REVISTA MATEMÁTICA HISPANO-AMERICANA

2.ª Serie. - Tomo I

MADRID

1926

GLOSARIO MATEMÁTICO

LXVII.—CONJUNTOS CERRADOS NO DENSOS

HOBSON (E. H.): *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series.* Cambridge University Press. Edición de 1907 y tomo 1.° de la de 1921.

En la página 92 de la edición de 1907 y en la 113 del primer volumen de la de 1921, enuncia, después de demostrarlo, el teorema siguiente:

"A non-dense closed set is enumerable if its complementary intervals are such that every one of them abuts on another one at each of its ends.„

Este teorema es falso, y por tanto, también su demostración. En efecto; vamos a formar un conjunto cerrado no denso que satisface a las condiciones del enunciado y que sin embargo no es numerable. Para ello consideremos un conjunto perfecto no denso P formado mediante el método clásico de Baire (Leçons sur les fonctions discontinues, París, págs. 54 y siguientes), por supresión de una infinidad numerable de intervalos contiguos del conjunto de puntos de un intervalo I; por ejemplo, tomemos los puntos A_1 y B_1, suprimamos los puntos interiores al intervalo central $A_1 B_1$, excepto los extremos A_1 y B_1 naturalmente. En las dos partes restantes $O A_1$ y $B_1 I$, efectuemos la misma operación, y así sucesivamente en los nuevos intervalos que resultan dividiendo en tres partes los obtenidos en la operación precedente. El conjunto de los puntos que quedan en I después de suprimir todos estos intervalos, se demuestra que es un conjunto perfecto no denso y con la potencia del continuo.

Pues bien, en cada intervalo complementario de P, $A_i B_i$ consideremos los puntos $M_{i\,n}$ y $N_{i\,n}$ tales que

$$A_i M_{i\,n} = B_i N_{i\,n} = \frac{A_i B_i}{2n} \quad (n = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots)$$

Añadamos al conjunto perfecto pero no denso P el conjunto de estos puntos $M_{i\,n}$ y $N_{i\,n}$ pertenecientes al complementario de P. Entonces $P + Q$ es un conjunto cerrado no denso que satisface a las condiciones del teorema de Hobson, pero que sin embargo no es numerable, puesto que P tiene la potencia del continuo.

El error de la demostración está en la frase:

"....; because to each such external points there corresponds an enumerable set of end-points of which it is the limiting point and in this *correspondence* any one end-point can correspond to at most two limiting points, one on each side of it." En efecto, a pesar de que la definición de dicha correspondencia es bastante obscura, su parte clara está en contradicción con el ejemplo propuesto (que evidentemente puede ser generalizado), ya que en él no hay manera de establecer la tal correspondencia sin hacer corresponder a un cierto conjunto de *end-points*, una infinidad numerable de puntos límites.

T. R. Bachiller.