REVISTA MATEMÁTICA HISPANO-AMERICANA

TOMO VI

MADRID
1924

Estudia a continuación, en el caso antes considerado de correspondencia de rectas, la determinación del espacio objeto deducida de los espacios imagen, hallando las relaciones que estos espacios han de guardar entre sí. Indica la resolución de los problemas corrientes de la Geometría Descriptiva multidimensional y entra en el estudio de las simplificaciones más convenientes del sistema general de representación, llegando a las siguientes conclusiones: Si los espacios imagen tienen todos igual número de dimensiones m, y por tanto los centrales, si éstos no ocupan posición relativa especial, el número r de proyecciones necesarias para determinar las figuras del espacio objeto es el cociente por exceso $\frac{n}{m}$ y el número s de relaciones fijas entre los grupos de puntos imagen de un punto, es el residuo de esta división. Si dos espacios centrales están en uno de $n-m$ dimensiones, las dos proyecciones correspondientes de un punto están en rayos homólogos de dos radiaciones proyectivas cuyos vértices son los puntos de intersección de este espacio, con los espacios imágenes, teorema que es una generalización del de Hauck.

Termina el Sr. Torroja su discurso con la determinación de los elementos de referencia o posición relativa total, es decir, del conjunto de espacios imagen entre sí y con los espacios centrales, y la deducción de sistemas particulares de representación.

El notable discurso que hemos ligeramente reseñado está expuesto con la claridad y precisión característica del autor en sus explicaciones de cátedra. La resolución de una cuestión tan general, constituye un trabajo de verdadera importancia, nada extraño en quien por afición y tradición es un tan notable cultivador de las Geometrías Proyectiva y Descriptiva.

El Dr. Terradas contestó elogiando la personalidad y destacando el mérito del trabajo del Sr. Torroja.

P. P.

GERMAY (R. H. J.): *Intégration par approximations successives des équations aux derivées partielles.*—Extrait des MÉMORIES DE LA SOC. ROYALE DES SCIENCES DE LIÈGE, 3.ª serie, tomo XII, 1924. Fasc. de 42 págs.

Este interesante trabajo ha servido al Dr. H. Germay (conocido ya por nuestros lectores), para obtener el grado de Doctor en la Universidad de Liega, y como su título indica, trata de la generalización del método de las aproximaciones sucesivas de Picard, que éste sólo había aplicado a casos particulares. Ya con este objetivo se comprende la importancia que puede tener el obtener un seguro éxito en este género de investigaciones, pues como es bien sabido, los problemas de la Física-Matemática se reducen en último resultado al estudio e intergración de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales (o de una, en particular); esto sin contar que aun dentro de la Matemática pura estos trabajos, además de proporcionar suma precisión en las cuestiones, dan lugar a los llamados *teoremas de existencia*, cuestión previa actual en cualquier investigación de teoría de funciones.

El autor se limita en toda su Memoria a considerar problemas de Cauchy, suponiendo las funciones de variables reales y todas analíticas, aunque como ya hace notar, sus resultados son más generales en muchos casos, que oportunamente puntualiza. Todas las cuestiones están repartidas en cuatro capítulos.

En el primero demuestra algunos elegantes teoremas originales sobre las funciones implícitas, en los cuales está contenida la esencia del método ulterior del autor, y que no detallamos, por requerir su clara expresión utilizar y detallar notaciones impropias de una corta reseña bibliográfica. En el capítulo siguiente recuerda cuatro importantes teoremas de Cotton sobre ecuaciones diferenciales; en el primero de los cuales demuestra la posibilidad de formar una sucesión uniformemente convergente de funciones analíticas cuyo límite sea la solución de una ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f_\infty(x, y)$, siendo f_∞ el límite de una sucesión uniformemente convergente, también, de funciones analíticas $f_1 f_2 \ldots \ldots f_n \ldots\ldots$, definidas en el entorno de un punto (x_0, y_0), obteniendo al mismo tiempo las derivadas. Lo mismo en este capítulo que en el anterior se demuestran con todo rigor las fórmulas recurrentes que permiten obtener explícitamente funciones y derivadas.

