguiente regla:

Si Φ es un conjunto no vacío de fórmulas de $(L_{\infty\omega})_t$, $\bigwedge\Phi$ y $\bigvee\Phi$ son fórmulas de $(L_{\infty\omega})_t$.

De manera análoga, se introducen los lenguajes $(L_{\omega_1\omega})_2$ y $(L_{\infty\omega})_2$. Como las sentencias de $(L_{\infty\omega})_t$ son invariantes respecto a bases, para cualquier conjunto Φ de sentencias de $(L_{\infty\omega})_t$, se tiene:

Φ tiene un modelo topológico $\Longleftrightarrow$ $\Phi \cup \{\underline{bas}\}$ tiene un modelo débil.

Al lenguaje $(L_{\omega\omega})_t$ se le denomina lenguaje topológico de primer orden. A $(L_{\omega_1\omega})_t$ y $(L_{\infty\omega})_t$, lenguajes topológicos infinitarios.

Los tres siguientes teoremas son centrales en la Teoría de Modelos Topológicos.

1.1.4. <u>Teorema de compacidad</u>.- Sea Φ un conjunto de sentencias de $(L_{\omega\omega})_t$. Si toda parte finita de Φ tiene un modelo topológico, Φ tiene un modelo topológico.

1.1.5. <u>Teorema de completitud</u>.- Para cualquier tipo de similaridad recursivo, el conjunto de sentencias de $(L_{\omega\omega})_t$ que se cumplen en todas las estructuras topológicas es recursivamente enumerable.

1.1.6. <u>Teorema de Löwenheim-Skolem</u>.- (a) Sea Φ un conjunto de sentencias de $(L_{\omega\omega})_t$. Si Φ es numerable y tiene un modelo topológico, Φ tiene un modelo topológico numerable.

(b) Sea ϕ una sentencia de $(L_{\omega_1\omega})_t$. Si ϕ tiene un modelo topológico, ϕ tiene un modelo topológico numerable.

En este trabajo, L_t simboliza un cierto lenguaje topológico. Diremos que dos estructuras <u>(A,σ) y (B,τ) son L_t-equivalentes</u>, si verifican las mismas sentencias de L_t. Escribiremos, entonces, $(A,\sigma) \equiv^t (B,\tau)$. Si (A,σ) y (B,τ) son $(L_{\omega\omega})_t$-equivalentes, $(L_{\omega_1\omega})_t$-equivalentes, $(L_{\infty\omega})_t$-equivalentes, escribiremos $(A,\sigma) \equiv^t_{\omega\omega} (B,\tau)$, $(A,\sigma) \equiv^t_{\omega_1\omega} (B,\tau)$, $(A,\sigma) \equiv^t_{\infty\omega} (B,\tau)$, respectivamente.

1.1.7. <u>Definiciones</u>.- Sean (A,σ), (B,τ) estructuras débiles para un tipo de similaridad K.

(a) Un <u>homeomorfismo parcial en el sentido Flum-Ziegler</u> de (A,σ) a (B,τ) es una terna $h = (h^o, h^1, h^2)$, que cumple:

(i) h^o es un isomorfismo parcial de A a B. Esto es, una aplicación inyectiva con $\mathrm{dom}(h^o) \subseteq A$ y $\mathrm{rg}(h^o) \subseteq B$, tal que:

1. Si $R \in K$ y $\bar{a} \in \mathrm{dom}\,(h^o)$:

$$R^A\,\bar{a} \iff R^B\,h^o(\bar{a}).$$

($h^o(\bar{a})$ denota $h^o(a_1)\ldots h^o(a_n)$, en el supuesto $\bar{a} = a_1\ldots a_n$).

2. Si $f \in L$ y $\bar{a}, a \in \mathrm{dom}(h^o)$:

$$f^A(\bar{a}) = a \iff f^B(h^o(\bar{a})) = h^o(a).$$

(ii) $h^1, h^2 \subseteq \sigma \times \tau$, tales que:

1. Si $U h^1 V$, $a \in \mathrm{dom}(h^o)$ y $a \in U$, se sigue que $h^o(a) \in V$.

2. Si Uh^2V, $b \in rg(h^o)$ y $b \in V$, se sigue que $(h^o)^{-1}(b) \in U$.

(b) Se dice que <u>(A,σ) y (B,τ) son parcialmente homeomorfas</u>, si existe un conjunto no vacío I de homeomorfismos parciales en el sentido Flum-Ziegler de (A,σ) a (B,τ), de tal manera que se cumplen las siguientes condiciones:

(i) Si $h \in I$ y $a \in A$, existe $h' \in I$ con $h \subseteq h'$ (esto es, $h^o \subseteq h'^o$, $h^1 \subseteq h'^1$ y $h^2 \subseteq h'^2$) y $a \in dom(h'^o)$.

(ii) Si $h \in I$, $a \in dom\ (h^o)$, $U \in \sigma$ y $a \in U$, se sigue que existen $h' \in I$ y $V \in \tau$, tales que $h \subseteq h'$, $h^o(a) \in V$ y Uh'^2V.

(iii) Si $h \in I$ y $b \in B$, existe $h' \in I$ con $h \subseteq h'$ y $b \in rg(h'^o)$.

(iv) Si $h \in I$, $b \in rg(h^o)$, $V \in \tau$ y $b \in V$, se sigue que existen $h' \in I$ y $U \in \sigma$, tales que $h \subseteq h'$, $(h^o)^{-1}(b) \in U$ y Uh'^1V.

Escribiremos, entonces, $(A,\sigma) \simeq_p^t (B,\tau)$.

(c) Sea ξ un ordinal. Se dice que <u>(A,σ) y (B,τ) son ξ-parcialmente homeomorfas</u>, si existe una secuencia $(I_\eta)_{\eta<\xi}$ tal que I_η $(\eta < \xi)$ es un conjunto no vacío de homeomorfismos parciales en el sentido Flum-Ziegler de (A,σ) a (B,τ), de tal forma que se verifican las siguientes condiciones para $\eta' < \eta < \xi$:

(i) Si $h \in I_\eta$ y $a \in A$, existe $h' \in I_{\eta'}$ con $h \subseteq h'$ y $a \in dom(h'^o)$.

(ii) Si $h \in I_\eta$, $a \in dom(h^o)$, $U \in \sigma$ y $a \in U$, se sigue que existen $h' \in I_{\eta'}$ y $V \in \tau$, tales que $h \subseteq h'$, $h^o(a) \in V$ y Uh'^2V.

(iii) Si $h \in I_\eta$ y $b \in B$, existe $h' \in I_{\eta'}$ con $h \subseteq h'$ y $b \in rg(h'^o)$.

(iv) Si $h \in I_\eta$, $b \in rg(h^o)$, $V \in \tau$ y $b \in V$, se sigue que existen $h' \in I_{\eta'}$ y $U \in \sigma$, tales que $h \subseteq h'$, $(h^o)^{-1}(b) \in U$ y Uh'^1V.

Escribiremos, entonces, $(A,\sigma) \approx^t_\xi (B,\tau)$.

En [12, 1ª parte, sección 4] es generalizada el contexto topológico la técnica de los juegos de Ehrenfeucht. Dadas dos estructuras débiles cualesquiera (A,σ) y (B,τ), se introduce el juego $G((A,\sigma), (B,\tau))$ de infinitos movimientos o jugadas entre los participantes I y II, de la siguiente manera. Cada movimiento es de tipo x ó de tipo X. En la n-ésima jugada, el participante I escoge en primer lugar el tipo de movimiento. Si es de tipo x, el jugador I escoge un elemento $a_n \in A$ (o bien, un elemento $b_n \in B$) y, entonces, el jugador II escoge un elemento $b_n \in B$ (o bien, respectivamente, un elemento $a_n \in A$). Si el movimiento es de tipo X, el jugador I tiene que haber escogido en una jugada anterior un movimiento de tipo x. En este caso, el jugador I escoge un $i < n$, de tal manera que el movimiento i fue de tipo x, y un abierto $U_n \in \sigma$ con $a_i \in U_n$ (o bien, escoge $V_n \in \tau$ con $b_i \in V_n$). Entonces, el jugador II escoge un abierto $V_n \in \tau$ con $b_i \in V_n$ (o bien, escoge $U_n \in \sigma$ con $a_i \in U_n$). Sean:

$h^o = \{(a_n,b_n) \ / \ n \in \omega,$ el n-ésimo movimiento fue de tipo x, y los elementos a_n, b_n fueron tomados$\}$.

$h^1 = \{(U_n,V_n) \ / \ n \in \omega,$ el n-ésimo movimiento fue de tipo X, I tomó V_n y II tomó $U_n\}$.

$h^2 = \{ (U_n,V_n) \ / \ n \in \omega,$ el n-ésimo movimiento fue de tipo X, I tomó U_n y II tomó $V_n\}$.

Se dice que II tiene una estrategia de victoria en el juego $G((A,\sigma), (B,\tau))$, si tiene una estrategia mediante la cual consigue, cualesquiera que sean los movimientos de I, que (h^o,h^1,h^2) sea un homeomorfismo parcial en el sentido Flum-Ziegler.

De manera análoga, se introduce el juego $G_n((A,\sigma), (B,\tau))$ de n jugadas ($n \in \omega$).

Si dos estructuras topológicas (A,σ), (B,τ) son homeomorfas, escribiremos $(A,\sigma) \simeq^t (B,\tau)$. Los tres siguientes resultados nos serán de utilidad a lo largo del trabajo.

1.1.8. <u>Teorema (Flum-Ziegler)</u>.- Sean (A,σ), (B,τ) estructuras topológicas para un tipo de similaridad finito. Las tres siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $(A,\sigma) \equiv^t_{\omega\omega} (B,\tau)$.

(ii) $(A,\sigma) \simeq^t_{\omega} (B,\tau)$.

(iii) Para todo $n \in \omega$, II tiene una estrategia de victoria en $G_n((A,\sigma), (B,\tau))$.

1.1.9. <u>Teorema (Flum-Ziegler)</u>.- Sean (A,σ), (B,τ) estructuras topológicas. Las tres siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $(A,\sigma) \equiv^{t}_{\infty\omega} (B,\tau)$.

(ii) $(A,\sigma) \simeq^{t}_{p} (B,\tau)$.

(iii) II tiene una estrategia de victoria en $G((A,\sigma), (B,\tau))$.

1.1.10. <u>Teorema (Flum-Ziegler)</u>.- Sean (A,σ), (B,τ) estructuras topológicas numerables. Las tres siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $(A,\sigma) \simeq^{t} (B,\tau)$.

(ii) $(A,\sigma) \simeq^{t}_{p} (B,\tau)$.

(iii) $(A,\sigma) \equiv^{t}_{\omega_1\omega} (B,\tau)$.

Diremos que una sentencia ϕ de un cierto lenguaje es <u>invariante respecto a subbases</u>, si para cualquier estructura (A,σ) con σ subbase de una topología de A, se tiene que

$$(A,\sigma) \models \phi \iff (A,\dot{\sigma}) \models \phi,$$

donde $\dot{\sigma}$ es la topología generada por σ.

Vamos a terminar esta sección 1.1 con algunas consideraciones sobre sentencias invariantes respecto a subbases. Definimos <u>el lenguaje $(L)_s$</u> a partir de $L_{\omega_1\omega}$, añadiendo una serie de nuevas variables $[X]$, $[Y]$,... y un nuevo símbolo ϵ de dos argumentos, y añadiendo a las reglas de $L_{\omega_1\omega}$ las dos siguientes reglas:

(i) Las expresiones del tipo $t \in [X]$ son fórmulas atómicas de $(L)_s$.

(ii) 1. Si ϕ es una fórmula de $(L)_s$ positiva en $[X]$,
$\forall[X] \ni t\phi$ es una fórmula de $(L)_s$.

2. Si ϕ es una fórmula de $(L)_s$ negativa en $[X]$,
$\exists[X] \ni t\phi$ es una fórmula de $(L)_s$.

Las variables $[X]$, $[Y]$,... representan secuencias finitas de abiertos de cualquier longitud. Dados un término t, una variable $[X]$, una estructura (A,σ), una secuencia $\bar{a}$ de elementos de A y una secuencia $[U] = (U_1,\ldots,U_n)$ de abiertos de σ, definimos la interpretación de $t \in [X]$ en (A,σ) para $\bar{a}$ y $[U]$ por:

$$(A,\sigma) \models (t \in [X])\ [\bar{a}, [U]] \iff t^A[\bar{a}] \in U_1 \cap \ldots \cap U_n.$$

Sea (A,σ) una estructura débil con σ subbase de una topología de A. Es fácil demostrar por inducción sobre el cálculo de las fórmulas de $(L)_s$, que para todo
$\phi(x_1,\ldots,x_n, [X]^+_1,\ldots,[X]^+_p, [Y]^-_1,\ldots,[Y]^-_q)$, $a_1,\ldots,a_n \in A$ y
$[U]_1,\ldots,[U]_p$, $[V]_1,\ldots,[V]_q$ secuencias finitas de abiertos de σ, se tiene:

$$(A,\sigma) \models \phi[\bar{a}, \bar{[U]}, \bar{[V]}] \iff (A,\dot{\sigma}) \models \phi[\bar{a}, \bar{[U]}, \bar{[V]}].$$

Se sigue:

(1) Las sentencias de $(L)_s$ son invariantes respecto a subbases.

Es fácil observar:

(2) Toda sentencia de $(L)_s$ es equivalente en modelos débiles a una sentencia de $(L_{\omega_1\omega})_t$.

Definimos la función $s : (L_{\omega_1\omega})_t \longrightarrow (L)_s$ de la siguiente manera:

(a) Si ϕ es fórmula atómica de $L_{\omega\omega}$, $\phi^s = \phi$. Si ϕ es $t \in X$, $\phi^s = t \in [X]$.

(b) Si ϕ es $\neg\psi$, $\phi^s = \neg\psi^s$.

(c) Si $\phi = \bigwedge\{\psi \;/\; \psi \in \Phi\}$, $\phi^s = \bigwedge\{\psi^s \;/\; \psi \in \Phi\}$.

(d) Si ϕ es $\exists x\psi$, $\phi^s = \exists x\psi^s$.

(e) Si ϕ es $\exists X \ni t\psi$, $\phi^s = \exists [X] \ni t\psi^s$.

Sea (A,σ) una estructura topológica. Como σ es cerrada bajo intersecciones finitas, procediendo de nuevo por inducción, esta vez sobre el cálculo de las fórmulas de $(L_{\omega_1\omega})_t$, se puede probar que para todo $\phi(x_1,\ldots,x_n, X_1^+,\ldots,X_p^+, Y_1^-,\ldots,Y_q^-)$, $a_1,\ldots,a_n \in A$, $U_1,\ldots,U_p$, $V_1,\ldots,V_q \in \sigma$:

$$(A,\sigma) \models \phi[a_1,\ldots,a_n, U_1,\ldots,U_p, V_1,\ldots,V_q]$$

$$\Longleftrightarrow \quad (A,\sigma) \models \phi^s[a_1,\ldots,a_n, (U_1),\ldots,(U_p), (V_1),\ldots,(V_q)].$$

Por tanto:

(3) Cualquier sentencia ϕ de $(L_{\omega_1\omega})_t$ es equivalente en estructuras topológicas a ϕ^s.

En [12, 1ª parte, sección 10] se demuestrá que $(L_{\omega_1\omega})_t$ cumple el teorema de interpolación y que toda sentencia de $(L_{\omega_1\omega})_2$ invariante respecto a bases es equivalente en estructuras topológicas a una sentencia de $(L_{\omega_1\omega})_t$. Se sigue:

(a) $(L)_s$ cumple el teorema de interpolación.

(b) Toda sentencia de $(L_{\omega_1\omega})_2$ invariante respecto a subbases es equivalente en estructuras topológicas a una sentencia de $(L)_s$.

No parece posible obtener una caracterización de las sentencias de $(L_{\omega\omega})_2$ invariantes para subbases. Queda abierta la cuestión de si para un tipo de similaridad recursivo, el conjunto de dichas sentencias es recursivamente enumerable. No es difícil comprobar que dicho conjunto no es recursivo.

1.2. Definabilidad y L_t-preservación.

Vamos a introducir, en primer lugar, la generalización al contexto topológico del teorema de Feferman. A continuación, estudiaremos el problema de la definabilidad y la L_t-preservación para algunas de las operaciones topológicas usuales.

(A). El teorema de Feferman para L_t.

Vamos a denominar tipo de similaridad heterogéneo al apropiado para estructuras con varios universos. La definición rigurosa de este concepto está expuesta en [12, 1ª parte, sección 3]. A diferencia de esta definición de [12], nosotros consideraremos como fórmulas atómicas a las igualdades de términos de diferentes tipos. De esta forma, utilizaremos, en realidad, la generalización al contexto topológico de la definición de tipo de similaridad heterogéneo de [7].

Todos los tipos de similaridad que consideremos en este apartado serán heterogéneos y finitos. Todas las estructuras que consideremos serán topológicas. Si K es un tipo de similaridad heterogéneo, denotaremos por $Str(K)$ a la clase de las estructuras topológicas para K.

1.2.1. Definiciones.- Sean $n \geq 1$ y $R \subseteq Str(K_1) \times \ldots \times Str(K_{n+1})$ una relación entre estructuras topológicas.

(a) Diremos que R es $(L_{\omega\omega})_t$-definible, si existen $K \supseteq [K_1,\ldots,K_{n+1}]$ y Σ conjunto de sentencias de $(L_{\omega\omega})_t$ para K, tales que:

1. Si $R(A_1,\sigma_1) \ldots (A_{n+1},\sigma_{n+1})$, existe $(B,\tau) \models \Sigma$ con $(B,\tau) \upharpoonright K_\ell = (A_\ell,\sigma_\ell)$ $(\ell=1\ldots n+1)$.

2. Si $(B,\tau) \models \Sigma$ y $(B,\tau) \upharpoonright K_\ell = (A_\ell,\sigma_\ell)$ $(\ell=1\ldots n+1)$, $R(A_1,\sigma_1) \ldots (A_{n+1},\sigma_{n+1})$.

(b) Diremos que R es $(L_{\omega_1\omega})_t$-definible, si existen $K \supseteq [K_1,\ldots,K_{n+1}]$ y ϕ sentencia de $(L_{\omega_1\omega})_t$ para K, de tal forma que se cumplen las condiciones 1 y 2 de (a), cambiando Σ por ϕ. De manera análoga, se puede introducir, para cualquier conjunto admisible Ad, la noción de cuando R es $(L_{Ad})_t$-definible.

(c) Diremos que R es cerrada respecto a la homeomorfía, si en la situación $R(A_1,\sigma_1) \ldots (A_n,\sigma_n)(B,\tau)$, $(A_1,\sigma_1) \simeq^t (A_1',\sigma_1'),\ldots,(A_n,\sigma_n) \simeq^t (A_n',\sigma_n')$, se sigue que existe (B',τ') con $R(A_1',\sigma_1') \ldots (A_n',\sigma_n')(B',\tau')$ y $(B,\tau) \simeq^t (B',\tau')$.

(d) Diremos que R es funcional, si en la situación

$R(A_1,\sigma_1)\ \ldots\ (A_n,\sigma_n)(B,\tau),\quad R(A_1,\sigma_1)\ \ldots\ (A_n,\sigma_n)(B',\tau'),$
se sigue que $(B,\tau) \simeq^t (B',\tau')$.

(e) Si R es funcional, diremos que R preserva la L_t-equivalencia, si en la situación
$R(A_1,\sigma_1)\ \ldots\ (A_n,\sigma_n)(B,\tau),\quad R(A_1',\sigma_1')\ \ldots\ (A_n',\sigma_n')(B',\tau'),$
se sigue:

$$(A_\ell,\sigma_\ell) \equiv^t (A_\ell',\sigma_\ell') \quad (\ell=1\ldots n) \Longrightarrow (B,\tau) \equiv^t (B',\tau').$$

En [12, 1ª parte, sección 5] se demuestra que $(L_{\omega\omega})_t$ cumple el teorema de interpolación. En [12, 1ª parte, sección 10] se demuestra que las técnicas de [24] son generalizables a los lenguajes topológicos, por lo cual se cumple el correspondiente teorema de interpolación para lenguajes admisibles topológicos. Por otra parte, es inmediato generalizar al contexto topológico la técnica introducida en [7]. El siguiente resultado, que es la generalización al contexto topológico del teorema de Feferman, se obtiene como consecuencia de estos hechos.

1.2.2. Teorema.- Sea $R \subseteq Str(K_1) \times Str(K_2)$ una relación funcional. Entonces:

(a) Si R es $(L_{\omega\omega})_t$-definible, R preserva la $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia.

(b) Si R es $(L_{\omega_1\omega})_t$-definible, R preserva la $(L_{\omega_1\omega})_t$-equivalencia.

El teorema correspondiente en el contexto clásico para relaciones de tres o más argumentos, que se puede probar teniendo en cuenta lo expuesto en [10], es fácilmente generalizable también al contexto topológico.

1.2.3. Teorema.- Sean $n \geq 2$ y $R \subseteq Str(K_1) \times \ldots \times Str(K_{n+1})$ una relación funcional. Si R es $(L_{\omega\omega})_t$-definible y cerrada respecto a la homeomorfía, R preserva la $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia.

Obsérvese que la suma y el producto para un número finito de argumentos son $(L_{\omega\omega})_t$-definibles y cerradas respecto a la homeomorfía. Por tanto, preservan la $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia.

(B). Algunos ejemplos.

1.2.4. Algebras de Boole y espacios de Stone.

El espacio de Stone $S(B)$ de un álgebra de Boole B es el conjunto de todos los ultrafiltros en B, con la topología generada por la base $U[B] = \{U(a) \ / \ a \in B\}$, siendo $U(a) = \{F$ ultrafiltro en $B \ / \ a \in F\}$. Entonces, B se puede identificar con el álgebra de Boole que define $U[B]$.

