CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

Patronato «Alfonso el Sabio»

REVISTA MATEMATICA HISPANO-AMERICANA

PUBLICADA POR EL INSTITUTO «JORGE JUAN» DE MATEMATICAS Y LA REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA

CUARTA SERIE

TOMO I

MADRID

1941

COMENTARIOS SOBRE ALGEBRA Y TOPOLOGIA

POR

T. R. BACHILLER

Nos proponemos en esta Sección de «Comentarios» el dar a conocer algunos de los conceptos, cuestiones y métodos fundamentales que en la actualidad constituyen el Algebra y la Topología, núcleos esenciales ambas de la Matemática. Con ocasión de algunos problemas, o de las lecturas de Memorias o libros, elegiremos cuestiones breves que puedan ir mostrando el carácter propio de aquellas disciplinas. Así, por ejemplo, en esta primera nota nos proponemos generalizar un teorema sobre el producto topológico de dos espacios, tratado en el § 43, pág. 156 de la preciosa obra «Lehrbuch der Topologie», de H. Seifert und W. Threlfall, generalización que no sabemos haya sido publicada hasta ahora. El teorema citado tiene el enunciado siguiente: El grupo fundamental del producto topológico de dos complejos K_1 y K_2 es igual al producto directo de los grupos fundamentales de ambos factores.

1. Por lo pronto tomaremos de un modo más general dos espacios E_1 y E_2 topológicos metrizables, separables, conexos y localmente contráctiles. Un espacio es un conjunto de objetos dotado de una estructura con el fin de poder definir sobre él operaciones continuas, lo cual exige el precisar qué se entiende en dicho conjunto por *proximidad* o qué quiere decir el que dos elementos del conjunto sean *infinitamente próximos*. La operación que atribuye a todo subconjunto M propio o impropio del conjunto dado C, otro conjunto $\overline{M}$ compuesto de aquellos elementos que hemos de considerar como infinitamente próximos a M, es la que *topologiza* el conjunto C, lo convierte en un *espacio topológico general*. El conjunto $\overline{M}$ lo llamaremos *acumulación* o *adherencia del conjunto* M. La operación citada puede

definirse de muchas maneras, pero dos de las más importantes son: *a*) la que utiliza el concepto de *entorno* de un elemento y *b*) la que usa la noción de *distancia*. Cuando la topología de un espacio E se define con ayuda de esta última noción se dice que se trata de un *espacio métrico*. La *distancia* es una función real definida para todo par x, y de elementos del espacio E que se suele designar con $\rho(x, y)$ y que cumple las condiciones:

$$\rho(x, y) = 0 \tag{1}$$

sí y sólo si $x = y$

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) \tag{2}$$

$$\rho(x, y) < \rho(x, z) + \rho(x, y) \tag{3}$$

Obsérvese que estas condiciones son justamente las esenciales en la noción ordinaria de distancia, esto es, las que *juegan* realmente en las demostraciones métricas. Pues bien, un espacio topológico, cuya topología se puede definir mediante una métrica, se llama *metrizable*, y todo espacio de esta clase se puede considerar como un espacio de *entornos*, llamando entorno $U_\varepsilon(x)$ del elemento (ya podemos decir *punto*) x al conjunto de puntos y tales que $\rho(x, y) < \varepsilon$, siendo ε un número real positico; se dirá *esferoide* o *entorno* de radio ε, del punto x. No todo espacio de entornos, sin embargo, se puede metrizar, y es un problema magistralmente tratado por Urysohn y Alexandroff, el de ver en qué condiciones es ello posible.

