UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística e Investigación Operativa

TESIS DOCTORAL

Medidas de nitidez para conjuntos y sucesos difusos, procesos de decisión de grupo con preferencias individulaes difusas

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Leandro Pardo Llorente

DIRECTOR:

Sixto Ríos García

Madrid, 2015

Leandro Pardo Llorente

MEDIDAS DE NITIDEZ PARA CONJUNTOS Y SUCESOS DIFUSOS.

PROCESOS DE DECISION DE GRUPO CON PREFERENCIAS

INDIVIDUALES DIFUSAS.

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1980

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1980
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-36104-1980

" MEDIDAS DE NITIDEZ PARA CONJUNTOS Y SUCESOS DIFUSOS. PROCESOS DE DECISION DE GRUPO CON PREFERENCIAS INDIVIDUALES DIFUSAS "

LEANDRO PARDO LLORENTE

Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, realizada bajo la dirección del Dr. D. Sixto Ríos García.

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Matemáticas
Sección de Estadística e Investigación Operativa.

Madrid, Mayo de 1.980

A Marisa .

P R O L O G O

La memoria que presentamos se encuadra dentro de una nueva teoría matemática denominada TEORIA DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS, (*) que iniciada por ZADEH en 1.965 ha tenido desde entonces un amplio desarrollo en diversas ramas de la matemática tales como Algebra, Topología, Probabilidad, Teoría de la Decisión, Teoría de la Información y en otras ciencias como la Lingüística, Psicología, Ciencias Médicas, etc.

Esta teoría trata de formalizar, matemáticamente, afirmaciones ambiguas relativas a campos complejos de las Ciencias Modernas. Así, como un conjunto en la Teoría clásica queda determinado por su función característica, en la Teoría de los Conjuntos Difusos queda caracterizado por una función, llamada de pertenencia, que a diferencia de la función característica toma valores reales en el intervalo $[0 , 1]$, indicando el grado de pertenencia de los elementos al conjunto difuso . Como afirma AZORIN (1.979) mientras en la Teoría clásica de Conjuntos la pertenencia es dicotómica, lo mismo ocurre en la Lógica Booleana donde una proposición es cierta o falsa , en la Teoría de los Conjuntos Difusos la pertenencia es gradual . Existe un paralelismo entre el aparato matemático utilizado en la Teoría de los Conjuntos Difusos y el utilizado en la Teoría clásica de conjuntos , teniendo los primeros quizá , un mayor campo de aplicabilidad.

Es claro, que al tratar con conjuntos difusos estamos ma

(*) Otros nombres adoptados por diversos autores son : Conjuntos Borrosos, Suaves, Vagos, no-Nítidos, AZORIN (1.979) nejando incertidumbre de tipo subjetivo, denominada difusidad, al abordar fenómenos con ambigüedad o imprecisión intrínseca en su interpretación, siendo ésta fácilmente diferenciable de la incertidumbre de la Teoría de la probabilidad, denominada aleatoriedad, que está asociada a la ocurrencia de fenómenos de resultado imprevisible.

En la presente memoria, dividida en cutro capítulos, realizamos un estudio de medidas, denominadas de NITIDEZ, utilizadas para cuantificar la ausencia de imprecisión o inexistencia de difusidad, asociada a los conjuntos , k-particiones y sucesos difusos; así como, un análisis de los procesos de decisión de grupo con preferencias individuales difusas . En resumen aplicamos la " Teoría de los Conjuntos Difusos " a campos de la Teoría de la Información y de la Teoría de la Decisión.

En el capítulo primero nuestro objetivo es dar una visión general de los aspectos de la Teoría de los Conjuntos Difusos que utilizamos en los capítulos posteriores; así, abordamos el estudio de la clase de los conjuntos difusos y de las relaciones difusas para concluir con el concepto de probabilidad para sucesos difusos. No hemos pretendido en este primer capítulo hacer un estudio exhaustivo de los conceptos citados anteriormente, dado que éste puede verse en las notas bibliográficas que incluimos al final de la memoria.

En el capítulo segundo realizamos un estudio de Medidas de Nitidez para conjuntos y k-particiones difusas. Son muy importantes los estudios realizados hasta la fecha en los que se trata de medir la incertidumbre de carácter difuso, es decir, de cuantificar la falta de precisión o nitidez,asociada a las características que se definen sobre un conjunto X (BACKER (1.977) , DE LUCA y TERMINI (1.972 A) ,(1.974) , (1.977 A) , (1.977 B) , LOO (1.976) , TRILLAS y RIERA (1.978 A), (1.978 B), EMPTOZ (1.974)) . Conviene resaltar que la difusidad no está intrínsecamente en el conjunto X, sino que surge al tratar con características o propiedades definidas en X. Partiendo de la base de que un conjunto difuso nos da la compatibilidad de los elementos de un conjunto X con determinadas características definidas en él, en los estudios citados, se da una medida global de la incertidumbre que tienen los elementos de X hacia esas determinadas características . Nosotros en lugar de estudias Medidas de Incertidumbre, denominadas generalmente Entropías difusas, vamos a estudiar Medidas de Nitidez que cuantifiquen , a diferencia de las Entropías difusas, la ausencia de imprecisión o existencia de nitidez. Es obvio, pensamos, que la idea de estudiar Entropías difusas tuvo su punto de partida, al menos en la forma de los funcionales utilizados, en las medidas de Entropía de SHANNON, si bien es cierto, que con este punto de partida se han conseguido importantes generalizaciones que no tienen nada que ver con aquélla . Nuestra idea de estudiar Medidas de Nitidez ha tenido como punto de partida intuitivo los estudios de ONICESCU (1.966), en los cuales, en lugar de medir la incertidumbre que un experimento aleatorio proporciona antes de su realización, mide la información de que se dispone . Al igual que ONICESCU afirma que la Energía Informacional puede ser el fundamento de una Teoría de la Información , posteriormente nosotros hemos estudiado ampliamente este aspecto en nuestra memoria de la Escuela de Estadística, pensamos que las Medidas de Nitidez pueden dar lugar a importantes resultados dentro de la Teoría de los Conjuntos Difusos por ello es posible pensar que en un futuro próximo estas ideas tengan una gran trascendencia en el estudio de los conjuntos difusos, de hecho , hemos tenido conocimiento últimamente de unos artículos de DUMITRESCU ((1.978 A), (1.978 B)) en los cuales estudia , como nosotros, Medidas de Nitidez, que él denomina Medidas de no-Difusidad.

En el capítulo tercero realizamos un estudio de Medidas de Nitidez e Información para sucesos difusos. El concepto de Medida de Nitidez para un suceso difuso es análogo al correspondiente para conjuntos difusos, si bien , en este caso hay definida una probabilidad sobre el conjunto X, por lo que haremos depender a estas medidas de esa probabilidad . El objetivo de las Medidas de Información para sucesos difusos es el cuantificar la información de carácter aleatorio proporcionada por un suceso difuso antes de su realización ; para este fin proponemos la generalización del funcional de ONICESCU como Medida de INformación.

Finalmente en el capítulo cuarto abordamos el problema que surge en los procesos de decisión de grupo cuando las preferencias de los individuos en el conjunto de alternativas no están suficientemente clarificadas, ya que, aunque la Teoría de la Decisión y la Teoría de Juegos, desde un punto de vista no difuso, abordan el problema de la toma de decisiones bajo certidumbre, riesgo e incertidumbre, existe a veces en la realidad otro tipo de imprecisiones, esto es, la vaguedad que aparece al no estar suficientemente precisados los elementos que intervienen en el problema, es decir, la imprecisión de naturaleza difusa.Este tipo de problemas , que nosotros denominamos PROCESOS DE DECISION DE GRUPO CON PREFERENCIAS INDIVIDUALES DIFUSAS, se encuadra dentro de los procesos unietápicos de la Teoría Difusa de la Decisión , según KICKER (1.978) en la optimización con n-personas.Son importantes los estudios existentes acerca de este tema, así, mientras BEZDEK, SPILLMAN, B. y R. SPILLMAN ((1.977), (1.978)) partiendo de relaciones binarias difusas antirreflexivas y recíprocas para los individuos del grupo, realizan un interesante e importante estudio acerca de la matriz de consenso, BLIN y WHINSTON (1.973) parten de relaciones no difusas para los individuos , aunque las preferencias del grupo vienen dadas por relaciones binarias difusas reflexivas y transitivas.

Por último , quiero agradecer al profesor Fco. Javier Girón las indicaciones que me ha dado para la finalización de esta memoria y expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a mi director de Tesis , profesor Sixto Ríos García por la ayuda e interés prestados a lo largo de los últimos cuatro años para la realización de esta memoria.

Madrid, Mayo 1.980

C O N T E N I D O

Pág.

CAPITULO I .- " ALGUNOS ASPECTOS GENERALES DE LA TEORIA DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS ".

I.0.- Sumario 2

I.1.- Clase de los conjuntos difusos definidos sobre un conjunto X . Características. 3

I.2.- Relaciones difusas 7

I.3.- Sucesos difusos. Probabilidad de un suceso difuso. 14

CAPITULO II.- " MEDIDAS DE NITIDEZ PARA CONJUNTOS DIFUSOS Y K-PARTICIONES DIFUSAS ".

II.0.-Sumario 22

II.1.-Medidas puntuales y globales de Nitidez para conjuntos difusos 23

II.2.-Medidas de Nitidez para k-particiones difusas ... 60

CAPITULO III.-"MEDIDAS DE NITIDEZ E INFORMACION PARA SUCESOS DIFUSOS ".

III.0.-Sumario 70

III. .-Medidas de Nitidez para sucesos difusos 72

III.2.-La Energía Informacional como medida de Información para sucesos difusos 90

Pág.

CAPITULO IV .- " DECISIONES DE GRUPO CON PREFERENCIAS INDIVIDUALES DIFUSAS ".

IV.0 .- Sumario 93

IV.1 .- Planteamiento de un problema de decisión de grupo con preferencias individuales difusas 100

IV.2 .- Características de la función de bienestar social. Teorema de imposibilidad con ordenes de preferencias individuales difusas............. 105

BIBLIOGRAFIA 135

Pág.

CAPITULO I

" ALGUNOS ASPECTOS GENERALES DE LA TEORIA DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS "

I.0.- Sumario 2

I.1.- Clase de los conjuntos difusos definidos sobre un conjunto X. Características. 3

I.1.1.- Definición de conjunto difuso 3

I.1.2.- Operaciones en L(X): Unión,Intersección,Producto 4

I.1.3.- Ordenes en L(X) 7

I.2.- Relaciones difusas 7

I.2.1.- Definición de Relación Difusa 7

I.2.2.- Operaciones con relaciones difusas 8

I.2.3.- Relaciones binarias difusas 10

I.3.- Sucesos difusos.Probabilidad de un suceso difuso 14

I.3.1.- Sucesiones de conjuntos difusos.Algebra , σ-álgebra y clase monótona de conjuntos difusos .. 14

I.3.2.- Definición de suceso difuso.Probabilidad de un suceso difuso 16

I.3.3.- Independencia de sucesos difusos.Probabilidad condicionada de sucesos difusos.............. 19

I.O.- SUMARIO

En este capítulo realizamos una breve exposición de algunos de los aspectos más importantes de la Teoría de los Conjuntos Difusos que utilizamos en los capítulos posteriores.

Comenzamos introduciendo el concepto de conjunto difuso dado por ZADEH (1.965), que será el utilizado por nosotros a lo largo de toda esta memoria , citando también las generalizaciones de este concepto dadas por GOGUEN (1.967) y BROWN (1.974). A continuación, se definen operaciones en la clase de los conjuntos difusos destacando la unión e intersección respecto de las cuales tiene estructura de retículo distributivo no complementario, así como, una ordenación dada por TRILLAS (1.978) que será de gran utilidad en capítulos posteriores. Seguidamente, se estudian las relaciones difusas que serán la base del CAPITULO IV, operaciones entre ellas y propiedades. Por último, exponemos los conceptos de suceso difuso y probabilidad de un suceso difuso, introducidos ambos por ZADEH (1.968) y posteriormente estudiados por NEGOITA y RALESCU (1.975), KAFMANN(1.977) y KHALILI (1.979) ; este último autor ha realizado un interesante estudio acerca de la independencia de sucesos difusos.

I.1.- CLASE DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS DEFINIDOS SOBRE UN CONJUNTO X. CARACTERISTICAS.

Comenzaremos dando la definición de conjunto difuso, para posteriormente , pasar a analizar algunas de las características algebraicas más relevantes de la clase de los conjuntos difusos.

I.1.1.- DEFINICION (ZADEH 1.965)

Sea X un conjunto no vacío, un conjunto difuso $\underset{\sim}{X}^J$, en X viene dado por una función

$$f_X^J : X \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

llamada de pertenencia o compatibilidad, que da el grado de compatibilidad o pertenencia de los elementos x de X en $\underset{\sim}{X}^J$.

Más concretamente, un conjunto difuso $\underset{\sim}{X}^J$, queda determinado por el conjunto de pares ordenados

$$\underset{\sim}{X}^J = \left\{(x,\ f_X^J(x))\right\} \qquad ,\ x \in X$$

En lo sucesivo , nosotros lo representaremos bien por $\underset{\sim}{X}^J$, o bien por su función de pertenencia f_X^J .

En el caso de que la función de pertenencia f_X^J tome solamente los valores 0 ó 1, se tiene un subconjunto clásico de X, representado por su función característica. Es obvio pues, que la definición de conjunto difuso es una generalización de la de conjunto clásico.

Goguen (1.968) generaliza el concepto de conjunto difuso imponien do a la función de pertenencia que tome valores en un retículo L, a esta clase la denomina clase de los conjuntos L-difusos. Brown (1.971) define un conjunto difuso imponiendo que la función de pertenencia tome valores en un retículo Booleano M . Nosotros utilizaremos en todo nuestro estudio la definición dada por Zadeh.

La clase de conjuntos difusos definidos sobre un conjunto no vacío X, la notaremos L(X).

$$L(X) = \left\{ f_X^J \;/\; f_X^J : X \longrightarrow [0\ ,\ 1] \right\}$$

I.1.2.-OPERACIONES EN L(X) : UNION, INTERSECCION Y PRODUCTO

Nos centraremos en el estudio de las operaciones más importantes: Unión, Intersección, y Producto; pudiéndose ver en MIZUMOTO y TANAKA (1.978) otras operaciones en L(X), así como la estructura algebraica que le confieren . Antes de definir estas operaciones vamos a dar los conceptos de igualdad, contenido y complementario en la Teoría de los Conjuntos Difusos.

I.1.2.1.- DEFINICION

a) Dos conjuntos difusos en X, $\underset{\sim}{X}^J$ y $\underset{\sim}{X}^k$, son iguales y se denota por $\underset{\sim}{X}^J = \underset{\sim}{X}^k$, si sus funciones de pertenencia toman los mismos valores cualquiera que sea x de X.

b) Dado el conjunto difuso $\underset{\sim}{X}^J$ en X, se llama complementArio de $\underset{\sim}{X}^J$ y se denota por $\bar{\underset{\sim}{X}}^J$ al conjunto difuso cuya función de pertenencia viene dada por

$$\bar{f}_X^J(x) = 1 - f_X^J(x) \quad \forall\ x \in X$$

c) Dados los conjuntos difusos $\underset{\sim}{X}^J$ y $\underset{\sim}{X}^K$. Se dice que $\underset{\sim}{X}^J \subset \underset{\sim}{X}^k$ si

$$f_X^J(x) \leq f_X^k(x) \qquad \forall\, x \in X$$

I.1.2.2.- <u>DEFINICION</u>

Dados los conjuntos difusos $\underset{\sim}{X}^J$ y $\underset{\sim}{X}^k$ en X. Se define la <u>unión</u> de $\underset{\sim}{X}^J$ y $\underset{\sim}{X}^k$ y se denota por $\underset{\sim}{X}^J \cup \underset{\sim}{X}^k$, como el conjunto difuso cuya función de pertenencia viene dada por

$$(f_X^J \cup f_X^k)\,(x) = \max\,(\, f_X^J(x)\,,\, f_X^k(x)\,) \qquad \forall\, x \in X$$

El neutro para esta operación es el conjunto difuso <u>vacío</u>, lo representaremos por f_X^{ϕ} ó $\underset{\sim}{\Phi}$, y es aquel cuya función de pertenencia toma el valor cero cualquiera que sea $x \in X$.

I.1.2.3.- <u>DEFINICION</u>

Dados los conjuntos difusos $\underset{\sim}{X}^J$ y $\underset{\sim}{X}^k$ en X. Se define la <u>intersección</u> de $\underset{\sim}{X}^J$ y $\underset{\sim}{X}^k$ y se denota por $\underset{\sim}{X}^J \cap \underset{\sim}{X}^k$, como el conjunto difuso cuya función de pertenencia viene dada por

$$(\, f_X^J \cap f_X^k\,)\,(x) = \min\,(\, f_X^J(x)\,,\, f_X^k(x))\quad \forall\, x \in X$$

El neutro para esta operación es el conjunto, que representaremos por f_X ó $\underset{\sim}{X}$, y es aquel cuya función de pertenencia toma el valor uno cualquiera que sea $x \in X$.

I.1.2.4.- <u>DEFINICION</u>

Dados los conjuntos difusos $\underset{\sim}{X}^J$ y $\underset{\sim}{X}^k$ en X. Se define el <u>producto algebraico</u> de $\underset{\sim}{X}^J$ y $\underset{\sim}{X}^k$ y se denota por $\underset{\sim}{X}^J \times \underset{\sim}{X}^k$, como el conjunto difuso cuya función de pertenencia viene dada por

$$(f_X^j \cdot f_X^k) (x) = f_X^j(x) \cdot f_X^k(x) \qquad \forall \; x \in X$$

Es inmediato demostrar que (L(X), $\cup$, $\cap$) es un retículo distributivo pero no un álgebra de Boole ya que no se verifican ninguna de las propiedades siguientes

$$\underset{\sim}{X}^j \cup \bar{\underset{\sim}{X}}^j = \underset{\sim}{X} \qquad \text{I.1.2.4.1.}$$

$$\underset{\sim}{X}^j \cap \underset{\sim}{X}^j = \underset{\sim}{\Phi} \qquad \text{I.1.2.4.2.}$$

Para ver que la relación I.1.2.4.1. no es cierta basta considerar la existencia de un elemento x en X con $f_X^j(x) = 1/2$, con lo cual $\bar{f}_X^j(x) = 1/2$ y

$$\max (f_X^j(x) , \bar{f}_X^j(x)) \neq 1$$

es decir , $\underset{\sim}{X}^j \cup \bar{\underset{\sim}{X}}^j \neq \underset{\sim}{X}$. Analogamente se demuestra que no se cumple la relación I.1.2.4.2.

Finalmente, dada una familia de conjuntos $\{\underset{\sim}{X}^j\}_{j \in J}$, se define la <u>unión y la intersección</u> de esta familia , como

$$(\bigcup_{j \in J} f_X^j) (x) = \sup_{j \in J} f_X^j(x) \qquad \forall \; x \in X$$

$$(\bigcap_{j \in J} f_X^j) (x) = \inf_{j \in J} f_X^j(x) \qquad \forall \; x \in X$$

I.1.3.- ORDENES EN L(X)

Mencionaremos dos relaciones con las cuales se puede ordenar parcialmente L(X) ; la idea de dar estas ordenaciones es debido a que la segunda de ellas será muy utilizada a lo largo de esta memoria.

$$f_X^j \overset{*}{\leqslant} f_X^k \Leftrightarrow \forall\ x \in X \qquad f_X^j(x) \leq f_X^k(x) \qquad \text{I.1.3.1.}$$

Esta es la ordenación clásica funcional con la que L(X) está parcialmente ordenado.

$$f_X^j \leqslant f_X^k \Leftrightarrow \forall\ x \in X \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_X^j(x) \leq f_X^k(x) \quad \text{si } f_X^k(x) \leq 1/2 \\ \\ f_X^j(x) \geq f_X^k(x) \quad \text{si } f_X^k(x) \geq 1/2 \end{array} \right\}$$

Esta ordenación fue introducida por Trillas (1.978A) y con ella L(X) está también parcialmente ordenado.

I.2.- RELACIONES DIFUSAS

I.2.1.- DEFINICION DE RELACION DIFUSA

El concepto de relación difusa fue introducido por Zadeh (1.971) y como veremos posteriormente es una generalización del concepto de relación clásica.

I.2.1.1.- DEFINICION

Una relación difusa $\underset{\sim}{R}$ en XxY es un conjunto difuso en XxY cuya función de pertenencia $f_{\underset{\sim}{R}}$ asocia a cada par ordenado (x,y) de XxY un valor $f_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$ que representa la intensidad de la relación entre x e y en $\underset{\sim}{R}$.

Veamos a continuación varios elementos notables en una relación difusa $\underset{\sim}{R}$.

. Se denomina <u>dominio</u> de la relación $\underset{\sim}{R}$, al conjunto difuso en X cuya función de pertenencia viene dada por

$$f_X(x) = \sup_{y \in Y} f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) \qquad \forall\, x \in X$$

. Se denomina <u>contradominio</u> de la relación difusa $\underset{\sim}{R}$ al conjunto difuso en Y cuya función de pertenencia viene dada por

$$f_Y(y) = \sup_{x \in X} f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) \qquad \forall\, y \in Y$$

. Se denomina <u>soporte</u> de una relación difusa $\underset{\sim}{R}$ al conjunto no difuso S, definido por

$$S = \left\{ (x,y) \in X x Y \ / \ f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) > 0 \right\}$$

I.2.2.-<u>OPERACIONES CON RELACIONES DIFUSAS</u>

Sean $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{S}$ y $\underset{\sim}{T}$ relaciones difusas en X x Y, con funciones de pertenencia $f_{\underset{\sim}{R}}$, $f_{\underset{\sim}{S}}$ y $f_{\underset{\sim}{T}}$ respectivamente.

I.2.2.1.- <u>DEFINICION</u>

La relación $\underset{\sim}{R}$ está <u>contenida</u> en $\underset{\sim}{S}$, si

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \leq f_{\underset{\sim}{S}}(x,y) \qquad \forall\, (x,y) \in X \times Y$$

I.2.2.2.- DEFINICION.

Dada la relación $\underset{\sim}{R}$ se denomina relación difusa complementaria de $\underset{\sim}{R}$ y se representa por $\overline{\underset{\sim}{R}}$, aquella relación cuya función de pertenencia viene determinada por

$$f_{\overline{\underset{\sim}{R}}}(x,y) = 1- f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \quad \forall\ (x,y) \in X \times Y$$

I.2.2.3.- DEFINICION.

Se denomina unión de $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{S}$ y se representa por $\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S}$, aquella relación difusa en X x Y cuya función de pertenencia viene dada por

$$f_{\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{S}}(x,y) = \max\ (\ f_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\ ,\ f_{\underset{\sim}{S}}(x,y)\ ) \qquad \forall\ (x,y) \in X \times Y$$

I.2.2.4.- DEFINICION.

Se denomina intersección de $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{S}$ y se representa por $\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S}$, aquella relación difusa en X x Y cuya función de pertenencia viene dada por

$$f_{\underset{\sim}{R}\cap\underset{\sim}{S}}(x,y) = \min\ (\ f_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\ ,\ f_{\underset{\sim}{S}}(x,y)\ ) \quad \forall\ (x,y) \in X \times Y$$

Es inmediato comprobar que se verifican las siguientes propiedades distributivas:

$$\underset{\sim}{R} \cap (\underset{\sim}{S} \cup \underset{\sim}{T}) = (\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S}) \cup (\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{T})$$

$$\underset{\sim}{R} \cup (\underset{\sim}{S} \cap \underset{\sim}{T}) = (\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S}) \cap (\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{T})$$

Consideremos las relaciones difusas $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{Q}$ y $\underset{\sim}{S}$ definidas en

X x Y, Y x Z y Z x W respectivamente.

I.2.2.5.- DEFINICION

Se denomina composición de las relaciones $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{Q}$ y se denota por $\underset{\sim}{R} * \underset{\sim}{Q}$, donde* representa una operación, a la relación difusa en X x Z cuya función de pertenencia viene dada por

$$f_{\underset{\sim}{R} * \underset{\sim}{Q}}(x,z) = \max_{y} \left(f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) * f_{\underset{\sim}{Q}}(y,z) \right)$$

En caso de ser $*$ una operación asociativa y monótona no decreciente en cada una de sus coordenadas es inmediato demostrar que

$$\underset{\sim}{R} * (\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{S}) = (\underset{\sim}{R} * \underset{\sim}{Q}) * \underset{\sim}{S}$$

$$\text{si } \underset{\sim}{Q} \subset \underset{\sim}{T} \quad \text{entonces} \quad \underset{\sim}{R} * \underset{\sim}{Q} \subset \underset{\sim}{R} * \underset{\sim}{T}$$

La operación $*$, más generalmente utilizada es la operación mínimo, recibiendo en este caso la composición el nombre de composición max-min.

I.2.3 .- RELACIONES BINARIAS DIFUSAS

I.2.3.1.- DEFINICION

Se denomina relación binaria difusa en X, a toda relación difusa en X x X.

Veamos las propiedades de las relaciones binarias difusas.

I.2.3.2.- DEFINICION

Se dice que una relación binaria difusa $\underset{\sim}{R}$ en X es recíproca si se verifica

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,y)+ f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) = 1 \quad \forall (x,y) \in X \times X$$

I.2.3.3.-DEFINICION

Se dice que una relación binaria difusa $\underset{\sim}{R}$ en X es reflexiva si su función de pertenencia toma el valor 1 para todo par $(x,x) \in X \times X$.