Vamos a considerar como tipo de similaridad para álgebras de Boole al conjunto $\{+, \cdot, \bar{\ }, 0, 1\}$. Vamos a demostrar que si A, B son álgebras de Boole:

$$(*) \quad A \equiv_{\omega\omega} B \;\not\Longrightarrow\; S(A) \equiv^t_{\omega\omega} S(B).$$

$$(**) \quad S(A) \equiv^t_{\omega\omega} S(B) \;\Longrightarrow\; A \equiv_{\omega\omega} B.$$

Para ello, vamos a hacer uso de la caracterización de la $L_{\omega\omega}$-equivalencia para álgebras de Boole de [5, sección 5.5], siguiendo la notación que allí se emplea. Para cualquier álgebra de Boole B, se define el ideal

$I(B) = \{a \in B$ / existen b elemento atómico, c elemento desatómico, tales que $a = b+c\}$

y la relación de congruencia $\widetilde{I(B)}$ definida por

$$a \; \widetilde{I(B)} \; b \iff a.\bar{b} + \bar{a}.b \in I(B).$$

El álgebra cociente es denotada por $B/I(B)$. Suponiendo que B no es trivial, se define:

$$B^{(o)} = B.$$

$$B^{(k+1)} = B^{(k)} / I(B^{(k)}) \quad (k \in \omega).$$

$$m(B) = \begin{cases} \text{mínimo } k < \omega \text{ tal que } B^{(k+1)} \text{ es trivial, si tal } k \text{ existe.} \\ \infty, \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

$$n_o(B) = \begin{cases} \infty, \text{ si } m(B) = k \text{ y } B^{(k)} \text{ tiene infinitos átomos.} \\ \ell, \text{ si } m(B) = k \text{ y } B^{(k)} \text{ tiene } \ell < \omega \text{ átomos.} \end{cases}$$

$$n(B) = \begin{cases} 0, \text{ si } m(B) = \infty. \\ n_o(B), \text{ si } m(B) = k \text{ y } B^{(k)} \text{ es atómica.} \\ -n_o(B), \text{ si } m(B) = k \text{ y } B^{(k)} \text{ no es atómica.} \end{cases}$$

Entonces:

(1) Si A, B son álgebras de Boole no triviales, se tiene:

$$A \equiv_{\omega\omega} B \iff m(A) = m(B) \text{ y } n(A) = n(B).$$

Sean $P(\omega)$ el álgebra de Boole de las partes de ω y $P_{f,\ cf}(\omega)$ el álgebra de Boole de las partes finitas y de las partes cofinitas de ω. Tenemos:

$$m(P(\omega)) = m(P_{f,cf}(\omega)) = 0.$$

$$n(P(\omega)) = n(P_{f,cf}(\omega)) = \infty.$$

Se sigue que $P(\omega) \equiv_{\omega\omega} P_{f,cf}(\omega)$. Es fácil observar que en $P_{f,cf}(\omega)$ existe un único ultrafiltro no principal, y que en $P(\omega)$ existen infinitos. Por tanto:

$$S(P_{f,\ cf}(\omega)) \models \text{"existe un único punto de acumulación".}$$

$$S(P(\omega)) \models \text{"existen dos puntos de acumulación".}$$

En consecuencia, $S(P(\omega)) \not\equiv^{t}_{\omega\omega} S(P_{f,\ cf}(\omega))$. Hemos demostrado (*).

Probemos (**). Dados un álgebra de Boole no trivial B y $a \in B$, denotemos la clase de a en $B^{(1)}$ por $a^{(1)}$. Para cualquier ultrafiltro F en B, definimos $F^{(1)} = \{a^{(1)} \in B^{(1)} / a \in F\}$. Es fácil comprobar que si en F no hay elementos atómicos ni elementos desatómicos, $F^{(1)}$ es un ultrafiltro en $B^{(1)}$. Para cualquier ultrafiltro G en $B^{(1)}$, definimos $G^{(-1)} = \{a \in B / a^{(1)} \in G\}$. Se observa que $G^{(-1)}$ es un ultrafiltro en B sin elementos atómicos y sin elementos desatómicos, y que $(G^{(-1)})^{(1)} = G$. Existe, por tanto, una correspondencia biunívoca entre los ultrafiltros en B sin elementos atómicos y sin elementos desatómicos y los ultrafiltros en $B^{(1)}$. Es fácil encontrar una fórmula $\theta(x)$ de $(L_{\omega\omega})_t$, tal que para todo A álgebra de Boole y F ultrafiltro en A:

$S(A) \models \theta[F] \iff$ en F no hay elementos atómicos ni elementos desatómicos.

Por tanto, para cualquier sentencia ϕ de $(L_{\omega\omega})_t$ existe una sentencia ψ de $(L_{\omega\omega})_t$, tal que para cualquier A álgebra de Boole:

$$S(A^{(1)}) \models \phi \iff S(A) \models \psi.$$

Se sigue:

(2) Si A, B son álgebras de Boole:

$$S(A) \equiv^t_{\omega\omega} S(B) \implies S(A^{(1)}) \equiv^t_{\omega\omega} S(B^{(1)}).$$

Obsérvese que existen sentencias $\chi, \psi_o, \ldots, \psi_n, \ldots$ de $(L_{\omega\omega})_t$, tales que para cualquier A álgebra de Boole:

$$S(A) \models \chi \iff A \text{ es atómica.}$$

$$S(A) \models \psi_n \iff A \text{ tiene } n \text{ átomos.}$$

De (1) y (2) se deduce, por tanto, (**).

1.2.5. <u>La operación mínima topología T_1</u>.

Consideremos la operación que a una estructura topológica (A,σ) le hace corresponder (A,σ^+), siendo σ^+ la menor topología T_1 que contiene a σ. Vamos a comprobar que esta operación preserva la $(L_{\omega_1\omega})_t$-equivalencia y no preserva la $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia. Sean N y Z los conjuntos de números naturales y números enteros. Sean σ_1,σ_2 las topologías definidas sobre N, N+Z, respectivamente, dadas por las bases $\{\{x \,/\, x \leq n\} \,/\, n \in N\}$, $\{\{x \,/\, x \leq n\} \,/\, n \in N+Z\}$. Aplicando la técnica de los juegos de Ehrenfeucht, tenemos:

$$(N,\sigma_1) \equiv^t_{\omega\omega} (N+Z, \sigma_2).$$

Sin embargo:

$(N,\sigma_1^+) \models \underline{\text{disc}}$.

$(N+Z,\sigma_2^+) \models \neg\underline{\text{disc}}$.

Por tanto, esta operación no preserva la $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia, y por 1.2.2(a) no es $(L_{\omega\omega})_t$-definible. Sin embargo, esta operación es $(L_{\omega_1\omega})_t$-definible. Para comprobar esto último, podemos considerar un tipo de similaridad heterogéneo adecuado para estructuras del tipo $[(A_1,\sigma_1),\ (A_2,\sigma_2),\ (F_1,\sigma_3),\ (F_2,\sigma_4),\ E_1,\ E_2]$ y tomar

ϕ = "$A_1 = A_2$" $\wedge$ "F_1 es base de σ_1 a través de E_1" $\wedge$

"$F_2 = F_1 \cup \{A_1 - \{a\} \ / \ a \in A_1\}$" $\wedge$

"F_2 es subbase de σ_2 a través de E_2".

Por 1.2.2(b), esta operación preserva la $(L_{\omega_1\omega})_t$-equivalencia.

1.2.6. <u>La compactificación con un punto</u>.

Vamos a comprobar que la operación que a un espacio T_2 localmente compacto (A,σ) le hace corresponder su compactificación con un punto $(\tilde{A},\tilde{\sigma})$ no preserva la $(L_{\infty\omega})_t$, $(L_{\omega_1\omega})_t$, $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia. Consideremos los intervalos de la recta real $(0,1)$ y $[0,1]$ y el conjunto N de los números naturales. Sean $A_1 = (0,1) \cup \{x \in N \ / \ x \geq 2\}$, $A_2 = [0,1] \cup \{x \in N \ / \ x \geq 2\}$. Sean σ_1, σ_2 las topologías definidas sobre A_1, A_2, respectivamente, dadas por las bases $\{U \ / \ U$ abierto de la topología usual de $(0,1)\} \cup \{\{x\} \ / \ x \in N,\ x \geq 2\}$, $\{U \ / \ U$ abierto de la topología usual de $[0,1]\} \cup \{\{x\} \ / \ x \in N,\ x \geq 2\}$. Aplicando la técnica de los juegos de Ehrenfeucht, es fácil comprobar que

$$(A_1,\sigma_1) \equiv^t_{\infty\omega} (A_2,\sigma_2).$$

Sea ϕ una sentencia de $(L_{\omega\omega})_t$ que expresa "existe un elemento que es punto de acumulación de puntos aislados y no es punto de acumulación de puntos de acumulación". Se sigue:

$$(\tilde{A}_1,\tilde{\sigma}_1) \models \neg\phi.$$

$$(\tilde{A}_2,\tilde{\sigma}_2) \models \phi.$$

Se deduce de 1.2.2(b) que la compactificación con un punto no es $(L_{\omega_1\omega})_t$-definible. Obsérvese que si una operación es definible en un cierto lenguaje, su dominio y su rango también lo son. Es sabido (se puede probar a partir de lo expuesto en [12, 1ª parte, sección 10]) que la clase de los espacios compactos de Hausdorff, que es el rango de la compactificación de Stone-Čech, no es $(L_{\omega_1\omega})_t$-definible. Por tanto, la compactificación de Stone-Čech tampoco es $(L_{\omega_1\omega})_t$-definible.

CAPITULO 2

FUNTORES TOPOLOGICOS LOCALES

Todas las estructuras que consideremos en este capítulo serán topológicas. Los tipos de similaridad que vamos a considerar van a ser los adecuados para estructuras con un solo universo. Cualquier estructura topológica (A,σ) que consideremos cumplirá que si A_p es la estructura algebraica generada por los elementos distinguidos de A, se sigue que $\sigma_p = \sigma|A_p$ es la topología discreta.

2.1. La noción de κ-funtor topológico local. El teorema de preservación.

El símbolo κ representa en esta sección 2.1 un cardinal fijo cualquiera ≥ 2. Introduciremos la noción de κ-funtor topológico local. Este concepto nos permitirá obtener un resultado en la línea del teorema de preservación de [8].

2.1.1. Definición.- Diremos que $h = (h^o,h^1,h^2)$ es un homeomorfismo parcial de (A,σ) a (B,τ), si se cumplen las tres siguientes condiciones:

(i) h es un homeomorfismo parcial en el sentido Flum-Ziegler.

(ii) h^o es cerrado (esto es, $dom(h^o)$ es una subestructura de A).

(iii) Si $dom(h^o) = A_o$, $rg(h^o) = B_o$, $\sigma|A_o = \sigma_o$ y $\tau|B_o = \tau_o$, se sigue que h^o induce un homeomorfismo de (A_o,σ_o) sobre (B_o,τ_o).

2.1.2. <u>Definición</u>.- Definimos <u>el lenguaje $(L_{\infty\kappa})_t$</u> a partir de las fórmulas atómicas de $(L_{\omega\omega})_t$ y de las siguientes reglas:

(i) Si ϕ es una fórmula, $\neg\phi$ también lo es.

(ii) Si Φ es un conjunto no vacío de fórmulas, $\bigwedge\Phi$ y $\bigvee\Phi$ son fórmulas.

(iii) Si ϕ es una fórmula y v es un conjunto no vacío de variables para elementos de cardinal $< \kappa$, $\forall v\phi$ y $\exists v\phi$ son fórmulas.

(iv) 1. Si $n \geq 1$ y ϕ es una fórmula positiva en $X_1,\ldots,X_n$, se tiene que $\forall\{X_1 \ni t_1,\ldots,X_n \ni t_n\}\phi$ es una fórmula.

2. Si $n \geq 1$ y ϕ es una fórmula negativa en $X_1,\ldots,X_n$, se tiene que $\exists\{X_1 \ni t_1,\ldots,X_n \ni t_n\}\phi$ es una fórmula.

2.1.3. <u>Definiciones</u>.- Sea Σ el conjunto de fórmulas de $(L_{\infty\kappa})_t$ de la forma $\exists\{X \ni t\} \bigwedge_{t'\in\Delta} (t' \notin X)$, siendo Δ cualquier conjunto de términos.

(a) Definimos la <u>característica de una fórmula</u> ϕ de $(L_{\infty\kappa})_t$, $c(\phi)$, de la siguiente manera:

(i) Si ϕ es atómica ó $\phi \in \Sigma$, $c(\phi) = 0$.

(ii) Si ϕ es $\neg\psi$, $c(\phi) = c(\psi)$.

(iii) Si ϕ es $\bigvee\Phi$, $c(\phi) =$ supremo $\{c(\psi)/\psi \in \Phi\}$.

(iv) Si ϕ es $\exists v\psi$, $c(\phi) = c(\psi) + 1$.

(v) Si ϕ es $\exists\{X_1 \ni t_1,\ldots,X_n \ni t_n\}\psi$ y $\phi \notin \Sigma$, $c(\phi) = c(\psi) + 1$.

(b) Para cualquier ordinal α, definimos el lenguaje $(L^{\alpha}_{\infty\kappa})_t$ como el conjunto de fórmulas de $(L_{\infty\kappa})_t$ de característica $\leq \alpha$.

Para dos estructuras topológicas cualesquiera (A,σ), (B,τ), definimos los conjuntos $P^{\alpha}[(A,\sigma),\ (B,\tau)]$ (α ordinal) por:

(i) $h = (h^o,h^1,h^2) \in P^o[(A,\sigma),\ (B,\tau)] \iff h$ es un homeomorfismo parcial de (A,σ) a (B,τ).

(ii) $h = (h^o,h^1,h^2) \in P^{\alpha+1}[(A,\sigma),\ (B,\tau)] \iff$:

(1) Para todo $\eta < \kappa$ y $\langle a_\rho \rangle_{\rho<\eta}$ secuencia de elementos de A, existe $h' \in P^{\alpha}[(A,\sigma),\ (B,\tau)]$ tal que $h \subseteq h'$ y $a_\rho \in \mathrm{dom}\ (h'^o)$ $(\rho < \eta)$.

(2) Para todo $n \geq 1$, $a_1,\ldots,a_n \in \mathrm{dom}\ (h^o)$ y $U_1,\ldots,U_n \in \sigma$ con $a_1 \in U_1,\ldots,a_n \in U_n$, se sigue que existen $V_1,\ldots,V_n \in \tau$ y $h' \in P^{\alpha}[(A,\sigma),\ (B,\tau)]$ con $h \subseteq h'$, tales que:

1. $h^o(a_k) \in V_k$ $(k=1,\ldots,n)$.
2. $U_k\ h'^2\ V_k$ $(k=1,\ldots,n)$.

(3) Para todo $\eta < \kappa$ y $\langle b_\rho \rangle_{\rho<\eta}$ secuencia de elementos de B, existe $h' \in P^{\alpha}[(A,\sigma),\ (B,\tau)]$ tal que $h \subseteq h'$ y $b_\rho \in \mathrm{rg}(h'^o)$ $(\rho < \eta)$.

(4) Para todo $n \geq 1$, $b_1,\ldots,b_n \in \mathrm{rg}(h^o)$ y $V_1,\ldots,V_n \in \tau$ con $b_1 \in V_1,\ldots,b_n \in V_n$, se sigue que existen $U_1,\ldots,U_n \in \sigma$ y $h' \in P^{\alpha}[(A,\sigma),\ (B,\tau)]$ con $h \subseteq h'$, tales que:

1. $(h^o)^{-1}(b_k) \in U_k$ $(k=1,\ldots,n)$.

2. $U_k \; h'^1 \; V_k \quad (k=1,\ldots,n)$.

(iii) Si α es un ordinal límite:

$$P^\alpha[(A,\sigma),\ (B,\tau)] = \bigcap_{\beta<\alpha} P^\beta[(A,\sigma),\ (B,\tau)].$$

Obsérvese que si $\alpha < \beta$, $P^\alpha[(A,\sigma),\ (B,\tau)] \supseteq P^\beta[(A,\sigma),\ (B,\tau)]$.

Si (A,σ) y (B,τ) son $(L^\alpha_{\infty\kappa})_t$-equivalentes, escribiremos $(A,\sigma) \equiv^t_\alpha (B,\tau)$. Sea h un homeomorfismo parcial de (A,σ) a (B,τ). Escribiremos

$$(A,\sigma) \equiv^t_\alpha (B,\tau) \quad \text{para} \quad h,$$

si para cualquier fórmula $\phi(\langle x_\rho\rangle_{\eta_o},\ \langle X^+_\rho\rangle_{\eta_1},\ \langle Y^-_\rho\rangle_{\eta_2})$ de $(L^\alpha_{\infty\kappa})_t$, se tiene que para todo $\{(a_\rho,b_\rho)\ /\ \rho < \eta_o\} \subseteq h^o$, $\{(U^+_\rho,V^+_\rho)\ /$ $/\ \rho < \eta_1\} \subseteq h^1$ y $\{(U^-_\rho,V^-_\rho)\ /\ \rho < \eta_2\} \subseteq h^2$:

$$(A,\sigma) \models \phi[\bar{a},\bar{U}^+,\bar{U}^-] \implies (B,\tau) \models \phi[\bar{b},\bar{V}^+,\bar{V}^-].$$

Procediendo por inducción sobre α, se demuestra el siguiente lema.

2.1.4. <u>Lema</u>.- Sea h un homeomorfismo parcial de (A,σ) a (B,τ). Entonces:

$$(A,\sigma) \equiv^t_\alpha (B,\tau) \quad \text{para} \quad h \iff h \in P^\alpha[(A,\sigma),\ (B,\tau)].$$

El siguiente resultado es un corolario inmediato de 2.1.4.

2.1.5. <u>Teorema</u>.- Tenemos:

$$(A,\sigma) \equiv^t_\alpha (B,\tau) \iff P^\alpha[(A,\sigma),\ (B,\tau)] \neq \emptyset.$$

Si K es un tipo de similaridad, denotaremos por $\Gamma(K)$ a la clase formada por todas las estructuras topológicas para K y por todos los homeomorfismos parciales entre estructuras topológicas para K. Escribiremos $\mathcal{C} \lessdot \Gamma(K)$, si $\mathcal{C}$ es una subclase de $\Gamma(K)$ tal que cualquier homeomorfismo parcial entre dos estructuras cualesquiera de $\mathcal{C}$ está en $\mathcal{C}$. En cierto sentido, se puede considerar que $\Gamma(K)$ es una categoría y $\mathcal{C}$ una subcategoría.

Sean I un conjunto de índices no vacío, K_i $(i \in I)$ y K tipos de similaridad, $\mathcal{C}_i \lessdot \Gamma(K_i)$ y $\mathcal{D} = \Gamma(K)$. Diremos que una operación $F : \Pi_I \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathcal{D}$ es un <u>funtor topológico</u> si:

(a) A cualquier familia $\langle (A_i,\sigma_i)\rangle_I$ de estructuras topológicas de $\Pi_I \mathcal{C}_i$ le hace corresponder una estructura topológica $F(\langle (A_i,\sigma_i)\rangle_I)$ de $\mathcal{D}$.

(b) A cualquier familia $\langle h_i\rangle_I$ de homeomorfismos parciales de $\Pi_I \mathcal{C}_i$ con $h_i \in P^o[(A_i,\sigma_i),\ (B_i,\tau_i)]$ le hace corresponder un homeomorfismo parcial $F(\langle h_i\rangle_I) \in P^o[F(\langle (A_i,\sigma_i)\rangle_I), F(\langle (B_i,\tau_i)\rangle_I)]$.

Podemos suponer que si (A,σ), (B,τ) son estructuras topológicas y $h \in P^o[(A,\sigma),\ (B,\tau)]$, se tiene que Ah^1B y Ah^2B. De esta manera, evitaremos cualquier ambigüedad en la definición de $F(\langle h_i\rangle_I)$.

En adelante, los símbolos $(A,\sigma)_I$, h_I denotarán a $\langle (A_i,\sigma_i)\rangle_I$, $\langle h_i\rangle_I$, respectivamente.

Implícitamente, el teorema 2.1.5 representa una generalización de la técnica de los juegos de Ehrenfeucht a los lenguajes $(L^{\alpha}_{\infty\kappa})_t$.

En un movimiento de tipo x de este juego, cada participante escoge una cantidad de elementos menor que κ; en un movimiento de tipo X, cada participante escoge un número finito de abiertos. Denotemos a este juego entre las estructuras (A,σ) y (B,τ) por $G^{\alpha}[(A,\sigma),\ (B,\tau)]$. Vamos a introducir la noción de κ-funtor topológico local. Se tendrá que cualquier funtor F de este tipo, paralelamente a lo que sucede con cualquier κ-funtor local de [8] para el contexto clásico, permite obtener una estrategia de victoria del jugador II en $G^{\alpha}[F((A,\sigma)_I),\ F((B,\tau)_I)]$, siempre que dicho participante disponga de una estrategia de victoria en $G^{\alpha}[(A_i,\sigma_i),\ (B_i,\tau_i)]$ para todo $i \in I$. Tendremos, por tanto, que cualquier κ-funtor topológico local $F : \Pi_I C_i \longrightarrow \mathcal{D}$ preserva la $(L^{\alpha}_{\infty\kappa})_t$-equivalencia. Esto es, para todo $<(A_i,\sigma_i)>_I,\ <(B_i,\tau_i)>_I \in \Pi_I C_i$:

$$(A_i,\sigma_i) \equiv^t_{\alpha} (B_i,\tau_i) \quad (i \in I) \implies F((A,\sigma)_I) \equiv^t_{\alpha} F((B,\tau)_I).$$

Sean $h \in P^{o}[(A,\sigma),\ (B,\tau)]$ y $\overline{U},\ \overline{V}$ secuencias finitas no vacías de abiertos de σ, τ, respectivamente. Para $k=1,2$ escribiremos $\overline{U}\ h^{k}\ \overline{V}$ si:

1. $\overline{U}$ y $\overline{V}$ tienen el mismo número de abiertos.
2. Si $\overline{U} = (U_1,\ldots,U_n)$ y $\overline{V} = (V_1,\ldots,V_n)$, se tiene que $U_1\ h^{k}\ V_1,\ldots,U_n\ h^{k}\ V_n$.

2.1.6. <u>Definición</u>.- Sea $F : \Pi_I C_i \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor topológico. Diremos que F es un <u>κ-funtor topológico local</u>, si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) F preserva la relación $\subseteq$. Esto es, dados

$<(A_i,\sigma_i)>_I$, $<(B_i,\tau_i)>_I$, $<h_i>_I$, $<h_i'>_I \in \Pi_I C_i$ con $h_i, h_i' \in P^o[(A_i,\sigma_i), (B_i,\tau_i)]$ se tiene:

$$h_i \subseteq h_i' \ (i \in I) \implies F(h_I) \subseteq F(h_I').$$

(ii) F lleva asociada una función universal T, tal que dados $<(A_i,\sigma_i)>_I \in \Pi_I C_i$ y $(\tilde{A},\tilde{\sigma}) = F((A,\sigma)_I)$, se sigue que existe una base de $\tilde{\sigma}$, que denotaremos por $\tilde{\sigma}_o$, de tal forma que si $S_f(\sigma_i)$ es el conjunto de las secuencias finitas de abiertos de σ_i, se tiene que T induce una función parcial de $\Pi_I S_f(\sigma_i)$ a $\tilde{\sigma}_o$.

(iii) Sean $<(A_i,\sigma_i)>_I \in \Pi_I C_i$ y $(\tilde{A},\tilde{\sigma}) = F((A,\sigma)_I)$. Para cualquier parte $\tilde{A}^*$ de $\tilde{A}$ de cardinal $< \kappa$ existe una parte A_i^* de A_i de cardinal $< \kappa$ $(i \in I)$, y para cualquier $\tilde{U}_o \in \tilde{\sigma}_o$ existen $J \subsetneq I$ con $J \neq \emptyset$ y $\overline{U}_j$ secuencia finita no vacía de abiertos de σ_j $(j \in J)$, de tal manera que:

(a) Para todo $<h_i>_I \in \Pi_I C_i$ con $h_i \in P^o[(A_i,\sigma_i), (B_i,\tau_i)]$ se tiene:

1. Si $A_i^* \subseteq \text{dom}\,(h_i^o)$ $(i \in I)$, $\tilde{A}^* \subseteq \text{dom}\,(F(h_I)^o)$.

2. Fijado $a \in \text{dom}\,(F(h_I)^o)$, si $\tilde{U} \in \tilde{\sigma}$ y $a \in \tilde{U}_o \subseteq \tilde{U}$ se sigue que si existe para todo $j \in J$ una secuencia finita no vacía $\overline{V}_j$ de abiertos de τ_j con $\overline{U}_j\ h_j^2\ \overline{V}_j$, podemos concluir:

   1. $<\overline{V}_j>_J \in \text{dom}\,(T)$ y $F(h_I)^o(a) \in T(<\overline{V}_j>_J)$.