Es muy importante el considerar la familia de entornos de cada punto y el sistema de todos los entornos que definen un espacio E. Situémonos en el punto a que acabamos de llegar: Se trata de un espacio E topológico y metrizable (sea ρ la función distancia, general); cada punto x posee por tanto una familia de entornos en correspondencia biunívoca $U \leftrightarrow \varepsilon$ con los números reales positivos, es decir, con la potencia del continuo. Sin embargo, no hacen falta *tantos* entornos, basta con tomar una familia *numerable*, es decir, por ejemplo, $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ (n entero) o ε = número racional. Esto nos conduce a precisar el concepto de *equivalencia* de dos familias de entornos: Sean $\mathfrak{U}(x)$ y $\mathfrak{V}(x)$ dos familias; se dirán equivalentes si dado un entorno U de la primera existe uno en la segunda V contenido en U, o sea $V \subset U$, y si dado un entorno V' de la segunda existe otro en la primera U' tal que $U' \subset V'$. Es fácil ver que si un mismo conjunto C se ha convertido en espacio topológico E_1 definiendo las familias de entornos para cada punto, utilizando las familias $\mathfrak{U}(x)$, y en espacio E_2 usando las $\mathfrak{V}(x)$, que cumplen la condición acabada de expresar, de equivalencia, ambas topologías son idénticas, es decir, conducen a la misma noción de proximidad; los dos espacios E_1 y E_2 pueden considerarse, pues, como uno sólo E. No es complicado el extender esta equivalencia a conjuntos C diferentes. Todo el que esté algo familiarizado con los elementos de la teoría de funciones recordará cuestiones concretas que le ayudarán a comprender claramente estos conceptos.

Para los espacios que estamos tratando, topológicos metrizables, efectivamente sucede eso: la familia $U_\varepsilon(x)$ se puede sustituir por otra numerable, que no altere la topología de ese espacio. Tales espacios se llaman *localmente separables* o de *carácter numerable localmente*, o que satisfacen al *axioma I de numerabilidad de Hausdorff*. La clase de espacios así obtenida es todavía demasiado amplia: exijamos que el sistema total de entornos sea *numerable*, y obtendremos los espacios topológicos metrizables *separables* o con *base numerable* o que satisfacen al *axioma II de numerabilidad de Hausdorff*.

De esta forma vamos acercándonos cada vez más a la clase de espacios para los que vale el teorema objeto de la presente nota; por no extender desmesuradamente esta nota no detallaremos ciertas nociones fundamentales, por no ser inmediatamente necesario; ya tendremos ocasiones de hacerlo en sucesivos comentarios. Para nuestro propósito basta con las generalidades indicadas. El lector cuya curiosidad haya sido excitada recurra a las obras de Alexandroff-Hopf, Kuratowski, Menger, Lefschetz, Kérékjartó, Newmann, Veblen, etc.

2. Sigamos restringiendo nuestro espacio. Las exigencias nuevas serán ya de otro carácter que las anteriormente utilizadas. Así en primer término la propiedad de *conexión*. Diremos que el espacio E es *conexo* si para toda *descomposición* de E en suma de dos subconjuntos A y B, es decir $E = A + B$, se verifica que $\bar{A}.B + \bar{B}.A \neq 0$ ($M . N$ designa la *intersección* o *parte común* de M y N), esto es, o A o B, contienen al menos un *punto adherente* a B o A, respectivamente; punto adherente, es decir, perteneciente a la adherencia. Finalmente exigimos que el espacio sea *localmente contráctil* (noción debida al joven y eminente topólogo polaco Borsuk), lo cual quiere decir lo siguiente: Para todo punto x y para todo $U(x)$, existe un entorno $V(x) \subset U(x)$ y que se puede *contraer* sobre el punto x. El conjunto A se dice *homotopo* al punto x o que se puede contraer sobre este punto, si existe una *deformación continua*, esto es, una función $f(A, t)$, definida en todo punto de A y para todo valor de t, parámetro real $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, tal que $f(A, 0) = A$ y $f(A, 1) = x$. (Consideramos el concepto de función en su forma general, correspondencia entre puntos de A y de $f(A)$ = imagen de A).

