CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

Patronato "Alfonso el Sabio"

REVISTA MATEMATICA HISPANO-AMERICANA

REVISTA PUBLICADA POR EL INSTITUTO «JORGE JUAN» DE MATEMATICAS Y LA REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA

CUARTA SERIE

Tomo III

MADRID

1944

CRONICA

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Fundación del Conde de Cartagena. Cátedra de Matemática (Curso de Topología)

Conferencias del Prof. T. R. BACHILLER

(*Continuación*)

5. En esta lección se estudian los *sistemas completos de entornos* aptos para definir un espacio topológico, deduciendo las dos propiedades esenciales de un sistema de esa clase, a saber:

a) Si *a* y *b* son dos puntos distintos del espacio E, existe un entorno U de *a* y perteneciente al sistema $\mathcal{L}$, que no contiene *b*.

b) Si U y V son dos entornos del punto *a*, existe un entorno de *a* y perteneciente al sistema $\mathcal{L}$, sea W, contenido en la intersección de U y V.

A continuación se dedica toda la lección al «Teorema fundamental» siguiente (inverso de las dos proposiciones anteriores juntas):

«Sea $\mathcal{L}$ un sistema de subconjuntos de un conjunto dado E, que satisface a las condiciones siguientes: *a*), para cada dos elementos distintos *a* y *b* de E, existe un conjunto U del sistema $\mathcal{L}$, tal que, *a* pertenece a U y *b no* pertenece a U; *b*), para cada dos conjuntos U y V del sistema $\mathcal{L}$, que contienen el elemento *a* de E, existe un conjunto W del sistema $\mathcal{L}$, tal que, *a* pertenece al conjunto W y W está contenido en la intersección de U y V. Si se define ahora una operación unívoca que haga corresponder a todo subconjunto M de E otro subconjunto, denotado con $\overline{M}$, mediante la regla de que el elemento *a* pertenezca a M, *si y solamente si* todo conjunto del sistema $\mathcal{L}$ que contenga *a*, interseca a M, *entonces* tal operación cumple los axiomas de la *acumulación* y por tanto E es *un espacio topológico* y $\mathcal{L}$ es un sistema completo de entornos de E, es decir, constituye una *base* para los conjuntos abiertos de E.»

Se hace observar el carácter de «condición de separación» de la propiedad *a*) y se aprovecha este momento para indicar los distintos axiomas de *separación* de uso corriente, y que sirven de pauta para clasificar los espacios topológicos vigentes en la Matemática actual. Tales son: el de KOLMOGOROFF (el más débil, que determina los espacios llamados T_0; ej., el espacio de las funciones localmente analíticas de *n* variables complejas, espacio en el que juegan los funcionales analíticos); el de FRÉCHET (espacios T_1), el de HAUSDORFF, ya enunciado (espacios T_2), el de VIETORIS (espacios T_3), y el de TIETZE (espacios T_4); estos dos últimos conducen a los espacios *regulares* y *normales*, que juegan un papel principalísimo en el problema de la *metrización*.

6. El teorema demostrado en la lección anterior nos permite definir un espacio topológico mediante un sistema de *subconjuntos*: el SISTEMA DE ENTORNOS GENERADOR. Es preciso plantear ahora la cuestión siguiente: ¿Cuándo sucederá que dos sistemas de entornos diferentes produzcan en E la misma topología? Entonces resultará que la operación de acumulación será la misma, se defina con uno o con el otro de los dos sistemas; asimismo coincidirán los conjuntos abiertos y los cerrados en ambos. La respuesta a dicha cuestión viene dada por el TEOREMA DE HAUSDORFF, en forma de *criterio de equivalencia*:

«La condición necesaria y suficiente para que dos sistemas completos de entornos $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ sean *equivalentes*, es que para todo punto a y cada entorno U de a, perteneciente al sistema $\mathcal{L}$, exista un entorno U' del sistema $\mathcal{L}'$, tal que U' esté contenido en U, e inversamente, para cada entorno V' de a, perteneciente a $\mathcal{L}'$, exista un entorno V de a del $\mathcal{L}$, tal que V esté contenido en V'.»

Los dos espacios topológicos son realidad uno mismo. Si los conjuntos de partida son diferentes E y E', los dos espacios topológicos producidos se dicen *homeomorfos*; la correspondencia de este modo establecida se llama un *homeomorfismo* y los espacios homeomorfos entre sí, se dice que son *topológicamente equivalentes*.

Se aclaran estos conceptos con varios ejemplos; especialmente se demuestra cómo una *métrica* introducida en un espacio dado por medio de una definición de la «distancia» permite obtener sistemas completos de entornos de gran utilidad en el desarrollo ulterior de la Topología, sobre todo por su carácter intuitivo. Así, por ej., en el estudio y manejo de los espacios de transformaciones unívocas y continuas, cada vez más empleados como potentísimo instrumento de demostración, de investigación y de sistematización en la Topología actual.