   2. $\tilde{U}\ F(h_I)^2\ T(<\overline{V}_j>_J)$.

(b) Para todo $<h_i>_I \in \Pi_I C_i$ con $h_i \in P^o[(C_i,\mu_i),\ (A_i,\sigma_i)]$ se tiene:

1. Si $A_i^* \subseteq rg(h_i^o)$ $(i \in I)$, $\tilde{A}^* \subseteq rg(F(h_I)^o)$.

2. Fijado $a \in rg(F(h_I)^o)$, si $\tilde{U} \in \tilde{\sigma}$ y $a \in \tilde{U}_o \subseteq \tilde{U}$ se sigue que si existe para todo $j \in J$ una secuencia finita no vacía $\overline{W}_j$ de abiertos de μ_j con $\overline{W}_j\ h_j^1\ \overline{U}_j$, podemos concluir:

   1. $<\overline{W}_j>_J \in dom(T)$ y $(F(h_I)^o)^{-1}(a) \in T(<\overline{W}_j>_J)$.

   2. $T(<\overline{W}_j>_J) F(h_I)^1\ \tilde{U}$.

Es fácil observar que si F es un κ-funtor topológico local y $\kappa_1 \geq$ máx(ω,κ), F es un κ_1-funtor topológico local.

El siguiente lema se puede demostrar por inducción sobre α.

2.1.7. <u>Lema</u>.- Sean $F : \Pi_I C_i \longrightarrow \mathcal{D}$ un κ-funtor topológico local y $<h_i>_I \in \Pi_I C_i$. Si para todo $i \in I$ $h_i \in P^\alpha[(A_i,\sigma_i),\ (B_i,\tau_i)]$, $F(h_I) \in P^\alpha[F((A,\sigma)_I),\ F((B,\tau)_I)]$.

El teorema de preservación es un corolario inmediato de 2.1.5 y 2.1.7.

2.1.8. <u>El teorema de preservación</u>.- Si $F : \Pi_I C_i \longrightarrow \mathcal{D}$ es un κ-funtor topológico local, F preserva la $(L_{\infty\kappa})_t$, $(L^\alpha_{\infty\kappa})_t$-equivalencia.

2.2. <u>Aplicaciones</u>.

Cada operación F que vamos a considerar podrá ser expresada como un κ-funtor topológico local para algún κ. Las comprobaciones, en cada caso, son fáciles de realizar.

2.2.1. La complección para grupos topológicos métricos.

Dado un grupo métrico (A,σ) (en el que suponemos que σ viene dada por una métrica invariante), denotaremos por $(\tilde{A},\tilde{\sigma})$ a su complección standard. Por tanto, $F((A,\sigma)) = (\tilde{A},\tilde{\sigma})$. Para cualquier homeomorfismo parcial $h \in P^{o}[(A,\sigma), (B,\tau)]$ definimos $F(h)$ de la siguiente forma:

1. $\mathrm{dom}\,(F(h)^{o}) = \{ \ulcorner (a_n)_\omega \urcorner$ / 1. $(a_n)_\omega$ sucesión de Cauchy.
   2. $a_n \in \mathrm{dom}\,(h^{o})$ $(n \in \omega)$.$\}$.

2. $F(h)^{o}(\ulcorner (a_n)_\omega \urcorner) = \ulcorner (h^{o}(a_n))_\omega \urcorner$.

Como h^{o} es continua, $F(h)^{o}$ está bien definida. Sean $\tilde{\sigma}_o$, $\tilde{\tau}_o$, σ_o, τ_o los conjuntos de esferas abiertas con centro en la unidad de $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tau}$, σ, τ, respectivamente. Podemos ceñirnos solamente a entornos de la unidad de los grupos métricos. Sean $\tilde{U}_o \in \tilde{\sigma}_o$, $\tilde{V}_o \in \tilde{\tau}_o$, $U_o = \tilde{U}_o \cap A$ y $V_o = \tilde{V}_o \cap B$. Entonces:

$\tilde{U}_o\ F(h)^1 \tilde{V}_o \iff$ existe $V_o' \in \tau_o$ de radio menor que el de V_o, tal que $U_o\ h^1\ V_o'$.

$\tilde{U}_o\ F(h)^2\ \tilde{V}_o \iff$ existe $U_o' \in \sigma_o$ de radio menor que el de U_o, tal que $U_o'\ h^2\ V_o$.

Consideremos ahora entornos cualesquiera de la unidad $\tilde{U} \in \tilde{\sigma}$, $\tilde{V} \in \tilde{\tau}$. Entonces:

$\tilde{U}\ F(h)^1\ \tilde{V} \iff$ existen $\tilde{U}_o \in \tilde{\sigma}_o$, $\tilde{V}_o \in \tilde{\tau}_o$, tales que $\tilde{U} = \tilde{U}_o$, $\tilde{V}_o \subseteq \tilde{V}$ y $\tilde{U}_o\ F(h)^1\ \tilde{V}_o$.

$$\tilde{U}\ F(h)^2\ \tilde{V} \iff \text{existen } \tilde{U}_o \in \tilde{\sigma}_o,\ \tilde{V}_o \in \tilde{\tau}_o, \text{ tales que } \tilde{U}_o \subseteq \tilde{U},\ \tilde{V}_o = \tilde{V} \text{ y } \tilde{U}_o\ F(h)^2\ \tilde{V}_o.$$

Se tiene que $F(h)$ es un homeomorfismo parcial de $(\tilde{A},\tilde{\sigma})$ a $(\tilde{B},\tilde{\tau})$.

Definimos T, cualquiera que sea (A,σ), de la siguiente manera:

1. $\text{dom}(T) = \sigma_o$.
2. $T(U_o) = \tilde{U}_o$, siendo $\tilde{U}_o$ la esfera abierta de $\tilde{\sigma}_o$ de radio igual al de U_o.

Se tiene que F es un ω_1-funtor topológico local.

2.2.2. Geometrías de variedades de dimensión finita.

Vamos a considerar la operación que hace corresponder a un cierto (A,σ) espacio vectorial topológico T_2 sobre un cuerpo topológico fijado de antemano, su geometría de variedades de dimensión finita (A',σ'). Por tanto, si la dimensión de (A,σ) es ∞, tendremos:

(1) $A' = ((A'_1,\ldots,A'_n,\ldots), <')$, donde:

1. A'_n es el conjunto de las variedades n-dimensionales de A.
2. Para todo $a'_1 \in A'_p$, $a'_2 \in A'_q$ con $p < q$: $a'_1 <' a'_2 \iff a'_1$ está contenida en a'_2.

(2) $\sigma' = (\sigma'_1,\ldots,\sigma'_n,\ldots)$, donde σ'_n viene dada por la base standard $\sigma(A'_n)$, la cual está definida de la siguiente

forma. Para cualquier U' subconjunto de A'_n, se tiene que $U' \in \sigma(A'_n)$ si existen abiertos $U_1,\dots,U_n \in \sigma$ tales que:

1. Si $a_1 \in U_1,\dots,a_n \in U_n$, se sigue que $a_1,\dots,a_n$ son linealmente independientes.

2. Para cualquier $a' \in A'_n$:

   $a' \in U' \Longleftrightarrow$ existen $a_1 \in U_1,\dots,a_n \in U_n$, tales que a' está generada por $a_1,\dots,a_n$.

Escribiremos, entonces, $U' = |U_1,\dots,U_n|$. Si a' está generada por $a_1,\dots,a_n$, escribiremos $a' = |a_1,\dots,a_n|$. Si (A,σ) es de dimensión finita, la definición de (A',σ') es análoga. Vamos a considerar a los elementos del cuerpo fijado de antemano como funciones del tipo de similaridad de partida correspondiente al dominio de la operación. Naturalmente, cualquier espacio vectorial topológico (A,σ) que consideremos cumplirá:

1. Para todo $a_1,\dots,a_n$ vectores linealmente independientes existen abiertos $U_1 \ni a_1,\dots,U_n \ni a_n$, tales que para todo $c_1 \in U_1,\dots,c_n \in U_n$ se sigue que $c_1,\dots,c_n$ son linealmente independientes.

2. La función consistente en hacer corresponder a vectores cualesquiera $a_1,\dots,a_n$ linealmente independientes la variedad $|a_1,\dots,a_n|$ es continua.

Tenemos, pues, $F((A,\sigma)) = (A',\sigma')$. Para cualquier $h \in P^{o}[(A,\sigma), (B,\tau)]$, definimos $F(h)$ de la siguiente manera:

1. dom $(F(h)^{o}) = \{|a_1,\ldots,a_n|$ / 1. $a_1,\ldots,a_n$ linealmente independientes.

2. $a_1,\ldots,a_n \in$ dom (h^{o}) .}.

2. $F(h)^{o}(|a_1,\ldots,a_n|) = |h^{o}(a_1),\ldots,h^{o}(a_n)|$.

Sean $U' = |U_1,\ldots,U_n|$, $V' = |V_1,\ldots,V_n|$ abiertos de $\sigma(A_n^{'})$, $\tau(B_n^{'})$, respectivamente. Entonces, para $k=1,2$:

$$U' \; F(h)^{k} \; V' \iff U_{\ell} \; h^{k} \; V_{\ell} \; (\ell=1,\ldots,n).$$

Si U', V' son abiertos cualesquiera de $\sigma_n^{'}$, $\tau_n^{'}$, respectivamente, se procede de forma análoga a 2.2.1. Esto mismo ocurrirá con el resto de las aplicaciones.

Definimos T, para cualquier (A,σ), de la siguiente manera:

1. dom (T) = $\{\langle U_1,\ldots,U_n\rangle$ / $n \geq 1$, $U_1,\ldots,U_n \in \sigma$ y para todo $a_1 \in U_1,\ldots,a_n \in U_n$ se sigue que $a_1,\ldots,a_n$ son linealmente independientes}.

2. $T(\langle U_1,\ldots,U_n\rangle) = |U_1,\ldots,U_n|$.

Se tiene que F es un ω-funtor topológico local.

Las restantes aplicaciones se refieren a los productos generalizados topológicos más usuales.

2.2.3. <u>El producto</u>.

Para cualquier familia $\langle(A_i,\sigma_i)\rangle_I$, tenemos $F((A,\sigma)_I) = (\Pi_I A_i, \dot{\Pi}_I \sigma_i)$, donde $\dot{\Pi}_I \sigma_i$ es la topología usual del producto.

Para cualquier familia $\langle h_i \rangle_I$ de homeomorfismos parciales con $h_i \in P^o[(A_i,\sigma_i), (B_i,\tau_i)]$, definimos $F(h_I)$ de la siguiente forma:

1. dom $(F(h_I)^o) = \{(a_i)_I \ / \ a_i \in \text{dom } (h_i^o)\}$.

2. $F(h_I)^o \ ((a_i)_I) = (h_i^o(a_i))_I$.

Sean U, V abiertos de las bases standard de $\dot{\Pi}_I\sigma_i$, $\dot{\Pi}_I\tau_i$, respectivamente. Entonces, para $k=1,2$:

$U \ F(h_I)^k \ V \iff$ 1. Para todo $i \in I$:

$U(i) \neq A_i \iff V(i) \neq B_i$.

2. Para todo $i \in I$ con $U(i) \neq A_i$:

$U(i) \ h_i^k \ V(i)$.

Definimos T, para cualquier familia $\langle (A_i,\sigma_i) \rangle_I$, de la siguiente forma:

1. dom $(T) = \{(U_{i_1},\dots,U_{i_n}) \ / \ n \geq 1, \ U_{i_1} \in \sigma_{i_1},\dots,U_{i_n} \in \sigma_{i_n}, \ U_{i_1} \neq A_{i_1},\dots,U_{i_n} \neq A_{i_n}\}$.

2. $T(U_{i_1},\dots,U_{i_n}) = U$, con

$$U(i) = \begin{cases} U_{i_k}, & \text{si} \quad i = i_k \quad \text{y} \quad k \in \{1,\dots,n\}. \\ A_i, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se tiene que F es un 2-funtor topológico local.

2.2.4. El producto con la topología caja.

Esta operación se puede expresar como un 2-funtor topológico local. La demostración es similar a la de 2.2.3.

2.2.5. La suma directa.

Para cualquier familia $<(A_i,\sigma_i)>_I$, tenemos $F((A,\sigma)_I) = = (\oplus_I A_i, \dot{\oplus}_I \sigma_i)$, donde $\dot{\oplus}_I \sigma_i$ es la topología relativizada de la topología caja del producto. Para cualquier familia $<h_i>_I$ con $h_i \in P^o[(A_i,\sigma_i), (B_i,\tau_i)]$, definimos $F(h_I)$ de la siguiente manera:

1. $\mathrm{dom}\ (F(h_I)^o) = \{(a_i)_I \ / \ a_i \in \mathrm{dom}\ (h_i^o)$ y $a_i = 0$ para una cantidad cofinita de índices $i\}$.

2. $F(h_I)^o((a_i)_I) = (h_i^o(a_i))_I$.

Sean U, V abiertos de las bases standard de $\dot{\oplus}_I \sigma_i$, $\dot{\oplus}_I \tau_i$, respectivamente. Sean U', V' abiertos de las bases standard de las topologías caja del producto, tales que $U = U' \cap \oplus_I A_i$, $V = V' \cap \oplus_I B_i$. Entonces, para $k=1,2$:

$$U\ F(h_I)^k\ V \iff U'(i)\ h_i^k\ V'(i) \quad (i \in I).$$

Para definir la función T se procede de manera similar a 2.2.3 y 2.2.4.

Se sigue que F es un 2-funtor topológico local.

2.2.6. La suma.

Para cualquier familia $<(A_i,\sigma_i)>_I$ (podemos suponer que los universos de las estructuras A_i son disjuntos dos a dos), tenemos $F((A,\sigma)_I) = (\Sigma_I A_i, \dot{\Sigma}_I \sigma_i)$, donde $\dot{\Sigma}_I \sigma_i$ es la topología suma. Para cualquier familia $<h_i>_I$ con $h_i \in P^o[(A_i,\sigma_i), (B_i,\tau_i)]$, definimos $F(h_I)$ de la siguiente forma:

1. $\mathrm{dom}\ (F(h_I)^o) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{dom}\ (h_i^o)$.

2. Si $a \in \mathrm{dom}\,(h_i^o)$, $F(h_I)^o(a) = h_i^o(a)$.

Sean U, V abiertos de las bases standard de $\dot{\Sigma}_I\sigma_i$, $\dot{\Sigma}_I\tau_i$, respectivamente. Entonces, para $k=1,2$:

$U\ F(h_I)^k\ V \iff$ existe $i \in I$ tal que $U \in \sigma_i$, $V \in \tau_i$ y $U\ h_i^k\ V$.

Definimos T, para cualquier familia $<(A_i,\sigma_i)>_I$, de la siguiente forma:

1. $\mathrm{dom}\,(T) = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$.

2. $T(U) = U$.

F es un 2-funtor topológico local.

2.2.7. El producto reducido.

Esta operación hace corresponder a una familia de estructuras topológicas $<(A_i,\sigma_i)>_I$, la estructura $(\Pi_I A_i/_D, \dot{\Pi}_I\sigma_i/_D)$, donde D es un filtro sobre I fijado de antemano y $\dot{\Pi}_I\sigma_i/D$ es la topología inducida por la topología caja del producto. Esto es, si μ es la base standard de la topología caja, la base standard de $\dot{\Pi}_I\sigma_i/_D$ viene definida por $\{U/_D \ / \ U \in \mu\}$, donde $U/_D = \{a/D \ / \ \{i \in I \ / \ a(i) \in U(i)\} \in D\}$. Procediendo como en las aplicaciones anteriores, se demuestra que esta operación puede ser expresada como un 2-funtor topológico local.

Se sigue que las operaciones tratadas en 2.2.1 - 2.2.7 verifican los resultados de preservación derivados de 2.1.8. Es fácil observar que si $\kappa \leq \omega$, F es un κ-funtor topológico local y existe $n \in \omega$ tal que todo elemento (igualmente, todo abierto) de $F((A,\sigma)_I)$

da lugar a menos de n elementos (respectivamente, menos de n abiertos) en (A_i,σ_i), se sigue que F preserva la $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia, en el supuesto de que los tipos de similaridad de partida sean finitos. Este hecho se puede aplicar a las operaciones tratadas en 2.2.3 - 2.2.7. Para el producto reducido es posible obtener resultados más fuertes, como vamos a ver ahora.

Sea $(L_{\omega\omega}(Q))_t$ el lenguaje obtenido a partir de $(L_{\omega\omega})_t$ y del cuantificador Qx, que expresa "existen 2^{χ_o} elementos". Si (A,σ) y (B,τ) son $(L_{\omega\omega}(Q))_t$-equivalentes, escribiremos $(A,\sigma) \equiv_Q^t (B,\tau)$. Un filtro D sobre I es ω-regular, si existe un conjunto de la forma $\{I_n \ / \ n \in \omega\}$, tal que $I_n \in D$ $(n \in \omega)$ y $\bigcap_{n\in\omega} I_n = \emptyset$. No es difícil generalizar al contexto topológico las técnicas introducidas en [1, teorema 2.7] y [21, teorema 2.7], y obtener el siguiente resultado:

(+) Supongamos que el tipo de similaridad de partida es numerable. Sean D un filtro ω-regular sobre I y $\langle(A_i,\sigma_i)\rangle_I$, $\langle(B_i,\tau_i)\rangle_I$ familias de estructuras topológicas. Entonces:

(a) $(A_i,\sigma_i) \equiv_{\omega\omega}^t (B_i,\tau_i) \quad (i \in I) \Longrightarrow \Pi_I(A_i,\sigma_i)/_D \equiv_Q^t \Pi_I(B_i,\tau_i)/_D$.

(b) $(A_i,\sigma_i) \equiv_{\omega\omega}^t (B_i,\tau_i) \quad (i \in I) \Longrightarrow \Pi_I(A_i,\sigma_i)/_D \equiv_{\infty\omega}^t \Pi_I(B_i,\tau_i)/_D$.

Sin embargo, este resultado (+) se puede obtener de inmediato, a partir de los dos siguientes resultados (1) y (2), que corresponden a

[11, teorema 2.8] y [12, 1ª parte, corolario 4.17], respectivamente.

(1) Supongamos que el tipo de similaridad de partida es numerable. Sea D un filtro ω-regular sobre I. Entonces:

$$A_i \equiv_{\omega\omega} B_i \quad (i \in I) \Longrightarrow \Pi_I A_i/_D \equiv_{\infty\omega_1(Q)} \Pi_I B_i/_D .$$

(2) Sean (A,σ), (B,τ) estructuras topológicas con $(A,\sigma) \equiv^t_{\omega\omega} (B,\tau)$. Existen una estructura topológica (C,μ) y bases μ_1, μ_2 de μ, tales que $(C,\mu_1) \equiv^2_{\omega\omega} (A,\sigma)$ y $(C,\mu_2) \equiv^2_{\omega\omega} (B,\tau)$.

CAPITULO 3

L_t-EQUIVALENCIA PARA ESPACIOS T_3

A lo largo de este capítulo, vamos a trabajar con espacios topológicos T_3, los cuales serán denotados por $A, B, \ldots$. En este punto cambia, pues, la notación con respecto a los dos primeros capítulos, en donde tales símbolos representan estructuras algebraicas.

3.1. Propiedades de primer orden de espacios T_3.

Las nociones y resultados que vamos a citar en este breve subcapítulo están expuestos en [12, 2ª parte].

Para cada $n \in \omega$ se define el conjunto de n-tipos para $(L_{\omega\omega})_t$, T_n, de la siguiente forma:

$$T_o = \{*\},$$

($*$ es un símbolo fijado).

Si $n \geq 1$:

$$T_n = P(T_{n-1}).$$

($P(T_{n-1})$ es el conjunto de partes de T_{n-1}).

$$\begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
T_2 & \emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\{*\}\},\ \{\{*\}\} \\
T_1 & \emptyset,\ \{*\} \\
T_o & *
\end{array}$$

Para todo A espacio T_3 y $a \in A$, se define el n-tipo de a en A, $t_n(a,A)$, de la siguiente manera:

$$t_o(a,A) = *.$$

Si $n \geq 1$:

$$t_n(a,A) = \{\alpha \in T_{n-1} \text{ / para todo abierto } U \ni a \text{ existe}$$
$$c \neq a \text{ con } c \in U \text{ y } t_{n-1}(c,A) = \alpha\}.$$

Si a es aislado en A, tenemos que $t_1(a,A) = \emptyset$. Si a es de acumulación en A, $t_1(a,A) = \{*\}$. Si a es punto de acumulación de puntos aislados y punto de acumulación de puntos de acumulación, $t_2(a,A) = \{\emptyset, \{*\}\}$. Si a es solamente punto de acumulación de puntos aislados, $t_2(a,A) = \{\emptyset\}$. Si a es solamente punto de acumulación de puntos de acumulación, $t_2(a,A) = \{\{*\}\}$. Obsérvese que si a es aislado, $t_n(a,A) = \emptyset$ $(n \in \omega)$.

Sean $m,n \in \omega$ con $m \leq n$ y $\alpha \in T_n$. Se define <u>el m-tipo de α</u>, $(\alpha)_m$, de la siguiente forma:

$$(\alpha)_o = *.$$

Si $m \geq 1$:

$$(\alpha)_m = \{(\beta)_{m-1} \text{ / } \beta \in \alpha\}.$$

Vamos a citar, a continuación, las propiedades más interesantes de los tipos para $(L_{\omega\omega})_t$.

(a) Si A es un espacio T_3, $a \in A$ y $m \leq n$:

$$(t_n(a,A))_m = t_m(a,A)$$

(por tanto, el n-tipo de a determina el m-tipo de a).

(b) Si A es un espacio T_3, U es un abierto de A y $a \in U$, se tiene para todo $n \in \omega$:

$$t_n(a,A) = t_n(a,U).$$

(c) Si $k \leq m \leq n$, se sigue:

1. Para todo $\alpha \in T_m$ existe $\beta \in T_n$ con $\alpha = (\beta)_m$.

2. Si $\alpha \in T_m \cap T_n$, $(\alpha)_m = \alpha$.

3. Si $\alpha \in T_n$, $(\alpha)_k = ((\alpha)_m)_k$.

Se deduce de (a) que la unión disjunta de los conjuntos T_n tiene una estructura de árbol, si consideramos la relación $\leq$, definida por:

$$\alpha \leq \beta \iff \alpha \in T_m, \quad \beta \in T_n, \quad m \leq n \quad y \quad \alpha = (\beta)_m.$$

Para todo A espacio T_3 y $n \in \omega$, se define <u>la función $K_n^A : T_n \longrightarrow \omega \cup \{\infty\}$</u> de la siguiente forma:

$$K_n^A(\alpha) = \text{número de elementos de } A \text{ de n-tipo } \alpha.$$

Se tiene que $K^A = \bigcup_{n \in \omega} K_n^A$ es una función bien definida; esto es, la expresión "el tipo de a en A es α" carece de ambigüedad. El siguiente resultado es la caracterización de la $(L_{\omega\omega})_t$-equivalencia para espacios T_3. En la parte más importante de la demostración, se prueba que es posible encontrar para todo $n \in \omega$ una estrategia de victoria del participante II en el juego de Ehrenfeucht de n movimientos, a partir de las propiedades (a) y (b).

