CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS
Patronato "Alfonso el Sabio"

REVISTA MATEMATICA HISPANO-AMERICANA

REVISTA PUBLICADA POR EL INSTITUTO «JORGE JUAN» DE MATEMATICAS Y LA REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA

CUARTA SERIE
Tomo III

MADRID
1944

DAVID HILBERT

La Matemática ha sufrido últimamente una gran pérdida con la muerte de HILBERT; desaparece uno de los pocos matemáticos de gran estilo de nuestra época, uno de esos hombres geniales que dejan huella profunda en todo el dominio que su labor de investigación ha abarcado. Pertenece a la línea de los GAUSS, CAUCHY, ABEL, GALOIS, RIEMANN, WEIERSTRASS, POINCARÉ, VOLTERRA..., para no citar más que a los fundadores y escultores de la Matemática actual.

Nació DAVID HILBERT el 23 de enero de 1862 en la ciudad de Koenigsberg, donde también hizo sus estudios de primera y segunda enseñanza, manifestando durante ellos una gran afición artística y literaria. Como él mismo decía más tarde: «no me ocupaba en mis primeros estudios de un modo especial con la matemática, porque tenía plena conciencia, de que esa sería mi tarea futura». También la mayor parte de sus estudios universitarios los realizó en su ciudad natal, con H. WEBER como maestro y del cual cobró afición a las cuestiones de la teoría de los números y a la de los invariantes algebraicos; LINDEMANN, el que primero demostró la trascendencia del número π, en 1882, fué otro de sus maestros. En la Universidad de Heidelberg, se interesó y trabajó principalmente con el gran FUCHS, entonces en todo su esplendor, con sus decisivos trabajos en la teoría de las ecuaciones diferenciales. En Koenigsberg tuvo la suerte de oir al recién nombrado profesor extraordinario Adolfo HURWITZ y establecer una honda amistad con MINKOWSKI; ambos ejercieron una gran influencia sobre el joven HILBERT, sobre todo porque le pusieron en contacto con los últimos resultados de la teoría de las funciones, tanto en la dirección de *Weierstrass* como en la de *Riemann*, y con los trabajos de DEDEKIND y de KRONECKER. En diciembre de 1884 recibe HILBERT su doctorado, mediante una Tesis sobre un problema que *Lindemann* le había propuesto: caracterizar de modo invariante las formas que se pueden transformar proyectivamente en funciones esféricas de orden *n*. Su primera intención fué presentar como disertación doctoral un trabajo sobre un problema propio (se trataba de una generalización de las fracciones continuas); pero como *Lindemann* le dijo: ¡Desgraciadamente tal generalización fué ya dida por *Jacobi*! Su Tesis le había hecho profundizar en la Teoría de los invariantes y en el campo de ésta contnúa laborando de modo exclusivo hasta 1892, en cuyo intervalo de tiempo le fué concedida la docencia privada en la Universidad de Koenigsberg, de la que fué nombrado, después de su trabajo de Habilitación, profesor extraordinario, para pasar al poco tiempo, como Ordinario a la famosa Universidad de Göttingen, ciudad en la que, salvo cortas ausencias, y de éstas rara vez al extranjero, permaneció hasta su muerte.

La obra de HILBERT se caracteriza por su gran originalidad y profundidad. En casi todas las ramas de la Matemática ha dejado huella y ha iniciado nuevos métodos y nuevas extensiones de las teorías; ha tenido predilección siempre por las cuestiones y problemas verdaderamente vitales de su ciencia, en toda ocasión iba directamente al núcleo de la dificultad o bien la resolvía genialmente o acertaba a mostrarla en nueva y fecunda perspectiva. Esa su tendencia natural a tratar problemas medulares, explica las espléndidas investigaciones por él realizadas, en el campo de los Fundamentos de la Matemática, de los que se ocupó casi exclusivamente en los últimos lustros de su vida científica, así como el impulso nuevo y fuerte que dió a las Teorías más abstractas y difíciles de la Matemática, en especial a la Teoría de los números algebraicos. El análisis de la obra de HILBERT exigiría él solo una obra, y no pretendemos en este corto artículo ser completos ni mucho menos; sólo nos limitaremos a señalar algunos de los temas predilectos de HILBERT y en los cuales sus ideas han sido decisivas. Quien desee obtener una información más detallada hará bien en consultar sus *Gesammelte Abhandlungen,* publicadas por la casa Springer en tres volúmenes; en el último de éstos, encontrará el curioso, más detalles sobre su vida científica, en el magnífico artículo a ella dedicado por el ilustre matemático Otto BLUMENTHAL.