Se termina esta lección, deduciendo del TEOREMA FUNDAMENTAL la condición necesaria y suficiente para que un conjunto G sea abierto: que para todo punto a de G, exista un entorno U de a, contenido en G (o lo que es igual, que todo punto sea interior), así como una condición necesaria y otra suficiente para que un punto sea de acumulación. Todo en función de los entornos.

7. El objeto de esta lección es el de *relativizar* los conceptos fundamentales ya introducidos para un espacio topológico E. Un conjunto M contenido en E, se puede considerar *en sí mismo* como un espacio topológico, sin más que definir la *acumulación* de un subconjunto C de M, como intersección de C con C' (acumulación de C en E). Demuéstrase que tal operación cumple los axiomas característicos de la «acumulación». De aquí derivan los conceptos de conjuntos cerrados y abiertos «relativos», o sea *en* M, contorno y frontera «relativos» (en M), etc. Se demuestran las proposiciones siguientes:

a) Sea E^0 un subespacio de E. Si F es un conjunto cerrado contenido en E, la intersección de F con E^0 es un conjunto F^0 relativamente cerrado en E^0, y recíprocamente, todo conjunto F^0 relativamente cerrado en E^0 se puede obtener como intersección de E^0 con un conjunto cerrado F de E.

b) Proposición análoga para los conjuntos abiertos relativos.

c) Sea $\mathcal{L}$ una base de E; si $\mathcal{L}^0$ denota la totalidad de los conjuntos obtenidos por intersección de E° con cada G de $\mathcal{L}$, entonces $\mathcal{L}°$ constituye una base de E°. Proposición análoga localizando en un punto.

En suma, un espacio de entornos, mediante relativización da lugar a otro espacio de entornos. Una propiedad de un espacio topológico E, se dirá con HAUSDORFF *cogrediente*, cuando es válida también para todo espacio relativo o subespacio de E. Así, el ser espacio de entornos es una propiedad «cogrediente».

De manera semejante se relativiza la noción de convergencia y también la de espacio métrico.

En próximas lecciones al estudiar las transformaciones continuas y nuevas clases de conjuntos y de espacios, aplicaremos este proceso de relativización.

Termina la lección mostrando además mediante algunos ejemplos especialmente sugestivos, la importancia de este concepto, en modo alguno trivial.

8. Es ya ocasión de definir las transformaciones continuas en un espacio topológico. Previamente se precisa la terminología, analizando brevemente, desde el punto de vista de la teoría de los conjuntos abstractos, las nociones de «correspondencia», «transformación, «función» y «operación». Para nosotros tienen sobre todo importancia las correspondencias, transformaciones, etc., *unívocas* o *uniformes* y las *biunívocas*. El elemento o conjunto correspondiente a uno dado se llamará *imagen*, y aquel del cual es imagen, *original*, *contra-imagen* o *imagen inversa*.

Se definen primero los *homeomorfismos* entre dos espacios topológicos E y E': son las correspondencias f, 1) biunívocas y 2) que conservan la acumulación, esto es, para todo conjunto M contenido en E, la imagen de la acumulación M es la acumulación de la imagen, o sea $f(\bar{M})=\overline{f(M)}$. Estas correspondencias o transformaciones son las fundamentales en Topología, cuyo objeto puede ahora decirse que es el estudio de las propiedades de los conjuntos y espacios *invariantes* respecto de ellas; tales propiedades se dicen *topológicas*. Como los homeomorfismos o transformaciones topológicas forman un *grupo*, queda así encuadrada la Topología en el programa de ERLANGEN de KLEIN, del cual se hace una breve reseña.

Las transformaciones topológicas definen en un espacio E, una *relación de equivalencia*, en virtud de la cual, los subconjuntos o figuras del espacio considerado se clasifican en clases de conjuntos *topológicamente equivalentes*: caracterizar estos tipos es uno de los problemas capitales de la Topología y entre ellos se deben señalar especialmente los de caracterizar las «curvas» o «líneas», las «superficies» y en general, las «variedades n-dimensionales». Los problemas generales aludidos presentan dos aspectos, uno referente a la estructura propia de una figura considerada en sí misma, es decir, como un espacio, y otro que muestra la *situación* en un espacio ambiente; para la primera, las transformaciones topológicas base de la equivalencia, son las de unos espacios en otros y para lo segundo, lo son las del espacio ambiente de las figuras, en sí o las de los espacios en que están contenidos respectivamente entre sí. Para ambos tipos de cuestiones, es esencial por tanto, resolver *problemas de inmersión*, esto es, saber cuándo un conjunto o figura o espacio se puede *sumergir* en un espacio dado. Se ponen ejemplos que aclaran y resaltan las cuestiones reseñadas, dándose además una información bibliográfica suficiente.