I.2.3.4.-DEFINICION

Se dice que una relación binaria difusa $\underset{\sim}{R}$ en X es antirreflexiva si su función de pertenencia toma el valor cero para todo par (x,x) de XxX.

I.2.3.5.-DEFINICION

Se dice que una relación binaria difusa $\underset{\sim}{R}$ en X es simétrica si su función de pertenencia verifica

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) \qquad \forall (x,y) \in X \times X$$

I.2.3.6.-DEFINICION

Se dice que una relación binaria difusa $\underset{\sim}{R}$ en X es antisimétrica si cuando su función de pertenencia , verifica:

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) > 0 \quad y \quad f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) > 0$$

entonces $x = y \quad \forall (x,y) \in X \times X$.

I.2.3.7.- DEFINICION

Se dice que una relación binaria difusa $\underset{\sim}{R}$ en X es transitiva si su función de pertenencia verifica:

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \geq \max_{y \in X} \left\{ \min \left(f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \, , \, f_{\underset{\sim}{R}}(y,z) \right) \right\} \quad \forall \; x, \; y, \; z \in X$$

A toda relación binaria difusa en X, que verifique las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva se la denomina relación de equivalencia difusa en X y si verifica las propiedades reflexiva , antisimétrica y transitiva se la denomina orden difuso en X.

Quizá a primera vista resulten sorprendentes las definiciones de relaciones binarias difusas reflexivas, antirreflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas. Sin embargo , se puede demostrar fácilmente que son una generalización de las definiciones clásicas.

Sea $\underset{\sim}{R}$ una relación binaria difusa en X, veamos que en caso de que $f_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$ tome solamente los valores cero ò uno , las definiciones anteriores coinciden con las clásicas.

En efecto, sea

$$G = \left\{ (x,y) \in X \times X \; / \; f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = 1 \right\}$$

.Si $\underset{\sim}{R}$ es reflexiva entonces $f_{\underset{\sim}{R}}(x,x) = 1$. $\forall \; x \in X$, por lo tanto $(x,x) \in G \quad \forall \; x \in X$ y $\underset{\sim}{R} = (G,X)$ sería una relación no difusa reflexiva en X.

.Si $\underset{\sim}{R}$ es antirreflexiva entonces $f_{\underset{\sim}{R}}(x,x) = 0 \quad \forall \quad x \in X$, por lo tanto $(x,x) \notin G \quad \forall \quad x \in X$ y $\underset{\sim}{R}$ sería una relación no difusa antirreflexiva en X.

.Si $\underset{\sim}{R}$ es simétrica , entonces

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) \qquad \forall \ (x,y) \in X \times X$$

por tanto si $(x,y) \in G$, es evidente que $(y,x) \in G$ por lo cual $\underset{\sim}{R}$ sería una relación binaria no difusa simétrica en X.

.Si $\underset{\sim}{R}$ es antisimétrica , entonces si

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) > 0 \ \text{ y } \ f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) > 0 \ , \text{ se tiene } \ x=y$$

por lo tanto si $(x,y) \in G$ e $(y,x) \in G$ se sigue que $f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = 1$ y $f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) = 1$, con lo cual ha de ser $x = y$ en cuyo caso $\underset{\sim}{R} = (G,X)$ sería una relación binaria no difusa antisimétrica en X.

.Si $\underset{\sim}{R}$ es transitiva , entonces

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,z) \geq \max_{y \in X} \left\{ \min \left(f_R(x,y) \ , \ f_R(y,z) \right) \right\} \qquad \forall \ x,y,z, \in X$$

para ver que $\underset{\sim}{R} = (X,G)$ es una relación no difusa transitiva , hemos de ver que

$$\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R} \subset \underset{\sim}{R} \qquad (\circ, \text{ composición de relaciones no difusas})$$

En efecto,

$\forall \ (x,z) \in \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R}$ se tiene que existe $y \in X$ de tal forma que $(x,y) \in G$

e $(y,z) \in G$, es decir

$f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = 1$ y $f_{\underset{\sim}{R}}(y,z) = 1$, con lo cual

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,z) \geq \max_{y \in X} \left\{ \min(f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \ , \ f_{\underset{\sim}{R}}(y,z) \ ) \right\} = 1, \text{ es decir}$$

$(x,z) \in \underset{\sim}{R} = (X,G)$.

I.3.- SUCESOS DIFUSOS. PROBABILIDAD DE UN SUCESO DIFUSO

Previamente a la definición de suceso difuso veremos algunos conceptos relacionados con las sucesiones de conjuntos difusos, así como la definición de álgebra, σ- álgebra y clase monótona de conjuntos difusos que serán utilizados posteriormente.

I.3.1.- SUCESIONES DE CONJUNTOS DIFUSOS. ALGEBRA, σ-ALGEBRA Y CLASE MONOTONA DE CONJUNTOS DIFUSOS.

Sea $\left\{\underset{\sim}{X}^j\right\}_{j\in N}$ una sucesión de conjuntos difusos en X, cuyas funciones de pertenencia vienen dadas por $\left\{f_X^j\right\}_{j\in N}$.

I.3.1.1.- DEFINICION

Se denomina <u>límite superior</u> de la sucesión de conjuntos difusos $\left\{\underset{\sim}{X}^j\right\}_{j\in N}$ y se representa por $\underset{\sim}{X}^*$ aquel conjunto difuso cuya función de pertenencia viene dada para cualquier $x \in X$ por

$$f_{\underset{\sim}{X}^*}(x) = \inf_i \left(\sup_{j \geq i} f_X^j(x) \right) \qquad i, j \in N$$

I.3.1.2.- DEFINICION

Se denomina límite inferior de la sucesión de conjuntos $\{\underset{\sim}{X}^j\}_{j\in N}$ y se representa por $\underset{\sim}{X}_*$, aquel conjunto difuso cuya función de pertenencia viene dada para cualquier $x \in X$ por

$$f_{X_*}(x) = \sup_i \left(\inf_{j\geq i} f_X^j(x) \right) \qquad i,\ j \in N$$

Se dice que la sucesión de conjuntos difusos $\{\underset{\sim}{X}^j\}_{j\in N}$ es convergente si

$$f_X{}^*(x) = f_{X_*}(x) \qquad \forall\ x \in X$$

Como ocurre en el caso clásico es inmediato comprobar que en caso de ser la sucesión de conjuntos difusos monótona ésta es convergente, entendiéndose por monótona creciente (decreciente) aquella sucesión de conjuntos difusos verificando

$$\forall\ x \in X \quad f_X^j(x) \leq f_X^{j+1}(x) \quad \left(f_X^j(x) \geq f_X^{j+1}(x) \right) \qquad j \in N$$

Pasemos ahora a ver los conceptos de álgebra, σ-álgebra y clase monótona de conjuntos difusos.

I.3.1.3.- DEFINICION

Una clase de conjuntos difusos $\mathcal{A} \subset L(X)$ se dice que es un álgebra de conjuntos difusos si verifica:

a) $\underset{\sim}{X} \in \mathcal{A}$

b) Si $\underset{\sim}{X}^1, \ldots\ldots, \underset{\sim}{X}^n \in \mathcal{A}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{X}^i \in \mathcal{A}$

c) Si $\underset{\sim}{X}^j \in \mathcal{A}$ entonces $\underset{\sim}{X}^{j} \in \mathcal{A}$

I.3.1.4.- DEFINICION

Una clase de conjuntos difusos $\mathcal{A} \subset L(X)$ se dice que es un σ-álgebra de conjuntos difusos, si se verifican las condiciones a) y c) de la definición anterior y además, la siguiente:

$$\text{Si} \left\{ \underset{\sim}{X}^j \right\}_{j=1,\ldots\infty} \in \mathcal{A} \quad \text{entonces} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} \underset{\sim}{X}^j \in \mathcal{A}$$

I.3.1.5.- DEFINICION

Una clase de conjuntos difusos $\mathcal{A} \subset L(X)$ se dice que es una clase monótona de conjuntos difusos si el límite de toda sucesión monótona pertenece a $\mathcal{A}$.

I.3.2.-DEFINICION DE SUCESO DIFUSO . PROBABILIDAD DE UN SUCESO DIFUSO.

Sea (X, Δ, P) un espacio de probabilidad y $\mathcal{B}_{[0\ ,\ 1]}$ el σ-álgebra de Borel en $[0\ ,\ 1]$ .Se considera la clase de conjuntos difusos:

$$\Gamma(X) = \left\{ \underset{\sim}{X}^j \;/\; \underset{\sim}{X}^j \in L(X) \;\; \text{y} \;\; f_X^j \text{ es función medible de } (X, \Delta) \text{ en } \left([0\ ,\ 1],\ \mathcal{B}[0\ ,\ 1] \right) \right\}$$

Es inmediato comprobar que $\Gamma(X)$ es un σ-álgebra de conjuntos difusos.

I.3.2.1.- DEFINICION

Se denomina suceso difuso en X a todo conjunto difuso en X perteneciente a $\Gamma(X)$.

I.3.2.2.- DEFINICION

Se denomina probabilidad del suceso difuso $\underset{\sim}{X}^J$ a la integral de Stieltjes - lebesgue de la función de pertenencia respecto de P , es decir

$$\underset{\sim}{P}\ (\underset{\sim}{X}^J) = \int_X f_X^J(x)\ P(dx) = E_P\left[f_X^J(x)\right]$$

Por ser $f_X^J(x)$ una función medible, induce una distribución de probabilidad P^* en el espacio probabílistico

$$\left([0\ ,\ 1]\ ,\ \mathscr{B}_{[0\ ,\ 1]}\right)$$

podemos aplicar entonces el teorema del cambio de espacio de integración y escribir la expresión anterior de la siguiente forma

$$\underset{\sim}{P}\ (\underset{\sim}{X}^J) = \int_{[0,1]} x\ P^*(dx)$$

Claramente este concepto de probabilidad puede considerarse una generalización del concepto de probabilidad de un suceso clásico, ya que dado el espacio de probabilidad (X , Δ, P) la probabilidad de un suceso A, viene dada por

$$P\ (A) = \int_X \chi_A(x)\ P(dx)$$

donde χ_A es la función característica de A, y como un suceso difuso viene caracterizado por su función de pertenencia, generalización de la función característica, parece coherente definir de esta forma la probabilidad de un suceso difuso.

Veamos a continuación las propiedades de la probabilidad para sucesos difusos.

- La probabilidad del suceso difuso $\underset{\sim}{X}$ es uno.
- Dados los sucesos difusos $\underset{\sim}{X}^j$ y $\underset{\sim}{X}^k$ tales que $\underset{\sim}{X}^j \subset \underset{\sim}{X}^k$, entonces

$$\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j) \leq \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k)$$

- Dado el suceso difuso $\underset{\sim}{X}^j$, se tiene que

$$\underset{\sim}{P}(\overline{\underset{\sim}{X}^j}) = 1-\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j)$$

- La probabilidad del suceso $\underset{\sim}{\Phi}$, es cero
- Dados los sucesos difusos $\underset{\sim}{X}^1,\ldots,\underset{\sim}{X}^n$, se tiene que

$$P(\underset{\sim}{X}^1 \cup \ldots \cup \underset{\sim}{X}^n) = \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^i \cap \underset{\sim}{X}^j) + \ldots + (-1)^n \underset{\sim}{P}(\bigcap_{i=1}^{n} \underset{\sim}{X}^i)$$

- Dada la sucesión monótona de sucesos difusos $\{\underset{\sim}{X}^j\}_{j\in N}$ entonces

$$\underset{\sim}{P}(\limsup_{j\to\infty} \underset{\sim}{X}^j) = \lim_{k\to\infty} \underset{\sim}{P}(\bigcup_{j=k}^{\infty} \underset{\sim}{X}^j)$$

$$\underset{\sim}{P}(\liminf_{j\to\infty} \underset{\sim}{X}^j) = \lim_{k\to\infty} \underset{\sim}{P}(\bigcap_{j=k}^{\infty} \underset{\sim}{X}^k)$$

- Dada la sucesión de sucesos difusos $\{\underset{\sim}{X}^j\}_{j\in N}$ con $\underset{\sim}{X}^* = \limsup \underset{\sim}{X}^j$

entonces si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j) < \infty$$

se tiene que

$$f_{X^*}(x) = 0 \quad \text{casi seguro.}$$

I.3.3.-INDEPENDENCIA DE SUCESOS DIFUSOS. PROBABILIDAD CONDICIONADA

I.3.3.1.- DEFINICION

Sea $n > 1$, y $\underset{\sim}{X}^1, \ldots\ldots, \underset{\sim}{X}^n \in \Gamma(X)$. Se dice que los sucesos difusos $\underset{\sim}{X}^1, \ldots\ldots, \underset{\sim}{X}^n$, son mutuamente independientes si y solo si para todo $i_1, i_2, \ldots, i_m \in \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$, se tiene

$$\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{i_1} \times \ldots\ldots \times \underset{\sim}{X}^{i_m}) = \prod_{j=1}^{m} \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{i_j})$$

A continuación, enunciaremos un teorema que nos da algunas consecuencias interesantes obtenidas a partir de la definición anterior.

I.3.3.2.- TEOREMA (KHalili, 1.979)

a) Para cualquier suceso difuso $\underset{\sim}{X}^j$, se verifica que $\underset{\sim}{X}^j$ y $\underset{\sim}{X}$ son sucesos difusos independientes.

b) Dados los sucesos difusos $\underset{\sim}{X}^j$ y $\underset{\sim}{X}^k$ con $\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k) = 0$, entonces $\underset{\sim}{X}^j$ y $\underset{\sim}{X}^k$ son sucesos difusos independientes.

c) Sean $\underset{\sim}{X}^j$, $\underset{\sim}{X}^i$, $\underset{\sim}{X}^k \in \Gamma(X)$, con $\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k) = 0$, $\underset{\sim}{X}^j$ y $\underset{\sim}{X}^k$ independientes entonces

- . $\underset{\sim}{X}^j \cup \underset{\sim}{X}^k$ y $\underset{\sim}{X}^i$ son independientes
- . $\underset{\sim}{X}^j - \underset{\sim}{X}^k$ y $\underset{\sim}{X}^i$ son independientes.
- . Existen $\underset{\sim}{X}^j$, $\underset{\sim}{X}^i$ y $\underset{\sim}{X}^k$ en $\Gamma(X)$ que son sucesos independientes pero

$$\underset{\sim}{X}^j \cup \underset{\sim}{X}^i \text{ y } \underset{\sim}{X}^k$$

no son independientes

I.3.3.3.- PROBABILIDAD CONDICIONADA

Dados los sucesos difusos $\underset{\sim}{X}^{j}$ y $\underset{\sim}{X}^{k}$, con $\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{k}) > 0$, se denomina probabilidad del suceso difuso $\underset{\sim}{X}^{j}$ condicionado por el suceso difuso $\underset{\sim}{X}^{k}$, a la expresión

$$\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j}/\underset{\sim}{X}^{k}) = \frac{\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j} \times \underset{\sim}{X}^{k})}{\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{k})}$$

Las características y peculiaridades de esta definición pueden verse en Kaufmann (1.977).

Pág.

CAPITULO II

" MEDIDAS DE NITIDEZ PARA CONJUNTOS DIFUSOS Y K-PARTICIONES DIFUSAS "

II.0.- Sumario 22

II.1.- Medidas puntuales y globales de Nitidez para conjuntos difusos 23

II.1.1.- Medida puntual de Nitidez o Autonitidez 23

II.1.2.- Medida global de Nitidez 25

II.1.3.- Teoremas de construcción de Medidas globales de Nitidez para conjuntos difusos 27

II.1.4.- Estudio de la Medida de Nitidez obtenida a partir del funcional de Onicescu.............. 32

II.1.5.- Teorema de caracterización de Medidas globales de Nitidez 39

II.2.- Medidas de Nitidez para k-particiones difusas 60

II.2.1.- Concepto de k-partición difusa 60

II.2.2.- Definición de Medida de Nitidez para una k-partición difusa.Ejemplo 62

II.0 .- SUMARIO

En este capítulo, realizamos el estudio de Medidas de Nitidez para conjuntos difusos y k-particiones difusas, considerando que el conjunto sobre el que están definidos es un conjunto finito.

Comenzamos nuestro estudio con la definición de medida puntual de Nitidez o de Autonitidez puntual, basándonos en este concepto, damos la definición de Medida de Nitidez para un conjunto difuso, concepto que como ya dijimos en la introducción cuantifica la precisión o nitidez, en definitiva, la inexistencia de difusidad. A continuación damos dos teoremas de construcción de Medidas de Nitidez, resultando como corolario de uno de estos teoremas la Medida de Nitidez N_0 , obtenida al considerar como medida de Autonitidez puntual el funcional de ONICESCU, de la que hacemos un detallado estudio, ya que ha sido el punto de partida en nuestro trabajo. Posteriormente damos un teorema de caracterización de las Medidas de Nitidez, inspirado en algunos resultados de C. SANCHIS (1.977) en el estudio de Entropías Difusas, para aquellas que sean valoraciones en la clase de los conjuntos difusos.

Finalmente, hacemos un breve estudio de las Medidas de Nitidez para k-particiones difusas, centrándonos en el estudio de la Medida de Nitidez para k-particiones difusas obtenida a partir del funcional de ONICESCU . Esta medida ha sido aplicada con éxito por BEZDEK (1.974) y DUNN (1.977) en el análisis de conglomerados.

II.1.- MEDIDAS PUNTUALES Y GLOBALES DE NITIDEZ PARA CONJUNTOS DIFUSOS

Al realizar el estudio de las medidas de Nitidez para conjuntos difusos nos restringiremos al caso en que X es un conjunto finito, denotándose en este caso la clase de los conjuntos difusos en X por $L_n(X)$. Comenzaremos dando la definición de Autonitidez para posteriormente pasar a la de medida global.

II.1.1.- MEDIDA PUNTUAL DE NITIDEZ O AUTONITIDEZ

En lo que sigue denotaremos por $L(x_k)$, al conjunto

$$L(x_k)=\left\{ f^J_{X/\{x_k\}} \Big/ \ f^J_{X/\{x_k\}} : x_k \longrightarrow [0\ ,\ 1] \quad , \quad f^J_X \in L_n(X) \right\}$$

Se llama Medida puntual de Nitidez para el elemento x_k, o Autonitidez de x_k respecto al conjunto difuso $\underline{X}^J$, a toda función

$$m_k : L(x_k) \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

$$f^J_{X/\{x_k\}} \longrightarrow m_k\ (f^J_{X/\{x_k\}})$$

por facilidad de notación escribiremos

$$m_k\ (f^J_{X/\{x_k\}}) = m_k(f^J_X(x_k))$$

que verifique:

II.1.1.1.- $m_k\ (f^J_X(x_k)) = 1$ si y solo si $f^J_X(x_k) = 0$ ó 1

II.1.1.2.- El único valor donde $m_k\ (f^J_X(x_k))$ alcanza un mínimo es $f^J_X(x_k) = 1/2$.

II.1.1.3 .- m_k es continua respecto de la métrica definida en $L(x_k)$, por

$$d\left(f_X^j(x_k) \,,\, f_X^r(x_k) \right) = \left| f_X^j(x_k) - f_X^r(x_k) \right|$$

II.1.1.4 .- Si

$$1 \geq f_X^j(x_k) \geq f_X^i(x_k) \geq 1/2 \qquad \text{para} \quad 1/2 \leq f_X^i(x_k) \leq 1$$

$$0 \leq f_X^j(x_k) \leq f_X^i(x_k) \leq 1/2 \qquad \text{para} \quad 0 \leq f_X^i(x_k) \leq 1/2$$

Entonces

$$m_k\left(f_X^j(x_k) \right) \geq m_k\left(f_X^i(x_k) \right)$$

En definitiva, una medida puntual de Nitidez para el elemento x_k es un número $m_k\left(f_X^j(x_k) \right)$, donde m_k verifica las propiedades II.1.1.1 , II.1.1.2 , II.1.1.3 y II.1.1.4.

Es fácil dar una interpretación intuitiva a las cuatro características anteriores. En efecto,

II.1.1.1.- Exige a toda medida puntual de Nitidez que tome el valor máximo cuando no existe difusidad, es decir, cuando la función de pertenencia o compatibilidad toma los valores cero ó uno.

II.1.1.2.- Si una medida puntual de Nitidez toma el valor máximo cuando la función de pertenencia toma los valores cero o uno, intuitivamente, es obvio que el mínimo lo alcance en un punto que se encuentre equidistante de esos dos, es decir 1/2.

II.1.1.3.- Exige la continuidad para imponer que a pequeñas variaciones de la función de compatibilidad para el valor $x_k \in X$, la medida puntual tenga a su vez pequeñas oscilaciones.

II.1.1.4.- Dado un elemento $x_k \in X$ y dos conjuntos difusos definidos en X, el elemento x_k tendrá una medida de Nitidez mayor para aquel conjunto difuso cuya función de pertenencia o compatibilidad para x_k esté menos próxima al valor 1/2.

II.1.2.- MEDIDA GLOBAL DE NITIDEZ

En lo que sigue notaremos cada conjunto difuso f_X^J de $L_n(X)$ de la forma

$$(f_X^J(x_1), \ldots\ldots, f_X^J(x_n)).$$

Denominaremos Medida global de Nitidez, a toda función

$$N : L_n(X) \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

$$f_X^J = (f_X^J(x_1), \ldots, f_X^J(x_n)) \longrightarrow N\ (f_X^J(x_1), \ldots, f_X^J(x_k)\ ) = N(\underset{\sim}{X}^J)$$

que verifique:

II.1.2.1.-

$$N\ (f_X^J(x_1), \ldots, f_X^J(x_n)) = 1 \text{ si y solo si } f_X^J(x_i) = 0 \text{ ó } 1.\ \forall\ x_i \in X.$$

Esta característica exige a la Medida de Nitidez N, tomar el máximo valor cuando el conjunto, al que estamos midiendo su nitidez, es no difuso.

II.1.2.2.- El único valor donde el funcional N alcanza un mínimo es

$$f_X^J(x_i) = 1/2 \quad \forall\ x_i \in X$$

Si la máxima nitidez se alcanza, cuando la función de pertenencia toma los valores 0 ó 1, parece lógico exigir a toda Medida de Nitidez que se minimice cuando todos los valores de la función de pertenencia sean equidistantes de 0 ó 1, es decir, cuando la función de pertenencia tome únicamente el valor 1/2.

II.1.2.3.- El funcional N es continuo en $L_n(X)$ respecto a la métrica

$$\varrho(f_X^j , f_X^i) = \sup_{x_k \in X} \left| f_X^j(x_k) - f_X^i(x_k) \right|$$

Mediante esta característica , se trata de imponer a toda Medida de Nitidez que tenga pequeñas oscilaciones, al realizar pequeñas variaciones en lAs funciones de pertenencia de dos conjuntos difusos.

II.1.2.4.- Si

$$f_X^j \equiv (f_X^j(x_1),\dots\dots,f_X^j(x_n))$$

es menos difuso que

$$f_X^i \equiv (f_X^i(x_1),\dots\dots,f_X^i(x_n))$$

entonces

$$N(\underset{\sim}{X}^j) \geq N(\underset{\sim}{X}^i)$$

Recordemos que según la notación utilizada en I.1.3. esto quedaría expresado por:

Si $f_X^j \leqslant f_X^i$, entonces $N(f_X^j) \geq N(f_X^i)$

Finalmente , esta característica impone a una Medida de Nitidez que dados dos conjuntos difusos el de mayor nitidez sea el de menor difusidad.

A partir de estas características, son muchas las medidas que se pueden construir para cuantificar la nitidez de un conjunto difuso. Esto no debe extrañarnos ya que en la TEORIA DE LA INFORMACION existen muchos funcionales de Entropía e Información, si bien, en cada problema concreto unos serán más adecuados que otros.

En lo sucesivo denotaremos por $N[X]$ al conjunto de todas las Medidas de Nitidez definidas sobre $L_n(X)$.

II.1.3.- TEOREMAS DE CONSTRUCCION DE MEDIDAS GLOBALES DE NITIDEZ PARA CONJUNTOS DIFUSOS

Vamos a dar dos teoremas que nos servirán para construir nuevas Medidas de Nitidez a partir de unas dadas y un tercer teorema que nos servirá para caracterizar las Medidas de Nitidez que sean valoraciones en el retículo $L_n(X)$.

II.1.3.1.- TEOREMA

Sea $g : [0 , 1]^n \longrightarrow [0 , 1]$ una función continua y estrictamente creciente en todas sus componentes, verificando $g(x_1,\ldots,x_n) = 1$ si y solo si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$. Sean $N_1,\ldots,N_n$ Medidas de Nitidez de $N[X]$, entonces

$$N^* (f_X^j(x_1),\ldots,f_X^j(x_n)) = g (N_1(f_X^j),\ldots,N_n(f_X^j))$$

es una Medida de Nitidez para conjuntos difusos.

Demostración :

Veamos que N^* verifica las cuatro condiciones impuestas a toda Medida de Nitidez.

II.1.2.1.- Si $N^*(f_X^J(x_1),\ldots\ldots,f_X^J(x_n)) = 1$

entonces

$$g(N_1(f_X^J),\ldots\ldots,N_n(f_X^J)) = 1$$

es decir

$$N_r(f_X^J) = 1 \qquad \forall r \quad 1\le r\le n$$

y por lo tanto al ser N_r una Medida de Nitidez , se tiene que

$$f_X^J(x_k) = 1 \text{ ó } 0 \qquad \forall \ x_k \in X$$

Trivialmente se verifica que si $f_X^J(x_k) = 1$ ó 0, entonces

$$N^*(f_X^J(x_1),\ldots\ldots,f_X^J(x_n)) = 1.$$

II.1.2.2.- Al ser N_r , $1\le r\le n$ una medida de Nitidez se tiene que

$$\forall \ r= 1,\ldots,n \quad N_r(f_X^J) > N_r(f_X^* = 1/2) \qquad \forall \ (f_X^J(x_1),\ldots,f_X^J(x_n))$$

y al ser g una función estrictamente creciente en todas sus componentes, se tiene

$$\forall \ (f_X^J(x_1),\ldots,f_X^J(x_n)) \qquad N^*(f_X^J(x_1),\ldots,f_X^J(x_n)) > N^*(f_X^*(x_1)=½,\ldots,f_X^*(x_n)=½)$$

II.1.2.3.- La continuidad de N^* , es inmediata por la continuidad de g .