3.1.1. <u>Teorema (Flum-Ziegler)</u>.- Sean A, B espacios T_3. Entonces:

$$A \equiv_{\omega\omega}^t B \iff K^A = K^B.$$

Para todo A espacio T_3 y $n \in \omega$, se define la función $K_n^A|n+1$ de la siguiente manera:

$$K_n^A|n+1(\alpha) = \begin{cases} K_n^A(\alpha), & \text{si} \quad K_n^A(\alpha) \leq n+1. \\ n+1, & \text{si} \quad K_n^A(\alpha) > n+1. \end{cases}$$

En 3.1.1 se demuestra:

$$K_n^A|n+1 = K_n^B|n+1 \quad (n \in \omega) \implies A \equiv_{\omega\omega}^t B.$$

3.1.2. Corolario.- Sea ϕ una sentencia de $(L_{\omega\omega})_t$. Podemos encontrar de manera efectiva un cierto $n_o \in \omega$ y ciertas sentencias de la forma "$K_{n_o}|n_o+1 = h$", de tal manera que ϕ es equivalente en espacios T_3 a la disyunción de dichas sentencias.

El siguiente resultado da lugar a un proceso de decisión para la teoría de espacios T_3.

3.1.3. Teorema (Flum-Ziegler).- Sea $h : T_n \longrightarrow \omega \cup \{\infty\}$. Las dos siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Existe A espacio T_3 con $K_n^A = h$.

(ii) Existe una relación transitiva $<$ sobre $V = \{\alpha \in T_n /$ $h(\alpha) \neq 0\}$, tal que:

1. $\alpha \in V \implies \alpha = \{(\beta)_{n-1} / \beta \in V$ y $\alpha < \beta\}$.

2. α no minimal $\implies h(\alpha) = \infty$.

Dados A espacio T_3 y $\alpha \in T_n$, se dice que α es satisfactible en A, si existe $a \in A$ con $t_n(a,A) = \alpha$. Esta noción, al igual que las anteriores, puede ser definida para cualquier espacio topológico (no necesariamente T_3).

Vamos a comprobar que si α es satisfactible en un espacio topológico, α es satisfactible en un espacio T_3. Supongamos que existe un espacio topológico A con $K_n^A(\alpha) \neq 0$. Procediendo como en la demostración de 3.1.3, se puede probar la existencia de una relación transitiva $<$ sobre $V = \{\alpha \in T_n \ / \ K_n^A(\alpha) \neq 0\}$, de tal manera que para todo $\alpha \in V$, se tiene que $\alpha = \{(\beta)_{n-1} \ / \ \beta \in V, \ \alpha < \beta\}$. Sea $h : T_n \longrightarrow \omega \cup \{\infty\}$ definida por:

$$h(\alpha) = \begin{cases} K_n^A(\alpha), & \text{si } \alpha \text{ es minimal en } V \text{ ó } \alpha \notin V. \\ \infty, & \text{si } \alpha \in V \text{ y } \alpha \text{ no es minimal.} \end{cases}$$

Se deduce de 3.1.3 que α es satisfactible en algún espacio T_3.

Sea T un conjunto numerable y $\leq$ un orden parcial sobre T. Se dice que $(T, \leq)$ es un <u>ω-árbol</u>, si para cualquier $a \in T$ se tiene que el conjunto $\{b \ / \ b \leq a\}$ es finito y está linealmente ordenado por $\leq$. Para cualquier $a \in T$, llamaremos cono de a al conjunto $c(a) = \{b \ / \ a \leq b\}$. Denotemos por $N(a)$ al conjunto de los sucesores inmediatos de a. Para cualquier $\Delta \subseteq N(a)$ finito, se define $U_\Delta(a) = \{a\} \cup \bigcup_{b \in N(a)-\Delta} c(b)$. Se tiene que $\{U_\Delta(a) \ / \ a \in T, \ \Delta \subseteq N(a) \text{ finito}\}$ es base de una topología T_3 sobre el conjunto T, en la cual cada $U_\Delta(a)$ es un cerrado. Denotemos a dicha topología por $\sigma_\leq$. El siguiente resultado, al igual que los anteriores, nos será de utilidad en este capítulo.

3.1.4. Teorema (Flum-Ziegler).- Sea A espacio T_3 numerable. Existe un ω-árbol $(T,\leq)$, tal que $A \simeq^t (T,\sigma_{\leq})$.

Si $(T,\leq)$ es un ω-árbol, diremos que $(T,\sigma_{\leq})$ es un ω-árbol con la topología inducida.

3.2. Productos de espacios T_3.

Suponemos que I es un conjunto de índices no vacío. Para cualquier familia $\langle A_i \rangle_I$ de espacios T_3, denotaremos al producto de los espacios A_i con la topología caja por $X_I A_i$.

Vamos a definir para todo $n \in \omega - \{0\}$ una función producto x^n sobre T_n, tal que para cualquier familia $\langle A_i \rangle_I$ de espacios T_3 y cualquier $(a_i)_I \in X_I A_i$:

$$t_n((a_i)_I, X_I A_i) = x_I^n \; t_n(a_i, A_i).$$

Definiremos para todo $n \in \omega - \{0\}$ un orden lineal $<^n$ sobre el conjunto T_n^* de n-tipos satisfactibles, tal que para cualquier familia $\langle \alpha_i \rangle_I$ de tales tipos:

$$\alpha_i \leq^n x_I^n \alpha_i \quad . \; (i \in I).$$

Se tendrá que $<^n$ no será siempre único con respecto a esta propiedad. Podremos construir, a través de la función x^n, una función decidible, que cumplirá el teorema de Feferman -Vaught para productos de espacios T_3 con la topología caja. El teorema 3.1.3 permitirá, además, obtener una función óptima.

(A). El teorema básico.

3.2.1. Definición.- Vamos a definir por inducción sobre $n \in \omega - \{0\}$ (el caso $n=0$ no ofrece interés) una función x^n sobre T_n, de la siguiente forma. Para cualquier familia $\langle \alpha_i \rangle_I$ de 1-tipos, definimos:

$$x_I^1 \alpha_i = \begin{cases} \{*\}, & \text{si } \alpha_i = \{*\} \quad \text{para algún } i \in I. \\ \emptyset, & \text{si } \alpha_i = \emptyset \quad \text{para todo } i \in I. \end{cases}$$

Si $n \geq 2$ y $\langle \alpha_i \rangle_I$ es una familia de n-tipos, definimos:

$$x_I^n \alpha_i = \bigcup_{\substack{J \subseteq I \\ J \neq I}} \{ x_I^{n-1} \beta_i \ / \ 1.\ \beta_i \in \alpha_i \quad (i \notin J). \quad 2.\ \beta_i = (\alpha_i)_{n-1} \quad (i \in J) \}.$$

Supongamos que $\operatorname{card}(I) = 2$. Tenemos:

x^1	$\emptyset$	$\{*\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{*\}$
$\{*\}$	$\{*\}$	$\{*\}$

Obsérvese que si $n \geq 2$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in T_n$, se sigue que

$$\alpha_1 \ x^n \ \alpha_2 = \{\beta_1 \ x^{n-1} \ \beta_2 \ / \ \beta_1 \in \alpha_1,\ \beta_2 \in \alpha_2\} \cup \{(\alpha_1)_{n-1} \ x^{n-1} \ \beta_2 \ / \ \beta_2 \in \alpha_2\} \cup \{\beta_1 \ x^{n-1} \ (\alpha_2)_{n-1} \ / \ \beta_1 \in \alpha_1\}.$$

Tenemos:

x^2	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset,\{*\}\}$	$\{\{*\}\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset,\{*\}\}$	$\{\{*\}\}$
$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset,\{*\}\}$	$\{\emptyset,\{*\}\}$	$\{\{*\}\}$
$\{\emptyset,\{*\}\}$	$\{\emptyset,\{*\}\}$	$\{\emptyset,\{*\}\}$	$\{\emptyset,\{*\}\}$	$\{\{*\}\}$
$\{\{*\}\}$	$\{\{*\}\}$	$\{\{*\}\}$	$\{\{*\}\}$	$\{\{*\}\}$

Por ejemplo,

$$\{\emptyset\}\ x^2\ \{\emptyset\} = \{\emptyset\ x^1\ \emptyset\} \cup \{\emptyset\ x^1\ (\{\emptyset\})_1\} = \{\emptyset\} \cup \{\emptyset\ x^1\ \{*\}\}$$
$$= \{\emptyset,\{*\}\}.$$

Sin embargo,

$$\{\emptyset\}\ x^3\ \{\emptyset\} = \{\emptyset\ x^2\ \emptyset\} \cup \{\emptyset\ x^2\ (\{\emptyset\})_2\} = \{\emptyset\} \cup \{\emptyset\ x^2\ \{\emptyset\}\}$$
$$= \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}.$$

Por tanto, si $n \geq 2$ y $\alpha,\beta \in T_n \cap T_{n+1}$ no es cierto en general que $\alpha x^n\beta$ coincida con $\alpha x^{n+1}\beta$. La razón es que $(\alpha)_n$ pue de ser distinto de $(\alpha)_{n-1}$.

Es obvio que x^n $(n \geq 1)$ es una operación conmutativa. En el siguiente lema, se demuestra que x^n es asociativa. Cuando haga mos uso de él, no haremos mención explícita de ello.

3.2.2. <u>Lema</u>.- Sea $<\alpha_i>_I$ una familia de n-tipos. Para cualquier $I' \subseteq I$ con $I' \neq \emptyset$ e $I' \neq I$, se tiene:

$$x_I^n\ \alpha_i = (x_{I'}^n\ \alpha_i) x^n\ (x_{I-I'}^n\ \alpha_i).$$

<u>Demostración</u>: Vamos a probar:

(1) Para cualquier $m \leq n$ con $m \geq 1$ y cualquier familia

$\langle\alpha_i\rangle_I$ de n-tipos, se tiene que

$$(x^n_I \alpha_i)_m = x^m_I (\alpha_i)_m.$$

A partir de (1), se demuestra fácilmente este lema, procediendo por inducción sobre n.

Para probar (1), vamos a proceder por inducción sobre m. El caso $m = 1$ es inmediato. Pues, para todo $n \geq 1$, tenemos:

$$(x^n_I \alpha_i)_1 = \emptyset \Longleftrightarrow \alpha_i = \emptyset \quad (i \in I) \Longleftrightarrow x^1_I(\alpha_i)_1 = \emptyset.$$

Supongamos que $m \geq 2$ y que la afirmación es cierta para $m-1$. Sea $\beta \in (x^n_I \alpha_i)_m$. Se sigue que existe $x^{n-1}_I \beta_i \in x^n_I \alpha_i$ tal que $\beta = (x^{n-1}_I \beta_i)_{m-1}$. Por la hipótesis de inducción, $\beta = x^{m-1}_I(\beta_i)_{m-1}$. Tenemos:

1. Existe $i \in I$ con $\beta_i \in \alpha_i$.

2. Para todo $i \in I$, $\beta_i \in \alpha_i$ ó $\beta_i = (\alpha_i)_{n-1}$.

Por tanto, $\beta \in x^m_I (\alpha_i)_m$. En consecuencia, $(x^n_I \alpha_i)_m \subseteq x^m_I (\alpha_i)_m$.

Sea $\beta \in x^m_I (\alpha_i)_m$. Por tanto, existe $x^{m-1}_I(\beta_i)_{m-1} \in x^m_I(\alpha_i)_m$ con $\beta = x^{m-1}_I (\beta_i)_{m-1}$ y tal que:

1. Existe $i \in I$ con $\beta_i \in \alpha_i$.

2. Para todo $i \in I$, $\beta_i \in \alpha_i$ ó $\beta_i = \alpha_i$.

Para todo $i \in I$, definimos β'_i por

$$\beta'_i = \begin{cases} \beta_i , & \text{si} \quad \beta_i \in \alpha_i . \\ (\alpha_i)_{n-1}, & \text{si} \quad \beta_i = \alpha_i . \end{cases}$$

Se sigue que $\beta = x^{m-1}_I(\beta'_i)_{m-1}$. Por la hipótesis de inducción,

$\beta = (x_I^{n-1}\ \beta'_i)_{m-1}$. En consecuencia, $\beta \in (x_I^n\ \alpha_i)_m$. Por tanto, también se cumple que $x_I^m\ (\alpha_i)_m \subseteq (x_I^n\ \alpha_i)_m$. ⊣

El siguiente lema, que expresa una de las propiedades básicas de la función x^n, nos será de utilidad en esta sección 3.2. Tanto el apartado (a) como el (b) se demuestran sin dificultad por inducción sobre n. Para probar (b), téngase en cuenta que para todo $n \geq 2$ se tiene que $(\{\underbrace{\ldots}_{n}\ \{*\}\ \underbrace{\ldots}_{n}\})_{n-1} = \{\underbrace{\ldots}_{n-1}\ \{*\}\ \underbrace{\ldots}_{n-1}\}$.

3.2.3. <u>Lema</u>.- Sean $n \geq 1$ y $\langle\alpha_i\rangle_I$ una familia de n-tipos.

(a) Sea $J = \{i \in I\ /\ \alpha_i \neq \emptyset\}$. Si $J \neq \emptyset$, se tiene que

$$x_I^n\ \alpha_i = x_J^n\ \alpha_j.$$

(b) Si existe $i \in I$ con $\alpha_i = \{\underbrace{\ldots}_{n}\ \{*\}\ \underbrace{\ldots}_{n}\}$, se tiene que

$$x_I^n\ \alpha_i = \{\underbrace{\ldots}_{n}\ \{*\}\ \underbrace{\ldots}_{n}\}.$$

Teniendo en cuenta que T_n es finito, no es difícil demostrar por inducción sobre n el siguiente resultado.

3.2.4. <u>El teorema básico</u>.- Sean $\langle A_i\rangle_I$ una familia de espacios T_3 y $(a_i)_I \in X_I A_i$. Para todo $n \geq 1$ se tiene que

$$t_n((a_i)_I,\ X_I A_i) = x_I^n\ t_n(a_i,\ A_i).$$

3.2.5. <u>Observaciones</u>.- (a) El teorema básico permite obtener la función $K^{X_I A_i}$ a partir de las funciones K^{A_i}. Para cualquier n-tipo α, tenemos:

$$K^{X_I A_i}(\alpha) = \sum_{\substack{\langle\alpha_i\rangle_I \\ \alpha_i \text{ n-tipo} \\ x_I^n \alpha_i = \alpha}} \Pi_I K^{A_i}(\alpha_i).$$

Por tanto, si card(I) = 2:

$$K^{AXB}(\alpha) = \sum_{\substack{(\alpha_1,\alpha_2) \\ \alpha_1,\alpha_2 \text{ n-tipos} \\ \alpha_1 x^n \alpha_2 = \alpha}} K^A(\alpha_1) \cdot K^B(\alpha_2).$$

(b) Para cualquier familia $\langle A_i\rangle_I$ de espacios T_3, denotemos por $\Pi_I A_i$ al producto de los espacios A_i con la topología usual. Si I es finito, la topología caja coincide con la usual. Lo mismo sucede si A_i consta de un único elemento para una cantidad cofinita de índices i, en el supuesto de que I es infinito. No vamos a considerar, por tanto, ninguno de estos dos casos. Se sigue que en $\Pi_I A_i$ todos los puntos son de acumulación. Por tanto, para cualquier n-tipo α:

$$K^{\Pi_I A_i}(\alpha) = \begin{cases} \infty, & \text{si} \quad \alpha = \{\underset{n}{\dots} \{*\} \underset{n}{\dots}\}. \\ 0, & \text{si} \quad \alpha \neq \{\underset{n}{\dots} \{*\} \underset{n}{\dots}\}. \end{cases}$$

(c) Para cualquier familia $\langle A_i\rangle_I$ de espacios T_3 disjuntos dos a dos, denotemos por $\Sigma_I A_i$ a la suma de los espacios A_i. Obsérvese que si $a_i \in A_i$, se sigue que $t_n(a_i,A_i) = t_n(a_i,\Sigma_I A_i)$. Por tanto, para cualquier n-tipo α:

$$K^{\Sigma_I A_i}(\alpha) = \sum_{i\in I} K^{A_i}(\alpha).$$

(B). Algunas consecuencias.

Si para cualquier familia $<(\tilde{A}_i,\sigma_i)>_I$ de estructuras topológicas para un mismo tipo de similaridad (naturalmente, $I \neq \emptyset$), denotamos por $X_I\tilde{A}_i$ al producto algebraico de las estructuras $\tilde{A}_i$ y por $X_I\sigma_i$ a la base standard de la topología caja de $X_I\tilde{A}_i$, se tie-ne, haciendo uso de la terminología de [9], que $(X_I\tilde{A}_i,\ X_I\sigma_i)$ es un producto generalizado y relativizado respecto a $(P(I), \cap, \cup, ^-, \subseteq, I)$. Denotemos por $X_I(\tilde{A}_i,\sigma_i)$ al producto de las estructuras $(\tilde{A}_i,\sigma_i)$ con la topología caja. Llamemos $st : L_{\omega\omega} \longrightarrow \omega$ a la función decidible que es construida en el teo-rema de Feferman-Vaught (véase [9, teorema 6.6.]). Se sigue que pa-ra cualquier sentencia ϕ de $(L_{\omega\omega})_t$ y cualquier familia $<(\tilde{A}_i,\sigma_i)>_I$ de estructuras topológicas, se cumple:

$$X_I(\tilde{A}_i,\sigma_i) \models \phi \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{existe } I_o \subseteq I \text{ con } \mathrm{card}(I_o) \leq st(\phi), \\ \text{tal que para todo } I' \subseteq I \text{ con } I_o \subseteq I', \\ \text{se tiene que } X_{I'}(\tilde{A}_i,\sigma_i) \models \phi. \end{array}$$

Para todo $n \in \omega$, sea $T_n^* = \{\alpha \in T_n \ /\ \alpha$ satisfactible en al-gún espacio $T_3\}$.

Para todo $n \geq 1$, vamos a definir un orden lineal $<^n$ sobre T_n^*, tal que para cualquier familia $<\alpha_i>_I$ de n-tipos satisfactibles y cualquier $J \subseteq I$ con $J \neq \emptyset$ se cumplirá que $x_J^n\ \alpha_j \leq^n x_I^n\ \alpha_i$. Co-mo T_n^* es finito, tendremos que para cualquier familia $<\alpha_i>_I$ de n-tipos satisfactibles, el producto $x_I^n\ \alpha_i$ se estabilizará a par-tir de un cierto subconjunto finito I_o de I. Como toda sentencia ϕ de $(L_{\omega\omega})_t$ es equivalente en espacios T_3 a una disyunción de sentencias de la forma "$K_{n_o} | n_o+1 = h$", las cuales pueden ser obtenidas de una manera efectiva, podremos construir mediante el teorema básico una función decidible $p : (L_{\omega\omega})_t \longrightarrow \omega$ que verificará el teorema de Feferman-Vaught para productos de espacios T_3 con la topología caja.

Sea I un conjunto infinito de índices, y para cada $i \in I$ sea A_i un espacio infinito con la topología discreta. Consideremos el producto de los espacios A_i con la topología usual, $\Pi_I A_i$. Se sigue que $\Pi_I A_i \models \neg$ disc. Sin embargo, para cualquier $I_o \subseteq I$ finito, se tiene que $\Pi_{I_o} A_i \models$ disc. Por tanto, no existe ninguna función que verifique el teorema de Feferman -Vaught para productos de espacios T_3 con la topología usual.

3.2.6. Definición.- Vamos a definir por inducción sobre $n \in \omega - \{0\}$ una relación de orden lineal $<^n$ sobre T_n^*, de la siguiente manera:

$$\phi <^1 \{*\}.$$

Supongamos que $n \geq 2$. Sean $\alpha,\beta \in T_n^*$ con $\alpha \neq \beta$. Si $\alpha = \emptyset$ y $\beta \neq \emptyset$, definimos $\alpha <^n \beta$. Si $\alpha = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\}$ y $\beta = \{\beta_1,\ldots,\beta_r\}$ con $\alpha_1 <^{n-1} \ldots <^{n-1} \alpha_\ell$ y $\beta_1 <^{n-1} \ldots <^{n-1} \beta_r$, distinguimos dos casos:

Caso 1

Existe $k \geq 0$, tal que $\alpha_{\ell-k} \neq \beta_{r-k}$.- Sea m = mínimo $\{k \geq 0 / \alpha_{\ell-k} \neq \beta_{r-k}\}$. Si $\alpha_{\ell-m} <^{n-1} \beta_{r-m}$, definimos $\alpha <^n \beta$; en caso contrario, definimos $\beta <^n \alpha$.

Caso 2

No existe tal k.- Entonces, comparamos ℓ con r. Si $\ell<r$, definimos $\beta <^n \alpha$; si $r < \ell$, definimos $\alpha <^n \beta$ (si $\ell=r$, tendríamos $\alpha = \beta$).

Se tiene que $<^n$ es un orden lineal sobre T_n^*. Obsérvese que para cualquier α n-tipo satisfactible, si $\alpha \neq \emptyset$ y $\alpha \neq \{\underset{n}{\ldots} \{*\} \underset{n}{\ldots}\}$ se tiene que $\emptyset \in \alpha$. Vamos a comprobar que si estamos en el caso 2, se cumple que $\alpha = \{\underset{n}{\ldots} \{*\} \underset{n}{\ldots}\}$ ó $\beta = \{\underset{n}{\ldots} \{*\} \underset{n}{\ldots}\}$. Si no fuera así, tendríamos que $\alpha_1 = \emptyset$ y $\beta_1=\emptyset$. Supongamos que $\ell < r$ (de igual manera se procede, si $r < \ell$). Se seguiría que para algún $\beta_p \neq \beta_1$ se tendría que $\beta_p = \alpha_1 = \emptyset$, lo cual no es posible. Tenemos:

T_1^* $\qquad \emptyset <^1 \{*\}$

T_2^* $\qquad \emptyset <^2 \{\emptyset\} <^2 \{\emptyset, \{*\}\} <^2 \{\{*\}\}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

Si $\alpha,\beta \in T_n^*$ y $\alpha <^n \beta$ ó $\alpha = \beta$, escribiremos $\alpha \leq^n \beta$.

3.2.7. Teorema.- Sean $n \geq 1$, $\langle\alpha_i\rangle_I$ una familia de n-tipos satisfactibles y $J \subseteq I$ con $J \neq \emptyset$. Entonces, $x_J^n\, \alpha_j \leq^n x_I^n\, \alpha_i$.

Demostración: Si $\alpha_j = \emptyset$ para todo $j \in J$, el caso es obvio. Si para algún $i \in I$ se tiene que $\alpha_i = \{\underset{n}{\ldots} \{*\} \underset{n}{\ldots}\}$, se sigue por 3.2.3 (b) que

$$x_J^n\, \alpha_j \leq^n x_I^n\, \alpha_i = \{\underset{n}{\ldots} \{*\} \underset{n}{\ldots}\}.$$

Supongamos que no nos encontramos en ninguno de estos casos. Por tanto, si $\alpha_i \neq \emptyset$ se tiene que $\emptyset \in \alpha_i$. Se sigue que $\emptyset \in x_J^n \alpha_j$. Por tanto:

(1) $x_J^n \alpha_j \neq \{\underset{n}{\dots} \{*\} \underset{n}{\dots}\}$.