Los más importantes capítulos son el tercero y el último, en los que considera ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. En el tercero demuestra el teorema esencial siguiente: Sea la ecuación en derivadas parciales de primer orden de forma resuelta respecto a $p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}$, a saber

$$p_1 = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, z, p_2, \ldots\ldots, p_n) \qquad (1).$$

Sea $\chi(x_2, \ldots\ldots, x_n)$ una función analítica en el entorno del punto $x'^0_2, \ldots\ldots, x'^0_n$; hagamos

$$z'^0 = \chi(x'^0_2, \ldots\ldots, x'^0_n),\ p'^0_i = \frac{\partial \chi}{\partial x_i}(x'^0_2, \ldots\ldots, x'^0_n),\ (i = 2, \ldots\ldots, n) \qquad (2).$$

Supongamos que la función f sea analítica en el entorno del punto

$$x'^0_1, x'^0_2, \ldots\ldots, x'^0_n, z'^0, p'^0_2, \ldots\ldots, p'^0_n,$$

y escribamos

$$p'^0_1 = f(x'^0_1, \ldots\ldots, x'^0_n, z'^0, p'^0_2, \ldots\ldots, p'^0_n) \qquad (3).$$

Se puede formar entonces, una sucesión uniformemente convergente de funciones analíticas

$$\xi_1(x_1, \ldots\ldots, x_n), \ldots\ldots, \xi_\mu, \xi_{\mu+1}, \ldots\ldots \qquad (4)$$

cuyo límite es la integral de la ecuación (1), función analítica de $x_1 \ldots\ldots, x_n$ que se reduce a $\chi(x_2, \ldots\ldots, x_n)$ para $x_1 = x'^0_1$. En seguida demuestra que las aproximaciones de la integral de (1) admiten derivadas parciales que tienden uniformemente hacia las derivadas parciales correspondientes de la integral. Considera luego el caso en que la ecuación está en forma no resuelta respecto a p_1.

Teoremas análogos demuestra con todo rigor el autor, referentes a los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de varias funciones y hace observar cómo las consideraciones del tercer capítulo se aplican al caso de las ecuaciones lineales en derivadas parciales de primer orden, en donde se obtiene el sistema diferencial asociado y las integrales principales, así como a la integración de los sistemas jacobianos completos, reduciéndolos por el método Mayer al caso de una ecuación en derivadas parciales de primer orden; a estos sistemas completos se reducen los sistemas de primer orden en involución y, por tanto, éstos también se integran por aproximaciones sucesivas.

Análogamente, en el capítulo 4.° se observa que mediante un simple cambio de notaciones se reducen al primer orden las ecuaciones o los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de orden superior al primero y, por tanto, que si cumplen con las condiciones enunciadas, pueden aplicárseles todas las consideraciones hechas.

Damos así una ligera idea del contenido de esta Tesis Doctoral que merece gran atención, por las razones arriba indicadas. En particular, hay un punto esencialísimo y que no está abordado en este trabajo y es el de la determinación de los errores o límites de error en las sucesivas aproximaciones; la contestación categórica a esta cuestión sería de extraordinario interés para consagrar definitivamente como *práctico* el método del Dr. Germay; podría intentarse por ejemplo la solución, siguiendo este camino, de las ecuaciones de las placas elásticas, lo cual haría aplicables a la Técnica los resultados puramente teóricos obtenidos. Después de estar en impresión esta Tesis, el Dr. Germay, en varias conversaciones, nos expuso sus resultados referentes a la anterior cuestión y luego en comunicación particular la solución definitiva, que será publicada dentro de poco. Aun para su aplicación a la teoría de las placas elásticas, sería necesario considerar en vez de *problemas de Cauchy, problemas de Neumann* o *de Dirichlet*, y efectivamente en esta dirección dirige el Dr. Germay sus investigaciones actuales, en las cuales le deseamos éxito análogo al del trabajo reseñado.

T. R. BACHILLER.

FUETER (DR. R.): *Vorlesungen über die singulären moduln und die Komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen.*—Erster Teil., VI, 142 S. mit. 16 Figuren im Text. B. G. Teubner. Leipzig-Berlín, 1924.

El Profesor Fueter expone en esta obra, cuya primera parte reseñamos, la teoría de la multiplicación compleja y sus aplicaciones a la teoría de números; bien conocidos son sus trabajos sobre esta materia, uno de los cuales le permitió llegar a la demostración del célebre teorema de Kronecker, en el caso del cuerpo imaginario-cuadrático, teorema señalado a los investigadores por D. Hilbert en el 2.° Congreso Internacional de Matemáticos reunido en París el año 1900; a pesar de los esfuerzos de Fueter mismo, Hecke y Tagaki, aún queda sin demostrar el caso general en que se considere un cuerpo cualquiera.