II.1.2.4.- Si

$$f_X^J \leq f_X^k$$

entonces

$$N^* (f_X^J) = g (N_1(f_X^J),\ldots\ldots,N_n(f_X^J)) \geq$$

$$\geq g (N_1(f_X^k),\ldots\ldots,N_n(f_X^k)) = N^* (f_X^k)$$

ya que g es estrictamente creciente en todas sus componentes y

$$N_r(f_X^J) \geq N_r(f_X^k) \qquad \forall\ r = 1,\ldots\ldots,n$$

II.1.3.2.- TEOREMA

Dadas las Medidas de Autonitidez $m_k(f_X^J(x_k))$, $k = 1,..,n$, entonces el funcional

$$N (f_X^J(x_1),\ldots\ldots,f_X^J(x_n)) = H\left(\sum_1^n \frac{m_k(f_X^J(x_k))}{n}\right)$$

donde H es una función continua y estrictamente creciente de $[0\ ,\ 1]$ en $[0\ ,\ 1]$ con $H(1) = 1$, es una Medida de Nitidez.

Demostración:

Veamos que el funcional N verifica las cuatro propiedades requeridas a una Medida de Nitidez.

II.1.2.1.- Si $N\left(f_X^J(x_1),\ldots,f_X^J(x_n)\right) = 1$,

entonces

$$H\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k(f_X^J(x_k))}{n}\right) = 1$$

es decir

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(f_X^J(x_k)) = n$$

de donde

$$m_k(f_X^J(x_k)) = 1$$

y al ser m_k una medida puntual de Nitidez

$$f_X^J(x_k) = 1 \text{ ó } 0$$

II.1.2.2.- Al ser m_k una medida puntual de Nitidez

$$\forall \quad f_X^J \in L_n(X) \qquad m_k(f_X^J(x_k)) > m_k(f_X^*(x_k) = ½)$$

por lo tanto

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k(f_X^J(x_k)) > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k(f_X^*(x_k) = ½)$$

de donde

$$H\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k(f_X^J(x_k))\right) > H\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k(f_X^*(x_k) = ½)\right)$$

es decir

$$N\,(\,f_X^j(x_1),\ldots\ldots,f_X^j(x_n)\,)\;>\;N\;(f_X^*(x_1)=\tfrac{1}{2},\ldots\ldots,f_X^*(x_n)=\tfrac{1}{2}\,)$$

II.1.2.3.- La continuidad de N está asegurada por la continuidad de H.

II.1.2.3.- Si

$$f_X^j \preccurlyeq f_X^i$$

por la definición del orden $\preccurlyeq$ y por las propiedades de m_k, se tiene

$$\forall\; x_k \qquad m_k(f_X^j(x_k)) \geq m_k(f_X^i\,(x_k))$$

por lo tanto

$$N(f_X^j) \geq N(f_X^i)$$

<u>COROLARIO 1.-</u>

Si elegimos como medida puntual la obtenida a partir del funcional de ONICESCU

$$m_k(f_X^j(x_k) = (\,f_X^j(x_k)\,)^2 + (\,1-f_X^j(x_k)\,)^2 \qquad \forall\; x_k$$

y H la función de $[0\,,\,1]$ en $[0\,,\,1]$ definida por

$$H(\,x\,) = x$$

se tiene:

$$N_o(f_X^J) = H\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} m_k(f_X^J(x_k))\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k(f_X^J(x_k)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{(f_X^J(x_k))^2 + (1-f_X^J(x_k))^2\right\}$$

El estudio de este funcional así como su aplicación en diversos contextos ocupará una gran parte de esta memoria.

COROLARIO 2.-

Si elegimos como medida puntual

$$m_k(f_X^J(x_k)) = 1-((f_X^J(x_k))(1-f_X^J(x_k))) \qquad \forall x_k$$

y H la función de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ definida por $H(x) = x$

se tiene la Medida de Nitidez notada por N_1, que toma la expresión

$$N_1(f_X^J) = H\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(m_k(f_X^J(x_k)))\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-((f_X^J(x_k)))(1-f_X^J(x_k)))) =$$

$$= 1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_X^J(x_k)(1-f_X^J(x_k))$$

II.1.4.- ESTUDIO DE LA MEDIDA DE NITIDEZ OBTENIDA A PARTIR DEL FUNCIONAL DE ONICESCU

En este apartado dado la especial significación de la medida N_o, dado que ha sido el punto de partida de nuestra Teoría de Medidas de Nitidez, como lo fue para DE Luca and Termini (1.972; 1.974; 1.977 A ; 1.979) , Trillas (1.978 A) , KNOpfmacher (1.975), la obtenida a partir del funcional de SHANNON en el estudio de las Entropías para conjuntos difusos, analizaremos sus propiedades.

Una de las propiedades que analizaremos de la medida N_o será la expresión que toma la función de pertenencia de un conjunto difuso cuando se pretende minimizar la nitidez sujeta a alguna restricción , en concreto , analizaremos cuando se fija la potencia o cardinal del conjunto difuso . Por ello comenzaremos definiendo lo que se entiende por cardinal o potencia de un conjunto difuso.

DEFINICION (De Luca and Termini 1.972)

Se denomina potencia o cardinal del conjunto difuso $\underset{\sim}{X}^j$ al número real definido por

$$c(\underset{\sim}{X}^j) = \sum_{k=1}^{n} f_X^j(x_k)$$

En el caso en que $f_X^j(x_k)$ tome solamente los valores cero o uno $f_x^j(x_k)$ será la función característica de un conjunto no difuso y $c(\underset{\sim}{X}^j)$ será el cardinal de ese conjunto.

Veamos a continuación las propiedades más relevantes de la medida N_o :

II.1.4.1.- La medida N_o es simétrica , es decir

$$N_o(\underset{\sim}{X}^j) = N_o(\bar{\underset{\sim}{X}}^j)$$

la demostración es inmediata.

II.1.4.2.- La medida N_o es una valoración en el retículo $L_n(X)$, es decir:

$$N_o(\underset{\sim}{X}^j) + N_o(\underset{\sim}{X}^r) = N_o(\underset{\sim}{X}^j \cup \underset{\sim}{X}^r) + N_o(\underset{\sim}{X}^j \cap \underset{\sim}{X}^r) \quad \forall\, \underset{\sim}{X}^j, \underset{\sim}{X}^r \in L_n(X)$$

En efecto,

Si escribimos

$$N_o(\underset{\sim}{X}^J) = N_o^1(\underset{\sim}{X}^J) + N_o^1(\underset{\sim}{\bar{X}}^J)$$

donde

$$N_o^1(\underset{\sim}{X}^J) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (f_X^J(x_k))^2$$

se tiene

$$N_o^1(\underset{\sim}{X}^J \cup \underset{\sim}{X}^r) + N_o^1(\underset{\sim}{X}^J \cap \underset{\sim}{X}^r) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\{ (\max_k \left\{ f_X^J(x_k),\ f_X^r(x_k) \right\})^2 + (\min_k \left\{ f_X^J(x_k),\ f_X^r(x_k) \right\})^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\{ (\frac{1}{2} \left[f_X^J(x_k) + f_X^r(x_k) + \left| f_X^J(x_k) - f_X^r(x_k) \right| \right])^2 + \right.$$

$$\left. + (\frac{1}{2} \left[f_X^J(x_k) + f_X^r(x_k) - \left| f_X^J(x_k) - f_X^r(x_k) \right| \right])^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n} \left\{ (f_X^J(x_k) + f_X^r(x_k))^2 + (f_X^J(x_k) - f_X^r(x_k))^2 + \right.$$

$$+ 2 (f_X^J(x_k) - f_X^r(x_k)) \left| f_X^J(x_k) - f_X^r(x_k) \right| + (f_X^J(x_k) + f_X^r(x_k))^2 +$$

$$\left. + (f_X^J(x_k) - f_X^r(x_k))^2 - 2 (f_X^J(x_k) + f_X^r(x_k)) \left| f_X^J(x_k) - f_X^r(x_k) \right| \right\} =$$

$$= \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n} \left\{ 4 (f_X^J(x_k))^2 - 4 (f_X^r(x_k))^2 \right\} =$$

$$= N_o^1(\underset{\sim}{X}^J) + N_o^1(\underset{\sim}{X}^r).$$

ahora bien

$$N_o(\underset{\sim}{X}^J) + N_o(\underset{\sim}{X}^r) = N_o^1(\underset{\sim}{X}^J) + N_o^1(\bar{\underset{\sim}{X}}^J) + N_o^1(\underset{\sim}{X}^r) + N_o^1(\bar{\underset{\sim}{X}}^r) =$$

$$=(N_o^1(\underset{\sim}{X}^J) + N_o^1(\underset{\sim}{X}^r)) + (N_o^1(\bar{\underset{\sim}{X}}^J) + N_o^1(\bar{\underset{\sim}{X}}^r)) =$$

$$=N_o^1(\underset{\sim}{X}^J \cup \underset{\sim}{X}^r) + N_o^1(\underset{\sim}{X}^J \cap \underset{\sim}{X}^r) + N_o^1(\bar{\underset{\sim}{X}}^J \cup \bar{\underset{\sim}{X}}^r) + N_o^1(\bar{\underset{\sim}{X}}^J \cap \bar{\underset{\sim}{X}}^r) =$$

$$=N_o^1(\underset{\sim}{X}^J \cup \underset{\sim}{X}^r) + N_o^1(\overline{\underset{\sim}{X}^J \cap \underset{\sim}{X}^r}) + N_o^1(\underset{\sim}{X}^J \cap \underset{\sim}{X}^r) + N_o^1(\overline{\underset{\sim}{X}^J \cup \underset{\sim}{X}^r}) =$$

$$=N_o(\underset{\sim}{X}^J \cup \underset{\sim}{X}^r) + N_o(\underset{\sim}{X}^J \cap \underset{\sim}{X}^r).$$

II.1.4.3.- Para cualquier conjunto difuso $\underset{\sim}{X}^J$ se verifica

$$N_o(\underset{\sim}{X}^J \cap \bar{\underset{\sim}{X}}^J) = N_o(\underset{\sim}{X}^J \cup \bar{\underset{\sim}{X}}^J) = N_o(\bar{\underset{\sim}{X}}^J).$$

En efecto,

aplicando la propiedad anterior, se tiene

$$N_o(\underset{\sim}{X}^J) + N_o(\underset{\sim}{X}^r) = N_o(\underset{\sim}{X}^J \cup \underset{\sim}{X}^r) + N_o(\underset{\sim}{X}^J \cap \underset{\sim}{X}^r)$$

si tomamos en particular $\underset{\sim}{X}^r$ igual a $\bar{\underset{\sim}{X}}^J$, obtenemos

$$N_o(\underset{\sim}{X}^J) + N_o(\bar{\underset{\sim}{X}}^J) = N_o(\underset{\sim}{X}^J \cup \bar{\underset{\sim}{X}}^J) + N_o(\underset{\sim}{X}^J \cap \bar{\underset{\sim}{X}}^J)$$

y aplicando la propiedad II.1.4.1., se tiene

$$N_o(\underset{\sim}{X}^J) + N_o(\bar{\underset{\sim}{X}}^J) = 2N_o(\bar{\underset{\sim}{X}}^J)$$

$$N_o(\underset{\sim}{X}^j \cup \bar{\underset{\sim}{X}}^j) = N_o(\overline{\underset{\sim}{X}^j \cup \bar{\underset{\sim}{X}}^j}) = N_o(\bar{\underset{\sim}{X}}^j \cap \underset{\sim}{X}^j) = N_o(\underset{\sim}{X}^j \cap \bar{\underset{\sim}{X}}^j)$$

y además

$$N_o(\bar{\underset{\sim}{X}}^j) = N_o(\underset{\sim}{X}^j \cap \bar{\underset{\sim}{X}}^j)$$

II.1.4.4.- El funcional N_o^1 está acotado en $L_n(X)$ por la potencia o cardinal difuso, N_o es siempre menor o igual que uno.

En efecto,

$$N_o^1(\underset{\sim}{X}^j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f_X^j(x_k))^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_X^j(x_k) = \frac{c(\underset{\sim}{X}^j)}{n}$$

analogamente

$$N_o^1(\bar{\underset{\sim}{X}}^j) \leq \frac{c(\bar{\underset{\sim}{X}}^j)}{n}$$

de donde

$$N_o(\underset{\sim}{X}^j) = N_o^1(\underset{\sim}{X}^j) + N_o^1(\bar{\underset{\sim}{X}}^j) \leq \frac{c(\underset{\sim}{X}^j)}{n} + \frac{c(\bar{\underset{\sim}{X}}^j)}{n} \leq 1$$

II.1.4.5.- La Medida de Nitidez N_o del conjunto difuso $\underset{\sim}{X}^j$, está acotada inferiormente por la expresión

$$\left(\frac{c(\underset{\sim}{X}^j)}{n}\right)^2 + \left(1-\frac{c(\underset{\sim}{X}^j)}{n}\right)^2$$

En efecto,

al ser $S(x) = x^2 + (1-x)^2$ una función convexa, se tiene

$$S\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} f_X^j(x_k)}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S(f_X^j(x_k))$$

es decir

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{(f_X^J(x_k))^2 + (1- f_X^J(x_k))^2\right\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f^J}{n}(x_k)\right)^2 + \left(1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f_X^J(x_k)\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\,C(\underset{\sim}{X}^j)\right)^2 + \left(1-\frac{1}{n}\,C(\underset{\sim}{X}^j)\right)^2$$

II.1.4.6.- El mínimo de nitidez conservando una potencia dada para un conjunto difuso $\underset{\sim}{X}^J$, se alcanza cuando la función de pertenencia toma el valor

$$\frac{C(\underset{\sim}{X}^J)}{n} \qquad \forall\ x_k \in X$$

En efecto,

Utilizando los multiplicadores de Lagrange, el problema consistirá en minimizar la función $N_o(\underset{\sim}{X}^J)$, sujeta a la restricción

$$\sum_{k=1}^{n} f_X^J(x_k) = C(\underset{\sim}{X}^J)$$

es decir, encontrar los extremos de la función

$$\phi(\underset{\sim}{X}^J) = \sum_{k=1}^{n}\left\{(f_X^J(x_k))^2 + (1- f_X^J(x_k))^2\right\} + \lambda\left(\sum_{k=1}^{n}f_X^J(x_k) - C(\underset{\sim}{X}^J)\right)$$

derivando se obtiene

$$\frac{\delta\phi(\underset{\sim}{X}^J)}{\delta f_X^J(x_k)} = 2\,(f_X^J(x_k)) - 2(1- f_X^J(x_k)) + \lambda\, f_X^J(x_k) = 0$$

$$\frac{\delta\phi(\underset{\sim}{X}^J)}{\delta\lambda} = \sum_{k=1}^{n} f_X^J(x_k) - C(f_X^J) = 0$$

luego

$$4\, f_X^J(x_k) - 2 + \lambda f_X^J(x_k) = 0$$

$$f_X^J(x_k)\ (4 + \lambda) = 2$$

de donde

$$f_X^J(x_k) = \frac{2}{4+\lambda}$$

y teniendo en cuenta la restricción que teníamos

$$\sum_{k=1}^{n} f_X^J(x_k) = \frac{2n}{4+\lambda}$$

de donde

$$4 + \lambda = \frac{2n}{\sum_{k=1}^{n} f_X^J(x_k)}$$

y teniendo en cuenta que

$$f_X^J(x_k) = \frac{2}{4+\lambda}$$

se obtiene

$$f_X^J(x_k) = \frac{\sum_{k=1}^{n} f_X^J(x_k)}{n} = \frac{C(\underset{\sim}{X}^k)}{n}$$

siendo inmediato comprobar mediante la sucesión de hessianos que es ur mí
nimo.

II.1.5.- TEOREMA DE CARACTERIZACION DE MEDIDAS GLOBALES DE NITIDEZ

Antes de ver un teorema que caracteriza a aquellas Medidas de Nitidez que son valoraciones en el retículo $L_n(X)$, veamos un Lema necesario en su demostración.

LEMA

La condición necesaria y suficiente para que N sea una valoracion en $L_n(X)$ es que se cumpla

$$N\,(f^J_X(x_1),\ldots,f^J_X(x_p),\ldots,f^J_X(x_n)) = N\,(f^J_X(x_1),\ldots,f^J_X(x_p),0,\ldots,0)+$$

$$\text{II.1.5.1.1.} \qquad + N(0,\ldots,0,\ f^J_X(x_{p+1}),\ldots,f^J_X(x_k)\ ) - 1 \quad \forall\, p\ \ 1\le p\le n$$

Demostración:

Veamos que si N es una valoración entonces se verifica II.1.5.1.1. Consideremos los dos conjuntos difusos siguientes:

$$\underset{\sim}{X}^1 = (\ f^J_X(x_1),\ldots,f^J_X(x_p),0,\ldots,0\ ) \qquad \underset{\sim}{X}^2 = (\ 0,\ldots,0,f^J_X(x_{p+1}),\ldots,f^J_X(x_n)\ )$$

entonces

$$N\,(\underset{\sim}{X}^1 \cup \underset{\sim}{X}^2) = N(f^J_X(x_1),\ldots,f^J_X(x_p),f^J_X(x_{p+1}),\ldots,f^J_X(x_n))$$

y

$$N\,(\underset{\sim}{X}^1 \cap \underset{\sim}{X}^2) = N(0,\ldots,0\ ) = 1.$$

Al ser N una valoración, se tiene,

$$N\ (f^j_X(x_1),\dots,f^j_X(x_p),f^j_X(x_{p+1}),\dots,f^j_X(x_n)\ ) = N\ (\underset{\sim}{X}^1 \cup \underset{\sim}{X}^2) = N\ (\underset{\sim}{X}^1) + N(\underset{\sim}{X}^2) - N(\underset{\sim}{X}^1 \cap \underset{\sim}{X}^2) =$$

$$= N\ (f^j_X(x_1),\dots,f^j_X(x_p),0,\dots,0) + N\ (0,\dots,0,f^j_X(x_{p+1}),\dots,f^j_X(x_n)\ ) - 1$$

Veamos que si N verifica II.1.5.1.1., entonces es una valoración en $L_n(X)$.

Sean

$$\underset{\sim}{X}^j = (\ f^j_X(x_1),\dots,f^j_X(x_p),\dots,f^j_X(x_n)\ ) \quad \underset{\sim}{X}^i = (\ f^i_X(x_1),\dots,f^i_X(x_p),\dots f^i_X(x_n)\ )$$

dos conjuntos difusos y sin pérdida de generalidad consideremos

$$f^j_X(x_k) \leq f^i_X(x_k) \qquad \forall\ K = 1,\dots,p$$

$$f^i_X(x_k) \leq f^j_X(x_k) \qquad \forall\ K = p+1,\dots,n$$

con lo cual se tiene, al ser

$$\underset{\sim}{X}^j \cup \underset{\sim}{X}^i = (\ f^i_X(x_1),\dots,f^i_X(x_p),f^j_X(x_{p+1}),\dots,f^j_X(x_n)\ )$$

$$\underset{\sim}{X}^j \cap \underset{\sim}{X}^i = (\ f^j_X(x_1),\dots,f^j_X(x_p),f^i_X(x_{p+1}),\dots,f^i_X(x_n)\ )$$

que

$$N\ (\underset{\sim}{X}^j \cup \underset{\sim}{X}^i) + N\ (\underset{\sim}{X}^j \cap \underset{\sim}{X}^i) = N\ (f^i_X(x_1),\dots,f^i_X(x_p),f^j_X(x_{p+1}),\dots,f^j_X(x_n)\ ) +$$

$$+ N\ (f^j_X(x_1),\dots,f^j_X(x_p),f^i_X(x_{p+1}),\dots,f^i_X(x_n)\ ) =$$

$$N\,(f_X^i(x_1),\ldots,f_X^i(x_p),0,\ldots,0\,) + N\,(0,\ldots,0,f_X^j(x_{p+1}),\ldots,f_X^j(x_n)\,) - 1\ +$$

$$+\ N\,(f_X^j(x_1),\ldots,f_X^j(x_p),0,\ldots,0) + N\,(0,\ldots,0,f_X^i(x_{p+1}),\ldots,f_X^i(x_n)\,) - 1 =$$

$$N\,(f_X^i(x_1),\ldots,f_X^i(x_p),f_X^i(x_{p+1}),\ldots,f_X^i(x_n)\,) + N\,(f_X^j(x_1),\ldots,f_X^j(x_p),0,\ldots,0\,) +$$

$$N\,(0,\ldots,0,f_X^j(x_{p-1}),\ldots,f_X^j(x_n)\,) - 1 = N\,(\underset{\sim}{X}^j) + N\,(\underset{\sim}{X}^i).$$

TEOREMA

La condición necesaria y suficiente para que N sea una Medida de Nitidez de valoración es que

$$N\,(f_X^j(x_1),\ldots,f_X^j(x_n)\,)$$

se pueda expresar como

$$N\,(f_X^j(x_1),\ldots,f_X^j(x_n)\,) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k(f_X^j(x_k)\,)$$

donde las m_k son medidas puntuales de Nitidez para x_k, $k=1,\ldots,n$

Demostración:

Lo demostraremos por inducción sobre n. Veamos que es cierto para n = 2.

Veamos que si N es una Medida de Nitidez de valoración, entonces

$$N\,(f_X^j(x_1)\ ,\ f_X^j(x_2)\,) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m_i(\ f_X^j(x_i))$$

Definimos :

$$m_1 : L(x_1) \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

$$f_X^J(x_1) \longrightarrow m_1(f_X^J(x_1)\ ) = 2\ N\ (f_X^J(x_1),0) - (\ 2 - 1\ )$$

$$m_2 : L(x_2) \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

$$f_X^J(x_2) \longrightarrow m_2(f_X^J(x_2)\ ) = 2\ N\ (0\ ,f_X^J(x_2) - (\ 2 - 1\ )$$

Por ser N una valoración se cumplirá

$$N\ (f_X^J(x_1),f_X^J(x_2)\ ) = N\ (f_X^J(x_1),0) + N\ (0,f_X^J(x_2)\ ) - 1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ m_1(f_X^J(x_1)) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ m_2(f_X^J(x_2) - 1 =$$

$$\frac{1}{2}\ \sum_{i=1}^{2} m_i(f_X^J(x_i)).$$

Nos quedará por ver que efectivamente las m_i son medidas puntuales de Nitidez.

II.1.1.1.- Si $m_1(f_X^J(x_1)) = 1$

entonces

$$2\ N\ (f_X^J(x_1),0) - 1 = 1$$

de donde

$$N\ (f_X^J(x_1),\ 0\ ) = 1$$

es decir $f_X^J(x_1) = 0$ ó 1.

Es trivial que si $f^J_X(x_k) = 0$ ó 1. $\forall\ x_k$, entonces $m_1(f^J_X(x_1)) = 1$.

Análogamente se demostraría para m_2.

II.1.1.2.- Vamos a demostrar que m_1 y m_2, alcanzan un mínimo únicamente en $f^*_X(x_i) = 1/2$ $i = 1,2$. Para ello probaremos primero la existencia y después la unicidad.

$$\forall\ f^J_X(x_1), \quad (f^J_X(x_1),0) \lessgtr (f^*_X(x_1),0)$$

luego

$$N\ (f^J_X(x_1),0) \geq N\ (f^*_X(x_1)=½,0)$$

y por tanto

$$m_1(f^J_X(x_1)) = 2\ N(f^J_X(x_1),0) - 1 \geq 2\ N\ (f^*_X(x_1) = ½,0) - 1 = m_2(f^*_X(x_1)=½)$$

con lo cual queda probada la existencia de un mínimo en $f^*_X(x_1) = ½$ para m_1. Análogamente, se demostraría para m_2.

Veamos, conjuntamente, la unicidad del mínimo en $f^*_X(x_i)=½$ $i = 1,2$, para m_1 y m_2.

Supongamos que m_1 alcanzase un mínimo en $f^J_X(x_1) = t_1$ y m_2 en $f^J_X(x_2) = t_2$, entonces

$$m_1(f^J_X(x_1) = t_1) = m_1(f^*_X(x_1) = ½)$$

y

$$m_2(f_X^J(x_2)=t_2) = m_2(f_x^*(x_2) = ½)$$

Ahora bien

$$N\ (f_X^*(x_1)= ½\ \ f_X^*(x_2)= ½\ ) = \frac{1}{2}\ m_1(f_X^*(x_1)= ½\ ) + \frac{1}{2}\ m_2(f_X^*(x_2) = ½\ ) =$$

$$= \frac{1}{2}\ m_1(f_X^J(x_1)=t_1) + \frac{1}{2}\ m_2(f_X^J(x_2) =t_2) =$$

$$= N\ (f_X^J(x_1)= t_1\ ,\ f_X^J(x_2) =t_2).$$

se llega pues a una contradicción , ya que el único mínimo de N se alcanza, por hipótesis, en $(f_X^*(x_1) = ½, f_X^*(x_2) = ½\ )$.

II.1.1.3.- La continuidad de m_1 y m_2 está asegurada por la continuidad de N.