Sea $\beta = x_J^{n-1} \beta_j \in x_J^n \alpha_j$. Para todo $i \in I$, definimos:

$$\beta_i' = \begin{cases} \beta_i, & \text{si} \quad i \in J, \\ \emptyset, & \text{si} \quad i \notin J. \end{cases}$$

Se sigue que $x_I^{n-1} \beta_i' \in x_I^n \alpha_i$. Por 3.2.3 (a), tenemos que $\beta = x_I^{n-1} \beta_i'$. Por tanto:

(2) $x_J^n \alpha_j \subseteq x_I^n \alpha_i$.

Se deduce de (1) y (2) que $x_J^n \alpha_j \leq^n x_I^n \alpha_i$. $\dashv$

Por tanto, para cualquier familia $\langle \alpha_i \rangle_I$ de n-tipos satisfactibles se tiene que $\alpha_i \leq^n x_I^n \alpha_i$ $(i \in I)$. Este hecho contrasta con lo que sucede en el contexto clásico. Si consideramos, por ejemplo, lo expuesto en [5, capítulo 6], observamos que los tipos de Hintikka -Fraissé para sentencias de rango n constituyen el conjunto de átomos de un álgebra de Boole finita.

Sean $n \geq 1$ y $\langle \alpha_i \rangle_I$ una familia de n-tipos satisfactibles. Vamos a comprobar que existe $I_0 \subseteq I$ finito, tal que $x_I^n \alpha_i = x_{I_0}^n \alpha_i$. Para ello, vamos a proceder por inducción sobre n. El caso n=1 es inmediato. Supongamos que $n \geq 2$. Si $\alpha_i = \emptyset$ para una cantidad cofinita de índices i ó $\alpha_i = \{\underset{n}{\dots} \{*\} \underset{n}{\dots}\}$ para algún i, es suficiente aplicar 3.2.3. Supongamos que no estamos en estos dos casos. Por tanto, si $\alpha_i \neq \emptyset$ se sigue que $\dot{\emptyset} \in \alpha_i$. Como $x_I^n \alpha_i$ es finito, aplicando la hipótesis de inducción, se sigue que existe $I_o \subseteq I$ finito y no vacío, tal que $x_I^n \alpha_i \subseteq x_{I_o}^n \alpha_i$. Así, pues, $x_I^n \alpha_i = x_{I_o}^n \alpha_i$. Por tanto, el siguiente lema se puede obtener inmediatamente de 3.2.7.

3.2.8. <u>Lema</u>.- Sean $n \geq 1$ y $<\alpha_i>_I$ una familia de n-tipos satisfactibles. Existe $I_o \subseteq I$ finito, tal que para todo $I' \subseteq I$ con $I_o \subseteq I'$, se sigue que $x_I^n \alpha_i = x_{I'}^n \alpha_i$.

3.2.9. <u>Observación</u>.- Vamos a comprobar que en general la relación de orden lineal $<^n$ no es única con respecto a la propiedad expresada en el teorema 3.2.7. Consideremos el conjunto T_3. Haciendo uso del teorema 3.1.3, vamos a comprobar que el conjunto T_3^* está formado por los siguientes elementos:

$\overline{1} = \emptyset$.

$\overline{2} = \{\emptyset\}$.

$\overline{3} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

$\overline{4} = \{\emptyset, \{\emptyset, \{*\}\}\}$.

$\overline{5} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{*\}\}\}$.

$\overline{6} = \{\emptyset, \{\{*\}\}\}$.

$\overline{7} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{*\}\}\}$.

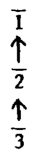
$\overline{8} = \{\emptyset, \{\emptyset, \{*\}\}, \{\{*\}\}\}$.

$\overline{9} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{*\}\}, \{\{*\}\}\}$.

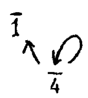
$\overline{10} = \{\{\{*\}\}\}$.

Para ello, podemos considerar las relaciones transitivas, dadas por los siguientes grafos:

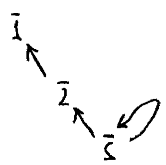
Grafo 1



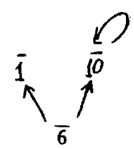
Grafo 2



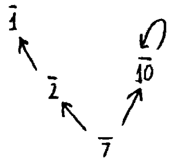
Grafo 3



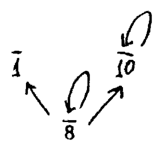
Grafo 4



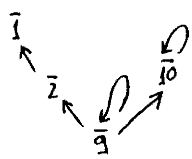
Grafo 5



Grafo 6



Grafo 7



Es claro que ningún otro 3-tipo es satisfactible. Tenemos :

$\times^3$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$

Se tiene que $\overline{1} <^3 \overline{2} <^3 \ldots <^3 \overline{9} <^3 \overline{10}$. Definimos sobre T_3^* la relación de orden lineal $<'$ por:

$$\overline{1} <' \overline{7} <' \overline{2} <' \overline{3} <' \overline{4} <' \overline{5} <' \overline{6} <' \overline{8} <' \overline{9} <' \overline{10}.$$

Es claro que $<'$ cumple lo requerido.

Para cualquier A espacio T_3 y cualquier $n \geq 1$, definimos:

$T_n(A) = \{\alpha \in T_n \ / \ \alpha$ satisfactible en $A\}$.

$K_n^-(A) = \{(\alpha, K_n^A | n+1(\alpha)) \ / \ \alpha$ n-tipo$\}$.

Para cualquier familia $\langle A_i \rangle_I$ de espacios T_3 y cualquier $n \geq 1$, definimos:

$$X_I^n\, T_n(A_i) = \{x_I^n\, \alpha_i \;/\; \alpha_i \in T_n(A_i) \quad (i \in I)\},$$

$$X_I^n\, K_n^-(A_i) = \{(\beta, m) \;/\; (a) \quad \beta \in X_I^n\, T_n(A_i).$$

(b) Si $H = \{<(\alpha_i, m_i)>_I \;/\; (\alpha_i, m_i) \in K_n^-(A_i)$ y $x_I^n\, \alpha_i = \beta\}$

se tiene que

$$m = \text{mínimo}\, \{ \sum_{\substack{<(\alpha_i, m_i)>_I \\ \in H}} \Pi_I\, m_i,\; n+1\}\}.$$

Obsérvese que por el teorema básico, tenemos:

$$T_n(X_I A_i) = X_I^n\, T_n(A_i).$$

$$K_n^-(X_I A_i) = X_I^n\, K_n^-(A_i).$$

En el siguiente resultado, aplicaremos el teorema básico sin hacer mención explícita de ello.

3.2.10. Teorema.- Sea ϕ una sentencia de $(L_{\omega\omega})_t$. Podemos encontrar de manera efectiva un número natural m_o, tal que para cualquie familia $<A_i>_I$ de espacios T_3, se tiene:

$X_I A_i \models \phi \Longrightarrow$ existe $I_o \subseteq I$ con $\text{card}(I_o) \leq m_o$, tal que para todo $I' \subseteq I$ con $I_o \subseteq I'$, se tiene que $X_{I'} A_i \models \phi$.

Demostración: Sea "$K_{n_o} | n_o+1 = h_1$" $\vee$ ... $\vee$ "$K_{n_o} | n_o+1 = h_r$" la disyunción de sentencias equivalente a ϕ en espacios T_3, dada por 3.1.2. Sea r_o = mínimo $\{\ell \in \omega \;/\; 2^\ell \geq n_o+1\}$. Definimos

$$m_o = \text{card}\,(T^*_{n_o}) + r_o.$$

Por 3.1.3, m_o puede ser obtenido de manera efectiva. Supongamos que $X_I A_i \models \phi$. Entonces, para algún $k \in \{1,\dots,r\}$:

$$K^-_{n_o}(X_I A_i) = \{(\alpha, h_k(\alpha)) \,/\, \alpha \quad n_o\text{-tipo}\}.$$

Distinguimos dos casos:

Caso 1

Existe $i_o \in I$, tal que A_{i_o} no tiene puntos aislados. Se sigue por 3.2.3 (b) que

$$K^-_{n_o}(X_I A_i) = \{(\{\underset{n_o}{\dots}\ \{*\}\ \underset{n_o}{\dots}\},\ n_o+1)\} \cup \{(\alpha,0) \,/\, \alpha \in T_{n_o}$$

$$y \quad \alpha \neq \{\underset{n_o}{\dots}\ \{*\}\ \underset{n_o}{\dots}\}\}.$$

Sea $I_o = \{i_o\}$. Si $I' \subseteq I$ con $I_o \subseteq I'$, tenemos que

$$K^-_{n_o}(X_I A_i) = K^-_{n_o}(X_{I'} A_i).$$

Por tanto,

$$X_{I'} A_i \models \phi.$$

Caso 2

Para todo $i \in I$, A_i tiene algún punto aislado. Como el conjunto de n_o-tipos es finito, existe por 3.2.8 y 3.2.3 (a) un subconjunto I'_o de I con card $(I'_o) \leq$ card $(T^*_{n_o})$, tal que para todo $I' \subseteq I$ con $I'_o \subseteq I'$ se sigue que

$$T_{n_o}(X_I A_i) = T_{n_o}(X_{I'} A_i).$$

Por consiguiente, existe $I_o \subseteq I$ con card $(I_o) \leq m_o$, tal que para todo $I' \subseteq I$ con $I_o \subseteq I'$ se tiene que

$$K^-_{n_o}(X_I A_i) = K^-_{n_o}(X_{I'} A_i).$$

Por tanto, si $I' \subseteq I$ con $I_o \subseteq I'$:

$$X_{I'} A_i \models \phi. \dashv$$

En la demostración de este último resultado se puede tomar $m_o = \text{card}\,(T_{n_o}) + r_o$, y no hacer uso del teorema 3.1.3. El siguiente resultado es un corolario inmediato de 3.2.10.

3.2.11. Corolario.- Sea ϕ una sentencia de $(L_{\omega\omega})_t$. Podemos encontrar de manera efectiva un número natural m_o, tal que para cualquier familia $\langle A_i \rangle_I$ de espacios T_3 existe $I_o \subseteq I$ con $\text{card}\,(I_o) \leq m_o$, tal que para todo $I' \subseteq I$ con $I_o \subseteq I'$ se tiene:

$$X_{I_o} A_i \models \phi \iff X_{I'} A_i \models \phi.$$

Los dos siguientes resultados corresponden a [9, corolario 6.7 y teorema 6.8], los cuales son dos de las consecuencias más interesantes del teorema de Feferman-Vaught. Uno de estos resultados se cumple, incluso, para productos de espacios T_3 con la topología usual.

3.2.12. Corolario.- (a) Sean $\langle A_n \rangle_\omega$ una familia de espacios T_3 y ϕ una sentencia de $(L_{\omega\omega})_t$. Entonces:

$$A_o \times \ldots \times A_n \models \phi \;\; (n \in \omega) \Longrightarrow X_\omega A_n \models \phi.$$

(b) Sean Φ un conjunto de sentencias de $(L_{\omega\omega})_t$ y $\mathcal{A}$ la clase de todos los espacios T_3 que son modelos de Φ. Si $\mathcal{A}$ es cerrada respecto de la operación de tomar el producto de dos espacios T_3, $\mathcal{A}$ es cerrada respecto de la operación de tomar el producto de un número infinito de espacios T_3 con la topología caja.

Los apartados (a) y (b) de este último resultado no son ciertos, si consideramos el producto con la topología usual. Para comprobar esto, podemos considerar, respectivamente, $\phi = \underline{disc}$ y $\Phi = \{\underline{disc}\}$.

3.2.13. Teorema.- Sean I un conjunto de índices no numerable y $\langle A_i \rangle_I$ una familia de espacios T_3. Existe un subconjunto numerable I^* de I, tal que para cualquier $I' \subseteq I$ con $I^* \subseteq I'$, se tiene que

$$X_I A_i \equiv^t_{\omega\omega} X_{I'} A_i \ .$$

Este último teorema es cierto, si consideramos el producto con la topología usual. Para comprobar esto, podemos soslayar el caso trivial en el que A_i tiene un único elemento para una cantidad cofinita de índices $i \in I$. Sea I^* un subconjunto infinito numerable de I, tal que para todo $i \in I^*$ se tiene que $\mathrm{card}(A_i) \geq 2$. Sean $I' \subseteq I$ con $I^* \subseteq I'$, $n \in \omega$ y α n-tipo. Tenemos:

$$K^{\Pi_I A_i}(\alpha) = K^{\Pi_{I'} A_i}(\alpha) = \begin{cases} \infty \ , & \text{si} \quad \alpha = \{\underset{n}{\ldots} \{*\} \underset{n}{\ldots}\} \ . \\ 0 \ , & \text{si} \quad \alpha \neq \{\underset{n}{\ldots} \{*\} \underset{n}{\ldots}\} \ , \end{cases}$$

Es suficiente, por tanto, aplicar el teorema 3.1.1.

Vamos a demostrar a continuación que es posible optimizar de una manera efectiva, a partir del teorema 3.1.3, cualquier función decidible que cumpla el teorema de Feferman-Vaught para productos de espacios T_3 con la topología caja. Sean A espacio T_3 y $n \geq 1$. Si $\Sigma = K^-_n(A)$ y $r \geq 1$, denotaremos por $(\Sigma)^r$ al producto $\Sigma \ X^n \ \overset{r}{\ldots} \ X^n \ \Sigma$. Definimos $(\Sigma)^o = \{(\emptyset,1)\} \cup \{(\alpha,0) \ / \ \alpha$ n-tipo, $\alpha \neq \emptyset\}$. Si ϕ es una sentencia de $(L_{\omega\omega})_t$ y $r \geq 1$, escribiremos $FV(r,\phi)$ si para cualquier familia $\langle A_i \rangle_I$ de espacios T_3, se tiene:

$X_I A_i \models \phi \Longrightarrow$ existe $I_o \subseteq I$ con card $(I_o) \leq r$, tal que para todo $I' \subseteq I$ con $I_o \subseteq I'$, se tiene que $X_{I'} A_i \models \phi$.

3.2.14. Teorema.- Sea ϕ una sentencia de $(L_{\omega\omega})_t$. Si podemos encontrar de manera efectiva un número natural m_o con $FV(m_o,\phi)$, podemos encontrar de manera efectiva el número natural k_o = mínimo $\{n \in \omega \ / \ FV(n,\phi)\}$.

Demostración: Si ϕ es insatisfactible, el caso es obvio. Supongamos, pues, que ϕ es satisfactible. Sea "$K_{n_o} | n_o+1 = h_1$" $\vee \dots \vee$ "$K_{n_o} | n_o+1 = h_r$" la disyunción de sentencias equivalente a ϕ en espacios T_3, dada por 3.1.2. Para cada $\ell \in \{1,\dots,r\}$ definimos Σ_{h_ℓ} por

$$\Sigma_{h_\ell} = \{(\alpha, h_\ell(\alpha)) \ / \ \alpha \quad n_o\text{-tipo}\}.$$

Por 3.1.3, podemos suponer que si A es un espacio T_3 y $\Sigma = K^-_{n_o}(A)$, se tiene que $m_o \geq$ mínimo $\{n \in \omega / \ (\Sigma)^n = (\Sigma)^{n+1}\}$.

Sea C el conjunto formado por todos los elementos de la forma $\tilde{\Sigma} = [(\Sigma_1^*,\dots,\Sigma_p^*, \Sigma_1,\dots,\Sigma_q), \ (s_1,\dots,s_p)]$, tales que:

(a) Existen $A_1,\dots,A_p$, $B_1,\dots,B_q$ espacios T_3, de tal forma que se cumple:

$$\begin{array}{lcl} \Sigma_1^* = K^-_{n_o}(A_1) & \qquad & \Sigma_1 = K^-_{n_o}(B_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \Sigma_p^* = K^-_{n_o}(A_p) & & \Sigma_q = K^-_{n_o}(B_q). \end{array}$$

(b) $\Sigma_1^*,\ldots,\Sigma_p^*,\ \Sigma_1,\ldots,\Sigma_q$ son distintos dos a dos.

(c) $s_1,\ldots,s_p \in \omega - \{0\}$ y $s_1,\ldots,s_p < m_o$.

(d) $(\Sigma_1^*)^{s_1}\ X^{n_o} \ldots X^{n_o}\ (\Sigma_p^*)^{s_p}\ X^{n_o}\ (\Sigma_1)^{m_o}\ X^{n_o} \ldots X^{n_o}\ (\Sigma_q)^{m_o}$

$\in \{\Sigma_{h_1},\ldots,\Sigma_{h_r}\}$.

Para cualquier $\tilde{\Sigma} = [(\Sigma_1^*,\ldots,\Sigma_p^*,\ \Sigma_1,\ldots,\Sigma_q),\ (s_1,\ldots,s_p)] \in C$, consideremos:

$n(\tilde{\Sigma})$ = mínimo $\{k \in \omega$ / existen $t_1,\ldots,t_p,\ r_1,\ldots,r_q \in \omega$, tales que:

(a) $t_m \leq s_m$ $(m=1\ldots p)$ y $k = t_1 +\ldots+ t_p + r_1 +\ldots$ $\ldots+ r_q \leq m_o$.

(b) Para todo $t_1',\ldots,t_p',\ r_1',\ldots,r_q' \in \omega$ con $t_m \leq t_m' \leq s_m$ y $r_n \leq r_n' \leq m_o$ $(m=1 \ldots p,$ $n=1 \ldots q)$ se sigue que $(\Sigma_1^*)^{t_1'}\ X^{n_o} \ldots X^{n_o}\ (\Sigma_p^*)^{t_p'}\ X^{n_o}\ (\Sigma_1)^{r_1'}\ X^{n_o} \ldots$ $\ldots X^{n_o}\ (\Sigma_q)^{r_q'} \in \{\Sigma_{h_1},\ldots,\Sigma_{h_r}\}.\}$.

Sea k_o = máximo $\{n(\tilde{\Sigma})\ /\tilde{\Sigma} \in C\}$. Por 3.1.3 podemos obtener k_o de una manera efectiva. Es fácil probar que k_o = mínimo $\{n \in \omega$ / / $F\ V\ (n,\phi)\}$. $\dashv$

3.3. $(L_{\omega_1\omega})_t$ - equivalencia para espacios T_3.

Sean A espacio T_3, $a \in A$ y A^* subconjunto de puntos de A. Si a es punto de acumulación de A^*, diremos que A^* converge contra a, y escribiremos $A^* \longrightarrow a$.

A partir de la noción de conjunto accesible, que introduciremos en primer lugar, estableceremos una clasificación de las formas de convergencia. A partir de esta clasificación, definiremos para todo $n \in \omega$ un conjunto finito S_n de tipos, los cuales serán definibles en $(L_{\omega_1\omega})_t$. Introduciremos la noción de espacio de tipo finito. El teorema principal es una caracterización, a través de estos nuevos tipos, de la homeomorfía para la clase de los espacios T_3 numerables de tipo finito. Se deduce, como consecuencia, que cada espacio de esta clase tiene sentencia de Scott. Demostraremos, mediante un contraejemplo, que es necesaria en el teorema principal la hipótesis que afirma que uno de los dos espacios en cuestión es de tipo finito. A partir del teorema principal, y haciendo uso del teorema de Löwenheim-Skolem, obtendremos una caracterización de la $(L_{\omega_1\omega})_t$-equivalencia para la clase de los espacios T_3 de tipo finito. Probaremos, por último, que dicha clase no coincide con la formada por los espacios T_3 de tipo finito en el sentido Flum-Ziegler.

(A). Una clasificación de las formas de convergencia.

Sean A espacio T_3 y A^* subconjunto de puntos de A. Para todo $n \in \omega$ definimos el juego $J_n(A^*,A)$ de n movimientos o jugadas entre los participantes I y II, de la siguiente manera. En cada movimiento, el jugador I escoge un número natural r y una secuencia $a_1,\dots,a_r$ de puntos de A y, a continuación, el jugador II escoge una secuencia $U_1 \ni a_1,\dots,U_r \ni a_r$ de abiertos de A. El participante I vence en $J_n(A^*,A)$ si, en el supuesto de que $V_1,\dots,V_m$ son todos los abiertos escogidos por II a lo largo de las n jugadas, se tiene que $A^* \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_m$. Diremos que el participante I tiene una estrategia de victoria en $J_n(A^*,A)$, si tiene una estrategia mediante la cual consigue, cualesquiera que sean los movimientos de II, vencer en $J_n(A^*,A)$.

3.3.1. <u>Definición</u>.- Sean A espacio T_3 y A^* subconjunto de puntos de A. Diremos que <u>A^* es accesible</u>, si existe $n \in \omega$ tal que I tiene una estrategia de victoria en el juego $J_n(A^*,A)$.

Es decir, A^* es accesible si existe $n \in \omega$ tal que: existen $r_1 \in \omega$, $a_1 \dots a_{r_1} \in A$ t.q. para todo $U_1 \ni a_1 \dots U_{r_1} \ni a_{r_1}$ ... existen $r_n \in \omega$, $a'_1 \dots a'_{r_n} \in A$ t.q. para todo $U'_1 \ni a'_1 \dots U'_{r_n} \ni a'_{r_n}$, se tiene que

$$A^* \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_{r_1} \cup \dots \cup U'_1 \cup \dots \cup U'_{r_n}.$$

3.3.2. <u>Definición de los tipos de convergencia</u>.- Sean A espacio T_3, $a \in A$ y A^* subconjunto de puntos de A con $A^* \longrightarrow a$.

(a) Diremos que esta convergencia es <u>de tipo 1</u>, si A^* es accesible. Escribiremos, entonces, $A^* \xrightarrow{1} a$.

(b) Diremos que esta convergencia es <u>de tipo 2</u>, si A^* no es accesible y existe un abierto $U \ni a$ tal que $A^* \cap U$ es accesible. Escribiremos, $A^* \xrightarrow{2} a$.

(c) Diremos que esta convergencia es <u>de tipo 3</u>, si para todo abierto $U \ni a$ se tiene que $A^* \cap U$ no es accesible. Escribiremos, $A^* \xrightarrow{3} a$.