Comienza este tomo con una sucinta y clara exposición de la teoría de las funciones modulares elípticas, siguiendo en esto la dirección de Hurwitz y de

Klein; así, estudía el grupo modular, los recintos de discontinuidad del grupo con todo detalle y, en fin, las funciones modulares. Sigue a este capítulo, otro sobre las ecuaciones de transformación, consecuencia necesaria de la idea de grupo, tomada como fundamento y expone el concepto de transformación de especie n, funciones modulares de especie n, para terminar estableciendo las ecuaciones de transformación.

A partir de aquí y en los capítulos sucesivos, casi todo es labor original de Fueter y lo que no lo es, se encuentra sistematizado por primera vez. Así, en el capítulo tercero, trata de los valores singulares de las funciones modulares, empezando con un párrafo sobre el cuerpo cuadrático, demostrando que los módulos singulares son números algebraicos, determinando la ecuación de clases de un cuerpo y estudiando su grupo, para terminar con el estudio de los anillos de clases del cuerpo. El capítulo 4.º lo dedica a una exposición de las nociones de funciones elípticas que ha de necesitar en el desarrollo de la obra; claramente expuesto como está, resulta uno de los más bonitos capítulos de la obra, y en él hace hincapié, puesto que la teoría de la multiplicación compleja, la basará el autor sobre la función p de Weierstrass, en el desarrollo de sus propiedades y sus fórmulas y teoremas de multiplicación, así como en la función modular, cuyo estudio hace por medio de la función $T(z)$ de Jacobi, cuyo módulo obtiene mediante la transformación de Gauss.

El último capítulo lo dedica el Profesor Fueter a la multiplicación compleja de las funciones elípticas. Introduce el concepto de *haz* de un cuerpo cuadrático, llamando así al conjunto de todos los números ξ del cuerpo $K(\sqrt{m})$, tales que satisfacen a la congruencia $\xi \equiv 1 \pmod{f}$; f se llama *directriz* (Führer) del haz que representa por $s(f)$. Demuestra que el número de clases de haces es finito y que forman un grupo abeliano cuyo orden es el número de clases. Con estas ideas obtiene las fórmulas fundamentales de multiplicación compleja y estudia sus muchas propiedades. Refiere siempre la multiplicación compleja respecto a la función $T(z)$ y demuestra que $T(vz)$ es una función racional de $T(z)$ cuyos coeficientes pertenecen al anillo de clases del cuerpo (Ringklassenkörpers) $r(4)$; después de exponer un gran número de propiedades de la multiplicación compleja en el último párrafo, estudia con detalle el *haz* de clases de un cuerpo (Strahlklassenkörper) y su grupo que demuestra es de Galois.

Toda la obra está hecha con un orden y una claridad perfectas; su lectura es fácil y rica en sugestiones, por lo cual creemos que será de gran utilidad, y desde luego nos permite suponer que la segunda parte no ha de desmerecer en nada de la primera, su introducción. Será la parte más interesante de la obra y donde se encontrará el lector en las fronteras de lo conocido. Es muy digna de alabanza la publicación de obras de esta naturaleza, sobre todo en teorías tan difíciles como las de Aritmética superior, que desgraciadamente tiene tan pocos cultivadores, a pesar de su importancia capital para el resto de la matemática, tanto, que Hilbert, en su discurso *Mathematische Probleme*, antes citado, considera la generalización del teorema de Kronecker a un cuerpo algebraico cualquiera, como la cuestión central de la teoría de funciones de varias variables.

T. R. BACHILLER.

NOTAS NECROLÓGICAS

Corrado Segre.—En Turín, ha muerto hace unos meses el ilustre matemático italiano Corrado Segre, después de una vida llena de brillantes trabajos matemáticos, que hacen pueda dársele el título de padre de la actual generación de geómetras italianos. Nació en Saluzzo (Turín) el 20 de Agosto de 1863 y a los veinticinco años fué nombrado profesor de Geometría Superior en la Universidad de Turín, donde ha profesado hasta su muerte. Era miembro de casi todas las Academias italianas y de un gran número de instituciones científicas extranjeras.