II.1.1.4.- Veamos que si

$$1 \geq f_X^J(x_1) \geq f_X^i(x_1) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{para } \frac{1}{2} \leq f_X^i(x_1) \leq 1$$

$$0 \leq f_X^J(x_1) \leq f_X^i(x_1) \leq \frac{1}{2} \qquad \text{para } 0 \leq f_X^i(x_1) \leq \frac{1}{2}$$

entonces

$$m_1(f_X^J(x_1)\ ) \geq m_1(f_X^i(x_1)\ ).$$

Si se verifican las dos condiciones anteriores, también se verifica

$$(f_X^j(x_1)\ ,\ 0) \lesssim (f_X^i\ (x_1)\ ,\ 0\ )$$

por lo tanto

$$N\ (f_X^j(x_1),\ 0\ ) \geq N\ (f_X^i(x_1),\ 0\ )$$

y en consecuencia

$$m_1(f_X^j(x_1)\ ) \geq m_1(f_X^i(x_1)).$$

Análogamente se demostraría para m_2.

Veamos ahora que si

$$N\ (f_X^j(x_1)\ ,\ f_X^j(x_2)\ ) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m_i(f_X^j(x_i)\ )$$

donde las m_i son medidas puntuales de Nitidez para x_i , $i = 1,2.$
entonces

$$N\ (f_X^j(x_1)\ ,\ f_X^j(x_2)\ )$$

es una Medida de Nitidez de valoración.

Veamos primeramente que $N\ (f_X^j(x_1)\ ,\ f_X^j(x_2)\ )$ es una Medida de Nitidez.

II.1.2.1.- Si $N\ (f_X^j(x_1),\ f_X^j(x_2)\ ) = 1$, entonces $f_X^j(x_i) = 0$ ó 1 $i= 1,2$.

En efecto , por definición

$$N\ (f_X^j(x_1)\ ,\ f_X^j(x_2)\ ) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m_i(f_X^j(x_i))$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{2} m_i(f_X^J(x_i)) = 2$$

y

$$m_i(f_X^J(x_i)) = 1 \ , \ i = 1, 2.$$

por lo tanto

$$f_X^J(x_i) = 0 \text{ ó } 1 \ , \ i = 1, 2.$$

II.1.2.2.- Veamos que N alcanza un mínimo únicamente en $(\frac{1}{2} , \frac{1}{2})$

$$N\ (f_X^*(x_1) = ½\ f_X^*(x_2) = ½) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m_i(f_X^*(x_i) = ½\ ) <$$

$$< \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m_i(f_X^J(x_i)) = N\ (f_X^J(x_i)\ ,\ f_X^J(x_2)\ ) \qquad \forall\ (f_X^J(x_1)\ ,\ f_X^J(x_2)\ ) \neq (\frac{1}{2} , \frac{1}{2})$$

por lo tanto vemos que se alcanza un mínimo en $(\frac{1}{2} , \frac{1}{2})$ y además es el único punto donde se alcanza.

II.1.2.3.- La continuidad de N está asegurada por la continuidad de las m_i.

II.1.2.4.- Dados

$$f_X^J = (f_X^J(x_1), f_X^J(x_2)\ ) \quad \text{y} \quad f_X^h = (f_X^h(x_1), f_X^h(x_2))$$

tales que $f_X^J \leq f_X^h$, entonces

$$N\,(f_X^J) \geq N\,(f_X^h)$$

Ahora bien, $\forall$ i= 1,2, se tiene

$$m_i(f_X^J(x_i)\;) \geq m_i(f_X^h(x_i))$$

por lo tanto

$$N\,(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2)) \geq N\,(f_X^h(x_1),f_X^h(x_2))$$

Finalmente nos queda por ver que N es una valoración en $L_2(X)$;se-rá suficiente probar que

$$N\,(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2)) = N\,(f_X^J(x_1),0) + N\,(0,f_X^J(x_2)) - 1$$

Ahora bien,

$$N\,(f_X^J(x_1)\;,f_X^J(x_2)) = \frac{1}{2}\,m_1(f_X^J(x_1)) + \frac{1}{2}\,m_2(f_X^J(x_2)) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\;2\,N\,(f_X^J(x_1),0) - 1) + \frac{1}{2}\,(2\,N\,(0,f_X^J(x_2) - 1\;) =$$

$$= N\,(f_X^J(x_1),0) + N\,(0,f_X^J(x_2)) - 1.$$

Veamos que el teorema se verifica para $n=3$.

Si una Medida de Nitidez N es una valoración en $L_3(X)$, entonces

$$N\,(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),f_X^J(x_3)) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} m_i(f_X^J(x_i))$$

donde las m_i son medidas puntuales de Nitidez y posteriormente que si se verifica la igualdad anterior, entonces N es una Medida de Nitidez de valoración.

Demostremos la condición necesaria. Al ser N una Medida de valoración , se tiene según el LEMA, que

$$N\,(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),f_X^J(x_3)) = N\,(f_X^J(x_1),0,0) + N\,(0,f_X^J(x_2),f_X^J(x_3)) - 1.$$

Definimos la función

$$v\,(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2)\,) = N\,(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),0)$$

y vamos a demostrar que v es una Medida de Nitidez de valoración.

II.1.2.1.- Si $v\,(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2)) = 1$

entonces

$$N\,(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),0) = 1$$

de donde

$$f_X^J(x_1) = 0 \text{ ó } 1 \text{ y } f_X^J(x_2) = 0 \text{ ó } 1$$

Trivialmente el recíproco.

II.1.2.2.- La continuidad de v está asegurada por la continuidad de N.

II.1.2.3.- La función v alcanza un mínimo únicamente en el punto $(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2})$

En efecto,

$$\forall \; f_X^J = (f_X^J(x_1), f_X^J(x_2), 0) \qquad (f_X^J(x_1), f_X^J(x_2), 0) \lesseqgtr (f_X^*(x_1) = ½ \;,\; f_X^*(x_2) = ½, 0)$$

por lo tanto

$$N\,(f_X^J) \geq N\,(f_X^*) \qquad \forall\, f_X^J = (f_X^J(x_1), f_X^J(x_2), 0)$$

es decir

$$v(f_X^J(x_1), f_X^J(x_2)) \geq v\,(f_X^*(x_1) = ½ \;, f_X^*(x_2) = ½\,) \qquad \forall\, f_X^J$$

luego queda demostrado la existencia de un mínimo absoluto para

$$(f_X^*(x_1) = ½ \;, f_X^*(x_2) = ½\,).$$

Veamos que este mínimo únicamente se alcanza en ese punto. Supongamos que el mínimo también se alcanzase en $(f_X^J(x_1)=t_1 \;,\; f_X^J(x_2)=t_2)$, entonces

$$v\;(f_X^J(x_1)=t_1, f_X^J(x_2)=t_2) = v\;(f_X^*(x_1)=½ \;,\; f_X^*(x_2)= ½\,)$$

de donde

$$N\;(f_X^J(x_1)=t_1, f_X^J(x_2) = t_2, 0) = N\;(f_x^*(x_1) = ½ \;, f_x^*(x_2) = ½ \;, 0\,).$$

Al ser,

$$N\;(f_X(x_1)=t_1, f_X^J(x_2)=t_2, f_X^J(x_3)=½) = N\;(f_X^J(x_1)=t_1, f_X^j(x_2)=t_2, 0) +$$

$$+ N\;(0,0,f_X^J(x_3) = ½) - 1$$

$$N\,(f^{*}_{X}(x_1)=½,\ f^{*}_{X}(x_2)=½, f^{*}_{X}(x_3)=½\ ) = N\,(f^{J}_{X}(x_1)=½\ , f^{J}_{X}(x_2)=½\ ,\ 0\ ) +$$

$$+ N\,(0,0,f^{J}_{X}(x_3)=½) - 1$$

se llegaría a que

$$N\,(f^{J}_{x}(x_1)=t_1, f^{J}_{x}(x_2)=t_2, f^{J}_{X}(x_3)=½) = N\,(f^{*}_{X}(x_1)=½\ , f^{*}_{X}(x_2)=½\ , f^{*}_{x}(x_3)=½\ )$$

lo cual es absurdo al ser N una Medida de Nitidez con un único mínimo en (½,½,½).

II.1.2.4.- Dados f^{J}_{X} y f^{i}_{X} tales que $f^{J}_{X} \lesssim f^{i}_{X}$

entonces

$$v(f^{i}_{X}) \leq v(f^{J}_{X})$$

En efecto,

Si $f^{J}_{X} = (f^{J}_{X}(x_1)\ ,\ f^{J}_{X}(x_2)\ ) \lessapprox f^{i}_{X} = (f^{i}_{X}(x_1)\ ,\ f^{i}_{X}(x_2)\ )$

es inmediato que

$$(\ f^{J}_{X}(x_1)\ ,\ f^{J}_{X}(x_2)\ ,\ 0\ ) \lessapprox (f^{i}_{X}(x_1)\ ,\ f^{i}_{X}(x_2), 0\ )$$

por lo tanto

$$N\,(f^{J}_{X}(x_1)\ ,\ f^{J}_{X}(x_2)\ ,\ 0) \geq N\,(f^{i}_{X}(x_1)\ , f^{i}_{X}(x_2)\ ,\ 0\ )$$

y por la definición de v se tiene

$$v(f^{J}_{X}) \geq v(f^{i}_{X})$$

Por lo tanto v es una Medida de Nitidez.Veamos que es una Medida de Nitidez de valoración.

En efecto, al ser

$$N\ (f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),f_X^J(x_3)) = N\ (f_X^J(x_1),0,0) + N\ (0,f_X^J(x_2),f_X^J(x_3)) - 1$$

haciendo $f_X^J(x_3)=0$, se tiene

$$N\ (f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),0) = N\ (f_X^J(x_1),0,0) + N\ (0,f_X^J(x_2),0) - 1$$

y por la definición de v , se llega a

$$v\ (f_X^J(x_1),f_X^J(x_2)) = v\ (f_X^J(x_1),0) + v\ (0,f_X^J(x_2)) - 1$$

con lo cual queda probado que v es una Medida de Nitidez de valoración.

Al ser v una Medida de Nitidez de valoración y verificarse el teorema para n=2 , se tiene que

$$v\ (f_X^J(x_1),f_X^J(x_2)) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} G_i(f_X^J(x_i)) = v\ (f_X^J(x_1),0) + v\ (0,f_X^J(x_2)) - 1$$

donde

$$G_1(f_X^J(x_1)) = 2\ v\ (f_X^J(x_1),0) - (2-1)$$

$$G_2(f_X^J(x_2)) = 2\ v\ (0,f_X^J(x_2)) - (2-1)$$

Aplicando nuevamente el LEMA, se obtiene

$$N\,(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),f_X^J(x_3)) = N\,(0,0,f_X^J(x_3)) + N\,(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),0) - 1 =$$

$$= N\,(0,0,f_X^J(x_3)) + v\,(f_X^J(x_1),0) + v\,(0,f_X^J(x_2)) - 2 =$$

$$= N\,(0,0,f_X^J(x_3)) + N\,(f_X^J(x_1),0,0) + N\,(0,f_X^J(x_2),0) - 2.$$

y definiendo

$$m_1 : L(x_1) \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

$$f_X^J(x_1) \longrightarrow m_1(f_X^J(x_1)) = 3\,N\,(f_X^J(x_1),0,0) - (\ 3-1\ ).$$

$$m_2 : L(x_2) \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

$$f_X^J(x_2) \longrightarrow m_2(f_X^J(x_2)) = 3\,N\,(0,f_X^J(x_2),0) - (\ 3-1\ ).$$

$$m_3 : L(x_3) \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

$$f_X^J(x_3) \longrightarrow m_3(f_X^J(x_3)) = 3\,N\,(0,0,f_X^J(x_3)\ ) - (\ 3-1)$$

se obtiene

$$N\,(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),f_X^J(x_3)) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} m_i(f_X^J(x_i))$$

Lo único que nos queda por ver es que efectivamente las m_i son medidas puntuales de Nitidez para x_i, $i = 1,2,3,$

II.1.1.1.- Si $m_2(f_X^J(x_2)) = 1$

entonces

$$3\,N\,(0,f_X^J(x_2),0) - 2 = 1$$

por lo tanto

$$N\ (0, f_X^J(x_2), 0) = 1$$

en consecuencia

$f_X^J(x_2) = 0$ ó 1 .Trivialmente se verifica el recíproco.

Análogamente para m_1 y m_3

II.1.1.2.- Veamos que se alcanza un mínimo únicamente en

$f_X^*(x_1) = ½$, $f_X^*(x_2) = ½$, $f_X^*(x_3) = ½$ para m_1 , m_2 , m_3 respectivamente.

Al ser

$$(0, f_X^J(x_2), 0) \lneq (0, f_X^*(x_2) = ½\ , 0)$$

se tiene

$$N\ (0, f_X^*(x_2) = ½, 0) \leq\ N\ (0, f_X^J(x_2), 0)$$

por lo tanto

$$m_2(f_X^J(x_2)) \geq m_2(f_X(x_2) = ½\ )$$

y queda probada la existencia de un mínimo absoluto en

$f_X^*(x_2) = ½$ para m_2.

Análogamente se vería para m_1 y m_3.

Veamos, conjuntamente, la unicidad del mínimo en $f_X^*(x_i) = ½$ i= 1,2,3. para m_1, m_2, m_3.

Supongamos que m_1, m_2, m_3 alcanzasen un mínimo en $f_X^J(x_1)=t_1$ $f_X^J(x_2)= t_2, f_X^J(x_3) =t_3$, respectivamente.

Entonces,

$$m_1(f_X^J(x_1)=t_1) = m_2(f_X^*(x_1)= ½) \qquad m_2(f_X^J(x_2)=t_2) = m_2(f_X^*(x_2) = ½)$$

$$m_3(f_X^J(x_3)=t_3) = m_3(f_X^*(x_3) = ½)$$

Ahora bien, como

$$N (f_X^*(x_1)=½, f_X^*(x_2)=½, f_X^*(x_3)=½) = \frac{1}{3} (m_1(f_X^*(x_1)=½) + m_2(f_X^*(x_2)=½) + m_3(f_x^*(x_3)=½))$$

$$= \frac{1}{3} (m_1(f_X^J(x_1)=t_1) + m_2(f_X^J(x_2)=t_2)) + m_3(f_X^J(x_3)=t_3))=$$

$$= N (f_X^J(x_1)=t_1, f_X^J(x_2)=t_2, f_X^J(x_3)=t_3)$$

se llega a una contradicción ya que el único mínimo de N se alcanza, por hipótesis , en $(f_X^*(x_1)=½, f_X^*(x_2)=½, f_X^*(x_3)=½)$

II.1.1.3.- La continuidad de m_1, m_2, m_3 es inmediata por la continuidad de N.

II.1.1.4.- Veamos que si

$$1\geq f_X^J(x_k) \geq f_X^i(x_k)\geq 1/2 \quad \text{para} \quad 1/2 \leq f_X^i(x_k)\leq 1$$

$$0 \leq f_X^J(x_k) \leq f_X^i(x_k)\leq 1/2 \quad \text{para} \quad 0 \leq f_X^i(x_k)\leq 1/2$$

entonces

$$m_h(f_X^j(x_h)) \geq m_h(f_X^i(x_h)) \qquad h = 1,2,3.$$

Veámoslo para h = 2, análogamente se vería para h = 1,3.

Al ser

$$(0 , f_X^j(x_2) , 0) \lneq (0 , f_X^i(x_2) , 0)$$

se tiene que

$$N (0,f_X^i(x_2),0) \geq N (0,f_X^j(x_2),0)$$

y en consecuencia

$$m_2(f_X^j(x_2)) \geq m_2(f_X^i(x_2)).$$

A continuación demostraremos la condición suficiente.

<u>Si</u>

$$\underline{N (f_X^j(x_1),f_X^j(x_2),f_X^j(x_3)) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} m_i(f_X^j(x_i))}$$

<u>donde las</u> m_i <u>son medidas puntuales de Nitidez para</u> x_i , <u>entonces N es una</u>

<u>Medida de Nitidez de valoración</u>.

Veamos primeramente que N es una Medida de Nitidez:

II.1.2.1.- Si $N\ (f^J_X(x_1), f^J_X(x_2), f^J_x(x_3)) = 1$,

entonces

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} m_i(f^J_x(x_i)) = 1$$

y como las $m_i(f^J_X(x_i))$ pueden tomar como máximo el valor 1, $\forall\ i$, se tiene que

$$m_i(f^J_X(x_i)) = 1 \qquad \forall\ i$$

por lo tanto

$$f^J_X(x_i) = 1 \text{ ó } 0 \quad \forall\ i$$

El recíproco es inmediato .

II.1.2.2.- Veamos que N alcanza un mínimo únicamente en (½,½,½).

En efecto,

$$N\ (f_X(x_1)=½, f_X(x_2)=½, f_X(x_3)=½\ ) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} m_i(f_X(x_i)=½) <$$

$$< \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} m_i(f^J_X(x_i)) = N\ (f^J_X(x_1), f^J_X(x_2), f^J_X(x_3)) \qquad \forall\ (f^J_X(x_1), f^J_X(x_2), f^J_X(x_3))$$

con lo cual queda demostrado que el mínimo se alcanza únicamente en (½,½,½).

II.1.2.3.- La continuidad de N está asegurada por la continuidad de las m_i.

II.1.2.4.- Dados

$$f_X^j = (f_X^j(x_1), f_X^j(x_2), f_X^j(x_3)) \quad y \quad f_X^h = (f_X^h(x_1), f_X^h(x_2), f_X^h(x_3))$$

tales que

$$f_X^j \lessgtr f_X^h$$

entonces

$$N\ (f_X^j) \geq N\ (f_X^h)$$

En efecto,

$$m_i(f_X^j(x_i)) \geq m_i(f_X^h(x_i)) \qquad \forall\ i = 1,2,3.$$

por lo tanto

$$N\ (f_X^j(x_1), f_X^j(x_2), f_X^j(x_3)) \geq N\ (f_X^h(x_1), f_X^h(x_2), f_X^h(x_3))$$

Finalmente veamos que N es una Medida de Nitidez de valoración.

Sabemos que

$$N\ (f_X^j(x_1), f_X^j(x_2), f_x^j(x_3)) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} m_i(f_X^j(x_i))$$

haciendo $f_X^j(x_3) = 0$, se obtiene

$$N\ (f_X^j(x_1), f_X^j(x_2), 0) = \frac{1}{3}\ (m_1(f_X^j(x_1)) + m_2(f_X^j(x_2)) + 1)$$

y con $f_X^J(x_1) = 0$ y $f_X^J(x_2) = 0$,

$$N\ (0,0,f_X^J(x_3)) = \frac{1}{3}\ (2 + m_3(f_X^J(x_3))$$

de donde

$$N\ (f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),f_X^J(x_3)) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} m_i(f_X^J(x_i)) =$$

$$= N\ (f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),0) + N\ (0,0,f_X^J(x_3)) - 1.$$

Análogamente se demostraría

$$N\ (f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),f_X^J(x_3)) = N\ (0,f_X^J(x_2),f_X^J(x_3)) + N\ (f_X^J(x_1),0,0) - 1$$

Demostrado el teorema para n=2 y 3 , supongámoslo cierto para n = K-1 y demostrémoslo para n = K.

N es una Medida de Nitidez de valoración en $L_n(X)$ si y solo si

$$\underline{N\ (f_X^J(x_1),\ldots,f_X^J(x_i),\ldots,f_X^J(x_k)) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} m_i(f_X^J(x_i))}$$

donde las m_i son medidas puntuales de Nitidez para los x_i.

Demostremos primeramente la condición necesaria.

Definimos:

$$v\ (f_X^J(x_1),\ldots,f_X^J(x_{k-1})) = N\ (f_X^J(x_1),\ldots,f_X^J(x_{k-1}),0)$$

Es inmediato demostrar que v es una Medida de Nitidez de valoración, por lo tanto aplicando la hipótesis de inducción, se tiene que

$$N\ (f_X^j(x_1),\ldots,f_X^j(x_{k-1}),0) = v\ (f_X^j(x_1),\ldots,f_X^j(x_{k-1})) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1} g_i(f_X^j(x_i)) =$$

$$= v\ (f_X^j(x_1),0,\overset{(k-1}{\ldots},0) + v\ (0,f_X^j(x_2),0,\ldots,0) + v\ (0,\ldots,0,f_X^j(x_{k-1})) - (k-2)$$

donde

$$g_i(f_X^j(x_i)) = (\ k-1\ )\ v\ (0,\ldots,f_X^j(x_i),\ldots,0) - (k-2)$$

Aplicando el LEMA se tiene

$$N\ (f_X^j(x_1),\ldots,f_X^j(x_k)) = N\ (0,\overset{(k-1}{\ldots},0,f_X^j(x_k)) + N\ (f_X^j(x_1),\ldots,f_X^j(x_{k-1}),0) - 1 =$$

$$= N\ (0,\overset{(k-1}{\ldots},0,f_X^j(x_k)) + v\ (f_X^j(x_1),\ldots,f_X^j(x_{k-1})) - 1 =$$

$$= N\ (0,\ldots,0,f_X^j(x_k)) + N\ (f_X^j(x_1),0,\ldots,0) + \ldots + N\ (0,\ldots,f_X^j(x_i),\ldots,0) + \ldots +$$

$$+ N\ (0,\ldots,0,f_X^j(x_{k-1}),0) - (k-1).$$

definiendo

$$m_i : L(x_i) \longrightarrow [0\ ,\ 1] \qquad i = 1,\ldots\ldots,k$$

$$f_X^j(x_i) \longrightarrow m_i(f_X^j(x_i)) = k\ N\ (0,\ldots,f_X^j(x_i),\ldots,0) - (k-1)$$

se obtiene

$$N\ (f_X^j(x_1),\ldots\ldots,f_X^j(x_k)) = \frac{1}{k}\ \sum_{i=1}^{k} m_i(f_X^j(x_i))$$

Análogamente a como hemos demostrado para n = 3 , se demostraría que las m_i , $i = 1,\ldots,k$ son medidas puntuales de Nitidez.

A continuación se demuestra , omitimos la demostración por ser análoga al caso n = 3 , el recíproco , es decir , si

$$N\,(f_X^J(x_1),\ldots,f_X^J(x_i),\ldots,f_X^J(x_k)) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} m_i(f_X^J(x_i))$$

donde las m_i son medidas puntuales de Nitidez para x_i , entonces N es una Medida de Nitidez de valoración.

II.2.-MEDIDAS DE NITIDEZ PARA k- PARTICIONES DIFUSAS.

Comenzaremos dando el concepto de k-partición difusa para posteriormente pasar a definir lo que se entiende por Medida de Nitidez para una k-partición difusa.

II.2.1.- CONCEPTO DE k-PARTICION DIFUSA

Estamos viendo a lo largo de esta memoria que los conceptos definidos en la Teoría de los Conjuntos Difusos son una generalización de los conceptos definidos en la Teoría Clásica de Conjuntos. En este apartado , daremos constancia de otro nuevo concepto obtenido a partir de la generalización del correspondiente concepto clásico,este concepto es el de k-partición difusa.

II.2.1.1.- DEFINICION

Una K-partición difusa en X viene dada por k-conjuntos difusos $\underset{\sim}{X}^1,\ldots,\underset{\sim}{X}^k$ cuyas funciones de pertenencia verifican

$$\sum_{j=1}^{k} f_X^j(x_i) = 1 \qquad \forall \; x_i \in X$$

Es obvio, que la diferencia existente entre la definición clásica de partición de orden k en términos de la función característica y la de k-partición difusa, radica en que mientras en la primera, el conjunto X queda clasificado en K conjuntos bien determinados , es decir , no difusos, en la segunda los elementos de X tienen pertenencia gradual a k conjuntos difusos. Esta diferencia es análoga a la existente entre la Teoría Clásica de Conjuntos y la Teoría de los Conjuntos Difusos, por lo tanto creemos que esta definición de k-partición difusa es la extensión lógica del concepto de partición ordinaria de orden k.

Si designamos por $X[K]$ el conjunto de las particiones ordinarias de orden K sobre X y por $\underset{\sim}{X}[K]$ el conjunto de las k-particiones difusas sobre X se demuestra de forma muy sencilla que $\underset{\sim}{X}[k]$ es la envoltura convexa de $X[k]$.

$$\underset{\sim}{X}[K]=\left\{ F_X = \left((f_X^j(x_i)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}} \right) \text{ con } 0 \leq f_X^j(x_i) \leq 1 \text{ y } \sum_{j=1}^{k} f_X^j(x_i) = 1 \; \forall x_i \in X \right\}$$

es decir, cada k-partición difusa X quedará univocamente determinada por una matriz de n filas y k columnas, de tal forma que los elementos de cualquier fila son no negativos y su suma es la unidad.

Nosotros hemos adoptado esta definición de k-partición difusa; sin embargo, existen otras definiciones aparte de ésta, destaquemos la de Kaufmann (1.977), utilizada por éste para demostrar el Teorema de Bayes para sucesos difusos; pensamos que esta definición si bien tiene una cierta semejanza en cuanto a la forma, a la definición clásica, no ocurre lo mismo en cuanto al fondo conceptual y por eso, creemos, que la expresión que toma el Teorema de Bayes se aparta bastante tanto de la forma clásica, como de la tería probabilística para sucesos difusos.

II.2.2.- DEFINICION DE MEDIDA DE NITIDEZ PARA UNA K- PARTICION DIFUSA. EJEMPLO.

Denominaremos Medida de Nitidez para una k- partición difusa, a toda función

$$\mathcal{N}_k : \underset{\sim}{X}[K] \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

verificando :

II.2.2.1.- $\mathcal{N}_k(F_X) = 1$ si y solo si para todo x_i de X existe un conjunto difuso $\underset{\sim}{X}^j$ de la k- partición difusa cuya función de pertenencia para x_i toma el valor 1 y la función de pertenencia para los restantes conjuntos difusos de la partición toma el valor cero. $\mathcal{N}_k(F_X) = 1$ si y solo si F_X es una partición de orden k no difusa.