3. Pasemos a otra noción que interviene en nuestro enunciado: *producto topológico* de dos espacios E_1 y E_2, que se denota $E_1 \times E_2$. Un punto x_1 de E_1 y otro x_2 de E_2, forman un par ordenado (x_1, x_2), que considerado como nuevo elemento, llamaremos punto de un espacio E; un entorno de $x = (x_1, x_2)$ es el conjunto de pares de puntos x'_1, x'_2 respectivamente pertenecientes a entornos U_1 y U_2 de x_1 y x_2. El conjunto E queda así dotado de una topología. Análogamente se le puede dotar de una métrica; sean ρ_1 y ρ_2 las funciones distancia de E_1 y E_2; distancia entre $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ sería, por ejemplo,

$$\rho(x, y) = \sqrt{\rho_1(x_1 y_1)^2 + \rho_2(x_2 y_2)^2}.$$

Por ejemplo es fácil ver cómo el espacio euclídeo E^3 de tres dimensiones es el producto topológico de la recta E^1 y del plano E^2; el anillo sólido circular, lo es de una circunferencia y un disco circular, etc.

No es difícil demostrar que si E_1 y E_2 son conexos y localmente contráctiles, también lo es el producto topológico $E = E_1 \times E_2$; sirva de ejercicio este enunciado.

4. Veamos ahora lo que es el grupo fundamental, genial noción debida a Poincaré. Consideremos todas las curvas cerradas orientadas posibles contenidas en E y que parten de un punto O y vuelven a él; conviniendo en mirar como equivalentes dos tales curvas, si son homotopas entre sí (es decir, reducibles la una a la otra mediante una deformación continua; véase lo dicho

antes), dichas curvas o *caminos* (como diremos brevemente) quedan distribuídas en *clases*, *clases de caminos*, de modo que los caminos de una clase son deformables entre sí y no lo son caminos pertenecientes a clases diferentes. Tales clases son elementos de un *grupo*, del *grupo fundamental* de E, si la operasión de composición es la siguiente: Producto de dos clases de caminos $\{w_1\}$ y $\{w_2\}$ (w designa un *representante* de la clase $\{w\}$) es la clase $\{w_1 w_2\}$ en que está el camino $w_1 w_2$, producto de w_1 y w_2; es decir, el camino descrito recorriendo sucesivamente w_1 y w_2. La definición es independiente de los representantes elegidos para cada clase, y es fácil comprobar que se cumple la ley asociativa, la existencia del elemento *uno* (clase de caminos homotopos a O o deformables sobre O, punto inicial) y la del elemento recíproco o inverso (camino recorrido en sentido opuesto), es decir, que se verifican los axiomas grupales. Téngase, sin embargo, en cuenta, que no siempre se cumple la ley conmutativa, es decir el grupo fundamental en general *no es* abeliano. Además este grupo, considerado como grupo abstracto, es independiente de O, por tanto es un grupo perfectamente definido para cada espacio E. Quien desee estudiar más profundamente la naturaleza de este grupo, consulte el capítulo VII de la obra antes citada de Seifert-Threlfall.

5. Pues bien, se puede generalizar el grupo fundamental como lo ha hecho Hurewicz en su nueva *teoría de la homotopía*, considerando el espacio cuyos elementos son las transformaciones continuas de esferas n-dimensionales en el espacio dado. Sean X e Y dos espacios topológicos metrizables separables; X además *compacto* y de dimensión finita, Y conexo y localmente contráctil. Un espacio separable se dice compacto, si admite base finita, es decir, de todo recubrimiento se puede deducir otro compuesto de un número finito de conjuntos que *cubren* totalmente el espacio. Sean $F(x)$ y $f(x)$ ($x \subset X$) dos transformaciones continuas de X en Y, es decir $F(x) \subset Y$ y $f(x) \subset Y$; si llamamos distancia entde F y f, es decir, $\rho(f, F)$ al máximo de las distancias entre los puntos $F(x)$ y $f(x)$, para todo $x \subset X$, se dota al conjunto de dichas transformaciones de una métrica y, por tanto, de una topología, y siendo X compacto, la topología obtenida es independiente de la métrica utili-

zada. Las esferas de cualquier dimensión son espacios X y sus imágenes continuas en un $E = Y$ dado serán lo análogo a los caminos (dimensión uno). El espacio así definido se designa por Y^X.