Es obvio que estos tres tipos de convergencia son exhaustivos y excluyentes. Obsérvese que para todo $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ y A^* subconjunto de puntos de A con $A^* \longrightarrow a_1$ y $A^* \longrightarrow a_2$, se tiene:

$$A^* \xrightarrow{1} a_1 \iff A^* \xrightarrow{1} a_2 .$$

3.3.3. <u>Ejemplos</u>.- (a) Consideremos el espacio $\{0\} \cup \{1/n \,/\, n \in \omega - \{0\}\}$ con la topología generada por los abiertos de la forma $\{1/n\}$ $(n \in \omega - \{0\})$ y $\{0\} \cup \{1/m \,/\, m \geq n\}$ $(n \in \omega - \{0\})$. Entonces,

$$\{1/n \,/\, n \in \omega - \{0\}\} \xrightarrow{1} 0 .$$

(b) Sea R la recta real con la topología usual y sea $r \in R$. Entonces,

$$R \xrightarrow{3} r .$$

(c) Sea E el plano euclídeo con la topología generada por los abiertos de la topología usual y por los abiertos de la forma $\{(x,y)\}$ siendo x,y números reales con $y \neq 0$. Se tiene que para cualquier número real x_o:

$$\{(x,y) \in E \,/\, (x,y) \text{ punto aislado}\} \xrightarrow{3} (x_o, 0) .$$

$$\{(x,y) \in E \,/\, (x,y) \text{ punto de acumulación}\} \xrightarrow{3} (x_o, 0) .$$

(d) Sea Z el conjunto de los números enteros. Consideremos el espacio $Z \cup \{+\infty, -\infty\}$ con la topología generada por los abiertos de la forma $\{z\}$ $(z \in Z)$ y por los abiertos del tipo

U_m^+, U_m^- $(m \in Z)$, donde:

$$U_m^+ = \{+\infty\} \cup \{z \in Z \ / \ z > m\}.$$

$$U_m^- = \{-\infty\} \cup \{z \in Z \ / \ z < m\}.$$

$$\underset{-\infty}{\bullet} \ldots \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\underset{0}{\bullet} \ \underset{1}{\bullet}\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \ldots \underset{+\infty}{\bullet}$$

Tenemos:

$$Z \xrightarrow{1} +\infty .$$

$$Z \xrightarrow{1} -\infty .$$

(e) Consideremos el espacio $Z \cup \{1/n \ / \ n \in \omega - \{0\}\} \cup \{+\infty,-\infty\}$ cuya topología viene definida de forma análoga a la definición dada en (d); en este caso, los conjuntos de la forma $\{1/n\}$ $(n \in \omega - \{0\}$ son también abiertos.

$$\underset{-\infty}{\bullet} \ldots \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\underset{0}{\bullet} \cdot\cdot\, \underset{1}{\bullet}\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \ldots \underset{+\infty}{\bullet}$$

Se tiene:

$$Z \cup \{1/n \ / \ n \in \omega - \{0\}\} \xrightarrow{2} +\infty .$$

$$Z \cup \{1/n \ / \ n \in \omega - \{0\}\} \xrightarrow{2} -\infty .$$

(f) Consideremos el espacio de todos los ordinales $< \omega.\omega$ con la topología del orden. Se sigue:

$$\{\eta < \omega.\omega \ / \ \eta \text{ punto aislado}\} \xrightarrow{2} \omega + \overset{n}{\ldots} + \omega \quad (n \geq 1) .$$

(g) Consideremos el espacio de todos los ordinales $\leq \omega.\omega$ con la topología del orden. Se tiene:

$$\{\eta \leq \omega.\omega \ / \ \eta \text{ punto aislado}\} \xrightarrow{1} \omega + \overset{n}{\ldots} + \omega \ (n \geq 1) .$$

$\{\eta \leq \omega.\omega \ / \ \eta$ punto aislado$\} \xrightarrow{1} \omega.\omega$,

$\{\omega + \overset{n}{\ldots} + \omega / \ n \geq 1\} \xrightarrow{1} \omega.\omega$.

(h) Consideremos el espacio de todos los ordinales $< \omega.\omega+\omega$ con la topología del orden. Entonces:

$\{\eta < \omega.\omega+\omega \ / \ \eta$ punto aislado$\} \xrightarrow{2} \omega.\omega$.

$\{\omega + \overset{n}{\ldots} + \omega \ / \ n \geq 1\} \xrightarrow{1} \omega.\omega$.

Sea A espacio T_3. Obsérvese:

(i) Si A_1^*, A_2^* son subconjuntos de puntos de A con $A_1^* \subsetneq A_2^*$, se tiene:

A_2^* accesible $\Longrightarrow A_1^*$ accesible.

(ii) Si $A_1^*, \ldots, A_n^*$ son subconjuntos de puntos de A y $A^* = A_1^* \cup \ldots \cup A_n^*$, se tiene:

A^* accesible $\Longleftrightarrow A_1^*, \ldots, A_n^*$ accesibles.

El siguiente lema, cuya demostración es inmediata, nos será de utilidad más adelante. Cuando hagamos uso de él, no haremos mención explícita de ello.

3.3.4. Lema.- Sean A espacio T_3, $a \in A$, $n \in \omega - \{0\}$, $m \in \omega$, $A_1^*, \ldots, A_n^*$ subconjuntos de puntos de A, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \{1,2,3\}$ con $A_k^* \xrightarrow{\lambda_k} a$ $(k=1\ldots n)$ y $B_1^*, \ldots, B_m^*$ subconjuntos de puntos de A con $B_k^* \not\longrightarrow a$ $(k=1\ldots m)$. Sean $A^* = A_1^* \cup \ldots \cup A_n^* \cup B_1^* \cup \ldots \cup B_m^*$ y

$$\lambda = \begin{cases} 3, & \text{si existe } i \in \{1,\dots,n\} \text{ con } \lambda_i = 3. \\ 2, & \text{si no existe } i \in \{1,\dots,n\} \text{ con } \lambda_i = 3, \text{ y existe } \\ & i \in \{1,\dots,n\} \text{ con } \lambda_i = 2, \\ 2, & \text{si } \lambda_i = 1 \ (i=1 \dots n), \text{ y existe } j \in \{1,\dots,m\} \text{ tal} \\ & \text{que } B_j^* \text{ no es accesible.} \\ 1, & \text{si } \lambda_i = 1 \ (i=1\dots n) \text{ y } B_j^* \text{ es accesible } (j=1\dots m). \end{cases}$$

Entonces, $A^* \xrightarrow{\lambda} a$.

(B). Los tipos para $(L_{\omega_1\omega})_t$.

A partir de los tres tipos de convergencia que hemos introducido en el apartado anterior, vamos a definir para todo $n \in \omega$ un conjunto finito S_n de tipos para $(L_{\omega_1\omega})_t$. La definición es inductiva sobre el conjunto de los números naturales. Definimos el conjunto de los 0-tipos, S_o, por

$$S_o = \{*\}.$$

Para todo $n \geq 1$ definimos el conjunto de los n-tipos, S_n, por

$$S_n = P(\{(\alpha,1)/\alpha \in S_{n-1}\} \cup \{(\alpha,2)/\alpha \in S_{n-1}\} \cup \{(\alpha,3)/\alpha \in S_{n-1}\}).$$

Tenemos:

$$\begin{array}{ll} \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ S_1 & \emptyset,\ \{(*,1)\},\ \{(*,2)\},\ \{(*,3)\},\dots \\ S_o & \qquad\qquad * \end{array}$$

Sean A espacio T_3, $a \in A$ y $n \in \omega$. Definimos el n-tipo de a en A, $s_n(a,A)$, por inducción sobre n, de la siguiente forma:

$$s_o(a,A) = *.$$

Para todo $n \geq 1$, definimos

$$s_n(a,A) = \{(\alpha,1) \,/\, \alpha \in S_{n-1},\ A_\alpha \xrightarrow{1} a\} \cup$$
$$\{(\alpha,2) \,/\, \alpha \in S_{n-1},\ A_\alpha \xrightarrow{2} a\} \cup$$
$$\{(\alpha,3) \,/\, \alpha \in S_{n-1},\ A_\alpha \xrightarrow{3} a\},$$

donde $\underline{A_\alpha = \{ a' \in A \,/\, s_{n-1}(a',A) = \alpha\}}$.

Sean A espacio T_3, $n \in \omega$ y $\alpha \in S_n$. Diremos que α es satisfactible en A, si existe $a \in A$ con $s_n(a,A) = \alpha$. Obsérvese que los únicos 1-tipos satisfactibles en algún espacio T_3 son $\emptyset$, $\{(*,1)\}$, $\{(*,2)\}$ y $\{(*,3)\}$. El conjunto de los n-tipos satisfactibles en A será denotado por $S_n(A)$. Para cada $n \in \omega$ definimos la función $E_n^A : S_n \longrightarrow \omega \cup \{\infty\}$ por

$$E_n^A(\alpha) = \text{número de elementos de } A \text{ de n-tipo } \alpha.$$

Llamaremos espectro a cualquier familia $E(A) = \langle E_n(A)\rangle_\omega$, donde:

1. A es un espacio T_3.
2. $E_n(A) = \{(\alpha, E_n^A(\alpha)) / \alpha \in S_n(A)\}$.

Diremos, entonces, que $E(A)$ es el espectro de A.

Sea $E(A) = \langle E_n(A)\rangle_\omega$ un espectro. Sean $m,n \in \omega$ con $m \leq n$. Para cualquier $\alpha \in S_n(A)$, definimos el m-tipo de α respecto a $E(A)$, $(\alpha)_m$, por inducción sobre m, de la siguiente manera:

$$(\alpha)_o = *.$$

Sea $m \geq 1$. Si $\alpha = \emptyset$, $(\alpha)_m = \emptyset$. Si $\alpha = \{(\alpha_1,\lambda_1),\ldots,(\alpha_r,\lambda_r)\}$,

$(\alpha)_m = \{(\beta,\lambda_{\alpha,\beta})$ / existe $J \subseteq \{1,\ldots,r\}$ con $J \neq \emptyset$ tal que:

(a) 1. $(\alpha_i)_{m-1} = \beta \qquad (i \in J)$.

2. $(\alpha_i)_{m-1} \neq \beta \qquad (i \notin J)$.

(b) $\lambda_{\alpha,\beta}$ está definida por

$$\lambda_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 3, & \text{si existe } i \in J \text{ con } \lambda_i = 3. \\ 2, & \text{si no existe } i \in J \text{ con } \lambda_i = 3, \\ & \text{y existe } i \in J \text{ con } \lambda_i = 2. \\ 2, & \text{si } \lambda_i = 1 \ (i \in J), \text{ y existe} \\ & \alpha' \in S_{n-1}(A) \text{ tal que:} \\ & \quad 1.\ (\alpha')_{m-1} = \beta, \\ & \quad 2.\ A_{\alpha'} \text{ no es accesible.} \\ 1, & \text{en otro caso}. \end{cases} \Big\}.$$

Obsérvese:

$$A_{\alpha'} \text{ no es accesible} \iff E^A_{n-1}(\alpha') = \infty \text{ y no existe}$$
$$\alpha'' \in S_n(A) \text{ con } (\alpha',1) \in \alpha''.$$

Por tanto, la definición de $(\alpha)_m$ sólo depende del espectro de A.

Para todo $n \geq 1$ y $\alpha \in S_n$ vamos a introducir la noción de cuando <u>α contiene *</u>, por inducción sobre n. Diremos que $\alpha \in S_1$ contiene *, si $\alpha \neq \emptyset$. Para $n > 1$, diremos que α contiene *, si existe $(\beta,\lambda) \in \alpha$ tal que β contiene *.

En los dos siguientes lemas, vamos a demostrar que varias propiedades de interés que cumplen los tipos de Flum-Ziegler para $(L_{\omega\omega})_t$ son verificadas por nuestros tipos.

3.3.5. Lema.- Sea $E(A)$ un espectro. Sean $a \in A$ y $m,n \in \omega$ con $m \leq n$. Entonces,

$$(s_n(a,A))_m = s_m(a,A).$$

Demostración: Procedemos por inducción sobre m. El caso $m = 0$ es inmediato. Supongamos que el resultado es cierto para $m-1$, siendo $m \geq 1$. Por tanto, para todo $n \in \omega$ con $m \leq n$ y $a' \in A$:

$$(s_{n-1}(a',A))_{m-1} = s_{m-1}(a',A).$$

Queremos probar que para todo $n \in \omega$ con $m \leq n$ y $a \in A$, se tiene que

$$(s_n(a,A))_m = s_m(a,A).$$

Sea $\alpha = s_n(a,A)$. Sea $(\beta,\lambda_{\alpha,\beta}) \in (s_n(a,A))_m$. Consideremos todos aquellos elementos $(\alpha_1,\lambda_1),\ldots,(\alpha_p,\lambda_p) \in s_n(a,A)$, y todos aquellos elementos $\beta_1,\ldots,\beta_q \in S_{n-1}(A)$ con $A_{\beta_i} \not\longrightarrow a$ $(i=1\ldots q)$, tales que:

$$(\alpha_1)_{m-1} = \ldots = (\alpha_p)_{m-1} = \beta.$$

$$(\beta_1)_{m-1} = \ldots = (\beta_q)_{m-1} = \beta.$$

Por la hipótesis de inducción, tenemos que para cualquier $a' \in A$:

$$s_{m-1}(a',A) = \beta \iff s_{n-1}(a',A) \in \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\beta_1,\ldots,\beta_q\}.$$

Por tanto,

$$A_\beta = A_{\alpha_1} \cup \ldots \cup A_{\alpha_p} \cup A_{\beta_1} \cup \ldots \cup A_{\beta_q}.$$

Se sigue que

$$A_\beta \xrightarrow{\lambda_{\alpha,\beta}} a \ .$$

Esto es, $(\beta,\lambda_{\alpha,\beta}) \in s_m(a,A)$.

Sea $(\beta,\lambda) \in s_m(a,A)$. Consideremos todos aquellos elementos $(\alpha_1,\lambda_1),\ldots,(\alpha_p,\lambda_p) \in s_n(a,A)$, y todos aquellos elementos $\beta_1,\ldots,\beta_q \in S_{n-1}(A)$ con $A_{\beta_i} \not\to a$ $(i=1 \ldots q)$, tales que:

$$(\alpha_1)_{m-1} = \ldots = (\alpha_p)_{m-1} = \beta \ ,$$

$$(\beta_1)_{m-1} = \ldots = (\beta_q)_{m-1} = \beta \ .$$

Se sigue, por la hipótesis de inducción, que

$$A_\beta = A_{\alpha_1} \cup \ldots \cup A_{\alpha_p} \cup A_{\beta_1} \cup \ldots \cup A_{\beta_q} \ .$$

Por tanto, $\lambda = \lambda_{\alpha,\beta}$. En consecuencia, $(\beta,\lambda) \in (s_n(a,A))_m$. $\dashv$

3.3.6. <u>Lema</u>.- Sea $E(A)$ un espectro. Sean $k,m,n \in \omega$ con $k \leq m \leq n$. Entonces:

(a) Para todo $\alpha \in S_m(A)$ existe $\beta \in S_n(A)$ con $\alpha = (\beta)_m$.

(b) Para todo $\alpha \in S_m(A) \cap S_n(A)$, $\alpha = (\alpha)_m$.

(c) Para todo $\alpha \in S_n(A)$, $((\alpha)_m)_k = (\alpha)_k$.

<u>Demostración</u>: Los apartados (a) y (c) son corolarios inmediatos de 3.3.5. Comprobemos (b). Se prueba fácilmente por inducción sobre $m \in \omega - \{0\}$:

(1) Para todo $\alpha \in S_n(A)$:

Si α contiene $*$, $(\alpha)_m$ contiene $*$.

Teniendo en cuenta (1) podemos demostrar, procediendo de nuevo por inducción sobre $m \in \omega - \{0\}$:

(2) Para todo $\alpha \in S_n(A)$:

Si α no contiene $*$ y $\alpha \notin S_m(A)$, $(\alpha)_m$ contiene $*$.

(3) Para todo $\alpha \in S_m(A) \cap S_n(A)$:

Si α no contiene $*$, $\alpha = (\alpha)_m$.

Supongamos que $\alpha \in S_m(A) \cap S_n(A)$. Si $m=n$, se deduce de inmediato que $\alpha = (\alpha)_m$. Si $m \neq n$, se tiene que α no contiene $*$. Por tanto, $\alpha = (\alpha)_m$. $\dashv$

Por lo demostrado en 3.3.5 y 3.3.6(b), se deduce que la expresión "a tiene tipo α en A" carece de ambigüedad. Dado un espectro $E(A)$, podemos dotar a la unión disjunta de los conjuntos $S_n(A)$ de una estructura de árbol, definiendo sobre dicha unión una relación $\leq$ de orden parcial, de la siguiente manera:

$$\alpha \leq \beta \iff \alpha \in S_m(A), \quad \beta \in S_n(A), \quad m \leq n \quad \text{y} \quad \alpha = (\beta)_m .$$

Al contrario de lo que sucede con los tipos para $(L_{\omega\omega})_t$, no es cierto en general que dados A espacio T_3, U abierto de A, $a \in U$ y $n \in \omega$, se tenga que $s_n(a,U) = s_n(a,A)$. Demostremos esto. Consideremos el conjunto de todos los ordinales menores que $\omega+\omega$ con la topología del orden. Por tanto, $\omega \cup \{\omega\}$ es un abierto de $\omega+\omega$. Se tiene:

$s_1(\omega, \omega \cup \{\omega\}) = \{(*,1)\}$.

$s_1(\omega, \omega+\omega) = \{(*,2)\}$.

(C). Una caracterización de la $(L_{\omega_1\omega})_t$-equivalencia para espacios T_3 de tipo finito.

Un tipo completo γ es una secuencia $(\alpha_n)_\omega$ con $\alpha_n \in S_n$ $(n \in \omega)$. El conjunto de los tipos completos será denotado por S_∞. Sea A espacio T_3. Para todo $a \in A$ definimos el tipo completo de a en A por $s(a,A) = (s_n(a,A))_\omega$. Para cualquier γ tipo completo, diremos que γ es satisfactible en A, si existe $a \in A$ con $s(a,A) = \gamma$. El conjunto de todos los tipos completos satisfactibles en A será denotado por $S_\infty(A)$.

3.3.7. Definiciones.- Sea A espacio T_3.

(a) Diremos que A es de tipo finito, si $S_\infty(A)$ es finito.

(b) Diremos que A es de tipo numerable, si $S_\infty(A)$ es numerable.

Para cualquier A espacio T_3, definimos la función $E_\infty^A : S_\infty \longrightarrow \omega \cup \{\infty\}$ por

$$E_\infty^A(\gamma) = \text{número de elementos de } A \text{ de tipo completo } \gamma.$$

3.3.8. Lema.- Sean A, B espacios T_3, con A de tipo numerable. Entonces:

$$A \equiv_{\omega_1\omega}^t B \implies E_\infty^A = E_\infty^B.$$

Demostración: Para cada $n \in \omega$ y cada $\alpha \in S_n$, vamos a construir una fórmula $\mathcal{O}_\alpha^n(x)$ de $(L_{\omega_1\omega})_t$. Procederemos para ello por inducción sobre n. Para todo A' espacio T_3, $n \in \omega$, $\alpha \in S_n$ y $a' \in A'$, tendremos:

$$A' \models \mathcal{O}^n_\alpha\,[a'] \iff s_n(a',A') = \alpha.$$

Para $n = 0$ definimos $\mathcal{O}^o_*(x)$ por $x = x$. Sea $n \geq 1$. Supongamos que para cada $\alpha \in S_{n-1}$ tenemos construida la fórmula $\mathcal{O}^{n-1}_\alpha(x)$. Sea $\beta \in S_n$. Queremos definir la fórmula $\mathcal{O}^n_\beta(x)$. Para cualquier $\alpha \in S_{n-1}$, definimos:

$$\chi'_\alpha = \bigvee_{k\in\omega} \bigvee_{r_1\in\omega} \exists y_1 \ldots \exists y_{r_1} \; \forall Y_1 \ni y_1 \ldots \forall Y_{r_1} \ni y_{r_1}$$

$$\ldots \bigvee_{r_k\in\omega} \exists y_1 \ldots \exists y_{r_k} \; \forall Y'_1 \ni y_1 \ldots \forall Y'_{r_k} \ni y_{r_k}$$

$$\forall z\, (\mathcal{O}^{n-1}_\alpha(z) \longrightarrow \text{"} z \in Y_1 \cup \ldots \cup Y_{r_1} \cup \ldots \cup Y'_1 \cup \ldots \cup$$

$$Y'_{r_k}\text{"}).$$

$$\chi''_\alpha(x) = \exists X \ni x \bigvee_{k\in\omega} \bigvee_{r_1\in\omega} \exists y_1 \ldots \exists y_{r_1} \; \forall Y_1 \ni y_1 \ldots$$

$$\ldots \forall Y_{r_1} \ni y_{r_1} \ldots \bigvee_{r_k\in\omega} \exists y_1 \ldots \exists y_{r_k} \; \forall Y'_1 \ni y_1 \ldots$$

$$\ldots \forall Y'_{r_k} \ni y_{r_k} \; \forall z$$

$$((z \in X \wedge \mathcal{O}^{n-1}_\alpha(z)) \longrightarrow \text{"} z \in Y_1 \cup \ldots \cup Y_{r_1} \cup$$

$$\ldots \cup Y'_1 \cup \ldots \cup Y'_{r_k}\text{"}).$$

Es claro que las propiedades "$(\alpha,1) \in s_n(x)$", "$(\alpha,2) \in s_n(x)$" y "$(\alpha,3) \in s_n(x)$" son expresables en $(L_{\omega_1\omega})_t$. Para $\lambda = 1,2,3$ sea

$$\Phi_\lambda = \{\alpha \in S_{n-1} \;/\; (\alpha,\lambda) \in \beta\}\,.$$

Definimos $\mathcal{O}^n_\beta(x)$ por

$$\mathcal{O}^n_\beta(x) = \bigwedge_{\alpha\in\Phi_1} \text{"}(\alpha,1)\in s_n(x)\text{"} \wedge \bigwedge_{\alpha\in\Phi_2} \text{"}(\alpha,2)\in s_n(x)\text{"} \wedge$$

$$\bigwedge_{\alpha\in\Phi_3} \text{"}(\alpha,3)\in s_n(x)\text{"} \wedge \bigwedge_{\substack{\alpha\notin\Phi_1\cup\Phi_2\cup\Phi_3 \\ \alpha\in S_{n-1}}} \neg\, \forall X \ni x$$

$$\exists z\ (z \in X \wedge z \neq x \wedge \mathcal{O}^{n-1}_\alpha(z)) .$$

Se sigue que $\mathcal{O}^n_\beta(x)$ es una fórmula de $(L_{\omega_1\omega})_t$.

Sea $\gamma = (\alpha_n)_\omega$ un tipo completo satisfactible en A. Sean:

1. $\mathcal{O}_\gamma(x) = \bigwedge_{n\in\omega} \mathcal{O}^n_{\alpha_n}(x)$.

2. ϕ^A_γ = "existen exactamente $E^A_\infty(\gamma)$ elementos de tipo γ".

Definimos

$$\psi_A = \forall x \bigvee_{\gamma\in S_\infty(A)} \mathcal{O}_\gamma(x) \wedge \bigwedge_{\gamma\in S_\infty(A)} \phi^A_\gamma .$$

Tenemos:

1. ψ_A es una sentencia de $(L_{\omega_1\omega})_t$.

2. Para cualquier A' espacio T_3:

$$A' \models \psi_A \iff E^A_\infty = E^{A'}_\infty .$$

Como $A \equiv^t_{\omega_1\omega} B$, se sigue que $B \models \psi_A$. Por tanto, $E^A_\infty = E^B_\infty$. $\dashv$

3.3.9. <u>Corolario</u>.- Sean A,B espacios T_3 con $A \equiv^t_{\omega_1\omega} B$. Entonces:

(a) Si A es de tipo finito, B es de tipo finito.

(b) Si A es de tipo numerable, B es de tipo numerable.

3.3.10. <u>Ejemplos</u>.- (a) En cualquier espacio discreto, el único tipo completo satisfactible es $(*, \emptyset, \emptyset, \ldots)$.

(b) En cualquier espacio T_3 sin puntos aislados, el único tipo completo satisfactible es $(*, \{(*,3)\}, \{(\{(*,3)\},3)\}, \ldots)$. Para demostrar esto se puede proceder de la siguiente forma. Si el espacio en cuestión es numerable, considerando el teorema 3.1.4. Si el espacio en cuestión no es numerable, haciendo uso del teorema de Löwenheim-Skolem.

