REVISTA MATEMÁTICA HISPANO-AMERICANA

TOMO VI

MADRID
1924

Teoremas análogos demuestra con todo rigor el autor, referentes a los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de varias funciones y hace observar cómo las consideraciones del tercer capítulo se aplican al caso de las ecuaciones lineales en derivadas parciales de primer orden, en donde se obtiene el sistema diferencial asociado y las integrales principales, así como a la integración de los sistemas jacobianos completos, reduciéndolos por el método Mayer al caso de una ecuación en derivadas parciales de primer orden; a estos sistemas completos se reducen los sistemas de primer orden en involución y, por tanto, éstos también se integran por. aproximaciones sucesivas.

Análogamente, en el capítulo 4.° se observa que mediante un simple cambio de notaciones se reducen al primer orden las ecuaciones o los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de orden superior al primero y, por tanto, que si cumplen con las condiciones enunciadas, pueden aplicárseles todas las consideraciones hechas.

Damos así una ligera idea del contenido de esta Tesis Doctoral que merece gran atención, por las razones arriba indicadas. En particular, hay un punto esencialísimo y que no está abordado en este trabajo y es el de la determinación de los errores o límites de error en las sucesivas aproximaciones; la contestación categórica a esta cuestión sería de extraordinario interés para consagrar definitivamente como *práctico* el método del Dr. Germay; podría intentarse por ejemplo la solución, siguiendo este camino, de las ecuaciones de las placas elásticas, lo cual haría aplicables a la Técnica los resultados puramente teóricos obtenidos. Después de estar en impresión esta Tesis, el Dr. Germay, en varias conversaciones, nos expuso sus resultados referentes a la anterior cuestión y luego en comunicación particular la solución definitiva, que será publicada dentro de poco. Aun para su aplicación a la teoría de las placas elásticas, sería necesario considerar en vez de *problemas de Cauchy*, *problemas de Neumann* o *de Dirichlet*, y efectivamente en esta dirección dirige el Dr. Germay sus investigaciones actuales, en las cuales le deseamos éxito análogo al del trabajo reseñado.

T. R. BACHILLER.

FUETER (DR. R.): *Vorlesungen über die singulären moduln und die Komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen.*—Erster Teil., VI, 142 S. mit. 16 Figuren im Text. B. G. Teubner. Leipzig-Berlín, 1924.

El Profesor Fueter expone en esta obra, cuya primera parte reseñamos, la teoría de la multiplicación compleja y sus aplicaciones a la teoría de números; bien conocidos son sus trabajos sobre esta materia, uno de los cuales le permitió llegar a la demostración del célebre teorema de Kronecker, en el caso del cuerpo imaginario-cuadrático, teorema señalado a los investigadores por D. Hilbert en el 2.° Congreso Internacional de Matemáticos reunido en París el año 1900; a pesar de los esfuerzos de Fueter mismo, Hecke y Tagaki, aún queda sin demostrar el caso general en que se considere un cuerpo cualquiera.

Comienza este tomo con una sucinta y clara exposición de la teoría de las funciones modulares elípticas, siguiendo en esto la dirección de Hurwitz y de

Klein; así, estudía el grupo modular, los recintos de discontinuidad del grupo con todo detalle y, en fin, las funciones modulares. Sigue a este capítulo, otro sobre las ecuaciones de transformación, consecuencia necesaria de la idea de grupo, tomada como fundamento y expone el concepto de transformación de especie n, funciones modulares de especie n, para terminar estableciendo las ecuaciones de transformación.

A partir de aquí y en los capítulos sucesivos, casi todo es labor original de Fueter y lo que no lo es, se encuentra sistematizado por primera vez. Así, en el capítulo tercero, trata de los valores singulares de las funciones modulares, empezando con un párrafo sobre el cuerpo cuadrático, demostrando que los módulos singulares son números algebraicos, determinando la ecuación de clases de un cuerpo y estudiando su grupo, para terminar con el estudio de los anillos de clases del cuerpo. El capítulo 4.º lo dedica a una exposición de las nociones de funciones elípticas que ha de necesitar en el desarrollo de la obra; claramente expuesto como está, resulta uno de los más bonitos capítulos de la obra, y en él hace hincapié, puesto que la teoría de la multiplicación compleja, la basará el autor sobre la función p de Weierstrass, en el desarrollo de sus propiedades y sus fórmulas y teoremas de multiplicación, asi como en la función modular, cuyo estudio hace por medio de la función $T(z)$ de Jacobi, cuyo módulo obtiene mediante la transformación de Gauss.

El último capítulo lo dedica el Profesor Fueter a la multiplicación compleja de las funciones elípticas. Introduce el concepto de *haz* de un cuerpo cuadrático, llamando así al conjunto de todos los números ξ del cuerpo $K(\sqrt{m})$, tales que satisfacen a la congruencia $\xi \equiv 1 \pmod{f}$; f se llama *directriz* (Führer) del haz que representa por $s(f)$. Demuestra que el número de clases de haces es finito y que forman un grupo abeliano cuyo orden es el número de clases. Con estas ideas obtiene las fórmulas fundamentales de multiplicación compleja y estudia sus muchas propiedades. Refiere siempre la multiplicación compleja respecto a la función $T(z)$ y demuestra que $T(vz)$ es una función racional de $T(z)$ cuyos coeficientes pertenecen al anillo de clases del cuerpo (Ringklassenkörpers) $r(4)$; después de exponer un gran número de propiedades de la multiplicación compleja en el último párrafo, estudia con detalle el *haz* de clases de un cuerpo (Strahlklassenkörper) y su grupo que demuestra es de Galois.

Toda la obra está hecha con un orden y una claridad perfectas; su lectura es fácil y rica en sugestiones, por lo cual creemos que será de gran utilidad, y desde luego nos permite suponer que la segunda parte no ha de desmerecer en nada de la primera, su introducción. Será la parte más interesante de la obra y donde se encontrará el lector en las fronteras de lo conocido. Es muy digna de alabanza la publicación de obras de esta naturaleza, sobre todo en teorías tan difíciles como las de Aritmética superior, que desgraciadamente tiene tan pocos cultivadores, a pesar de su importancia capital para el resto de la matemática, tanto, que Hilbert, en su discurso *Mathematische Probleme*, antes citado, considera la generalización del teorema de Kronecker a un cuerpo algebraico cualquiera, como la cuestión central de la teoría de funciones de varias variables.

T. R. BACHILLER.