Por tanto, tomemos como X la esfera S_{n-1} ($n = 1, 2, \ldots$) $(n-1)$—dimensional; en S_{n-1} y en E elijamos dos puntos y_0, x_0, respectivamente, y consideremos el subconjunto X de $E^{S_{n-1}}$ compuesto de las transformaciones F tales que $F(y_0) = x_0$; este conjunto es también localmente contráctil, como es fácil demostrar, y, además, el grupo fundamental de X es independiente de la componente de $E^{S_{n-1}}$ (en nuestro caso una sola) que se elija y también de y_0, x_0; es decir, se obtiene un grupo sólo dependiente de E y de n. Tal grupo se llama el n-ésimo grupo de homotopía de E y se designa por $\pi_n(E)$. El grupo $\pi_1(E)$ no es otro que el grupo fundamental, como es facilísimo comprobar.

Lo curioso es que al contrario de éste, todos los $\pi_n(E)$ para $n > 2$ son *abelianos*. Por ello la operación de composición la simbolizaremos con el signo de la adición $+$.

Finalmente un grupo G se dice que es *producto directo* (o *suma directa*, si es abeliano y se utiliza el símbolo $+$ para designar la operación de composición del grupo) de sus subgrupos $G_1, G_2, \ldots, G_h$ y se denota

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_h$$

o bien

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_h.$$

cuando cada elemento de G se puede representar unívocamente como producto (o suma)

$$G_{1\alpha} G_{2\beta} \ldots G_{h\lambda} \qquad (\text{o } G_{1\alpha} + G_{2\beta} + \ldots + G_{h\lambda})$$

de elementos de cada G_i, siendo cada elemento G_ν permutable con cada G_μ para $\nu \neq \mu$.

6. El teorema que queremos demostrar se enuncia entonces así:

Sean E_1 *y* E_2 *dos espacios topológicos metrizables separables, conexos y localmente contráctiles, sea* $E = E_1 \times E_2$ *el producto to-*

pológico de E_1 *y* E_2. *Entonces el* n-*ésimo grupo de homotopia* $\pi_n(E)$ *es la suma directa de* $\pi_n(E_1)$ *y* $\pi_n(E_2)$, *es decir,*

$$\pi_n(E) = \pi_n(E_1) + \pi_n(E_2).$$

En efecto: Un punto P de $E = E_1 \times E_2$ se puede representar así:

$$P = P_1 \times P_2; \qquad P \subset E_i, \qquad (i = 1, 2)$$

Sea $\bar{P}$ el punto de S_n cuya imagen en E es P para una transformación g de S_n en E y perteneciente a $\pi_n(E)$: naturalmente $g(y_0) = x_0$. La correspondencia $\bar{P} \rightarrow P_i$ es una transformación unívoca y continua g_i de S_n en E_i.

Sea $y_0 = y_1 \times y_2$ $\qquad y_i \subset E_i$: se tendrá

$$g_1(x_0) = y_1, \qquad g_2(x_0) = y_2.$$

Es decir, de la transformación g hemos deducido otras dos g_1 y g_2, que operan sobre E_1 y E_2, respectivamente. Recíprocamente, dos transformaciones de esta clase definen una transformación unívoca y continua g de S_n en E. Ahora bien, si g es homotopa a cero, también lo son g_1 y g_2, por la misma definición del grupo de homotopia: es decir, si g y f pertenecen a clases diferentes, g_1 y f_1, por una parte, y g_2 y f_2, por otra, pertenecerán también a clases diferentes. Por consiguiente, si $f \subset \pi_n(E)$ y $g \subset \pi_n(E)$ definen por adición $f + g$, $f_1 + g_1$ y $f_2 + g_2$ pertenecen a $\pi_n(E_1)$ y a $\pi_n(E_2)$, respectivamente. Esto es, cada elemento de $\pi_n(E)$ es suma de un elemento de $\pi_n(E_1)$ y de un elemento de $\pi_n(E_2)$, o lo que es equivalente, el grupo $\pi_n(E)$ es suma directa de los grupos $\pi_n(E_1)$ y $\pi_n(E_2)$.