Como ya dijimos los primeros trabajos de HILBERT se relacionaban con la Teoría de los invariantes de las formas algebraicas y es aquí donde obtuvo el primero de sus resultados de gran transcendencia, demostrando la *finitud* de los sistemas de invariantes; más aún, la *finitud* de la base de un sistema de módulos, introduciendo además la noción de *función característica* de un sistema de módulos, en estrecha conexión con el *género* numérico de la estructura algebraica correspondiente. Estos trabajos cierran una época (la de los cálculos y algoritmos laboriosos, artificiosos y oscuros) y abren otra, prometedora, en la importantísima teoría general de los *invariantes*; sin embargo, en cierto modo, las nuevas ideas de HILBERT en este dominio, no fueron comprendidas en todo su alcance; ha sido preciso el espléndido desarrollo del Algebra Moderna, para que dieran todo su fruto (como demuestra la magistral obra reciente sobre la Teoría de los invariantes de H. WEYL). La idea esencial de HILBERT es aquí, el empleo de métodos aritméticos en problemas algebraicos, estudiando las propiedades generales (aritméticas y algebraicas) de los sistemas de funciones algebraicas; de aquí arrancan las teorías generales de los cuerpos, anillos y módulos abstractos, que luego han de desarrollar de modo tan magnífico E. NOETHER, VAN DER WAERDEN, edificando así el bello edificio actual del Algebra Moderna.

Después de los invariantes, tócale el turno de la atención de HILBERT a la Teoría de los números, en la cual comienza con una demostración extremadamente sencilla de los resultados ya obtenidos por *Hermite* y *Lindemann,* de la trascendencia de los números e y π. También en esta rama de la Matemática, la predilecta de GAUSS, sus resultados y métodos marcan una nueva época; fueron sistemáticamente expuestos en el célebre «Informe a la Sociedad Matemática Alemana» sobre la *Teoria de los cuerpos de números algebraicos,* obra capital, que es la base para toda investigación moderna en el campo de la Aritmética Superior (lo que fueron las «Disquisitiones Arithmeticae» de Gauss en la primera mitad del siglo pasado); ella, junto con las dos importantísimas Memorias: «Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers» (Mathematische Annalen, tomo 51, 1898) y «Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlk rper» (Göttinger Nachrichten, 1898), colocan a la teoría de los números algebraicos bajo el signo de los dos grandes problemas, estrechamente relacionados entre sí: el de la existencia del cuerpo de clases para un cuerpo algebraico cualquiera y el de la ley de reciprocidad de los restos potenciales para un exponente primo l arbitrario en un supercuerpo del cuerpo de las raíces l-ésimas de la unidad. En estos trabajos, sitúa justamente a estos problemas en la perspectiva que permite comprender su profunda significación para el porvenir de la Teoría. Aun hoy el problema del cuerpo de clases es un problema capital dentro del Algebra abstracta. (El «Informe» análogo al de HILBERT, para la época posterior, y debido a uno de sus más distinguidos discípulos, sucesor actual del Maestro en Göttingen, H. HASSE, está casi todo él dedicado a dichos problemas). A partir de 1899 no vuelve a publicar nada sobre cuerpos de números algebraicos y comienza a ocuparse de los fundamentos de la Geometría y de la entonces recién nacida teoría de las Ecuaciones integrales.

En 1900, durante el II Congreso internacional de Matemáticos, celebrado en París, lee su famoso discurso sobre «los problemas de la matemática», señalando a la atención de los investigadores 23 cuestiones referentes a toda la matemática (actualmente en su mayoría han sido resueltos y lo que vale más, han originado nuevos métodos y problemas).