II.2.2.2.- $\mathcal{N}_k$ alcanza un mínimo únicamente para la k-partición,

$$F_X = \left((f_X^j(x_i) = \frac{1}{k}\ )_{\substack{j=1,\dots,k \\ i=1,\dots,n}} \right)$$

II.2.2.3.- $\mathcal{N}_k$ es una función continua respecto a la métrica definida en $\underset{\sim}{X}[K]$, mediante

$$\varrho(F_X,G_X) = \sqrt{\text{traza } ((F_X-G_X)\ (F_X-G_X)^T\ )} \qquad \forall\ F_X,G_X \in \underset{\sim}{X}[K]$$

II.2.2.4.- Para todo par de k-particiones difusas, tales que

$$F_X \lessgtr G_X \Leftrightarrow \left\{ \forall \; x_i \in X \quad \left\{ \begin{array}{ll} f_X^j(x_i) \le g_X^j(x_i) & g_X^j(x_i) \le 1/k \\ & \\ f_X^j(x_i) \ge g_X^j(x_i) & g_X^j(x_i) \ge 1/k \end{array} \right\} \forall \; j \right\}$$

entonces

$$\mathcal{N}_k(F_X) \ge \mathcal{N}_k(G_X)$$

Evidentemente serán muchas las medidas que verificarán estas propiedades por lo que podría pensarse en la posibilidad de estudiar la forma de restringir la clase de todas las Medidas de Nitidez para k-particiones difusas definidas sobre un conjunto X de n elementos; éste es un problema que dejamos abierto para posteriores estudios.

Veamos que a partir del funcional de Onicescu se puede obtener una Medida de Nitidez para k-particiones difusas. En efecto:

El funcional de $\underset{\sim}{X}[K]$ en $[0 , 1]$ definido por

$$\mathcal{N}_k(F_X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (f_X^j(x_i))^2$$

es una Medida de Nitidez para k-particiones difusas.

Veamos que verifica las propiedades II.2.2.1 , II.2.2.2. II.2.2.3 y II.2.2.4 .

II.2.2.1.- Si $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(f_X^j(x_i))^2 = 1.$

tendremos que demostrar que cualquiera que sea x_i perteneciente a X , existe un conjunto difuso $\underset{\sim}{X}^j$ de la k-partición difusa cuya función de pertenencia para x_i toma el valor 1 y la función de pertenencia para los restantes conjuntos difusos de la partición toma el valor cero.

Supongamos que esto no es cierto, es decir, dado $x_i \in X$ $f_X^j > 0$ para todo conjunto difuso $\underset{\sim}{X}^j$ de la partición, entonces

$$f_X^j(x_i) \geq (f_X^j(x_i))^2 \qquad \forall\, x_i \in X$$

y por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{k}(f_X^j(x_i))^2 < 1$$

de donde

$$\mathcal{N}(F_X) < 1$$

con lo cual se llega a una contradicción

El recíproco es inmediato.

e je II.2.2.2.- Veamos la existencia de un mínimo únicamente para la k-partición difusa

$$F_X^{*} = \left((f_X^j(x_i) = \frac{1}{k})_{\substack{j=1,..,k \\ i=1,..,n}} \right)$$

En efecto ,

Teniendo en cuenta que se puede identificar $\underline{X}[K]$, con juntistamente, con un subconjunto de $[0\ ,\ 1]^{n x k}$, podemos considerar la función N definida de ese subconjunto en $[0\ ,\ 1]$, es decir

$$N(f_X^1(x_1),\ldots,f_X^k(x_1),f_X^1(x_2),\ldots,f_X^k(x_2),\ldots,f_X^1(x_n),\ldots,f_X^k(x_n)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(f_X^j(x_1))^2$$

por lo tanto se tratará de encontrar los extremos de la función N con las restricciones

$$\sum_{j=1}^{k} f_X^j(x_i) = 1 \quad \forall\ i \qquad (i=1,\ldots,n)$$

Utilizando los multiplicadores de Lagrange, calcularemos los extremos de la función

$$\Psi(f_X^1(x_1),\ldots,f_X^k(x_1),f_X^1(x_2),\ldots,f_X^k(x\ ),\ldots,f_X^1(x_n),\ldots,f_X^k(x_n);\lambda_1,\ldots,\lambda_n\ ) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(f_X^j(x_i))^2 - \lambda_1(\sum_{j=1}^{k} f_X^j(x_1) -1) - \ldots - \lambda_n(\sum_{j=1}^{k} f_X^j(x_n) - 1)$$

Derivando Ψ con respecto a $f_X^j(x_i)$, $i=1,..,n$; $j=1,\ldots,k$ se obtiene, para simplificar las notaremos en forma matricial.

$$\left(\frac{\delta\Psi}{\delta f_X^j(x_i)}\right)_{\substack{i=1,..,n\\ j=1,..,k}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}2\ f_X^1(x_1)-\lambda_1 & \ldots & \frac{1}{n}2\ f_X^i(x_1)-\lambda_1 & \ldots & \frac{1}{n}2\ f_X^k(x_1)-\lambda_1 \\ \\ \frac{1}{n}2\ f_X^1(x_i)-\lambda_i & \ldots & \frac{1}{n}2\ f_X^i(x_i)-\lambda_i & \ldots & \frac{1}{n}2\ f_X^k(x_i)-\lambda_i \\ \\ \frac{1}{n}2\ f_X^1(x_n)-\lambda_n & \ldots & \frac{1}{n}2\ f_X^i(x_n)-\lambda_n & \ldots & \frac{1}{n}2\ f_X^k(x_n)-\lambda_n \end{pmatrix}$$

Ahora bien,

Cualquiera que sea i , se tiene que

$$\frac{1}{n}2\ f_X^1(x_i) = \frac{1}{n}\ 2\ f_X^2(x_i) = \ldots\ldots = \frac{1}{n}\ 2\ f_X^k(x_i)$$

y teniendo en cuenta las restricciones impuestas se obtiene

$$k\ f_X^j(x_i) = 1 \qquad \forall\ i,$$

es decir

$$f_X^j(x_i) = \frac{1}{k} \qquad \forall\ \ i,j$$

Por lo tanto el único extremo de N se alcanza para la k-partición difusa

$$F_X^* = \left((f_X^j(x_i) = \frac{1}{k}) \quad {}_{\substack{j=1,\ldots,k \\ i=1,\ldots n}} \right)$$

Calculando la sucesión de hessianos de órdenes 1,2,...,nxk de N , se obtiene

$$2\ ,\ 2^2,\ \ldots.\ ,\ 2^{n(k-1)},\ 2^{nk}$$

por lo que el punto extremo anterior corresponde a un mínimo.

II.2.2.3.- Veamos la continuidad de N .

En efecto, veamos que

$$\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\,\delta>0 \ / \ \varrho(F_X,G_X)<\delta \text{ entonces } |\mathcal{N}(F_X)-\mathcal{N}(G_X)|<\varepsilon$$

Al ser

$$|\mathcal{N}(F_X)-\mathcal{N}(G_X)| = \frac{1}{n}\Big|\sum_i\sum_j (f_X^j(x_i))^2 - \sum_i\sum_j (g_X^j(x_i))^2\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_i\sum_j |f_X^j(x_i)-g_X^j(x_i)|\ |f_X^j(x_i)-g_X^j(x_i)| \leq$$

$$\leq \frac{2}{n}\sum_i\sum_j |f_X^j(x_i)-g_X^j(x_i)| \leq$$

$$\leq \frac{2}{n}\sum_i\sum_j \left(\sqrt{\sum_i\sum_j |f_X^j(x_i)-g_X^j(x_i)|^2}\right) \leq 2k\delta$$

si tomamos $\delta<\frac{\varepsilon}{2k}$ queda probada la continuidad de $\mathcal{N}$.

II.2.2.4.- Dadas las k-particiones difusas

$$F_X=\left((f_X^j(x_i))_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,k}}\right) \quad \text{y} \quad G_X=\left((g_X^j(x_i))_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,k}}\right)$$

tales que

$$F_X \lessgtr G_X$$

entonces

$$\mathcal{N}(G_X)\leq\mathcal{N}(F_X)$$

En efecto, para todo j , se verifica

$$\left|f_X^j(x_i) - \frac{1}{k}\right| \geq \left|g_X^i(x_i) - \frac{1}{k}\right|$$

de donde

$$\sum_{j=1}^{k} \left(f_X^j(x_i) - \frac{1}{k} \right)^2 \geq \sum_{j=1}^{k} \left(g_X^j(x_i) - \frac{1}{k} \right)^2$$

con lo cual

$$\sum_{j=1}^{k} (f_X^j(x_i))^2 - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} 2\, f_X^j(x_i) \geq \sum_{j=1}^{k} (g_X^j(x_i))^2 - \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k} g_X^j(x_i)$$

y teniendo en cuenta que

$$\sum_{j=1}^{k} f_X^j(x_i) = 1 \qquad \sum_{j=1}^{k} g_X^j(x_i) = 1$$

se llega a que

$$\sum_{j=1}^{k} (f_X^j(x_i))^2 \geq \sum_{j=1}^{k} (g_X^j(x_i))^2$$

finalmente sumando en i, y dividiendo por n , se tiene

$$\mathcal{N}(F_X) \geq \mathcal{N}(G_X)$$

Esta medida $\mathcal{N}$,ha sido utilizada con éxito por Bezdek (1.974, 1.975) y Dunn (1.974, 1.977) en el Análisis de Conglomerados, sin embargo no la enmarcan dentro de una Teoría general de Medidas de Nitidez para k-particiones difusas.

Finalmente, como ocurre para los conjuntos y sucesos difusos , existe otra vía para cuantificar la imprecisión asociada a las k-par ticiones difusas. El funcional más importante utilizado para medir la Entropía de una k-partición difusa es el obtenido a partir del funcional de Shannon que toma la expresión

$$H(F_X) = -\frac{1}{n}\left(\sum_{r}^{n}\sum_{j}^{k} f_X^j(x_r)\,\mathrm{Log}_a\, f_X^j(x_r)\right)$$

Su relación con la medida de Nitidez estudiada anteriormente viene dada por

$$1-\mathcal{N}(F_X) < \left(\frac{H(F_X)}{\mathrm{Log}_a e}\right) < \frac{1}{2}\left(k-\mathcal{N}(F_X)\right)$$

Pág.

CAPITULO III

"MEDIDAS DE NITIDEZ E INFORMACION PARA SUCESOS DIFUSOS "

III.0.- Sumario 70

III.1.- Medidas de Nitidez para sucesos difusos 72

III.1.1.- Características de una Medida de Nitidez para sucesos difusos 72

III.1.2.- Teoremas de existencia y caracterización de Medidas de Nitidez para sucesos difusos 73

IIII.2.- La Energía Informacional como medida de Información para sucesos difusos 90

III.2.1.- Energía Informacional de un suceso difuso .. 91

III.2.2.- Energía Informacional condicionada 91

III.2.3.- Energía Informacional conjunta de dos sucesos difusos 91

III.2.4.- Relación entre la Energía Informacional, Energía Informacional condicionada, y Energía Informacional conjunta.................. 92

III.0.- SUMARIO

Este tercer capítulo está dedicado al estudio de las Medidas de Nitidez e Información para sucesos difusos.

En la primera parte realizamos el estudio de las medidas de Nitidez para sucesos difusos.Comenzamos dando la definición de Medida de Nitidez para un suceso difuso, para pasar posteriormente a dar dos teoremas . El primero de ellos asegura la existencia de Medidas de Nitidez para sucesos difusos, siendo el conjunto X sobre el que se definen un conjunto cualquiera; para la demostración de este teorema nos hemos basado en algunos resultados de KNOPFMACHER (1.975) en el estudio de Entropías Difusas. El segundo caracteriza las medidas que son valoraciones en $\Gamma(X)$, siendo el conjunto X un conjunto finito.Destaquemos que en este estudio de Medidas de Nitidez para sucesos difusos no intervienen las probabilidades de los sucesos difusos, sino la medida de probabilidad P definida sobre el espacio muestral.

En la segunda parte de este capítulo presentamos un método para medir la certidumbre o información de carácter aleatorio, que un suceso difuso posee antes de su realización, a través de la generalización del concepto de Energía Informacional, ONICESCU (1.966), PARDO (1.977), THEODORESCU (1.977), para sucesos difusos. ASAI, TANAKA y OKUDA (1.975) (1.976), (1.979) han realizado un estudio análogo para cuantificar la Entropía o incertidumbre de carácter aleatorio de un suceso difuso.

III.1.- MEDIDAS DE NITIDEZ PARA SUCESOS DIFUSOS

Sea (X, Δ,P) un espacio de probabilidad, Γ(X) la clase de los conjuntos difusos que tienen su función de pertenencia medible, como ya hemos visto en el capítulo primero, este conjunto lo denominaremos clase de los sucesos difusos definidos en (X,Δ,P) .Trataremos de que las Medidas de Nitidez para sucesos difusos, sin alterar las propiedades de las Medidas de Nitidez para conjuntos difusos dependan de la medida de probabilidad P definida sobre el espacio probabilístico (X,Δ).

III.1.1.- CARACTERISTICAS DE UNA MEDIDA DE NITIDEZ PARA SUCESOS DIFUSOS

Se define una medida de Nitidez para sucesos difusos como una función

$$N_P : \Gamma(X) \longrightarrow [0 , 1]$$

que verifica:

III.1.1.1.- $N_P(f_X^J) = 1$ si y solo si $f_X^J(x) = 0$ ó 1 **para todo** $x \in X-A$ con $P(A)=0$.

III.1.1.2.- $N_P(f_X^J)$ alcanza únicamente un mínimo para $f_X^J(x) = 1/2$ para todo $x \in X-A$ con $P(A)=0$.

III.1.1.3.- La función N_P es continua respecto de la métrica definida en Γ(X) por

$$\varrho(f_X^i, f_X^j) = \sup_{x \in X} \left| f_X^J(x) - f_X^i(x) \right| \quad \forall f_X^j , f_X^i \in \Gamma(X)$$

III.1.1.4.- Dados los sucesos difusos f^j_X , f^i_X tales que

$$f^j_X \lessgtr f^i_X \qquad \forall\ x \in X-A \quad \text{con } P(A)=0$$

entonces

$$N_P(f^j_X) \geq N_P(f^i_X)$$

A continuación , daremos dos teoremas, uno que asegura la existencia de Medidas de Nitidez para sucesos difusos y otro que caracteriza las Medidas de Nitidez que son valoraciones en el retículo $\Gamma(X)$, con X finito.

III.1.2.- TEOREMAS DE EXISTENCIA Y CARACTERIZACION DE MEDIDAS DE NITIDEZ PARA SUCESOS DIFUSOS.

Comenzaremos dando el teorema de existencia para posteriormente pasar al de caracterización.

III.1.2.1.-TEOREMA

Dado un espacio de probabilidad (X, Δ, P) , donde Δ es un σ-álgebra sobre X y P es una medida de probabilidad definida sobre X, entonces toda función N_P de $\Gamma(X)$ en $[0 , 1]$, definida como la integral de Stieltjes-Lebesgue de cualquier medida puntual de Nitidez

$$N_P(f^j_X) = E_P\left[m(f^j_X(x))\right] = \int_X m(f^j_X(x)\ )\ Pdx$$

es una Medida de Nitidez para sucesos difusos.

Demostración:

Veamos que N_P verifica III.1.1.1 , III.1.1.2 , III.1.1.3

y III.1.1.4.

III.1.1.1.-

$$N_P(f_X^J) = \int_X m(f_X^J(x))\ P(dx) = 1$$

si y solo si

$$f_X^J(x) = 0 \text{ ó } 1 \quad \forall\ x \in X \text{ casi segura}$$

En efecto, si $\int_X m(f_X^J)\ P(dx) = 1$

entonces $\int_X (1 - m(f_X^J(x)\ )\ P(dx) = 0$

de donde

$$\forall\ x \quad 1 - m(f_X^J(x)) = 0 \quad \text{casi seguro}$$

y por las propiedades de m, se tiene que

$$f_X^J(x) = 0 \text{ ó } 1 \text{ casi seguro}$$

Trivialmente, si $f_X^J(x) = 0$ ó 1, entonces $m\ (f_X^J(x) = 1\ \forall\ x$

y $\int_X 1\ P(dx) = 1.$

III.1.1.2 .- Veamos que N_P alcanza un mínimo únicamente en $f_X^*(x) = 1/2\ \forall\ x$

En efecto, al ser

$$m\ (f_X^*(x) = ½) < m\ (f_X^J(x)) \qquad \forall\ f_X^J \in \Gamma(X),\ \forall\ x$$

se tiene

$$\int_X m\ (f_X^*(x) = ½)\ P(dx)\ \leq \int_X m\ (f_X^J(x)\ P(dx)$$

de donde

$$N_P(f_X^*) \leq N_P(f_X^J)$$

con lo cual queda demostrada la existencia de un mínimo absoluto en $f_X^*(x)=½$.

Veamos que no existe otro suceso difuso con $f_X^k(x) \neq ½$, para algún x, para el cual se alcance el mínimo absoluto anterior.

Supongamos que se alcanzase para el suceso difuso f_X^k con $f_X^k(x) \neq ½$ para algún x, entonces se tendría

$$N_P(f_X^k) = N_P(f_X^*(x) = ½)$$

con lo cual

$$\int_X (m\ (f_X^k(x) - m\ (f_X^*(x) = ½))\ P(dx) = 0$$

con

$$m\ (f_X^k(x)\ ) > m\ (f_X^*(x) = ½)\quad \forall\ x$$

lo cual es absurdo.

Por lo tanto

$$m\ (f_X^k(x)) = m\ (f_X^*(x)=½)$$

y al ser m una Medida puntual de Nitidez , se tiene que

$$f_X(x) = f_X^*(x) = ½ \quad \forall\ x \in X$$

III.1.1.3.- Tendremos que demostrar que

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \ / \ \varrho(f_X^i, f_X^j) < \delta \ \left| N_P(f_X^i) - N_P(f_X^j) \right| < \varepsilon$$

En efecto,

Al ser m continua en un compacto es uniformemente continua, por lo tanto dado el ε anterior $\exists\ \delta^*$ de tal forma que

$$\forall\ f_X^i(x)\ ,\ f_X^j(x) \text{ con } \left| f_X^i(x) - f_X^j(x) \right| < \delta^*\ ,\quad \left| m\ (f_X^i(x)) - m\ (f_X^j(x)) \right| < \varepsilon$$

es decir

$$-\ \varepsilon < m\ (f_X^i(x) - m\ (f_x^j(x) < \varepsilon$$

por lo tanto

$$-\ \varepsilon < \int_X (m\ (f_X^i(x) - m\ (f_X^j(x))\ P(dx) < \varepsilon$$

y

$$\left| N_P(f_X^i) - N_P(f_X^j) \right| < \varepsilon \text{ , sin más que tomar } \quad \delta < \delta^*$$

III.1.1.4.- Veamos que si f_X^i , f_X^j son dos sucesos difusos tales que

$$f_X^j \lesssim f_X^i \qquad \forall\ x \in X - A \text{ con } P(A) = 0$$

entonces

$$N_P(f_X^j) \geq N_P(f_X^i)$$

En efecto, al ser

$$f_X^j(x) \geq f_X^i(x) \qquad \text{si} \quad f_X^i(x) \geq 1/2$$

$$f_X^j(x) \leq f_X^i(x) \qquad \text{si} \quad f_X^i(x) \leq 1/2$$

se tiene

$$N_P(f_X^j) = \int_X m\,(f_X^j(x)\,)\,P(dx) = \int_{A_1=\{x/\ f_X^i(x)>\frac{1}{2}\}} m\,(f_X^j(x)\,)\,P(dx) \quad +$$

$$+\int_{A_2=\{x/\ f_X^i(x)=\frac{1}{2}\}} m\,(f_X^j(x)\,)\,P(dx) + \int_{A_3=\{x\ /\ f_X^i(x)<\frac{1}{2}\}} m\,(f_X^j(x)\,)\,P(dx) \geq$$

$$\geq \int_{A_1=\{x\ /\ f_X^i(x)>\frac{1}{2}\}} m\,(f_X^i(x)\,)\,P(dx) + \int_{A_2=\{\ x\ /\ f_X^i(x)=\frac{1}{2}\}} m\,(f_X^i(x)\,)\,P(dx) \quad +$$

$$+\int_{A_3=\{\ x\ /\ f_X^i(x)<\frac{1}{2}\}} m\,(f_X^i(x)\ P(dx) = N_P(f_X^i)$$

COROLARIO

Si utilizamos como medida puntual de nitidez la obtenida a partir del funcional de Onicescu, se obtiene La Medida de Nitidez

$$N_P(f_X^J) = \int_X ((f_X^J(x))^2 + (1 - f_X^J(x))^2)\, P(dx)$$

y teniendo en cuenta que

$$m(x) = (f_X^J(x))^2 + (1 - f_X^J(x))^2$$

se puede expresar como $g \circ f_X^J$ donde g viene determinada por

$$(X, \Delta, P) \xrightarrow{f_X^J} ([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]}, P) \xrightarrow[g(y) = y^2 + (1-y)^2]{} ([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$$

La medida de Nitidez anterior viene determinada por la expresión

$$N_P(f_X^J) = \int_X m(f_X^J(x))\, P(dx) = \int_{[0,1]} (y^2 - (1-y)^2)\, P^*(dy)$$

donde P^* representa la probabilidad inducida por la función medible f_X^J en $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$.

Visto el teorema anterior que nos permite construir Medidas de Nitidez para sucesos difusos, vamos a dar un teorema de caracterización en el supuesto de que X sea un conjunto finito y el σ- álgebra definido sobre X sea partes de X. En este caso $L_n(X)$ coincidirá con $\Gamma_n(X)$, siendo $\Gamma_n(X)$ la clase de los sucesos definidos sobre X.

III.1.2.2.- TEOREMA

Sea (X , P(X), P) un espacio de probabilidad . La condición necesaria y suficiente para que N_p sea una Medida de Nitidez de valoración para sucesos difusos es que N_p se pueda expresar como

$$N_p(f_X^J) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f_X^J(x_k))\, p(x_k)$$

donde las m_k son medidas de autonitidez para x_k, k=1,...,n

Antes de demostrar este teorema es necesario dar el siguiente Lema:

La condición necesaria y suficiente para que N_p sea una valoración en $\Gamma_n(X)$ es que se cumpla para todo r, $1 \leq r \leq n$

$$N_p(f_X^J) = N_p(f_X^J(x_1),\dots,f_X^J(x_r),0,\dots,0) + N_p(0,\dots,f_X^j(x_{r+1}),\dots,f_X^j(x_n))-1$$

La demostración la omitimos dada su semejanza con la del Lema visto en el capítulo anterior y utilizado en la caracterización de las Medidas de Nitidez para conjuntos difusos, salvando las matizaciones derivadas de la intervención en este caso de las probabilidades ..

El teorema lo demostraremos por inducción.Comenzaremos demostrando la certeza del teorema para n=2.

Veamos que si N_p es una Medida de Nitidez de valoración para sucesos difusos, entonces

$$p = (\, p(x_1),p(x_2)\,) \qquad N_p(f_X^J) = \sum_{k=1}^{2} m_k\,(f_X^J(x_k)\,)\, p\,(x_k)$$

Por ser N_p valoración en $\Gamma_n(X)$, se cumple

III.1.2.2.1 $N_p(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2)) = N_p(f_X^J(x_1)\ , 0) + N_p(0\ ,f_X^J(x_2)) - 1$

si definimos

$$m_1 : \Gamma(x_1) \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

$$f_X^J(x_1) \longrightarrow m_1(f_X^J(x_1)) = \frac{N_p(f_X^J(x_1),0) - p(x_2)}{p(x_1)}$$

$$m_2 : \Gamma(x_2) \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

$$f_X^J(x_2) \longrightarrow m_2(f_X^J(x_2)) = \frac{N_p(\ 0,\ f_X^J(x_2)) - p(x_1)}{p(x_2)}$$

se tiene por III.1.2.2.1 y por las hipótesis de como están definidas m_1, m_2 que

$$N_p(f_X^J) = N_p(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2)\ ) = p(x_1)\ m_1(f_X^J(x_1)) + p(x_2)\ m_2(f_X^J(x_2)) + p(x_1)+p(x_2)-1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} m_k(f_X^J(x_k))\ p(x_k)\ .$$

con lo cual nos queda por ver que las m_i , $i = 1,2$ son medidas puntuales de Nitidez.

II.1.1.1.- Veamos que $m_i(f_X^J(x_i)) = 1$ si y solo si $f_X^J(x_i) = 0$ ó 1. $\forall\ x_i \in X-A$, con $P(A) = 0$.

En efecto, para $i = 1$, al ser

$$m_1(f_X^J(x_1)) = 1,$$

se tiene que

$$\frac{N_p(f_X^j(x_1),0)-p(x_2)}{p(x_1)} = 1$$

es decir

$$N_p(f_X^j(x_1),\ 0\ ) = 1$$

y por la definición de N_p se tiene que $f_X^j(x_1) = 0$ ó 1, si $x_1 \in X-A$ con $P(A)=0$

Analogamente se demostraría para m_2.