La obra más fundamental de Segre se refiere a la Geometría proyectiva superior, a la algebraica y a la proyectiva diferencial. En la primera rama de la matemática, introduce conceptos fundamentales referentes a las representaciones reales de elementos complejos de un hiperespacio S_n en sus memorias de la Acc. de Torino, serie II, t. 38 (1886), de *Mathematische Annalen*, t. 40 (1892) y de las Atti de la Accad. de Torino, t. 25 (1889-90) y t. 26 (1890-91) y también en el estudio de las correspondencias algebraicas entre ellos; en todas estas cuestiones existe aún un dilatado campo de investigación, y en las citadas memorias se encuentran las ideas directrices; fundamentales son también sus investigaciones sobre las formas bilineales y sobre los sistemas lineales de homografías y sobre las propiedades métricas de las correlaciones y la clasificación de las colineaciones de un espacio de cualquier número de dimensiones. En la Geometría algebraica a Segre se debe la primera sistematización del estudio algebraico-geométrico de las curvas algebraicas y su célebre Memoria *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, *Annali di Mat.*, serie 2.ª, t. 22, 102 págs., 1894, ha sido el origen de los posteriores y brillantes trabajos de Castelnuovo, Enriques, Severi, De Franchis, Berzolari, Chinisi, etc.; en esta parte de la Geometría es casi donde ha obtenido más resultados, referentes a las curvas normales de género p de un S_n, a los sistemas lineales de curvas algebraicas, a las singularidades de superficies, a las transformaciones birracionales, a la geometría sobre las superficies regladas algebraicas, a las regladas racionales de un espacio cualquiera, a los puntos de Weierstrass de una curva algebraica y a la geometría de los sistemas de cónicas. En la Geometría proyectivo-diferencial ha estudiado principalmente las congruencias W y otros sistemas de rectas; en la Geometría diferencial ordinaria ha introducido nociones fundamentales, como las de tangentes conjugadas y curvas de Segre.

Es imposible dar idea aproximada en una pequeña nota de toda la admirable labor de este ilustre geómetra, que no ha cesado de investigar ni aun en estos últimos tiempos; el número e importancia de las memorias por él publicadas es enorme y su gran influencia en la formación de todos los actuales matemáticos italianos, hace que su muerte constituya una pérdida irreparable para la ciencia italiana.

T. R. B.

Helge von Koch.—A los cincuenta y cuatro años ha muerto este matemático sueco, Profesor de la Universidad de Stockolmo. Ha contribuído al progreso de la matemática, principalmente con sus trabajos sobre los determinantes infinitos, los sistemas de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas, sobre las ecuaciones integrales, las fracciones continuas y sobre las propiedades de la función ξ de Riemann.

A. Gutzmer.—También últimamente ha fallecido el Profesor de la Universidad de Halle Dr. Augusto Gutzmer; era un matemático de mérito, que hizo interesantes trabajos sobre las ecuaciones diferenciales y que estaba dotado de un gran talento organizador. Gutzmer ha tomado una parte muy activa en el progreso de la enseñanza científica y en el desarrollo de la Sociedad Matemática Alemana, de la cual ha dirigido el *Jahresbericht* desde el año 1894.

Paul Urysohn.—A fines de verano, y ahogado en una playa francesa, ha muerto este joven matemático ruso, que tan brillantes resultados estaba obteniendo en la topología, en la teoría de conjuntos y la de funciones de variable real. Sobre estas cuestiones ha publicado muy importantes trabajos en la revista polaca *Fundamenta Mathematicæ* y en los *Comptes Rendus* de la Academia de Ciencias de París; en estos últimos, y a fines del año pasado, publicó una de sus investigaciones más interesantes, referente al concepto de número de dimensiones de un espacio o conjunto cualquiera, obteniendo escalas continuas de números de dimensiones. También el año pasado, y en el Congreso de Marburg, de la Sociedad Matemática alemana, presentó su Memoria sobre las líneas cantorianas, en la que obtiene resultados elegantes y fundamentales como la existencia sobre una curva algebraica, de un continuo no denso que no admite ninguna descomposición en un número finito o infinito numerable de continuos *de una hoja* (schlichtartige) (homeomorfos con un conjunto plano).

T. R. B.

A. A. Markoff.—En Petrogrado, y a los sesenta y seis años de edad, ha fallecido uno de los mejores matemáticos rusos. Son bien conocidos sus trabajos sobre los fundamentos del cálculo de probabilidades, sobre la ley de Gauss, sobre las fracciones continuas algebraicas, series y ecuaciones diferenciales. En todas sus memorias se nota la benéfica influencia de su maestro Tchebycheff.

G. Eneström.—También ha muerto en Estokolmo, a los setenta años, el fundador y editor de la importante revista de historia de la Matemática titulada *Bibliotheca Mathematica;* Eneström es el continuador de la obra iniciada por Moritz Cantor y al que se deben los mejores y más numerosos estudios de historiografía matemática. Casi todos sus trabajos se refieren a los matemáticos de los siglos XV, XVI y XVII.