La atención dedicada a la Geometría, le conduce a la Axiomática, publicando en 1900 la primera edición (la actual es la octava) de su famosa obra «Grundlagen der Geometrie» que produjo en aquella época interesantes y fecundas discusiones entre su autor, POINCARÉ y B. RUSSELL; ya en esta obra se inicia su posición *formalista* dentro del campo de la investigación de los fundamentos de la Matemática; recordemos que su método axiomático fué expuesto en el primer número de nuestra Revista del año 1919, en un magnífico artículo lleno de sugestiones y singularmente claro; es curiosa esta característica de la mente de HILBERT, a pesar de la dificultad y de lo abstruso de las cuestiones por las que tiene mayor predilección. Sus exposiciones son siempre estrictas, sin palabras ni silogismos inútiles, dejando al desnudo la esencia del problema y de su demostración; y conste que su estilo literario no tiene nada de seco, más bien es flúido y elegante. En la obra citada resaltan justamente estas cualidades; constituye para nuestra época una obra clásica en el más pleno sentido y ha sido el punto de partida de una serie de valiosas investigaciones en todas las ramas de la Geometría, cuya estructura matemática y lógica ha sido así analizada casi de un modo definitivo. Como complemento a la obra en cuestión, aunque de carácter radicalmente intuitivo, puede considerarse sus bellas lecciones, de varios cursos de Göttingen, recogidas en el volumen publicado por la casa Springer y titulada «Anschauliche Geometrie», donde se expone, por decirlo así, el «material intuitivo» de todas las ramas esenciales de la Geometría.

Casi al mismo tiempo que se ocupaba HILBERT de estas cuestiones geométricas, tomó contacto con los trabajos de Fredholm sobre las ecuaciones integrales y la teoría del potencial. Fruto de sus profundas meditaciones sobre el nuevo campo abierto por Fredholm y Volterra son una serie de brillantes y decisivas Memorias, mediante las cuales, como siempre de un modo originalísimo, plantea de nuevo los problemas y con sus nuevos métodos e ideas, da un impulso formidable a la teoría de las ecuaciones integrales y sobre todo al *Análisis funcional*, que poco antes comenzó a dar sus primeros pasos firmes como teoría independiente y ambiciosa de abarcar grandes extensiones de la Matemática clásica. Así sucedió con el Cálculo de Variaciones, absorbido por aquél, y precisamente el primer paso en este sentido fué dado por Hilbert, en un trabajo de gran transcendencia, la demostración del Principio de Dirichlet, con lo cual probó cumplidamente la potencia de sus métodos, que igualmente dieron ópimos frutos aplicados a otros dos grandes problemas, el de la existencia de las integrales abelianas de primera especie y el de la uniformización de la teoría general de funciones. Los métodos funcionales de Hilbert han sistematizado la teoría de las ecuaciones integrales y han permitido además un considerable avance al problema de la integración de las ecuaciones en derivadas parciales, especialmente las de la Física Matemática y sobre todo en el tratamiento de sus problemas lineales de contorno; en este campo son esenciales las ideas y conceptos de Hilbert, las autofunciones y autovalores de los *operadores*, la teoría de los sistemas de infinitas ecuaciones lineales con una infinidad de incógnitas (infinito numerable), el espacio de su nombre, de infinitas dimensiones, campo de juego de todas las funciones utilizadas en la actual Mecánica cuántica, etc. Todas estas cuestiones han sido objeto de pocas, pero enjundiosas Memorias del gran matemático, y también de varios cursos de lecciones universitarias, una recopilación de los cuales se encuentra en la conocida y magnífica obra «Métodos matemáticos de la física-matemática» (2 tomos, Springer), redactada y completada por otro de sus mejores discípulos, Courant, uno de los que más han contribuído al desarrollo de los nuevos métodos del Maestro, en el campo a que nos estamos refiriendo.