(c) Sea A el espacio $\{0\} \cup \{1/n \ / \ n \in \omega - \{0\}\}$ con la topología generada por los abiertos de la forma $\{1/n\}$ $(n \in \omega - \{0\})$ y $\{0\} \cup \{1/m \ / \ m \geq n\}$ $(n \in \omega - \{0\})$. Sea Q el conjunto de los números racionales. Sea B el espacio $[0,1] \cap Q$ con la topología generada por los abiertos de la forma $\{q\}$ $(q \neq 0)$ y $\{0\} \cup \{p \ / \ 0 < p < q\}$ $(q \neq 0)$.

Se observa que A y B son espacios T_3 de tipo finito. Para $\gamma = (*, \{(*,1)\}, \{(\emptyset,1)\}, \{(\emptyset,1)\}, \ldots)$ tenemos:

$$E_\infty^A(\gamma) = 1, \qquad E_\infty^B(\gamma) = 0 .$$

Para $\gamma' = (*, \{(*,3)\}, \{(\emptyset,3)\}, \{(\emptyset,3)\}, \ldots)$:

$$E_\infty^A(\gamma') = 0, \qquad E_\infty^B(\gamma') = 1 .$$

Para $\gamma'' = (*, \emptyset, \emptyset, \ldots)$:

$$E_\infty^A(\gamma'') = E_\infty^B(\gamma'') = \infty.$$

Cualquier otro tipo completo es insatisfactible tanto en A como en B.

(d) Sea Z el conjunto de los números enteros. Sea

$A = Z \cup \{+\infty, -\infty\}$ con la topología generada por los abiertos de tipo $\{z\}$ $(z \in Z)$ y por los abiertos de la forma U_m^+, U_m^- $(m \in Z)$, donde:

$$U_m^+ = \{+\infty\} \cup \{z \in Z \ / \ z > m\},$$

$$U_m^- = \{-\infty\} \cup \{z \in Z \ / \ z < m\},$$

Sea B el espacio $Z \cup \{1/n \ / \ n \in \omega - \{0\}\} \cup \{+\infty, -\infty\}$, cuya topología viene definida de manera análoga a la definición de la topología de A; en B, los conjuntos de la forma $\{1/n\}$ $(n \in \omega - \{0\})$ son también abiertos.

Es claro que A y B son espacios T_3 de tipo finito. Sean:

$$\gamma = (*, \{(*,1)\}, \{(\emptyset,1)\}, \{(\emptyset,1)\}, \dots),$$

$$\gamma' = (*, \{(*,2)\}, \{(\emptyset,2)\}, \{(\emptyset,2)\}, \dots),$$

$$\gamma'' = (*, \emptyset, \emptyset, \dots),$$

Tenemos:

$$E_\infty^A(\gamma) = 2, \qquad E_\infty^B(\gamma) = 0,$$

$$E_\infty^A(\gamma') = 0, \qquad E_\infty^B(\gamma') = 2,$$

$$E_\infty^A(\gamma'') = E_\infty^B(\gamma'') = \infty.$$

Cualquier otro tipo completo es insatisfactible tanto en A como en B.

Nuestro resultado más interesante expresará que el recíproco del lema 3.3.8 es cierto, si A es de tipo finito. Vamos a comprobar a continuación que dicho recíproco no es cierto en el caso más general.

3.3.11. Contraejemplo.- Consideremos el ordinal ω^{ω} con la topología del orden. Se tiene que ω^{ω} es el menor ordinal de tipo no finito. Es fácil observar que cualquier ordinal $\leq \omega$ tiene un solo tipo completo satisfactible; $\omega \cup \{\omega\}$, dos; $\omega \cdot \omega \cup \{\omega \cdot \omega\}$, tres; y, en general, $\omega^{n} \cup \{\omega^{n}\}$ tiene exactamente n+1 tipos completos satisfactibles. Sea $\gamma_o, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ la secuencia de todos los tipos completos satisfactibles en ω^{ω}. Tenemos:

$$\gamma_o = (*,\ \emptyset,\ \emptyset, \ldots).$$

$$\gamma_1 = (*,\ \{(*,2)\},\ \{(\emptyset,2)\},\ \{(\emptyset,2)\}, \ldots),$$

$$\gamma_2 = (*,\ \{(*,2)\},\ \{(\emptyset,2)\ ,\ (\{(*,2)\},2)\},\ \{(\emptyset,2)\ ,\ (\{(\emptyset,2)\},2)\},$$
$$\{(\emptyset,2),\ (\{(\emptyset,2)\},2)\}, \ldots),$$

$$\vdots$$

Tenemos:

$$s(0,\omega^{\omega}) = \gamma_o.$$

$$s(\omega,\omega^{\omega}) = \gamma_1.$$

$$s(\omega\cdot\omega,\ \omega^{\omega}) = \gamma_2.$$

$$\vdots$$

Si $\gamma_k = (\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, se sigue que $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \ldots$.

Vamos a definir los dos espacios T_3 de nuestro contraejemplo partir de ω^{ω}. Sea A' el espacio de todos los ordinales $\leq \omega$ co la topología del orden. Sea A el espacio resultante de sustituir en A' cada $\xi \in \omega$ por ω^{ω} con la topología del orden. Sea B el espacio de todos los ordinales $\leq \omega^{\omega}$ con la topología del orden. Consideremos la sentencia

$$\phi = \exists x\ \forall X \ni x \bigvee_{n \in \omega} \forall y \text{ ("el tipo completo de } y \text{ es } \gamma_n\text{"} \longrightarrow y \in X).$$

Entonces:

$$A \models \neg\phi ,$$

$$B \models \phi .$$

Por tanto, $A \not\equiv^{t}_{\omega_1 \omega} B$.

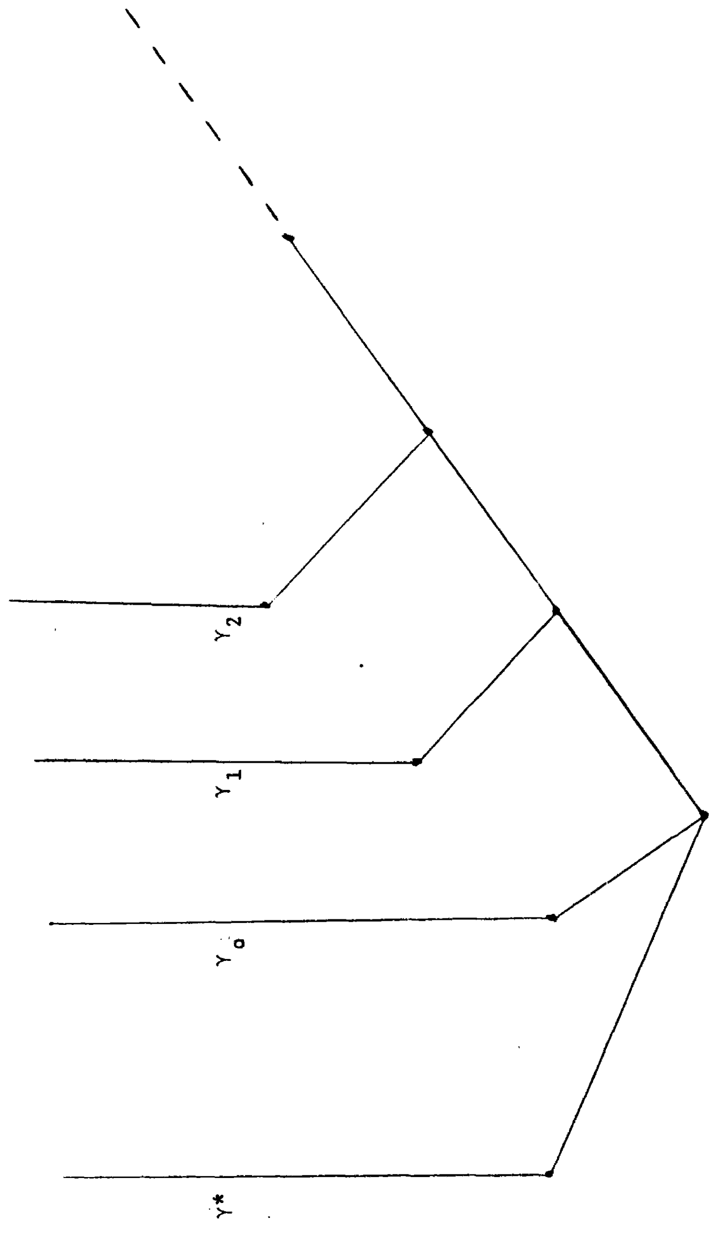
Demostremos que $E^A_\infty = E^B_\infty$. Para cualquier tipo completo $\gamma = (\alpha_n)_\omega$ y cualquier $n \in \omega$, sea $\gamma[n] = \alpha_n$. Definimos el tipo completo $\gamma^* = (*, \beta_1, \beta_2, \ldots)$ por

$$\beta_{n+1} = \{(\gamma_k[n], 3) \mathbin{/} k \in \omega\}.$$

Se sigue:

$$E^A_\infty(\gamma) = E^B_\infty(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \gamma = \gamma^*, \\ \infty, & \text{si existe } k \in \omega \text{ con } \gamma = \gamma_k. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El árbol de tipos correspondiente a los espectros de A y B tiene la siguiente forma:



Y_2
Y_1
Y_a
Y^*

Obsérvese que para todo A espacio T_3, se tiene:

A es de tipo finito $\Longleftrightarrow$ existe $n_o \in \omega$ tal que:

(1) Para todo $n \in \omega$ con $n > n_o$ y $a, a' \in A$:

$$s_{n_o}(a,A) = s_{n_o}(a',A) \Rightarrow s_n(a,A) = s_n(a',A).$$

Si A es de tipo finito, el menor n_o que cumpla (1) será denominado <u>característica de A</u> y será denotado por $c(A)$.

Dados A y $a_1,\dots,a_n \in A$, denotaremos por $\{a_1,\dots,\hat{a}_i,\dots$ $\dots,a_n\}$ al conjunto $\{a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n\}$. El siguiente lema se prueba fácilmente a partir del teorema 1.1.10.

3.3.12. <u>Lema</u>.- Sea R una relación binaria y simétrica entre espacios topológicos numerables $(A,a_1 \dots a_m)$ con un número finito de elementos distinguidos. Supongamos que en la situación $(A,a_1\dots a_m)$ R $(B,b_1\dots b_m)$ se cumplen las dos siguientes condiciones:

(1) Para todo $a_{m+1} \in A - \{a_1,\dots,a_m\}$ existe $b_{m+1} \in$ $\in B - \{b_1,\dots,b_m\}$ tal que

$$(A,a_1\dots a_m\ a_{m+1})\ R\ (B,\ b_1\dots b_m\ b_{m+1}).$$

(2) Para todo $i \in \{1,\dots,m\}$ y $U' \ni a_i$ abierto de A, existen U abierto y cerrado de A y V abierto y cerrado de B, tales que:

(a) $a_i \in U \subseteq U' - \{a_1,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_m\}$,

$b_i \in V \subseteq B - \{b_1,\dots,\hat{b}_i,\dots,b_m\}$.

(b) $(A - U, a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_m)\ R\ (B - V, b_1 \dots \hat{b}_i \dots b_m)$.

$(U, a_i)\ R\ (V, b_i)$.

Entonces:

$(A, a_1 \dots a_m)\ R\ (B, b_1 \dots b_m) \Longrightarrow (A, a_1 \dots a_m) \simeq^t (B, b_1 \dots b_m)$.

Para cualquier A espacio T_3, definimos $\underline{E^A = \bigcup_{n \in \omega} E_n^A}$.
Por lo demostrado en 3.3.5 y 3.3.6(b), se sigue que E^A está bien definida. El teorema principal va a expresar que si A, B son espacios T_3 numerables, con A de tipo finito:

$$E^A = E^B \Longrightarrow A \simeq^t B.$$

Los tres siguientes lemas, que expresan propiedades sencillas de los tipos de convergencia y de los conjuntos accesibles, nos serán de ayuda para poder construir una relación R que cumpla la hipótesis del lema 3.3.12. La demostración del primero de ellos es inmediata.

3.3.13. Lema.- Sean A espacio T_3, U abierto de A, $a \in U$, $n \in \omega$ y $\alpha \in S_n(A)$. Se tiene:

(a) $A_\alpha \xrightarrow{1} a \Longrightarrow A_\alpha \cap U \xrightarrow{1} a$.

(b) $A_\alpha \xrightarrow{2} a$ y $A_\alpha \cap U$ no accesible $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow A_\alpha \cap U \xrightarrow{2} a$.

(c) $A_\alpha \xrightarrow{3} a \Longrightarrow A_\alpha \cap U \xrightarrow{3} a$.

3.3.14. Lema.- Sean A, B espacios T_3 con $E^A = E^B$. Sean $n \geq 1$, $a \in A$, $b \in B$ con $s_n(a,A) = s_n(b,B)$ y $\alpha \in S_{n-1}$ con $A_\alpha \xrightarrow{1} a$ y $B_\alpha \xrightarrow{1} b$. Entonces, si existe un abierto $U \ni a$

con $A_\alpha \cap (A-U)$ infinito, se sigue que existe un abierto $V \ni b$ con $B_\alpha \cap (B-V)$ infinito.

Demostración: Como $A_\alpha \xrightarrow{1} a$, si $A_\alpha \cap (A-U)$ es infinito se sigue que existe $a' \in A-U$ tal que a' es punto de acumulación de $A_\alpha \cap (A-U)$. Por tanto,

$$A_\alpha \xrightarrow{1} a'.$$

Como $E^A = E^B$, existe $b' \in B$ con $b \neq b'$ y $s_n(a',A) = s_n(b',B)$. Por consiguiente,

$$B_\alpha \xrightarrow{1} b'.$$

Como B es un espacio Hausdorff, existe un abierto $V \ni b$ tal que $B_\alpha \cap (B-V)$ es infinito. ⊣

3.3.15. Lema.- Sea A espacio T_3 numerable de tipo finito. Sean $n_o = c(A)$ y $r = \text{card}\,(S_{n_o}(A))$. Sean $\alpha \in S_{n_o}(A)$ y U abierto y cerrado de A. Entonces:

$$A_\alpha \cap U \text{ accesible} \Longrightarrow \text{I tiene una estrategia de victoria en } J_r(A_\alpha \cap U, A).$$

Demostración: Sea $m = \text{mínimo } \{n \in \omega \ / \ \text{I tiene una estrategia de victoria en } J_n(A_\alpha \cap U, A)\}$.

Hemos de probar que $m \leq r$. Vamos a proceder por reducción al absurdo. Supongamos, pues, que $r < m$. Por 3.1.4, podemos considerar a A como un ω-árbol con la topología inducida. Sea $\prec$ el orden de dicho ω-árbol. Se sigue que existen $\beta \in S_{n_o}(A)$ y un conjunto infinito $A^* = \{a_o, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ de puntos de U con $a_o \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n \prec \ldots$, tales que:

1. $s_{n_o}(a_n, A) = \beta \quad (n \in \omega)$.
2. $A_\alpha \cap U \longrightarrow a_n \quad (n \in \omega)$.

Es claro que A^* no es accesible. Por tanto, $A_\alpha \cap U$ no sería accesible, lo cual es falso. $\dashv$

Es sabido, se deduce incluso de 3.1.4, que la topología de cualquier espacio T_3 numerable tiene una base formada por conjuntos cerrados. En el siguiente teorema haremos uso de este hecho.

3.3.16. Teorema.- Sean A, B espacios T_3 numerables, con A de tipo finito. Entonces:

$$E^A = E^B \implies A \simeq^t B.$$

Demostración: Definimos la relación binaria R, entre espacios topológicos con elementos distinguidos, de la siguiente forma:

$(A', a_1 \ldots a_m) \; R \; (B', b_1 \ldots b_m) \iff$ (a) A' y B' son espacios T_3 numerables de tipo finito y $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ $(i \neq j,\ i,j \in \{1,\ldots,m\})$.

(b) $E^{A'} = E^{B'}$.

(c) Sea $n_o = c(A') = c(B')$. Entonces, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$:

$$s_{n_o}(a_i, A') = s_{n_o}(b_i, B').$$

Vamos a demostrar que en la situación

$$(A', a_1 \ldots a_m) \quad R \quad (B', b_1 \ldots b_m)$$

se cumplen las condiciones (1) y (2) del lema 3.3.12. Sea $a_{m+1} \in A' - \{a_1, \ldots, a_m\}$. Por las condiciones (b) y (c) de la definición de R, existe $b_{m+1} \in B' - \{b_1, \ldots, b_m\}$ tal que $s_{n_o}(a_{m+1}, A') = s_{n_o}(b_{m+1}, B')$. Por tanto, $(A', a_1 \ldots a_m\ a_{m+1})\ R\ (B', b_1 \ldots b_m\ b_{m+1})$.

Comprobemos la condición (2). Sean $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $U' \ni a_i$ abierto de A'. No perdamos de vista en lo que resta de demostración que $s_{n_o}(a_i, A') = s_{n_o}(b_i, B')$. Como $E^{A'} = E^{B'}$, teniendo en cuenta 3.3.5, se sigue que para todo $n \in \omega$ $s_n(a_i, A') = s_n(b_i, B')$. Nuestro primer objetivo es encontrar entornos $U \ni a_i$, $V \ni b_i$ abiertos y cerrados suficientemente pequeños. Sea $U'_o \ni a_i$ abierto de A', tal que:

1. $U'_o \subseteq U'$.

2. $a_j \notin U'_o$ $(j \neq i,\ j \in \{1, \ldots, m\})$.

3. Para todo $a \in U'_o$ con $a \neq a_i$ se tiene que

$$s_{n_o}(a, A') \in \{\alpha \in S_{n_o}\ /\ A'_\alpha \longrightarrow a_i\}.$$

Sea $\Phi^* = S_{n_o}(A') = S_{n_o}(B')$. En primer lugar, vamos a definir para cada $\alpha^* \in \Phi^*$ un abierto $U_{\alpha^*} \ni a_i$. Distinguimos cinco situaciones:

Situación (a)

$A'_{\alpha^*} \xrightarrow{1} a_i$ y existe un abierto $W \ni a_i$ tal que $A'_{\alpha^*} \cap (A'-W)$ es infinito. Definimos $U_{\alpha^*} = W$.

Situación (b)

$A'_{\alpha*} \xrightarrow{1} a_i$ y no existe un abierto $W \ni a_i$ tal que $A'_{\alpha*} \cap (A'-W)$ es infinito.- Definimos $U_{\alpha*} = A'$.

Situación (c)

$A'_{\alpha*} \xrightarrow{2} a_i$.- Sea $W \ni a_i$ tal que $A'_{\alpha*} \cap W$ es accesible. Definimos $U_{\alpha*} = W$.

Situación (d)

$A'_{\alpha*} \xrightarrow{3} a_i$.- Como la topología de A' tiene una base formada por conjuntos cerrados, se deduce de 3.3.15 que existe un abierto $W \ni a_i$ tal que $A'_{\alpha*} \cap (A'-W)$ no es accesible. Definimos $U_{\alpha*} = W$.

Situación (e)

$A'_{\alpha*}$ no converge contra a_i.- Definimos $U_{\alpha*} = A'$.

Consideremos un entorno $U \ni a_i$ abierto y cerrado con $U \subseteq U'_o \cap (\bigcap_{\Phi*} U_{\alpha*})$. Para cualquier $\alpha* \in \Phi*$ en la situación (b), definimos

$$p(\alpha*) = \text{card}(A'_{\alpha*} \cap (A'-U)).$$

Teniendo en cuenta 3.3.14 y que $s_{n_o+1}(a_i,A') = s_{n_o+1}(b_i,B')$, podemos proceder de manera similar con b_i (tomando para todo $\alpha* \in \Phi*$ el abierto correspondiente $V_{\alpha*}$) y considerar un entorno suficientemente pequeño $V \ni b_i$ abierto y cerrado, y tal que para todo $\alpha* \in \Phi*$ en la situación (b) se tiene que

$$p(\alpha*) = \text{card}\ (B'_{\alpha*} \cap (B'-V)).$$

Para probar que $(U,a_i)\ R\ (V,b_i)$, vamos a construir una función f que a cada n-tipo α le va a hacer corresponder un n-tipo $f(\alpha)$ $(n \in \omega)$, de tal manera que para todo $n \in \omega$, $c \in U$ y $d \in V$, se cumplirá:

$$s_n(c,U) = f(s_n(c,A')).$$

$$s_n(d,V) = f(s_n(d,B')).$$

Para ello, vamos a definir previamente una función $\mu : \bigcup_{n\in\omega} S_n \times \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$. Sean $n \in \omega$ y $\alpha \in S_n$ con $A'_\alpha \longrightarrow a_i$. Definimos:

$$\mu(\alpha,1) = 1.$$

$$\mu(\alpha,2) = \begin{cases} 1, & \text{si } A'_\alpha \xrightarrow{2} a_i . \\ 2, & \text{si } A'_\alpha \xrightarrow{3} a_i . \end{cases}$$

$$\mu(\alpha,3) = 3.$$

Para los demás casos es indiferente el valor que tome μ. Se deduce a partir del lema 3.3.13 que para todo $n \in \omega$, $\alpha \in S_n$, $c \in U$, $d \in V$ y $\lambda \in \{1,2,3\}$ se tiene:

$$(+)\quad 1.\ A'_\alpha \xrightarrow{\lambda} c \implies A'_\alpha \cap U \xrightarrow{\mu(\alpha,\lambda)} c.$$

$$2.\ B'_\alpha \xrightarrow{\lambda} d \implies B'_\alpha \cap V \xrightarrow{\mu(\alpha,\lambda)} d.$$

Definimos f por inducción sobre n. Si $n=0$, definimos $f(*) = *$. Sean $n \geq 1$ y $\alpha \in S_n$. Si $\alpha = \emptyset$, $f(\alpha) = \emptyset$. Si $\alpha = \{(\alpha_1,\lambda_1),\ldots,(\alpha_r,\lambda_r)\}$,

$f(\alpha) = \{(\beta,\lambda_\beta^\alpha)$ / existe $J \subsetneq \{1,\dots,r\}$ con $J \neq \emptyset$ tal que:

(a) 1. $f(\alpha_i) = \beta \quad (i \in J)$.

2. $f(\alpha_i) \neq \beta \quad (i \notin J)$,

(b) λ_β^α está definida por

$$\lambda_\beta^\alpha = \begin{cases} 3, & \text{si existe } i \in J \text{ con } \mu(\alpha_i,\lambda_i) = 3. \\ 2, & \text{si no existe } i \in J \text{ con } \mu(\alpha_i,\lambda_i) = 3, \text{ y existe} \\ & i \in J \text{ con } \mu(\alpha_i,\lambda_i) = 2. \\ 2, & \text{si } \mu(\alpha_i,\lambda_i) = 1 \ (i \in J), \text{ y existe } \alpha' \in S_{n-1}(A') \\ & \text{tal que:} \\ & 1.\ f(\alpha') = \beta\ . \\ & 2.\ A'_{\alpha'} \xrightarrow{3} a_i\ . \\ 1, & \text{en otro caso.}\}\ , \end{cases}$$

Teniendo en cuenta (+), es fácil probar por inducción sobre n que para todo $n \in \omega$, $c \in U$ y $d \in V$, se tiene:

$$s_n(c,U) = f(s_n(c,A'))\ ,$$

$$s_n(d,V) = f(s_n(d,B'))\ ,$$

Sean $n \in \omega$ y $\beta \in S_n$. Se sigue:

$$E^U(\beta) = \begin{cases} \infty, & \text{si existe } \alpha \in S_n \text{ con } f(\alpha) = \beta \text{ y } A'_\alpha \longrightarrow a_i\ , \\ 1, & \text{si } f(s_n(a_i,A')) = \beta \text{ y no existe } \alpha \in S_n \text{ con } f(\alpha) = \beta \\ & \text{y } A'_\alpha \longrightarrow a_i. \\ 0, & \text{en otro caso}, \end{cases}$$

$$E^V(\beta) = \begin{cases} \infty, & \text{si existe } \alpha \in S_n \text{ con } f(\alpha) = \beta \text{ y } B'_\alpha \longrightarrow b_i. \\ 1, & \text{si } f(s_n(b_i,B')) = \beta \text{ y no existe } \alpha \in S_n \text{ con } f(\alpha) = \beta \\ & \text{y } B'_\alpha \longrightarrow b_i. \\ 0, & \text{en otro caso ,} \end{cases}$$

Por tanto, $E^U = E^V$. Se deduce de inmediato que (U,a_i) R (V,b_i).