II.1.1.2.- Veamos que el único valor en el cual m_1 y m_2 alcanzan un mínimo es $f_X^j(x_1) = ½$ para m_1 y $f_X^j(x_2) = ½$ para m_2, $\forall\ x_1,\ x_2 \in X-A$ con $P(A) = 0$

En efecto, como

$$(\ f_X^j(x_1)\ ,\ 0\ ) \preccurlyeq (f_X^*(x_1)=½,0\ ) \quad \forall \quad f_X^j(x_1) \neq ½$$

se tiene que

$$N_p(f_X^j(x_1)\ ,\ 0\ ) \geq N_p(\ f_X^*(x_1) = ½,0\ )\ \forall\ x_1 \in X-A \text{ con } P(A) = 0$$

luego

$$\frac{N_p(f_X^j(x_1),\ 0\ ) - p(x_2)}{p(x_1)} \geq \frac{N_p(f_X^*(x_1) = ½,\ 0\ ) - p(x_2)}{p(x_1)}$$

de donde

$$m_1(f_X^j(x_1)) \geq m_1\ (f_X^*(x_1) = \tfrac{1}{2}\ )\quad \forall\ f_X^j(x_1)\quad \forall\ x_1 \in X\text{-}A \text{ con}$$

$P(A) = 0.$

con lo cual queda demostrada la existencia de un mínimo en $f_X^*(x_1) = \tfrac{1}{2}$ para m_1 . Análogamente se demostraría para m_2.

Veamos, conjuntamente, que el mínimo se alcanza únicamente en $f_X^*(x_i) = \tfrac{1}{2}$, i= 1,2, par m_1 y m_2.

Supongamos que m_1 y m_2 alcanzasen también el mínimo en $f_X^j(x_1)=t_1$, $f_X^j(x_2)= t_2$, respectivamente, entonces se tendría que

$$m_1(f_X^j(x_1) = t_1) = m_1(f_X^*(x_1) = \tfrac{1}{2}\ )\quad y\quad m_2(f_X^j(x_2)=t_2) = m_2(f_X^*(x_2)= \tfrac{1}{2}\ )$$

Ahora bien , como

$$N_p(f_X^j) = N_p(f_X^j(x_1)=t_1, f_X^j(x_2)=t_2) = \sum_{k=1}^{2}\ m_k(f_X^j(x_k)=t_k)\ p(x_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\ p(x_k)\ m_k(f_X^*(x_k)=\tfrac{1}{2}) = N_p(f_X^*)$$

se llega a que en $(f_X^j(x_1)=t_1, f_X^j(x_2)=t_2)$, N_p alcanza un mínimo absoluto, pero esto es absurdo ya que el mínimo de N_p se alcanza únicamente en

$$(f_X^*(x_1)=\tfrac{1}{2}\ ,\ f_X^*(x_1)=\tfrac{1}{2}\ )$$

II.1.1.3.- La continuidad de m_1 y m_2 está asegurada por la continuidad de N_p .

II.1.1.4.- Veamos que si

$$1 \geq f_X^j(x_1) \geq f_X^i(x_1) \geq 1/2 \quad \text{para} \quad 1/2 \leq f_X^i(x_1) \leq 1$$

$$0 \leq f_X^j(x_1) \leq f_X^i(x_1) \leq 1/2 \quad \text{para} \quad 0 \leq f_X^i(x_1) \leq 1/2$$

$\forall\ x_1 \in X-A$ con $P(A)=0$

entonces

$$m_1(f_X^j(x_1)) \geq m_1(f_X^j(x_1)) \quad \text{(análogamente para } m_2\text{).}$$

Si verifica la condición anterior entonces también se verifica que

$$(f_X^j(x_1),\ 0) \lessgtr (f_X^i(x_1),\ 0) \quad \text{por lo tanto}$$

$$N_p(f_X^j(x_1),0) \geq N_p(f_X^i(x_1),0)$$

y en consecuencia

$$m_1(f_X^j(x_1)) \geq m_1(f_X^i(x_1))$$

<u>Veamos que si</u>

$$\underline{N_p(f_X^j) = N_p(f_X^j(x_1), f_X^j(x_2)) = \sum_{k=1}^{2} m_k(f_X^j(x_k))\, p(x_k)}$$

<u>entonces</u> N_p <u>es una Medida de Nitidez de valoración para sucesos difusos</u>

Es inmediato, que N_p es una medida de Nitidez para sucesos difusos, veamos que es de valoración.

Será suficiente probar que

$$N_p(f^J_X(x_1),f^J_X(x_2)) = N_p(f^J_X(x_1),0) + N_p(0,f^J_X(x_1)) - 1$$

ahora bien

$$N_p(f^J_X(x_1),f^J_X(x_2)) = p(x_1)\, m_1(f^J_X(x_1)) + p(x_2)\, m_2(f^J_X(x_2)) =$$

$$= p(x_1) \left(\frac{N_p(f^J_X(x_1),0) - p(x_2)}{p(x_1)} \right) + p(x_2) \left(\frac{N_p(0,f^J_X(x_2)) - p(x_1)}{p(x_2)} \right) =$$

$$= N_p(f^J_X(x_1),0) + N_p(0,f^J_X(x_2)) - 1$$

con lo cual queda demostrado el teorema para n=2.

Veamos que el teorema es cierto para n=3.

<u>Si N_p es una Medida de Nitidez de valoración para sucesos difusos, entonces</u>

<u>$p=(p(x_1),p(x_2),p(x_3))$ $\qquad N_p(f^J_X) = \sum_{k=1}^{3} m_k(f^J_X(x_k))\, p(x_k)$</u>

Por ser N_p una Medida de Nitidez de valoración, se tiene que

$$N_p(f^J_X) = N_p(f^J_X(x_1),0,0) + N_p(0,f^J_X(x_2),f^J_X(x_3)) - 1$$

Definimos la función

$$H_q(f^j_X(x_1), f^j_X(x_2)) = N_p(f^j_X(x_1), f^j_X(x_2), 0)$$

donde

$$q = \left(p(x_1) + \frac{p(x_3)}{2} ,\ p(x_2) + \frac{p(x_3)}{2} \right)$$

Es inmediato comprobar que H es una Medida de Nitidez para sucesos difusos. Veamos que es de valoración.

Al ser N_p por hipótesis una Medida de Nitidez de valoración, se tiene

$$N_p(f^j_X(x_1), f^j_X(x_2), f^j_X(x_3)) = N_p(f^j_X(x_1), 0, 0) + N_p(0, f^j_X(x_2), f^j_X(x_3)) - 1$$

haciendo $f^j_X(x_3) = 0$, tenemos

$$N_p(f^j_X(x_1), f^j_X(x_2), 0) = N_p(f^j_X(x_1), 0, 0) + N_p(0, f^j_X(x_2), 0) - 1$$

y por la definición de H se llega a que

$$H_q(f^j_X(x_1), f^j_X(x_2)) = H_q(f^j_X(x_1), 0) + H(0, f^j_X(x_2)) - 1$$

Por tanto queda probado que H es una Medida de Nitidez de valoración para sucesos difusos.

Como el teorema es cierto para n=2, se tiene que

$$H_q(f^j_X(x_1), f^j_X(x_2)) = \sum_{k=1}^{2} G_k(f^j_X(x_k))\, q(x_k)$$

donde

$$G_1(f_X^J(x_1)) = \frac{N_p(f_X^J(x_1),0,0) - p(x_2) - p(x_3)\ /\ 2}{p(x_1) - p(x_3)\ /\ 2}$$

$$G_2(f_X^J(x_2)) = \frac{N_p(0,f_X^J(x_2),0) - p(x_1) - p(x_3)\ /\ 2}{p(x_2) - p(x_3)\ /\ 2}$$

y si aplicamos el Lema enunciado anteriormente, tenemos

$$N_p(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),f_X^J(x_3)) = N_p(0,0,f_X^J(x_3)) + N_p(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),0) - 1 =$$

$$= N_p(0,0,f_X^J(x_3)) + H_q(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2)) - 1 =$$

$$= N_p(0,0,f_X^J(x_3)) + H_q(f_X^J(x_1),0) + H_q(0,f_X^J(x_2)) - 2 =$$

$$= N_p(0,0,f_X^J(x_3)) + N_p(f_X^J(x_1),0,0) + N_p(0,f_X^J(x_2),0) - 2.$$

Definiendo:

$$m_1 : \Pi(x_1) \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

$$f_X^J(x_1) \longrightarrow m_1(f_X^J(x_1)) = \frac{N_p(f_X^J(x_1),0,0) - p(x_1) - p(x_3)}{p(x_1)}$$

$$m_2 : \Pi(x_2) \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

$$f_X^J(x_1) \longrightarrow m_2(f_X^J(x_2)) = \frac{N_p(0,f_X^J(x_2),0) - p(x_1) - p(x_3)}{p(x_2)}$$

$$m_3 : \Pi(x_3) \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$

$$f_X^j(x_3) \longrightarrow m_3(f_X^j(x_3)) = \frac{N_p(0,0,f_X^j(x_3)) - p(x_1) - p(x_2)}{p(x_3)}$$

se comprueba fácilmente que

$$N_p(f_X^j) = \sum_{k=1}^{3} m_k(f_X^j(x_k))\ p(x_k)$$

y que las $m_k(f_X^j(x_k))$ son medidas puntuales de Nitidez con lo cual queda demostrado.

Demostraremos ahora el recíproco, es decir, si

$$N_p(f_X^j) = \sum_{k=1}^{3} m_k(f_X^j(x_k))\ p(x_k)$$

donde las m_k son medidas puntuales de Nitidez, entonces N_p es una Medida de Nitidez de valoración para sucesos difusos.

Es inmediato comprobar que N_p cumple las cuatro propiedades de Medida de Nitidez para sucesos difusos . Veamos que es valoración, en efecto:

Sabemos que

$$N_p(f_X^j) = \sum_{k=1}^{3} m_k(f_X^j(x_k))\ p(x_k)$$

Si hacemos $f_X^j(x_3) = 0$, tenemos que

$$N_p(f_X^j(x_1),f_X^j(x_2),0) = p(x_1)\ m_1\ (f_X^j(x_1)) + p(x_2)\ m\ (f_X^j(x_2)\ ) + p(x_3)$$

análogamente si hacemos $f_X^J(x_1) = 0$, $f_X^J(x_2) = 0$, tenemos que

$$N_p(0,0,f_X^J(x_3)) = p(x_1) + p(x_2) + p(x_3)\ m_3\ (f_X^J(x_3))$$

de donde resulta

$$N_p(f_X^J) = \sum_{k=1}^{3} m_k(f_X^J(x_k))\ p(x_k) = N_p(f_X^J(x_1),f_X^J(x_2),0) + N_p(0,0,f_X^J(x_3)) - 1$$

Análogamente se demostraría que

$$N_p(f_X^J) = N_p(0,f_X^J(x_1),f_X^J(x_3)) + N_p(f_X^J(x_1),0,0) - 1$$

con lo cual queda demostrado que N_p es valoración y el teorema es cierto para n=3.

Tenemos que demostrar que N_p es una Medida de Nitidez de valoración para sucesos difusos si y solo si

$$N_p(f_X^J) = \sum_{i=1}^{k} m_i(f_X^J(x_i))\ p(x_i)$$

donde las m_i son medidas puntuales de Nitidez.

Veamos que si N_p es una Medida de Nitidez de valoración, entonces

$$N_p(f_X^J) = \sum_{i=1}^{k} m_i(f_X^J(x_i))\ p(x_i)$$

Definimos

$$H_q(f_X^j(x_1),\ldots\ldots,f_X^j(x_{k-1})) = N_p(f_X^j(x_1),\ldots\ldots,f_X^j(x_{k-1}),0)$$

donde

$$q = \left(p(x_1) + \frac{p(x_k)}{K-1},\ldots\ldots,\frac{p(x_k)}{k-1} + p(x_{k-1})\right)$$ es la distribución

de probabilidad asociada a $(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_{k-1})$ y $p=(p(x_1),\ldots\ldots,p(x_k))$.

Se comprueba fácilmente que H es una Medida de Nitidez de valoración por lo tanto podemos aplicar la hipótesis de inducción y tenemos

$$N_p(f_X^j(x_1),f_X^j(x_2),\ldots,f_X^j(x_{k-1}),0) = H_q(f_X^j(x_1),\ldots,f_X^j(x_{k-1})) = \sum_{i=1}^{k-1} G_i(f_X^j(x_i))q(x_i) =$$

$$= H_q(f_X^j(x_1),0,\ldots,0) + H_q(0,f_X^j(x_2),0,\ldots,0) + \ldots + H_q(0,\ldots,0,f_X^j(x_{k-1})) - (k-2)$$

donde

$$G_i(f_X^j(x_i)) = \frac{H_q(0,\ldots,f_X^j(x_i),\ldots,0) - p(x_1) - \ldots - p(x_{i-1}) - p(x_{i+1}) - \ldots - p(x_{k-1}) - \frac{p(x_k)}{k-1}}{p(x_i) + p(x_k)\ /\ (k-1)}$$

aplicando el Lema,

$$N_p(f_X^j) = N_p(\overset{(k-1}{0,\ldots,0},f_X^j(x_k)) + N_p(f_X^j(x_1),\ldots,f_X^j(x_{k-1}),0) - 1 =$$

$$= N_p(\overset{(k-1}{0,\ldots\ldots,0},f_X^j(x_k)) + H_q(f_X^j(x_1),\ldots,f_X^j(x_{k-1})) - 1 =$$

$$= N_p(0,\ldots,0,f_X^j(x_k)) + N_p(f_X^j(x_1),0,\ldots,0) + \ldots\ldots + N_p(0,\ldots,0,f_X^j(x_{k-1}),0) - (k-1)$$

y definiendo

$$m_i(f_X^j(x_i)) = \frac{N_p(0,..,f_X^j(x_i),..,0)-p(x_1)-p(x_2)- \,..\, -p(x_{i-1})-p(x_{i-1})- \,..\, -p(x_k)}{p(x_i)}$$

obtenemos

$$N_p(f_X^j) = \sum_{i=1}^{k} m_i(f_X^j(x_i))\; p(x_i)$$

De la misma forma que para n=3 se demostraría que las m_i i=1,...,k son medidas puntuales de Nitidez.

Por último , omitimos la demostración por ser análoga al caso n=3,el recíproco , es decir

$$N_p(f_X^j) = \sum_{i=1}^{k} m_i(f_X^j(x_i))\; p(x_i)$$

donde las m_i son medidas puntuales de Nitidez, entonces N_p es una Medida de Nitidez de valoración para sucesos dIfusos.

III.2.- LA ENERGIA INFORMACIONAL COMO MEDIDA DE INFORMACION PARA SUCESOS DIFUSOS

Comenzaremos dando las definiciones de Energía Informacional de un conjunto difuso, Energía Informacional condicionada y Energía I Informacional conjunta de dos sucesos difusos, para posteriormente pasar a analizar las propiedades y relaciones entre éstas.

III.2.1.- ENERGIA INFORMACIONAL DE UN SUCESO DIFUSO

Se denomina Energía Informacional de un suceso difuso $\underset{\sim}{X}^j$, a la expresión

$$\underset{\sim}{e}(\underset{\sim}{X}^j) = (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j))^2$$

Es obvio que la expresión anterior toma valores entre 1/4 y 1, alcanzando el valor 1, cuando $\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j)$ ó $\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j)$ toma el valor 1, es decir, cuando el suceso $\underset{\sim}{X}^j$ o su complementario coincide con $\underset{\sim}{X}$, y alcanza el valor 1/4 cuando la probabilidad del suceso difuso $\underset{\sim}{X}^j$ y la de su complementario toman el valor 1/2.

III.2.2.- ENERGIA INFORMACIONAL CONDICIONADA

Se denomina Energía Informacional del suceso difuso $\underset{\sim}{X}^j$, condicionada por el suceso $\underset{\sim}{X}^k$, a la expresión

$$\underset{\sim}{e}(\underset{\sim}{X}^j/\underset{\sim}{X}^k) = \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k)\ \underset{\sim}{e}_1(\underset{\sim}{X}^j/\underset{\sim}{X}^k) + \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^k)\ \underset{\sim}{e}_2(\underset{\sim}{X}^j/\underset{\sim}{\bar{X}}^k)$$

donde

$$\underset{\sim}{e}_1(\underset{\sim}{X}^j/\underset{\sim}{X}^k) = (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j/\underset{\sim}{X}^k))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j/\underset{\sim}{X}^k))^2$$

y

$$\underset{\sim}{e}_2(\underset{\sim}{X}^j/\underset{\sim}{\bar{X}}^k) = (P(\underset{\sim}{X}^j/\underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2 + (P(\underset{\sim}{\bar{X}}^j/\underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2$$

III.2.3.- ENERGIA INFORMACIONAL CONJUNTA

Se denomina Energía Informacional conjunta de los sucesos $\underset{\sim}{X}^j$ y $\underset{\sim}{X}^k$ a la expresión.

$$\underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^j x \underset{\sim}{X}^k) = (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j x \underset{\sim}{X}^k))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j x \underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j x \underset{\sim}{X}^k))^2 + (P(\underset{\sim}{\bar{X}}^j x \underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2$$

III.2.4.-RELACIONES EXISTENTES ENTRE LA ENERGIA INFORMACIONAL , ENERGIA INFORMACIONAL CONDICIONADA Y ENERGIA INFORMACIONAL CONJUNTA.

Veamos a continuación un teorema que nos relaciona los tres conceptos anteriores.

III.2.4.1.- TEOREMA

Dados los sucesos difusos $\underset{\sim}{X}^j$ y $\underset{\sim}{X}^k$ la Energía Informacional para sucesos difusos verifica las siguientes relaciones:

III.2.4.1.1.- $\underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^j / \underset{\sim}{X}^k) \geq \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^j)$, dandose la igualdad si $\underset{\sim}{X}^j$ y $\underset{\sim}{X}^k$ son sucesos difusos independientes.

III.2.4.1.2.- Si los sucesos difusos $\underset{\sim}{X}^j$ y $\underset{\sim}{X}^k$ son independientes entonces

$$\underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^j x \underset{\sim}{X}^k) = \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^j) \times \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^k)$$

III.2.4.1.3.- $\underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^j x \underset{\sim}{X}^k) \leq \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^j / \underset{\sim}{X}^k)$

$$\underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^j x \underset{\sim}{X}^k) \leq \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^k / \underset{\sim}{X}^j)$$

III.2.4.1.4.- $\underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^j x \underset{\sim}{X}^k) \leq \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^j) + \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^k)$

Demostración:

III.2.4.1.1.- Consideremos la función convexa

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

donde x e y son variables aleatorias no difusas tomando x los valores

$$\utilde{P}(\utilde{X}^j/\utilde{X}^k) \quad y \quad \utilde{P}(\utilde{X}^j/\utilde{X}^k)$$

con probabilidades respectivas

$$\utilde{P}(\utilde{X}^k) \quad y \quad \utilde{P}(\utilde{\bar{X}}^k)$$

e y toma los valores

$$\utilde{P}(\utilde{\bar{X}}^j/\utilde{X}^k) \quad y \quad \utilde{P}(\utilde{\bar{X}}^j/\utilde{\bar{X}}^k)$$

con probabilidades respectivas

$$\utilde{P}(\utilde{X}^k) \quad y \quad \utilde{P}(\utilde{\bar{X}}^k).$$

La esperanza de cada variable aleatoria, será:

$$E(x) = \utilde{P}(\utilde{X}^k)\,\utilde{P}(\utilde{X}^j/\utilde{X}^k) + \utilde{P}(\utilde{\bar{X}}^k)\,\utilde{P}(\utilde{X}^j/\utilde{\bar{X}}^k) =$$

$$= \utilde{P}(\utilde{X}^j x \utilde{X}^k) + \utilde{P}(\utilde{X}^j x \utilde{\bar{X}}^k) = \utilde{P}(\utilde{X}^j)$$

$$E(y) = \utilde{P}(\utilde{X}^k)\,\utilde{P}(\utilde{\bar{X}}^j/\utilde{X}^k) - \utilde{P}(\utilde{\bar{X}}^j/\utilde{\bar{X}}^k)\,\utilde{P}(\utilde{\bar{X}}^k) =$$

$$= \utilde{P}(\utilde{\bar{X}}^j x \utilde{\bar{X}}^k) + \utilde{P}(\utilde{\bar{X}}^j x \utilde{\bar{X}}^k) = \utilde{P}(\utilde{\bar{X}}^j)$$

Por otra parte

$$f(\,E(x),E(y)\,) = (\,\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j})\,)^2 + (\,\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j})\,)^2$$

$$E(\,f(x,y)) = E(x^2) + E(y^2) =$$

$$= (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j}/\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}))^2\,\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}) + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{j}/\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}))^2\,\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}) + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{j}/\underset{\sim}{X}^{k}))^2\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{k}) + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{j}/\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}))^2\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}) =$$

$$= \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{k})((\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j}/\underset{\sim}{X}^{k}))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j}/\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}))^2) + \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{k})\,((\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j}/\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{j}/\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}))^2).$$

Aplicando la desigualdad de Jenssen, tenemos

$$E(\,f(x,y)\,) \geq f(\,E(x)\,,\,E(y)\,)$$

y sustituyendo ambos valores por sus expresiones correspondientes calculadas anteriormente, se tiene:

$$\underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^{j}/\underset{\sim}{X}^{k}) \geq \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^{j})$$

Veamos que se da la igualdad en caso de independencia de los sucesos difusos $\underset{\sim}{X}^{j}$ e $\underset{\sim}{X}^{k}$.

$$\underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^{j}/\underset{\sim}{X}^{k}) = (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j}/\underset{\sim}{X}^{k}))^2\,\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{k}) + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j}/\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}))^2\,\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}) +$$

$$+ (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{j}/\underset{\sim}{X}^{k}))^2\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{k}) + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{j}/\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}))^2\,\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}) =$$

$$= (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j})^2)\,\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{k}) + \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{k})\,(\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j})^2) + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{j}))^2\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{k}) + \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{j})^2\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}) =$$

$$= \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{k})\,(\,\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j})^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{j}))^2\,) + \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{k})((\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{j}))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}))^2) =$$

$$= (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k) + \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k))((\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j))^2) =$$

$$= \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^j).$$

III.2.4.1.2.-

$$\mathbf{e}(\underset{\sim}{X}^j \times \underset{\sim}{X}^k) = (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j \times \underset{\sim}{X}^k))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j \times \underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j \times \underset{\sim}{X}^k))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j \times \underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2 =$$

$$= (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j))^2(\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j))^2(\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j))^2(\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k))^2 +$$

$$+ (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j))^2(\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2 =$$

$$=(\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j))^2((\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2) + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j))^2((\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2) =$$

$$=((\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2) \quad ((\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j))^2 + ((\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j))^2) =$$

$$= \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^j) \times \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^k) .$$

III.2.4.1.3.-

$$\underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^j \times \underset{\sim}{X}^k) = (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j \times \underset{\sim}{X}^k))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j \times \underset{\sim}{\bar{X}}^k)^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j \times \underset{\sim}{X}^k))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j \times \underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2 =$$

$$= (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j / \underset{\sim}{X}^k))^2 \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k)^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j / \underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2(\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2 +$$

$$+ (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j / \underset{\sim}{X}^k))^2 (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k))^2 + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j / \underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2 (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2 \leq$$

$$\leq (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j / \underset{\sim}{X}^k))^2 \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k) + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^j / \underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2 \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^k) +$$

$$+ (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j / \underset{\sim}{X}^k))^2 \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^k) + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^j / \underset{\sim}{\bar{X}}^k))^2 \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^k) = \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^j / \underset{\sim}{X}^k).$$

Análogamente

$$\underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^{j} \times \underset{\sim}{X}^{k}) \leq \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^{k} / \underset{\sim}{X}^{j})$$

III.2.4.1.3.-

$$\underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^{j} \times \underset{\sim}{X}^{k}) = (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j} \times \underset{\sim}{X}^{k}))^{2} + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j} \times \underset{\sim}{\bar{X}}^{k}))^{2} + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{j} \times \underset{\sim}{X}^{k}))^{2} + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{j} \times \underset{\sim}{\bar{X}}^{k}))^{2} \leq$$

$$\leq (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j} / \underset{\sim}{X}^{k}))^{2} \; (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{k}))^{2} + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j} / \underset{\sim}{\bar{X}}^{k}))^{2} \; (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}))^{2} +$$

$$+ (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{k} / \underset{\sim}{X}^{j})) \; (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j}))^{2} + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{k} / \underset{\sim}{\bar{X}}^{j})) \; (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{j}))^{2} \leq$$

$$\leq (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{k}))^{2} + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{k}))^{2} + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}^{j}))^{2} + (\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\bar{X}}^{j}))^{2} = \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^{j}) + \underset{\sim}{\mathbf{e}}(\underset{\sim}{X}^{k}).$$

Pág.

CAPITULO IV

" DECISIONES DE GRUPO CON PRERENCIAS INDIVIDUALES DIFUSAS "

IV.0.- Sumario 98

IV.1.- Planteamiento de un problema de decisión de grupo con preferencias individuales difusas 100

IV.1.1.- Elementos de un problema de decisión de grupo con preferencias individuales difusas 100

IV.1.2.- Algunas consideraciones acerca de la matriz de consenso 103

IV.2.- Características de la función de bienestar social .Teorema con órdenes de preferencias individuales difusas... 105

IV.2.1.- Características de la función de bienestar social 108

IV.2.2.- Algunas consecuencias obtenidas a partir de las características impuestas a la función de bienestar social................................. 111

IV.2.3.- Teorema de Imposibilidad con órdenes de preferencias individuales difusas.................. 121

IV.- SUMARIO

Este capítulo está dedicado al estudio de los procesos de decisión de grupo con preferencias individuales difusas.

Son importantes los estudios realizados hasta la fecha en Teoría de la Decisión en los que se tiene en cuenta la difusidad.A modo de resumen y teniendo en cuenta la clasificación que dio KICKER (1.978) de los procesos de decisión unietápicos, según su contenido matemático,exponemos en el cuadro I incluido al final del Sumario de este capítulo, las contribuciones más importantes hechas en la Teoría Difusa de la Decisión para procesos unietápicos.