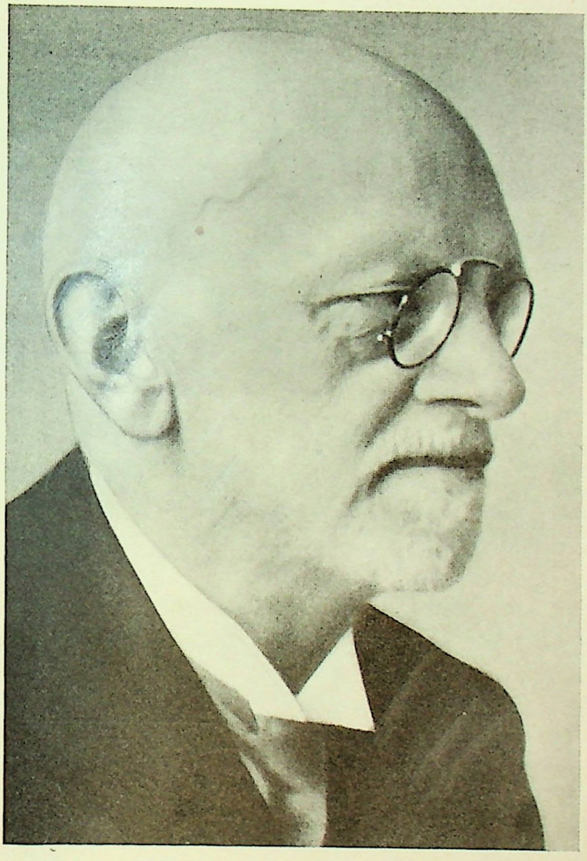
En la última época de la vida científica de Hilbert, coincidente con la espléndida floración de nuevas y fecundas concepciones en la Física, como la Teoría de la Relatividad y la Teoría de los *quanta*, su interés se dirigió también hacia ellas, pero siempre desde su punto de vista personal y marchando directo, al menos como matemático, al núcleo de lo esencial. Así que fueron sus trabajos predilectos los de carácter axiomático, logrando fundamentar de manera sólida los esquemas matemáticos de la mayor parte de la Física-Matemática. Son notables las memorias dedicadas a los fundamentos axiomáticos de la teoría de la relatividad y de la mecánica cuántica, esta última realizada en colaboración con otro más de sus discípulos, J. von Neumann, que también ha ayudado a su Maestro en el estudio de los fundamentos de la Matemática.

La meditación sobre estos últimos problemas, ha absorbido gran parte de la actividad de Hilbert; después de la aplicación del pensamiento axiomático a la Geometría, se dedica al problema análogo de la aritmética, de la teoría de los conjuntos y al del infinito. El análisis de la estructura formal de todas estas axiomáticas le conduce a crear una nueva Matemática, la Matemática de la Matemática misma, es decir, la matemática de las estructuras lógicas de las teorías matemáticas. Con esta *Metamatemática* se erige en jefe de una de las tres escuelas que pretenden representar la tan mal llamada *filosofía de la Matemática*, de la escuela *formalista* (las otras dos son la *logicista*, cuyo jefe es B. RUSSELL, y la *intuicionista*, cuyo director es el genial L. E. J. BROUWER). La Tesis formalista de HILBERT puede sintetizarse en la afirmación de que la matemática pura es *la ciencia de la estructura formal de los símbolos*, negando por otra parte el que los conceptos matemáticos puedan reducirse a los conceptos lógicos (escuela logicista); el matemático puede estudiar las propiedades de los objetos solamente construyendo un sistema de *signos*, una vez hecho lo cual no tiene porqué preocuparse de su significación, puesto que puede ver en los signos mismos aquellas propiedades estructurales que le interesan. Esto no quiere decir en modo alguno que la matemática sea un mero juego sin ningún significado. Parte esencial en la teoría formalista es la teoría de la demostración o sea propiamente la Metamatemática. El desarrollo dado por HILBERT y sus discípulos al pensamiento axiomático y a las tesis formalistas han suavizado las oposiciones con las otras dos escuelas, de tal modo que hoy puede decirse que se completan unas con otras, sino es que significan simplemente etapas de desarrollo de una futura Teoría de la Matemática. De todos modos la vida intensa que actualmente tienen todos estos problemas de *fundamentación* la deben a HILBERT principalmente, sin disminuir con ello nada el rango de sus dos aparentes rivales BROUWER y RUSSELL.

Esta es a grandes rasgos la labor del genial matemático alemán; quien quiera conocer con más detalle y profundidad su vida matemática deberá consultar los excelentes artículos de varios de sus más distinguidos discípulos, contenidos en los tres volúmenes al principio citados; también podrá observar la gran cantidad de tesis doctorales que ha dirigido y la alta calidad de sus autores, muchos de ellos, ya en la actualidad, matemáticos de primera fila y dignos sucesores del Maestro.

La manera mejor de honrar la memoria de HILBERT es estudiar sus obras, desarrollar sus ideas y si es posible crear sobre ellas nuevas construcciones que amplíen el bello y armonioso edificio de nuestra Ciencia, conservando siempre, haciéndola más profunda, su sorprendente unidad.

T. R. BACHILLER.



Hilbert