Vamos a demostrar ahora que $(A'-U,a_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_m)$ R R $(B'-V,b_1\ldots\hat{b}_i\ldots b_m)$. Se deduce a partir del lema 3.3.13 que para todo $n \in \omega$, $\alpha \in S_n$, $c \in A'-U$, $d \in B'-V$ y $\lambda \in \{1,2,3\}$, se tiene:

1. $A'_\alpha \xrightarrow{\lambda} c \implies A'_\alpha \cap (A'-U) \xrightarrow{\lambda} c$.
2. $B'_\alpha \xrightarrow{\lambda} d \implies B'_\alpha \cap (B'-V) \xrightarrow{\lambda} d$.

Es fácil probar por inducción sobre n que para todo $n \in \omega$, $c \in A'-U$ y $d \in B'-V$, se tiene:

$$s_n(c,A'-U) = s_n(c,A') .$$

$$s_n(d,B'-V) = s_n(d,B') .$$

Sean $n \in \omega$ y $\alpha \in S_n$. Tenemos:

$$E^{A'-U}(\alpha) = \begin{cases} E^{A'}(\alpha), & \text{si } A'_\alpha \text{ no converge contra } a_i. \\ \infty, & \text{si } A'_\alpha \longrightarrow a_i \text{ y } A'_\alpha \cap (A'-U) \text{ es infinito}. \\ p(\alpha^*_1)+\ldots+p(\alpha^*_k), & \text{si se cumple:} \\ & 1.\ n < n_o, \\ & 2.\ A'_\alpha \longrightarrow a_i \text{ y } A'_\alpha \cap (A'-U) \text{ es finito.} \\ & 3.\ \alpha^*_1,\ldots,\alpha^*_k \in \Phi^*. \\ & 4.\ \text{Para todo } \alpha^* \in \Phi^*: \\ & \qquad (\alpha^*)_n = \alpha \iff \alpha^* \in \{\alpha^*_1,\ldots,\alpha^*_k\}. \\ p(\alpha^*), & \text{si se cumple:} \\ & 1.\ n \geq n_o. \\ & 2.\ A'_\alpha \longrightarrow a_i \text{ y } A'_\alpha \cap (A'-U) \text{ es finito.} \\ & 3.\ (\alpha)_{n_o} = \alpha^*. \end{cases}$$

$$E^{B'-V}(\alpha) = \begin{cases} E^{B'}(\alpha), & \text{si } B'_\alpha \text{ no converge contra } b_i\,, \\ \infty, & \text{si } B'_\alpha \longrightarrow b_i \text{ y } B'_\alpha \cap (B'-V) \text{ es infinito.} \\ p(\alpha^*_1) + \ldots + p(\alpha^*_k), & \text{si se cumple:} \\ \quad 1.\ n < n_o\,. & \\ \quad 2.\ B'_\alpha \longrightarrow b_i \text{ y } B'_\alpha \cap (B'-V) \text{ es finito.} & \\ \quad 3.\ \alpha^*_1, \ldots, \alpha^*_k \in \Phi^*. & \\ \quad 4.\ \text{Para todo } \alpha^* \in \Phi^*:\ (\alpha^*)_n = \alpha \Longleftrightarrow \alpha^* \in \{\alpha^*_1, \ldots, \alpha^*_k\}. & \\ p(\alpha^*), & \text{si se cumple:} \\ \quad 1.\ n \geq n_o\,. & \\ \quad 2.\ B'_\alpha \longrightarrow b_i \text{ y } B'_\alpha \cap (B'-V) \text{ es finito.} & \\ \quad 3.\ (\alpha)_{n_o} = \alpha^*. & \end{cases}$$

Se sigue que $E^{A'-U} = E^{B'-V}$. Por tanto, $(A'-U,\ a_1 \ldots \hat{a}_i \ldots a_m)$ R R $(B'-V,\ b_1 \ldots \hat{b}_i \ldots b_m)$.

Hemos demostrado que R cumple la hipótesis del lema 3.3.12. Obsérvese que A R B. Por consiguiente, $A \simeq^t B$. $\dashv$

El siguiente resultado expresa que todo espacio T_3 numerable de tipo finito tiene sentencia de Scott.

3.3.17. <u>Corolario</u>.- Sea A espacio T_3 numerable de tipo finito. Existe una sentencia ψ_A de $(L_{\omega_1\omega})_t$ tal que para cualquier B espacio T_3 numerable, se tiene:

$$A \simeq^t B \iff B \models \psi_A.$$

Demostración: Sea ψ_A la sentencia que se construye en la demostración de 3.3.8. Por tanto, para cualquier B espacio T_3:

$$E^A = E^B \iff B \models \psi_A .$$

Si B es numerable, tenemos por 3.3.16:

$$A \simeq^t B \iff B \models \psi_A . \dashv$$

Queda abierta la interesante cuestión de si todo espacio T_3 numerable tiene sentencia de Scott. Por el contraejemplo 3.3.11, los espacios T_3 numerables de tipo no finito no tienen en general como sentencia de Scott a la dada por el lema 3.3.8.

El siguiente resultado es más general que el teorema 3.3.16.

3.3.18. Teorema.- Sean A, B espacios T_3, con A de tipo finito. Entonces:

$$A \equiv^t_{\omega_1\omega} B \iff E^A = E^B .$$

Demostración: Sea ψ_A la sentencia construida en la demostración de 3.3.8. Supongamos que $A \equiv^t_{\omega_1\omega} B$. Se sigue que $B \models \psi_A$. Por tanto, $E^A = E^B$.

Para demostrar el otro sentido, vamos a proceder por reducción al absurdo. Por consiguiente, suponemos que $E^A = E^B$ y que existe un sentencia ϕ de $(L_{\omega_1\omega})_t$ tal que $A \models \phi$ y $B \models \neg\phi$. Tendríamos:

$$A \models \underline{T}_3 \wedge \psi_A \wedge \phi ,$$

$$B \models \underline{T}_3 \wedge \psi_A \wedge \neg\phi .$$

Por el teorema de Löwenheim-Skolem para $(L_{\omega_1\omega})_t$, existirían A' y B' espacios T_3 numerables de tipo finito con $E^{A'} = E^{B'}$, $A' \models \phi$

y $B' \models \neg\phi$. Esto es contradictorio con lo demostrado en el teorema 3.3.16. $\dashv$

3.3.19. Corolario.- Sea A espacio T_3 de tipo finito. Existe una sentencia ψ_A de $(L_{\omega_1\omega})_t$ tal que para cualquier B espacio T_3, se tiene:

$$A \equiv^t_{\omega_1\omega} B \iff B \models \psi_A.$$

Las definiciones que hemos introducido en esta sección 3.3 para espacios T_3 pueden ser consideradas para espacios topológicos cualesquiera. Entonces, es fácil comprobar que los teoremas 3.3.16 y 3.3.18 no son ciertos, si en las respectivas hipótesis suponemos que los espacios A,B en cuestión son T_2 en lugar de T_3.

(D). Algunas otras consideraciones sobre espacios T_3 de tipo finito.

En este último apartado, para evitar confusión, los tipos de Flum-Ziegler serán denotados por $\bar{\alpha},\bar{\beta},\ldots$ y nuestros tipos por $\alpha,\beta,\ldots$. Un tipo completo en el sentido Flum-Ziegler es una secuencia $(\bar{\alpha}_n)_\omega$ con $\bar{\alpha}_n \in T_n$ $(n \in \omega)$. Sea A espacio T_3. Se dice que A es de tipo finito en el sentido Flum-Ziegler, si el cardinal del conjunto de los tipos completos en el sentido Flum-Ziegler satisfactibles en A es finito.

Vamos a definir por inducción sobre n la siguiente función $g : \bigcup_{n\in\omega} S_n \longrightarrow \bigcup_{n\in\omega} T_n$. Si $n = 0$, definimos $g(*) = *$. Sean $n \geq 1$ y $\alpha \in S_n$. Si $\alpha = \emptyset$, $g(\alpha) = \emptyset$. Si $\alpha = \{(\alpha_1,\lambda_1),\ldots$ $\ldots,(\alpha_r,\lambda_r)\}$, $g(\alpha) = \{g(\alpha_1),\ldots,g(\alpha_r)\}$. Se demuestra de inmediato por inducción sobre n:

(+) Para todo A espacio T_3, $a \in A$ y $n \in \omega$, se tiene:

$$t_n(a,A) = g(s_n(a,A)).$$

Para cualquier $n \in \omega$ y cualquier $\bar{\alpha} \in T_n$, sea $\Phi_{\bar{\alpha}} = \{\alpha \in S_n \ / \ g(\alpha) = \bar{\alpha}\}$. Por (+), se sigue que para cualquier A espacio T_3 y $a \in A$:

$$t_n(a,A) = \bar{\alpha} \iff s_n(a,A) \in \Phi_{\bar{\alpha}} .$$

Por tanto, todo n-tipo en el sentido Flum-Ziegler se corresponde con un conjunto de n-tipos en nuestro sentido.

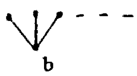
Se deduce de (+) que cualquier espacio T_3 de tipo finito en nuestro sentido es de tipo finito en el sentido Flum-Ziegler. Vamos a probar a continuación, mediante el siguiente contraejemplo, que el recíproco no se cumple.

3.3.20. Contraejemplo.- Para cada $n \geq 1$ vamos a construir un ω-árbo T^n con una única raíz, y a considerar en él la topología inducida. F jemos, pues, un número natural $n \geq 1$. Sea a_o la raíz de T^n. Tod los conjuntos que consideremos para la construcción de T^n serán dis juntos dos a dos; la raíz a_o no pertenecerá a ninguno de ellos. Vamos a considerar conjuntos infinitos numerables de la forma $A_a^{\{(\emptyset,2)\}}$, $A_a^{\{(\emptyset,3)\}}$, A_a^k $(k \geq 1)$. Se supone:

(i) Para cualquier conjunto de la forma $A_a^{\{(\emptyset,2)\}}$ y cualquie $b \in A_a^{\{(\emptyset,2)\}}$, el cono de b está definido de la siguien te manera:

1. $N(b) = \{b_1,\ldots,b_n,\ldots\}$,

2. Para todo $n \geq 1$, $N(b_n) = \emptyset$.

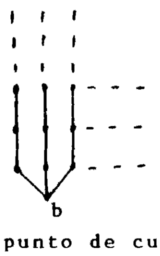


(ii) Para cualquier conjunto de la forma $A_a^{\{(\emptyset,3)\}}$ y cualquier $b \in A_a^{\{(\emptyset,3)\}}$, el cono de b está definido de la siguiente manera:

1. $N(b) = \{b_1^1,\ldots,b_n^1,\ldots\}$.

2. Para todo $n,k \geq 1$:

$$N(b_n^k) = \{b_n^{k+1}\}.$$



Se cumplirá que cualquier punto de cualquier conjunto de la forma $A_a^{\{(\emptyset,2)\}}$ tendrá por tipo completo en T^n a $(*, \{(*,2)\}, \{(\emptyset,2)\}, \{(\emptyset,2)\},\ldots)$, y que cualquier punto de cualquier conjunto de la forma $A_a^{\{(\emptyset,3)\}}$ tendrá por tipo completo en T^n a $(*, \{(*,3)\}, \{(\emptyset,3)\}, \{(\emptyset,3)\},\ldots)$.

Definimos:

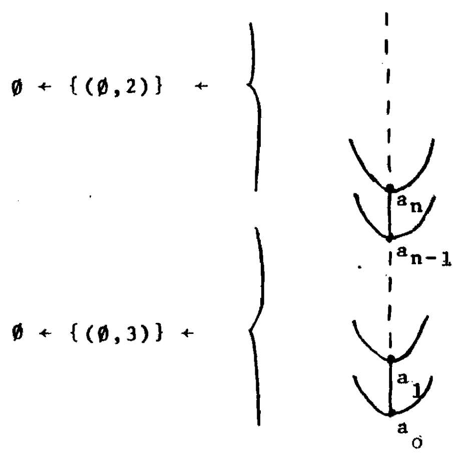
1. $N(a_o) = A_{a_o}^{\{(\emptyset,3)\}} \cup A_{a_o}^1$.

2. Para todo $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, A_a^k, y $a \in A_a^k$:

$$N(a) = A_a^{\{(\emptyset,3)\}} \cup A_a^{k+1} .$$

3. Para todo $k \geq n$, A_a^k, y $a \in A_a^k$:

$$N(a) = A_a^{\{(\emptyset,2)\}} \cup A_a^{k+1} .$$



Sean $a_1 \in A_{a_o}^1$, $a_2 \in A_{a_1}^2, \ldots, a_n \in A_{a_{n-1}}^n$. Obsérvese que $T_{\{(\emptyset,3)\}}^n \longrightarrow a_{n-1}$ y $T_{\{(\emptyset,3)\}}^n \not\longrightarrow a_n$. Por tanto, $s_3(a_{n-1},T^n) \neq$ $\neq s_3(a_n,T^n)$. Se comprueba fácilmente que para todo $k \in \{1,\ldots,n\}$ se tiene que $s_{k+2}(a_{n-k},T^n),\ldots,s_{k+2}(a_{n-1},T^n)$, $s_{k+2}(a_n,T^n)$ son distintos dos a dos. Por tanto, en T^n hay más de n tipos completos en nuestro sentido satisfactibles (se puede comprobar que exactamente hay $n+4$). Consideremos la suma topológica $\sum_{n\geq 1} T^n$ de los espacios

T^n. Se sigue que $\sum_{n\geq 1} T^n$ no es un espacio de tipo finito en nuestro sentido. Sin embargo, $\sum_{n\geq 1} T^n$ es un espacio de tipo finito en el sentido Flum-Ziegler. Los únicos tipos completos en el sentido Flum-Ziegler satisfactibles en $\sum_{n\geq 1} T^n$ son:

$$\gamma_1 = (*,\ \emptyset,\ \emptyset,\ \emptyset,\ldots),$$

$$\gamma_2 = (*,\ \{*\},\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset\},\ldots),$$

$$\gamma_3 = (*,\ \{*\},\ \{\emptyset,\{*\}\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{*\}\}\},$$
$$\{\emptyset,\{\emptyset\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{*\}\}\}\},\ldots).$$

3.3.21. <u>Observación</u>.- En [1] se efectúa la siguiente clasificación de las formas de convergencia. Sean A espacio T_3, $a \in A$ y A^* subconjunto de puntos de A con $A^* \longrightarrow a$. Entonces:

1. A^* converge infinitamente contra a, si para todo abierto $U \ni a$ existe un abierto $V \ni a$ con $V \subset U$, de tal manera que $A^* \cap (U-V)$ es infinito.

2. A^* converge finitamente contra a, si para todo abierto $U \ni a$ se tiene que $A^* \cap (A-U)$ es finito.

3. A^* converge mixtamente contra a, si existe un abierto $U \ni a$ tal que $A^* \cap (A-U)$ es infinito y $A^* \cap U$ converge finitamente contra a.

Se tiene que estos tres tipos de convergencia son exhaustivos y excluyentes. Sea A espacio T_3 de tipo finito en el sentido Flum-Ziegler. Para todo $n \in \omega$ y $\overline{\alpha} \in T_n$, denotaremos $A_{\overline{\alpha}} = \{a \in A/\ t_n(a,A) = \overline{\alpha}\}$.

Para cualquier $a \in A$, si $A_{\overline{\alpha}}$ converge infinitamente contra a, finitamente contra a, mixtamente contra a, escribiremos $A_{\overline{\alpha}} \xrightarrow{i} a$, $A_{\overline{\alpha}} \xrightarrow{f} a$, $A_{\overline{\alpha}} \xrightarrow{m} a$, respectivamente. Se dice que A es un espacio sin convergencias mixtas, si para todo $n \in \omega$, $\overline{\alpha} \in T_n$ y $a \in A$:

$$A_{\overline{\alpha}} \longrightarrow a \Longrightarrow A_{\overline{\alpha}} \xrightarrow{i} a \text{ ó } A_{\overline{\alpha}} \xrightarrow{f} a .$$

En [1, teorema 7] se tiene una caracterización de la homeomorfía para la clase de los espacios T_3 numerables de tipo finito en el sentido Flum-Ziegler sin convergencias mixtas.

Vamos a comprobar que cualquier espacio A de esta clase es de tipo finito en nuestro sentido. Sean $n \in \omega$, $\overline{\alpha} \in T_n$ y $a \in A$. Es claro que

$$(1) \quad A_{\overline{\alpha}} \xrightarrow{f} a \Longrightarrow A_{\overline{\alpha}} \xrightarrow{1} a .$$

Supongamos que $A_{\overline{\alpha}}$ no converge finitamente contra a. Si consideramos a A como un ω-árbol con la topología inducida (véase teorema 3.1.4), es fácil observar:

$$A_{\overline{\alpha}} \xrightarrow{1} a \text{ ó } A_{\overline{\alpha}} \xrightarrow{2} a \Longrightarrow \text{existe } a' \in A \text{ con } A_{\overline{\alpha}} \xrightarrow{m} a'.$$

Por tanto:

$$(2) \quad A_{\overline{\alpha}} \xrightarrow{i} a \Longrightarrow A_{\overline{\alpha}} \xrightarrow{3} a.$$

Vamos a definir por inducción sobre n la siguiente función $f : \bigcup_{n \in \omega} T_n \longrightarrow \bigcup_{n \in \omega} S_n$. Si $n = 0$, $f(*) = *$. Sean $n \geq 1$ y $\overline{\alpha} \in T_n$. Si $\overline{\alpha} = \emptyset$, $f(\overline{\alpha}) = \emptyset$. Si $\overline{\alpha} = \{\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_r\}$, $f(\overline{\alpha}) = \{(f(\overline{\alpha}_1), \lambda_1), \ldots, (f(\overline{\alpha}_r), \lambda_r)\}$ donde

$$\lambda_k \underset{(k=1\ldots r)}{=} \begin{cases} 1, & \text{si } A_{\overline{\alpha}_k} \text{ converge finitamente contra algún } a \in A. \\ 3, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

Obsérvese que f es inyectiva. Teniendo en cuenta (1) y (2), es fácil probar por inducción sobre n que para todo $n \in \omega$ y $a \in A$:

$$s_n(a,A) = f(t_n(a,A)).$$

Por tanto, A es de tipo finito en nuestro sentido. Teniendo en cuenta que los tipos de convergencia infinito, finito y mixto son definibles en $(L_{\omega_1\omega})_t$, es posible aplicar el teorema de Löwenheim-Skolem y probar que el anterior resultado es cierto aún en el caso en el que A no es numerable.

Para espacios T_3 en general, tenemos lo siguiente:

1. Toda convergencia de tipo finito es de tipo 1.
2. Toda convergencia de tipo mixto es de tipo 1 ó de tipo 2.
3. Toda convergencia de tipo infinito es de tipo 1, de tipo 2 ó de tipo 3.

Obsérvense los ejemplos mostrados en 3.3.3.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Ahlbrand.- Endlich axiomatisierbare Theorien von T_3-Räumen. Diplomarbeit. Friburgo (1979).

[2] J. Barwise.- Back and forth through Infinitary Logic. MAA-Studies in Mathematics 8 (1973), 5-34.

[3] J. Barwise.- Admissible sets and structures. Berlin (1975).

[4] M. Benda.- Reduced products and non-standard logics. J. Symbolic Logic 34 (1969), 424-436.

[5] C.C. Chang - H.J. Keisler.- Model Theory. Amsterdam (1974).

[6] A. Ehrenfeucht.- An application of games to the completeness problem for formalized theories. Fund. Math. 49 (1961), 129-141.

[7] S. Feferman.- Two notes on Abstract Model Theory, I. Properties invariant on the range of definable relations between structures. Fund. Math. 82 (1974), 153-164.

[8] S. Feferman.- Infinitary properties, local functors and systems of ordinal functions. Conference in Mathematical Logic ›Londres.' 70. Lecture Notes in Mathematics 255, 63-97.

[9] S. Feferman - R.L. Vaught.- The first order properties of products of algebraic systems. Fund. Math. 47 (1959), 57-103.

[10] J. Flum.- First-order logic and its extensions. Logic Conference, Kiel. Lecture Notes in Mathematics 499, 248-310.

[11] J. Flum.- L(Q)-preservation theorems. J. Symbolic Logic 40 (1975), 410-418.

[12] J. Flum - M. Ziegler.- Topological Model Theory. Lecture Notes in Mathematics 769.

[13] H. Gaifman.- Operations on relational structures, functors and classes, I. Proceedings of Tarski Symposium, American Math. Soc. (1974), 21-40.

[14] F. Galvin.- Horn sentences. Annals of Math. Logic 1 (1970), 390-422.

[15] S. Garavaglia.- Completeness for topological structures. Notices AMS, 75T-E36 (1975).

[16] S. Garavaglia.- A topological ultrapower theorem. Notices AMS, 75T-E79 (1975).

[17] S. Garavaglia.- Model Theory of topological structures. Annals of Math. Logic 14 (1978), 13-37.

[18] Y. Gurevich.- Monadic theory of order and topology. Israel J. of Math. 27 (1977), 299-319.

[19] W. Hodges.- A normal form for algebraic constructions. Bull. London Math. Soc. 6 (1974), 57-60.

[20] W. Hodges.- A normal form for algebraic constructions, II. Logique et Analyse 71/72 (1975), 429-487.

[21] H.J. Keisler.- Formulas with linearly ordered quantifiers. The syntax and semantics of infinitary languages. Lecture Notes in Math. 72, 96-130.

[22] H.J. Keisler.- Model Theory for Infinitary Logic. Amsterdam (1971).

[23] A. Macintyre.- On ω_1-categorical theories of abelian groups. Fund. Math. 70 (1971), 253-270.

[24] M. Makkai.- Admissible sets and Infinitary Logic. Handbook of Mathematical Logic. Amsterdam (1977), 233-281.

[25] T.A. McKee.- Infinitary Logic and topological homeomorphisms. Zeitschrift für Math. Logik und Grundl. der Math. 21 (1975), 405-408.

[26] T.A. McKee.- Sentences preserved between equivalent topological bases. Zeitschrift für Math. Logik und Grundl. der Math. 22 (1976), 79-84.

[27] M. Morley.- The number of countable models. J. Symbolic Logic 35 (1970), 14-18.

[28] W. Szmielew.- Elementary properties of abelian groups. Fund. Math. 41 (1955), 203-271.

[29] S. Williard.- General Topology (1970).

[30] M. Ziegler.- A language for topological structures wich satisfies a Lindström theorem. Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 568-570.

INDICE ALFABETICO