Comenzamos este capítulo con el planteamiento del problema de decisión, analizando cada uno de sus elementos y resaltando la diferencia entre preferencias individuales difusas y no difusas del caso clásico .A continuación exponemos algunas consideraciones acerca de la matriz de consenso, utilizando las Medidas de Nitidez vistas en el capitulo II,para cuantificar si las opiniones del grupo evolucionan hacia una matriz de consenso con máxima o mínima nitidez.

Finalizamos este capítulo demostrando la inexistencia de una función de bienestar social para un problema de decisión de grupo con preferencias individuales difusas, previo establecimiento de cinco condiciones que consideramos son la traducción de las dadas por Arrow en el caso de preferencias no difusas.

TEORIA DIFUSA DE LA DECISION	TEORIA CLASICA	CONTRIBUCIONES EN LA TEORIA DIFUSA DE LA DECISION
Maximización de la Utilidad esperada	Teoría de la Decisión Estadística	Jain, R. (I976) Asai, T; Tanaka, H.; Okuda, T. (I976,I977)
Optimización bajo restricciones	Programación Matemática	Zadeh, L.A. and Bellman, R.E. (I974) Tanaka, H.; Asai, T.; Okuda, T. (I974) Negoita, C.V. and Ralescu, D.A. (I976)
Optimización von n-personas	Teoría de Juegos	Butnariu, D. (I978, I979) Aubin, J.P. (I974) Nurmi, H. (I976,I977)
	Decisiones de Grupo	Bezdek, J.C. (I977, I978) Bezdek, J. C. and Spillmann, B. (I977,I978) Blin, J. (I974) Skala, H.J. (I978) Blin, J. and Whinston, A. (I973)
	Teoría de Equipos	Nojiri, H. (I979)
Optimización con multicriterios.	Decisiones con multicriterios	Blin, J. (I979)

CUADRO I

IV.1.- PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA DE DECISION DE GRUPO CON PREFERENCIAS INDIVIDUALES DIFUSAS.

Vamos a formular un problema de decisión de grupo con preferencias individuales difusas, siguiendo el camino que utilizó Arrow en el caso de preferencias no difusas.

IV.1.1.- ELEMENTOS DE UN PROBLEMA DE DECISION DE GRUPO CON PREFERENCIAS INDIVIDUALES DIFUSAS.

En un problema de decisión de grupo con preferencias individuales difusas, podemos distinguir cuatro elementos fundamentales en su desarrollo : Conjunto de alternativas, Conjunto de individuos, Preferencias individuales, que como veremos posteriormente serán relaciones binarias difusas, en el conjunto de alternativas , relexivas y transitivas y Funciones Sociales.

Vamos a analizar estos cuatro elementos en nuestro problema:

IV.1.1.1.- CONJUNTO DE ALTERNATIVAS

Este elemento no difiere en nada, al correspondiente clásico de Arrow, así pues, consideraremos un conjunto de alternativas

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

IV.1.1.2.- CONJUNTO DE INDIVIDUOS

Consideraremos que son k los individuos que van a intervenir en el problema

$$J = \{J_1, \dots, J_k\}$$

IV.t.1.3.- PREFERENCIAS INDIVIDUALES

Aquí es donde radica la gran diferencia respecto al problema clásico de decisión de grupo de Arrow, ya que según éste en Λ está definida una relación binaria de preferencias, que en términos de la función característica se puede expresar como una función

$$f : \Lambda \times \Lambda \longrightarrow \{0\ ,\ 1\}$$

mientras que nosotros tendremos definida una relación binaria difusa $\underset{\sim}{R}$, que en términos de la función de pertenencia vendrá expresada por

$$\begin{aligned} f_{\underset{\sim}{R}} : \Lambda \times \Lambda &\longrightarrow [0\ ,\ 1] \\ (a_i, a_j) &\longrightarrow f_{\underset{\sim}{R}}(a_i, a_j) \end{aligned}$$

donde $f_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j)$ representa el grado de intensidad en que "a_i" es preferido a "a_j" según la relación binaria difusa $\underset{\sim}{R}$; por ello las preferencias individuales difusas vendrán representadas por relaciones binarias difusas, que podemos expresar mediante matrices. Impondremos a estas relaciones que sean reflexivas y transitivas, es decir, un preorden difuso.

Así un orden de preferencias difusas para el individuo t se podrá representar mediante una matriz

$$\underset{\sim}{R}^t = \left(f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_r, a_s) \right)_{\substack{r=1,\ldots,n \\ s=1,\ldots,n}}$$

con

$$f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_s, a_s) = 1 \qquad \forall\ s$$

y

$$f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_i,a_j) \geq \max_{a_k \in A} \left\{ \min \left(f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_i,a_k), f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_k,a_j) \right) \right\} \qquad \forall\, a_i,a_j,a_k \in A$$

El conjunto de todos los posibles órdenes individuales difusos, vendrá dado por

$$\underset{\sim}{Z} = \left\{ \underset{\sim}{R}^t \in M_{nxn} \;/\; 0 \leq f_{\underset{\sim}{R}}(a_r,a_s) \leq 1 \;;\; f_{\underset{\sim}{R}}(a_r,a_r) = 1 \;; \right.$$
$$\left. f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_i,a_j) \geq \max_{a_k \in A} \left\{ \min \left(f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_i,a_k), f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_k,a_j) \right) \right\} \right\}$$

DEFINICION

Un perfil de preferencias difusas es una k-upla de órdenes de preferencia individuales difusos

$$(\underset{\sim}{R}^1, \ldots, \underset{\sim}{R}^k)$$

El conjunto de todos los posibles perfiles de preferencia, se denota por

$$\underset{\sim}{Z}^{(k)} = \underset{\sim}{Z} \times \overset{(k}{\ldots} \times \underset{\sim}{Z}$$

IV.1.1.4.- FUNCION SOCIAL

Se denominará función de elección a toda función que asocie a cada perfil de órdenes de preferencias difusas (por tanto a cada elemento de $\underset{\sim}{Z}^{(k)}$) un orden de preferencias difusas para la sociedad; es decir

$$(\underset{\sim}{R}^1,\dots,\underset{\sim}{R}^k) \xrightarrow{f} \underset{\sim}{R} \in \mathcal{Z}$$

La imagen de un perfil $(\underset{\sim}{R}^1,\dots,\underset{\sim}{R}^k)$ mediante una función de elección social vendrá representada por otro perfil que explicitamente viene dado por

$$\underset{\sim}{R} = \begin{pmatrix} 1 & f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_1,a_2) & \dots\dots & f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_1,a_n) \\ f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_2,a_1) & 1 & \dots\dots & f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_2,a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_n,a_1) & f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_n,a_2) & \dots\dots & 1 \end{pmatrix}$$

donde $f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j)$ representa el grado de intensidad en que a_i es preferido a a_j por el grupo ; a esta matriz la denominaremos MATRIZ DE CONSENSO.

IV.1.2.- ALGUNAS CONSIDERACIONES ACERCA DE LA MATRIZ DE CONSENSO

Parece lógico preguntarse si a lo largo de las discusiones establecidas por el grupo para alcanzar un consenso, éstas evolucionan hacia una situación en la cual los órdenes de preferencias son no difusos, máxima nitidez, o por el contrario evolucionan hacia una situación de máxima difusidad, mínima nitidez. En cualquiera de los dos casos, una vez establecido el consenso, cabe preguntarse si es posible encontrar alguna alternativa que no esté dominada por las demás y en qué condiciones la intensidad de preferencia entre esta alternativa y cualquier otra es no difusa.

En cuanto a la evolución del grupo hacia una situación de máxima o mínima nitidez, daremos una posible solución al utilizar las Medidas de Nitidez vistas en el capítulo II para cuantificar númericamente la evolución de las discusiones del grupo. En lo que se refiere a la existencia de alternativas no dominadas, Orloksky (1.978) ha realizado un interesante e importante estudio sobre ello.

IV.1.2.1.- LAS MEDIDAS DE NITIDEZ COMO INDICE DE LA EVOLUCION DE LAS OPINIONES DEL GRUPO HACIA LA MATRIZ DE CONSENSO

El objetivo de este apartado es cuantificar númericamente en cualquier instante de la discusión del grupo si las opiniones de éste evolucionan hacia una matriz de consenso donde la intensidad de preferencias entre las alternativas es de máxima o mínima nitidez.

Es obvio, que cualquier Medida de Nitidez vista en el capítulo II sería útil a tal fin ya que al ser una relación difusa en X un conjunto difuso en XxX, el cuantificar la evolución de las discusiones del grupo en un momento determinado consistirá en calcular la nitidez de la relación binaria difusa que represente en ese momento la opinión del grupo , o lo que es lo mismo, medir la nitidez de un conjunto difuso en XxX.

Si designamos por $\underset{\sim}{\mathbf{R}}$ el conjunto de todas las relaciones binarias difusas en X, una medida de la nitidez de la relación binaria difusa que represente la opinión del grupo en un instante determinado vendrá dada por una función $N_{\underset{\sim}{R}}$ definida de $\underset{\sim}{\mathbf{R}}$ en $[0 , 1]$, verificando II.1.2.1 , II.1.2.2 , II.1.2.3 y II.1.2.4.

Nosotros concretamente proponemos utilizar la medida N_o

que como vimos en el capítulo II se obtiene a partir del funcional de Onicescu , que en este caso concreto viene dada por

$$N_o(\underset{\sim}{R}) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \left((f_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j))^2 + (1-f_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j))^2 \right) \qquad \forall \; \underset{\sim}{R} \in \underset{\sim}{\mathcal{R}}$$

Es inmediato comprobar que N_o alcanza el valor mínimo $(1 + ((1/4)(N-1)) / N)$, cuando las opiniones del grupo vienen dadas por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

es decir , cuando la relación de preferencia del grupo es de mínima nitidez. N_o alcanza el valor máximo 1 cuando las intensidades de preferencia entre las alternativas son cero o uno , es decir, no difusas.Es obvio que cuanto más próximo a 1 esté la medida N_o menos difusa será la situación del grupo.

IV.2.- CARACTERISTICAS DE LA FUNCION DE BIENESTAR SOCIAL. TEOREMA DE IMPOSIBILIDAD CON ORDENES DE PREFERENCIA INDIVIDUALES DIFUSOS.

Hemos planteado el problema de decisión de grupo con preferencias individuales difusas analizando la matriz de consenso sin ocuparnos de como se pueden construir funciones sociales con unos requerimientos mínimos que amalgamando las opiniones individuales permitan establecer la matriz de consenso.

Es obvio que son muchas las funciones sociales que se pueden construir, ahora bien, nosotros tratamos de construir funciones de Bienestar Social y por ello impondremos algunas condiciones razonables a esta función . De igual forma que ocurre en el caso clásico , la denominada regla de la Mayoría Simple nos conduce a preferencias para el grupo intransitivas , siendo transitivas las preferencias individuales.

Entendemos como regla de la Mayoría Simple aquella función de Bienestar Social que da como preferencias para el grupo una relación binaria difusa definida por :

$$f^{G}_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) = \frac{r}{k} \qquad \forall\ (a_i,a_j) \in A \times A$$

donde r representa el número de individuos para los que se verifica

$$f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_j,a_i)$$

Sea $A = \left\{ a_1, a_2, a_3 \right\}$, $J = \left\{ J_1, J_2, J_3 \right\}$ y consideremos el perfil de preferencias

$$\underset{\sim}{R}_1 = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ a_2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}6 \\ a_3 & 0{,}3 & 0{,}3 & 1 \end{array} \quad \underset{\sim}{R}_2 = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0{,}5 & 0{,}9 \\ a_2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}8 \\ a_3 & 0{,}3 & 0{,}3 & 1 \end{array} \quad \underset{\sim}{R}_3 = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ a_2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}3 \\ a_3 & 0{,}7 & 0{,}7 & 1 \end{array}$$

es inmediato que

$$\left(f^{G}_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j)\right)_{\substack{i=1,\dots,3\\ j=1,\dots,3}} = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 2/3 \\ a_2 & 1/3 & 1 & 2/3 \\ a_3 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{array}$$

es intransitiva . Por lo tanto vemos que partiendo de un perfil de órdenes **de preferencias difusas en el que** cada orden de preferencias individual es **reflexivo y transitivo se llega** a un orden de preferencias para el grupo **reflexivo y no transitivo.**

Otro ejemplo de función social , muy sencillo, que da pa**ra el grupo una matriz de consenso** correspondiente a una relación de prefe**rencia binaria difusa intransitiva** siendo las preferencias individuales **transitivas, viene dada por**

$$f^{G}_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_i,a_j) \qquad \forall\ a_i,a_j \in A\times A$$

Para comprobarlo no hay más que considerar un grupo con **tres individuos cuyas preferencias** individuales difusas vienen dadas por

$$\underset{\sim}{R}_1 = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0,3 & 0,6 \\ a_2 & 0,7 & 1 & 0,7 \\ a_3 & 0,4 & 0,3 & 1 \end{array} \quad \underset{\sim}{R}_2 = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0,6 & 0,7 \\ a_2 & 0,4 & 1 & 0,7 \\ a_3 & 0,3 & 0,3 & 1 \end{array} \quad \underset{\sim}{R}_3 = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0,5 & 0,8 \\ a_2 & 0,5 & 1 & 0,8 \\ a_3 & 0,2 & 0,2 & 1 \end{array}$$

Obteniéndose como matriz de consenso aplicando la función social anterior

$$\left(f_R^G(a_i,a_j)\right)_{\substack{i=1,\dots,3\\ j=1,\dots,3}} = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & \frac{1,4}{3} & \frac{2,1}{3} \\ a_2 & \frac{1,6}{3} & 1 & \frac{2,2}{3} \\ a_3 & \frac{0,9}{3} & \frac{0,8}{3} & 1 \end{array}$$

que fácilmente se puede comprobar que no es transitiva.

Estos dos ejemplos vistos anteriormente sirven para hacernos una idea de que no es fácil encontrar funciones de bienestar social con unos requerimientos mínimos dados.

IV.2.1.- CARACTERISTICAS DE LA FUNCION DE BIENESTAR SOCIAL

IV.2.1.1.- (Dominio Universal)

(a) El número de alternativas en Λ es mayor o igual que tres.

(b) La función de bienestar social f está definida para todos los posibles perfiles de órdenes de preferencias difusas.

(c) El número de individuos es mayor o igual que dos

En la condición (a) el número tres juega un papel importante ya que las intransitividades solamente pueden tener lugar cuando Λ tenga tres o más elementos.

IV.2.1.2.- (Asociación positiva entre valores individuales y valores sociales).

Si dado un cierto perfil de órdenes de preferencias difusas

$$\underset{\sim}{R} = (\underset{\sim}{R}^1, \ldots\ldots, \underset{\sim}{R}^k)$$

se tiene que f afirma para $\underset{\sim}{R}$,

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i, a_j) \geq f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j, a_i)$$

entonces f afirma lo mismo , si el perfil de órdenes de preferencia anterior se modifica de la siguiente forma:

(a) No se cambian las intensidades de las relaciones de preferencias difusas individuales para cada dos alternativas en que entre a_i.

(b) La intensidad de las relaciones de preferencias difusas individuales entre a_i y cualquier otra alternativa permanece invariante o se cambia en favor de a_i.

IV.2.1.3.- (Independencia de alternativas irrelevantes)

Sea $A_1 \subset A$, dado el perfil de órdenes de preferencias difusas

$$\underset{\sim}{R}^* = (\underset{\sim}{R}^1, \ldots, \underset{\sim}{R}^k)$$

consideremos el perfil de órdenes de preferencia difusas

$$\underset{\sim}{S}^* = (\underset{\sim}{S}^1, \ldots, \underset{\sim}{S}^k)$$

construido a partir de $\underset{\sim}{R}^*$ modificando las intensidades de preferencia de los elementos que no estén en Λ_1 de cualquier forma y los de Λ_1 de la siguiente forma:

$$\forall \; a_i, a_j \in \Lambda_1 \text{ , si}$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_i,a_j) \gtreqless f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_i,a_j) \qquad \text{entonces} \quad f_{\underset{\sim}{}^t}(a_i,a_j) \gtreqless f_{S^t}(a_j,a_i) \;\forall\; t \in J$$

En estas condiciones se tiene lo siguiente:

Si para $\underset{\sim}{R}^*$ el grupo afirma

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) \gtreqless f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i) \qquad \forall\; a_i,a_j \in \Lambda_1$$

entonces para $\underset{\sim}{S}^*$ el grupo afirma

$$f^G_{\underset{\sim}{S}}(a_i,a_j) \gtreqless f^G_{\underset{\sim}{S}}(a_j,a_i) \qquad \forall\; a_i,a_j \in \Lambda_1$$

IV.2.1.4.- (Soberanía ciudadana o no imposición)

Para cada par de alternativas a_i, a_j de Λ , existe un perfil de órdenes de preferencias difusas R que da lugar a que el grupo tenga

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i)$$

IV.2.1.5.- (No dictadura)

No existe un individuo t de tal forma que si

$$f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_j,a_i) \qquad \text{para todo par } (a_i,a_j)$$

entonces el grupo afirma

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i)$$

sin tener en cuenta las intensidades de preferencia individuales difusas de los restantes individuos del grupo.

Vamos a demostrar varias proposiciones que son consecuencia de las características IV.2.1.1, IV.2.1.2, IV.2.1.4 y IV.2.1.5 impuestas a la función de bienestar social que serán de gran utilidad.

IV.2.2.- ALGUNAS CONSECUENCIAS OBTENIDAS A PARTIR DE LAS CARACTERISTICAS IMPUESTAS A LA FUNCION DE BIENESTAR SOCIAL .

Comenzaremos dando la definición de conjunto decisivo para un par de alternativas a_i,a_j de Λ ; a continuación demostraremos varias proposiciones relativas a esta definición como consecuencia de IV.2.1.1, IV.2.1.2, IV.2.1.3 , IV.2.1.4 y IV.2.1.5

IV.2.2.1.- DEFINICION

Dado un subconjunto C de individuos de J se dice que es decisivo para el par de alternativas a_i, a_j de Λ , si para cualquier perfil de órdenes de preferencias difusas

$$\underset{\sim}{R} = (\underset{\sim}{R}^1,\ldots\ldots,\underset{\sim}{R}^k) \qquad \text{de} \quad Z^{(k)}$$

que verifique

$$f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_j,a_i) \qquad \forall\ t \in C$$

se tiene para el grupo

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i) \qquad \text{IV.2.2.1.1.}$$

independientemente de las preferencias individuales difusas de los individuos de J-C.

IV.2.2.2.- PROPOSICION

Sea C un subconjunto de individuos de J, a_i,a_j dos alternativas de Λ . Entonces C es decisivo para a_i,a_j si y solo si para cualquier perfil de órdenes de preferencias difusas

$$\underset{\sim}{R} = (\underset{\sim}{R}^1,\ldots\ldots,\underset{\sim}{R}^k) \quad \text{de} \quad Z^{(k)}$$

para el cual se verifique

$$f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_j,a_i) \qquad \forall\ t \in C$$

$$\text{y} \qquad\qquad \text{IV.2.2.2.1}$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_i,a_j) < f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_j,a_i) \qquad \forall\ h \in J-C$$

se tiene para el grupo

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i)$$

Demostración:

Veamos la condición necesaria, es decir, si C es decisivo para las alternativas a_i, a_j, entonces

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i)$$

para cualquier perfil de órdenes de preferencias difusas

$$\underset{\sim}{R} = (\underset{\sim}{R}^1,\ldots\ldots,\underset{\sim}{R}^k) \text{ de } \mathcal{Z}^{(k)}$$

para el que se verifique

$$f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_j,a_i) \qquad \forall\ t \in C$$

y

$$f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_i,a_j) < f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_j,a_i) \qquad \forall\ h \in J\text{–}C$$

Por ser C decisivo para las alternativas a_i, a_j se tiene

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i)$$

para todo $\underset{\sim}{R}$ perteneciente a $\mathcal{Z}^{(k)}$, verificando

$$f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_j,a_i) \qquad \forall\ t \in C$$

sin tener en cuenta las preferencias individuales difusas de los individuos de J–C .Por tanto nuestra situación es un caso particular de ésta donde para todos los individuos h de J–C , se verifica

$$f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_i,a_j) < f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_j,a_i)$$

Veamos la condición suficiente , es decir, si se verifica para las alternativas a_i, a_j de Λ , IV.2.2.2.1 y se tiene para el grupo

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i)$$

entonces C es decisivo para las alternativas a_i, a_j.

Consideremos dos casos:

(a) Si en cualquier perfil $\underset{\sim}{R} \in \mathcal{Z}^{(k)}$ para todos los individuos h de J–C, se tiene

$$f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_i,a_j) < f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_j,a_i)$$

entonces es inmediato por hipótesis que C es decisivo para las alternativas a_i, a_j.

(b) Existe algún perfil $\underset{\sim}{R}_* \in \mathcal{Z}^{(k)}$ en el cual para todos los individuos h de J–C no se verifica

$$f_{\underset{\sim}{R}^h_*}(a_i,a_j) < f_{\underset{\sim}{R}^h_*}(a_j,a_i)$$

es decir, existe algún individuo m de J–C para el cual

$$f_{\underset{\sim}{R}^m_*}(a_i,a_j) \geq f_{\underset{\sim}{R}^m_*}(a_j,a_i)$$

Ahora bien , para todo perfil $\underset{\sim}{R}_*$ en el cual ocurra esto para un individuo m de J–C siempre podemos encontrar un perfil $\underset{\sim}{S}_*$ para el cual se tenga

$$f^{G}_{\underset{\sim}{S}*}(a_i,a_j) > f^{G}_{\underset{\sim}{S}_*}(a_j,a_i) \quad \text{a}$$

si

$$f_{\underset{\sim}{S}^t_*}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{S}^t_*}(a_j,a_i) \qquad \forall \quad t \in C$$

y

$$f_{\underset{\sim}{S}^h_*}(a_i,a_j) < f_{\underset{\sim}{S}^h_*}(a_j,a_i) \qquad \forall \quad h \in J\text{–}C$$

que modificado en la siguiente forma:

(a) Dejando invariantes las intensidades de las relaciones de preferencias difusas para los individuos de C.

(b) Cambiando las de los demás en favor de la alternativa a_i se obtenga $\underset{\sim}{R}_*$.

Por lo tanto como para $\underset{\sim}{S}_*$, se tiene

$$f^{G}_{\underset{\sim}{S}_*}(a_i,a_j) > f^{G}_{\underset{\sim}{S}_*}(a_j,a_i)$$

aplicando IV.2.1.2 , se llega a que

$$f^{G}_{\underset{\sim}{R}_*}(a_i,a_j) > f^{G}_{\underset{\sim}{R}_*}(a_j,a_i)$$

en definitiva C es decisivo para las alternativas a_i,a_j.

IV.2.2.3.- PROPOSICION

El conjunto total de individuos J es decisivo para dos alternativas cualesquiera a_i,a_j. Mientras que el $\emptyset$ no es decisivo para ningún a_i,a_j.

demostración:

Veamos primeramente que J es decisivo para dos alternativas a_i,a_j .

Consideremos dos alternativas a_i,a_j, hemos de probar que para todos los perfiles $\underset{\sim}{R} = (\underset{\sim}{R}^1,\ldots,\underset{\sim}{R}^k)$ en que

$$f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_j,a_i) \qquad \forall\ h \in J,$$

se tiene para el grupo

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i)$$

Demostrémoslo por reducción al absurdo. Supongamos que ello no es cierto, existirá por tanto algún perfil $\underset{\sim}{R} = (\underset{\sim}{R}^1,\ldots\ldots,\underset{\sim}{R}^k)$ en que

$$f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_j,a_i) \qquad \forall\ \ h=1,\ldots,k$$

y sin embargo, para el grupo se tenga

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) \leq f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i).$$

Existen dos posibilidades, a saber:

(a) Para todo perfil $\underset{\sim}{R} = (\underset{\sim}{R}^1,\ldots,\underset{\sim}{R}^k)$ en el que se verifique

$$f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_j,a_i) \quad \forall\ h \in J \qquad \text{IV.2.2.3.1.}$$

para el grupo se tenga

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) \leq f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i)$$

(b) Existe algún perfil de órdenes de preferencias difusas $\underset{\sim}{S} = (\underset{\sim}{S}^1,\ldots,\underset{\sim}{S}^k)$ para el cual se tiene

$$f_{\underset{\sim}{S}^h}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{S}^h}(a_j,a_i) \qquad \forall\ h \in J \quad \text{IV.2.2.3.2.}$$

mientras que para el grupo se tiene

$$f^G_{\underset{\sim}{S}}(a_i,a_j) \leq f^G_{\underset{\sim}{S}}(a_j,a_i).$$

Analicemos la situación (a):

Cualquier perfil de órdenes de preferencias difusas

$$\underset{\sim}{T} = (\underset{\sim}{T}^1,\ldots\ldots,\underset{\sim}{T}^k) \qquad \text{de } \mathcal{Z}^{(k)}$$

para el que no se verifique IV.2.2.3.1 , se podrá obtener a partir de uno en el que se verifique IV.2.2.3.1 sin más que favorecer las intensidades de preferencia hacia a_j respecto a a_i y dejando invariantes las demás intensidades , por tanto se tendrá

$$f^G_{\underset{\sim}{T}}(a_i,a_j) \leq f^G_{\underset{\sim}{T}}(a_j,a_i)$$

sin más que aplicar la condición IV.2.1.2.

Hemos llegado pues a que para todo perfil de órdenes de preferencias difusas $\underset{\sim}{T}$ verificando III.2.2.3.1. o no, se tiene

$$f^G_{\underset{\sim}{T}}(a_i,a_j) \leq f^G_{\underset{\sim}{T}}(a_j,a_i)$$

lo cual contradice la condición IV.2.1.4. y en consecuencia la situación (a), de la que habíamos partido, no se puede dar.

Analicemos la situación (b):

Dado cualquier perfil de órdenes de preferencias difusas S verificando IV.2.2.3.2 existen perfiles $\underset{\sim}{R}$ verificando IV.2.2.3.2 para los cuales

$$f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_j,a_i) \qquad \forall\ h \in J$$

Si consideramos el subconjunto de Λ , $\{a_i,a_j\} = \Lambda_1$ se llega a que siendo

$$f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_j,a_i) \qquad \forall\ h \in J$$

y

$$f_{\underset{\sim}{S}^h}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{S}^h}(a_j,a_i) \qquad \forall\ h \in J$$

el grupo tendría

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) \leq f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i)$$

$$f^G_{\underset{\sim}{S}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{S}}(a_j,a_i)$$

contradiciendo la condición IV.2.1.3.

Resumiendo , vemos que si suponemos que J no es decisivo para dos alternativas cualesquiera a_i, a_j se llega a dos situaciones absurdas por lo tanto J es decisivo para dos alternativas cualesquiera a_i, a_j.

Finalmente para concluir con esta proposición veamos que el conjunto vacío no es decisivo para ningún $a_i, a_j \in \Lambda$.

Supondremos que el conjunto vacío es decisivo para dos alternativas a_i, a_j , entonces por la proposición IV.2.2.2 , se tendría que

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i)$$

siempre que para los individuos h de $J-\phi=J$, se verificase

$$f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_i,a_j) < f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_j,a_i)$$

con lo cual llegaríamos a que J no es decisivo para las alternativas a_i, a_j , ya que

$$f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_i,a_j) < f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_j,a_i) \qquad \forall\ h \in J$$

mientras que para el grupo

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i)$$

I.2.2.4.- PROPOSICION

Sea C un subconjunto de individuos de J , a_i, a_j dos alternativas de Λ .Si existe algún perfil de órdenes de preferencias difusas $\underset{\sim}{R}$ perteneciente a $\mathcal{Z}^{(k)}$ para el que siendo

$$f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^t}(a_j,a_i) \quad \forall\ t \in C \qquad \text{IV.2.2.4.1}$$

y

$$f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_i,a_j) < f_{\underset{\sim}{R}^h}(a_j,a_i) \quad \forall\ h \in J\text{–}C$$

el grupo tiene

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i) \qquad \text{IV.2.2.4.2}$$

entonces C es decisivo para las alternativas a_i,a_j.

<u>Demostración</u>:

Nuestro problema consiste en demostrar que para todo perfil de órdenes de preferencias difusas $\underset{\sim}{S}$ perteneciente a $\mathcal{Z}^{(k)}$ para el que siendo

$$f_{\underset{\sim}{S}^t}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{S}^t}(a_j,a_i) \quad \forall\ t \in C$$

y

$$f_{\underset{\sim}{S}^h}(a_i,a_j) < f_{\underset{\sim}{S}^h}(a_j,a_i) \quad \forall\ h \in J\text{–}C$$

el grupo tenga

$$f^G_{\underset{\sim}{S}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{S}}(a_j,a_i)$$

Ahora bien, dado $\underset{\sim}{S} \in \mathcal{Z}^{(k)}$ y un $\underset{\sim}{R} \in \mathcal{Z}^{(k)}$ verificando IV.2.2.4.1 y IV.2.2.4.2 , se tiene que para todo $t \in C$

$$f_{S^t}(a_i,a_j) > f_{S^t}(a_j,a_i)$$

y

$$f_{R^t}(a_i,a_j) > f_{R^t}(a_j,a_i)$$

Consideremos $\Lambda = \{a_i,a_j\} \subset \Lambda_1$ y según la condición IV.1.2.3 , se tiene que

$$f^G_{\underset{\sim}{S}}(a_i,a_j) \gtrless f^G_{\underset{\sim}{S}}(a_j,a_i)$$

según que

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) \geq f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i)$$

y como

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i)$$

se sigue que

$$f^G_{\underset{\sim}{S}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{S}}(a_j,a_i)$$

IV.2.3.- TEOREMA DE IMPOSIBILIDAD CON ORDENES DE PREFERENCIA INDIVIDUALES DIFUSAS

Antes de ver este teorema es preciso demostrar dos lemas que serán necesarios posteriormente.

IV.2.3.1.- LEMA

Si $\underset{\sim}{R}$ es una relación difusa en $\Lambda = \{x,y,z\}$ reflexiva y transitiva verificando

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) > f_{\underset{\sim}{R}}(y,x)$$

y

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,z) > f_{\underset{\sim}{R}}(z,y)$$

entonces

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,z) > f_{\underset{\sim}{R}}(z,x)$$

Demostración:

Al ser $\underset{\sim}{R}$ una relación difusa transitiva, se verifica

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \geq \min\ (f_{\underset{\sim}{R}}(x,z)\ ,\ f_{\underset{\sim}{R}}(z,y)\ ) \qquad f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) \geq \min\ (f_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\ ,\ f_{\underset{\sim}{R}}(z,x)\ )$$

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,z) \geq \min\ (f_{\underset{\sim}{R}}(y,x)\ ,\ f_{\underset{\sim}{R}}(x,z)\ ) \qquad f_{\underset{\sim}{R}}(z,y) \geq \min\ (f_{\underset{\sim}{R}}(z,x)\ ,\ f_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\ )$$

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,x) \geq \min\ (f_{\underset{\sim}{R}}(z,y)\ ,\ f_{\underset{\sim}{R}}(y,x)\ ) \qquad f_{\underset{\sim}{R}}(x,z) \geq \min\ (f_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\ ,\ f_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\ )$$

Supongamos $f_{\underset{\sim}{R}}(z,x) > f_{\underset{\sim}{R}}(z,y)$. Al ser $\underset{\sim}{R}$ relación difusa transitiva se tiene

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,y) \geq \min\ (f_{\underset{\sim}{R}}(z,x),\ f_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\ )$$

de donde

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,y) \geq f_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$$

y como por hipótesis

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) > f_{\underset{\sim}{R}}(y,x)$$

se tiene

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,y) > f_{\underset{\sim}{R}}(y,x). \qquad \text{IV.2.3.1.1.}$$

Por otra parte sabemos por hipótesis que

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,y) < f_{\underset{\sim}{R}}(y,z)$$

y junto con IV.2.3.1.1 , tenemos

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) < f_{\underset{\sim}{R}}(y,z) . \qquad \text{IV.2.3.1.2.}$$

Del supuesto de que

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,x) > f_{\underset{\sim}{R}}(z,y)$$

y de IV.2.3.1.1. , se obtiene

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) < f_{\underset{\sim}{R}}(z,x) \qquad \text{IV.2.3.1.3.}$$

y de IV.2.3.1.2 y IV.2.3.1.3 , se obtiene

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) < \min\left(f_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\ ,\ f_{\underset{\sim}{R}}(z,x)\right)$$

lo cual está en contradicción con la transitividad de $\underset{\sim}{R}$; por lo tanto ha de cumplirse

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,x) \leq f_{\underset{\sim}{R}}(z,y) < f_{\underset{\sim}{R}}(y,z). \quad \text{IV.2.3.1.4.}$$

Supongamos

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,x) > f_{\underset{\sim}{R}}(y,x)$$

al ser $\underset{\sim}{R}$ relación difusa transitiva, se tiene

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) \geq \min\left(f_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\ ,\ f_{\underset{\sim}{R}}(z,x)\right)$$

de donde

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,z) \leq f_{\underset{\sim}{R}}(y,x)$$

y junto con

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,z) > f_{\underset{\sim}{R}}(z,y)$$

se llega a que

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,y) < f_{\underset{\sim}{R}}(y,x)\ . \quad \text{IV.2.3.1.5.}$$

Como por hipótesis

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) < f_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$$

y por verificarse IV.2.3.1.5. , se tiene

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,y) < f_{\underset{\sim}{R}}(x,y). \quad \text{IV.2.3.1.6.}$$

Del supuesto de que

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) < f_{\underset{\sim}{R}}(z,x)$$

y de IV.2.3.1.5 , se llega a

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,y) < f_{\underset{\sim}{R}}(z,x) \quad \text{IV.2.3.1.7.}$$

por tanto de IV.2.3.1.6 y IV.2.3.1.7. , se obtiene

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,y) < \min\,(f_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\ ,\ f_{\underset{\sim}{R}}(z,x)\ )$$

lo cual está en contradicción con la transitividad de $\underset{\sim}{R}$; en consecuencia

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,x) \leq f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) < f_{\underset{\sim}{R}}(x,y). \quad \text{IV.2.3.1.8.}$$

De IV.2.3.1.4. y IV.2.3.1.8. , se obtiene

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,x) < \min\,(f_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\ ,\ f_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\ )$$

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,z) \geq \min\,(\ f_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\ ,\ f_{\underset{\sim}{R}}(x,y))$$

de donde

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,x) < f_{\underset{\sim}{R}}(x,z)$$

IV.2.3.2.- LEMA

Si $\underset{\sim}{R}$ es una relación difusa en $\Lambda = \{x,y,z\}$ reflexiva, recíproca y transitiva , verificando

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) > f_{\underset{\sim}{R}}(y,x)$$

y

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,z) \geq f_{\underset{\sim}{R}}(z,y)$$

entonces

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,z) > f_{\underset{\sim}{R}}(z,x)$$

DEmostración:

Al ser

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) < f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \quad y \quad f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) + f_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = 1 ,$$

se tiene

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) < 1/2 \qquad \text{IV.2.3.2.1.}$$

Supongamos que $f_{\underset{\sim}{R}}(z,x) > f_{\underset{\sim}{R}}(y,x)$, entonces como

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) \geq \min (f_{\underset{\sim}{R}}(z,x) , f_{\underset{\sim}{R}}(y,z))$$

se tiene que

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) \geq f_{\underset{\sim}{R}}(y,z) \qquad \text{IV.2.3.2.2.}$$

Por otra parte sabemos que

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,z) \geq f_{\underset{\sim}{R}}(z,y)$$

por lo tanto

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,z) \geq 1/2 \quad \text{IV.2.3.2.3.}$$

y de IV.2.3.2.2. y IV.2.3.2.3. se tiene que

$$f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) \geq 1/2$$

lo cual está en contradicción con IV.2.3.2.1. Por tanto

$$f_{\underset{\sim}{R}}(z,x) \leq f_{\underset{\sim}{R}}(y,x) < 1/2$$

y en consecuencia

$$f_{\underset{\sim}{R}}(x,z) > f_{\underset{\sim}{R}}(z,x).$$

Vistos estos dos lemas , vamos a demostrar la inconsistencia de las cinco condiciones exigidas anteriormente a una función de bienestar social para un problema de decisión de grupo con preferencias individuales difusas. Veremos que en el supuesto de que se verifiquen las cuatro primeras condiciones se llega a que la función es dictatorial.

TEOREMA

No existe función de bienestar social para un problema de decisión de grupo, siendo las preferencias individuales relaciones binarias difusas reflexivas, recíprocas y transitivas,que verifique las cinco condiciones anteriores.

Demostración:

Consideraremos una función verificando las condiciones IV.2.1.1, IV.2.1.2; IV.2.1.3 y IV.2.1.4 y comprobaremos que esta función es de tipo dictatorial; es decir , no verifica la condición IV.2.1.5.

Consideremos un subconjunto $C \subset J$ minimal decisivo para las alternativas a_i, a_j , entendiéndose por minimal decisivo aquel conjunto decisivo que no contiene subconjunto propio alguno decisivo. La existencia de C está asegurada al ser J un conjunto decisivo; ello es facilmente deducible de la proposición IV.2.2.3.

Sea $\{j\} \in C$, $H = C - \{j\}$ y $T = J - C$ y consideremos que las preferencias difusas para $\{j\}$, vienen dadas por una relación binaria difusa $\underset{\sim}{R}^j$, reflexiva, recíproca y transitiva , que verifica además

$$f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_j,a_i)$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_i,a_k) > f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_k,a_i)$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_j,a_k) > f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_k,a_j)$$

Las preferencias de los individuos de H , vienen dadas por una relacion binaria difusa $\underset{\sim}{R}^H$, reflexiva, recíproca y transitiva que verifica:

$$f_{\underset{\sim}{R}^H}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^H}(a_j,a_i)$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^H}(a_k,a_i) > f_{\underset{\sim}{R}^H}(a_i,a_k)$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^H}(a_k,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^H}(a_j,a_k)$$

Finalmente las de los de T, además de ser una relación binaria difusa $\underset{\sim}{R}^T$, reflexiva,recíproca, y transitiva verifican:

$$f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_j,a_i) > f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_i,a_j)$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_k,a_i) > f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_i,a_j)$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_j,a_k) > f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_k,a_j)$$

Al ser

$$f_{\underset{\sim}{R}^J}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^J}(a_j,a_i)$$

y

$$f_{\underset{\sim}{R}^H}(a_i,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^H}(a_j,a_i)$$

y como C = {J}U H es decisivo para las alternativas a_i, a_j se tiene para el grupo por las proposiciones IV.2.2.2 y IV.2.2.4

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_i) \qquad \text{IV.2.3.1.1}$$

Como

$$f_{\underset{\sim}{R}^H}(a_k,a_j) > f_{\underset{\sim}{R}^H}(a_j,a_k)$$

si el grupo tuviera

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_k,a_j) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_k)$$

entonces H sería decisivo para las alternativas a_k,a_j , ahora bien , esto está en contradicción con ser C minimal decisivo y H subconjunto propio de él ; por tanto el grupo debe tener

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_j,a_k) \geq f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_k,a_j) \qquad \text{IV.2.3.1.2.}$$

Aplicando el Lema IV.2.3.2 a IV.2.3.1.1 y IV.2.3.1.2 se obtiene

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_k) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_k,a_i)$$

y como $\{j\}$ es el único individuo para el cual

$$f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_i,a_k) > f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_k,a_i)$$

se tiene por la proposición IV.2.2.4 que $\{j\}$ es decisivo para las alternativas a_i,a_k. Pero partíamos de que C era minimal decisivo por lo tanto $\{j\}$ no puede ser un subconjunto propio de C, entonces $\{j\} = C$ y $\{j\}$ es por hipótesis decisivo para las alternativas

$$a_i \ , \ a_j$$

Así tenemos demostrado que $\{j\}$ es decisivo para las alternativas a_i , a_j , siendo a_j diferente de a_i.

Vamos a probar ahora que $\{j\}$ es decisivo para las alternativas a_h,a_t, ambas diferentes de a_i. Supongamos que las preferencias difusas para $\{j\}$, vienen dadas por una relación binaria difusa R^j , reflexiva , recíproca y transitiva, que verifica además

$$f_{\underset{\sim}{R}^{J}}(a_h,a_i) > f_{\underset{\sim}{R}^{J}}(a_i,a_h)$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^{J}}(a_h,a_t) > f_{\underset{\sim}{R}^{J}}(a_t,a_h)$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^{J}}(a_i,a_t) > f_{\underset{\sim}{R}^{J}}(a_t,a_i)$$

y para los restantes individuos del grupo $T = J - \{j\}$, se tiene que sus preferencias difusas, vienen dadas por una relación binaria difusa $\underset{\sim}{R}^{T}$, reflexiva , recíproca y transitiva, que verifica además

$$f_{\underset{\sim}{R}^{T}}(a_h,a_i) > f_{\underset{\sim}{R}^{T}}(a_i,a_h)$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^{T}}(a_t,a_i) > f_{\underset{\sim}{R}^{T}}(a_i,a_t)$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^{T}}(a_t,a_h) > f_{\underset{\sim}{R}^{T}}(a_h,a_t)$$

Como ya vimos anteriormente, si para todo individuo h de J se cumple que

$$f_{\underset{\sim}{R}^{h}}(a_s,a_w) > f_{\underset{\sim}{R}^{h}}(a_w,a_s)$$

entonces por la proposición IV.2.2.3

$$f^{G}_{\underset{\sim}{R}}(a_s,a_w) > f^{G}_{\underset{\sim}{R}}(a_w,a_s)$$

En el caso que nos ocupa al ser

$$f_{\underset{\sim}{R}^J}(a_h,a_i) > f_{\underset{\sim}{R}^J}(a_i,a_h)$$

y

$$f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_h,a_i) > f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_i,a_h)$$

se tiene

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_h,a_i) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_h,a_i) \qquad \text{IV.2.3.2.3.}$$

Por otra parte al ser $\{j\}$ decisivo para las alternativas a_i, a_t , $t \neq i$, se tiene que

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_t) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_t,a_i) \qquad \text{IV.2.3.1.4}$$

y aplicando el Lema IV.2.3.1 a IV.2.3.1.3 y IV.2.3.1.4 se tiene

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_h,a_t) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_t,a_h)$$

por lo tanto $\{j\}$ es decisivo para las alternativas a_h, a_t, $a_h \neq a_i$ y $a_t \neq a_i$.

Falta ûnicamente probar que $\{j\}$ es decisivo para las alternativas a_h, a_i.

Consideremos que las preferencias difusas de $\{j\}$, aparte de venir dadas por una relación binaria difusa, reflexiva, recíproca y transitiva, verifican

$$f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_h,a_t) > f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_t,a_h)$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_h,a_i) > f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_i,a_h)$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_t,a_i) > f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_i,a_t)$$

y las de los individuos de $T = J - \{j\}$ vienen dadas por una relación difusa $\underset{\sim}{R}_T$, reflexiva, recíproca y transitiva, verificando además

$$f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_t,a_h) > f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_h,a_t)$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_i,a_h) > f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_h,a_i)$$

$$f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_i,a_t) > f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_t,a_i)$$

Como $\{j\}$ es decisivo para las alternativas a_h, a_t, se tiene que

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_h,a_t) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_t,a_h) \qquad \text{IV.2.3.1.5}$$

y al tenerse en el perfil de preferencias difusas para $\{j\}$

$$f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_t,a_i) > f_{\underset{\sim}{R}^j}(a_i,a_t)$$

y para los individuos de T

$$f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_t,a_i) > f_{\underset{\sim}{R}^T}(a_i,a_t)$$

se tiene para el grupo por la proposición IV.2.2.4

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_t,a_i) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_t) \qquad \text{IV.2.3.1.6}$$

aplicando el Lema IV.2.3.1 a IV.2.3.1.5 y IV.2.3.1.6 , se tiene

$$f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_h,a_i) > f^G_{\underset{\sim}{R}}(a_i,a_h)$$

por lo tanto $\{j\}$ es también decisivo para las alternativas a_h,a_i , siendo a_h cualquiera ; en definitiva vemos que $\{j\}$ es decisivo para dos alternativas cualesquiera, es decir $\{j\}$ es un DICTADOR.

135

BIBLIOGRAFIA

CAPOCELLI, R. M. and A. de LUCA (1.972) . "Measures in Making Decisions in the ontext of Fuzzy Sets Theory ". Report interne of the laboratorio of Cybernetic C.N.R. Arco Felice , Napoli.

______________________, (1.973) . " Fuzzy Sets and Decision Theory." . Information and Control,23, 446-473.

DE LUCA, A. and S. TERMINI (1.972 , A). "A Definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets Theory " . Information and Control ,20, 301-312.

______________________ (1.972 , B). "Algebraic Properties of Fuzzy Sets " . Journal of Math. Anal. Appl. ,40, 373-386.

______________________ (1.974) . " Entropy of L-Fuzzy Sets ". Information and Control,24, 55-73.

______________________ (1.977 , A). "On the Convergence of Entropy measures of a Fuzzy Set ". Kybernetes,6, 219-227.

______________________ (1.977, B). "Measures of Ambiguity in the Analisis of Complex Systems ". Proc. 6-th. Symposium of MFCS, Lectures Notes in Computer Science,53, 382-389.

______________________ (1.979) . " Entropy and Energy Measures of a Fuzzy Set ". 321-338. In Advances in a Fuzzy Set Theory and Applications, M. N. Gupta, R.K. Ragade and R. Yager. (editors). North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

DUMITRESCU , D. (1.978 , A). " On Some Measures of NON- Fuzziness ". Studia Univ. Babes-Bolyai Mathematica,2,

________ , (1.978 , B). " A Definition of an Informational Energie in Fuzzy Sets Theory ". Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica,2, 57-60.

DUNN, J. C. (1.974). " Well- Separated Clusters and Optimal Fuzzy Partitions ". Journal of Cybernetics,4, 95-104.

DUNN, J.C. (1.977). " Indices of Partitions Fuzziness and the Detection of Clusters in Large Data Sets " . 271-284. In Fuzzy Automata and Decision Processes, M. M. Gupta, G.N. Saridis and B. R. Gaines. (editors). North-Holland Publishing Company,Amsterdam.

EMPTOZ, H. (1.974). " Indices de Flou et Indices de Dispersion " .Colloque International sur théorie et les applications des sous ensembles flous. Marseille.

GOGUEN, J.A. (1.967). " L-Fuzzy Sets " . Journal of Mathematical Analysis and Applications,18, 145-174.

JAIN, R. (1.976). " Decision-Making in the Presence of Fuzzy Variables". IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 698-703.

KAUFMANN, A. (1.973). Introduction a la Théorie des Sous-Ensembles Flous . Vol.1: Elements Theoriques de Base. Masson et Cie, Paris, FRANCE.

________ , (1.977). Introduction a la Théorie des Sous-Ensembles Flous. Vol.4 : Complements et nouvelles applications. Masson et Cie, Paris , FRANCE.

KHALILI, S. (1.979). " Independent Fuzzy Events ". Journal of Mathematical Analysis and Applications,67, 412-420.

KICKERT, W.J.M. (1.978). Fuzzy Theories on Decision-Making . Martinus Nijhoff Social Science Division. London.

LOO, S.G. (1.976). " Measures of Fuzziness ". Department of Mathematics, Monash University, Clayton , Victoria.

LUCE, R.D. and H.RAIFFA. (1.957). Games and Decisions. John Wiley Sons, Inc. New York.

MIZUMOTO, M. and K. TANAKA. (1.978). " Some Properties of Fuzzy Sets Under Various Operations ". Proceeding of the Fourth International Congress of Cybernetics and Systems. Amsterdam.

NEGOITA, C.W. (1.976). " Fuzzy Models for Social Processes ". In Systems Theory in the Social Sciences. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgard.

________ and D. A. RALESCU. (1.975). Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis. Birkhäuser Verlag Basel.

NOJIRI, H. (1.979). " A Model of Fuzzy Team Decision ". Fuzzy Sets and Systems,2, 201-212.

NURMI, H. (1.976). " On Fuzzy GAMES ". Third Europ. Meeting on Cybernetics and Systems Research . Vienna.

________ , (1.977). " Fuzzy Sets and Game Theory ". Commentat. Sci. Soc. Scient. Fennica,9,

ONICESCU, O. (1.966) . "Energie Informationelle ". C. R. Acad. Sci. Paris Serie A,263, 841-842.

ORLOVSKY, S.A. (1.978). " Decision-Making with a Fuzzy Preference Relation" Fuzzy Sets and Systems,1, 155-168.

PARDO, L. (1.977). " La Energía Informacional como Fundamento de una Teo_ ría de la Información ". Memoria de la Escuela de Estadística Madrid.

RIERA,T. SANCHIS,C. y E.TRILLAS. (1.978). "Raport sobre Entropías Difusas" Escuela Superior de Arquitectura de Barcelona.

RIOS GARCIA, S. (1.976) . Análisis de Decisiones . Ediciones ICE. Madrid

SAATY, T.L. (1.974) . "Measuring the Fuzziness of Sets ". Journal of Cybernetics,4, 53-61.

SANCHIS,C. (1.977) . "Contribucio a l'estudi d'entropies en la Teoria dels Conjunts Difusos " . Memória presentada al primer exercici dels Exámens de Grau de la Licenciatura en Matematiques. Escuela Superior de Arquitectura de Barcelona.

SKALA, H.J. (1.978) . " On many-valued logics, Fuzzy Sets, Fuzzy Logics and their applications ". Fuzzy Sets and Systems, 1, 129-150.

THEODORESCU, A. (1.977). "Energie Informationnelle et notions apparentees". Trabajos de Estadística e I.O. ,27, 183-206.

TRILLAS, E. and C. Alsina (1.979) . "Sur les measures du degré flou ". Stochastica,3, 81-84.

________ and T. Riera (1.977) . " Note for the Study of a concept of Multivalued Entropy for a finite Fuzzy Set ". Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona.

________________ (1.978 A) . "Entropies in Finite Fuzzy Sets ". Information Sciences ,15, 159-168.

________________ (1.978 B) . "Sobre algunas Entropías para Subconjuntos finitos de N " . Trabajo presentado a las Jornadas Matemáticas Luso-Hispánicas en Aveiro.

YAGER , R. and D. BASSON. (1.975) . "Decision Making with Fuzzy Sets" Decision Science,6, 590-601.

ZADEH, L.A. (1.965) . " Fuzzy Sets ". Information and Control, 8,338-353.

________ , (1.968) . " Probability Measures of Fuzzy Events ". Journal Math. Anal. Appl. ,23, 421-427.

________ , (1.971) . " Similarity Relations and Fuzzy Orderings". Information Sciences ,3, 177-200.

________ and R.E.BELLMAN (1.970). "Decision-Making in a Fuzzy Environment ". Management Science , 17, B-141-164.

ZIMMERMANN, H.J. (1.976) . " Description and Optimization of Fuzzy Systems ". Inter. Journal of General Systems,2, 209-215.