9. Definidas en la precedente lección las transformaciones topológicas, o sea los homeormorfismos, en ésta nos ocuparemos de las transformaciones continuas. El concepto de homeomorfismo es el análogo del de *isomorfismo* en Algebra (teorías de los grupos, anillos, cuerpos, álgebras de orden n, estructuras, etc.) y el de transformación unívoca y continua del de *homomorfismo*.

Una transformación unívoca g de un espacio topológico E con otro E', se dice *continua* si para todo conjunto M de E se verifica que $g(\overline{M})$ está contenido en $\overline{g(M)}$, es decir, la imagen de la acumulación de M está contenida en la acumulación de la imagen $g(M)$ de M.

Se demuestra que si g es biunívoca y *bicontinua*, esto es si g y g^{-1} son continuas, entonces g es un homeomorfismo. A seguida se demuestran también condiciones necesarias y suficientes para que una transformación unívoca sea continua: así las siguientes: *a*) Para que una transformación g de E en E' sea continua, es necesario y suficiente que para todo punto a de E y todo entorno U' del punto imagen $a'=g(a)$ en E', exista un entorno U de a tal que $g(U)$ esté contenido en U'. *b*) También se prueba que son equivalentes las dos siguientes: 1.ª Si F' es un conjunto cerrado de E', su original $F=g^{-1}(F')$, es también cerrado en E. 2.ª Si G' es un conjunto abierto de E', su original $G=g^{-1}(G')$, es también abierto en E.

Es importante probar también y así se hace, que si g es una transformación unívoca y continua del espacio E en el espacio E' y f es una transformación análoga del espacio E' en el espacio E'', entonces la transformación $h(x)=f(g(x))$ es también una transformación unívoca y continua del primer espacio E en el último E''.

Todos los conceptos expuestos pueden *relativizarse*.

Se introduce el concepto de *tipo topológico*: Si X está topológicamente contenido en Y e Y en X, diremos que X e Y tienen el mismo «tipo topológico» o pertenecen al mismo «tipo». Al contrario, si tal relación no se verifica más que en un solo sentido, se dirá que el tipo topológico de uno de los espacios es «superior» al del otro. Los tipos topológicos pueden ser *incomparables* y dos figuras pueden ser del mismo tipo y no ser homeomorfas; sin embargo, se tiene un importante teorema de BANACH: Si X e Y tienen el mismo tipo topológico, existe un conjunto A contenido en X y otro B contenido en Y, tales que A es homeomorfo a B y X-A lo es a Y-B.

Finalmente se definen los espacios y conjuntos *homogéneos*.

10. En esta lección nos ocupamos de los importantes conceptos de «frontera» y «contorno» de un conjunto M situado en un espacio topológico E. La reunión de todos los conjuntos abiertos contenidos en un conjunto M, es decir, el mayor conjunto abierto contenido en M, se llama el *núcleo abierto* de M. Sus puntos son los puntos *interiores* de M; los puntos que no son interiores se llaman *puntos del contorno* y el conjunto de éstos es el *contorno* de M. La reunión del contorno de M y del contorno del complemento de M, E—M, es la *frontera* de M. En virtud de la simetría de la relación de complementaridad, se deduce que M y E—M tienen la misma frontera. Si se designa el núcleo abierto de M, con $n(M)$, la frontera común de M y E—M viene representada por $E-(n(M)+n(E-M))$. Se deduce que la frontera es un conjunto cerrado y que para los conjuntos cerrados, la frontera y el contorno coinciden; en cambio, para los conjuntos abiertos, la frontera coincide con el contorno del complemento, puesto que entre todos los conjuntos, los abiertos están caracterizados por la propiedad de carecer de contorno. Oportunos ejemplos aclaran y precisan estas nociones y propiedades. Se demuestra en particular, que si G es un conjunto abierto exterior a un conjunto M, esto es, sin puntos comunes con él, también $\bar{G}$ es exterior a M. Es importante estudiar y así se hace, el comportamiento de los conceptos introducidos respecto de las operaciones fundamentales de la teoría de los conjuntos: reunión, intersección, diferencia, complemento, inclusión, etc., obteniéndose así proposiciones y reglas de cálculo topológico de gran utilidad en lo sucesivo. También se relativizan las nociones consideradas.

Como en el curso de estas lecciones han de ser utilizadas de modo preponderante las fronteras de conjuntos abiertos, nos detenemos algo más en el estudio de este caso, modificando un poco la definición: La frontera de un conjunto abierto, es el conjunto de sus puntos de acumulación y que no pertenecen a él. Esto es, en fórmula y designando con $f(U)$ la frontera de un conjunto abierto U: $f(U)=\bar{U}-U$. Se demuestra entonces que «la frontera de un conjunto abierto es nula o vacía, cuando y sólo cuando el conjunto abierto es cerrado». También se demuestra un importante teorema: el *Teorema de las fronteras relativas*, fundamental sobre todo para la teoría de la dimensión y cuyo enunciado es: Sea M un subconjunto de un espacio topológico separable E, y M_0 un conjunto abierto *en* M; sea W un conjunto abierto tal que $M_0=M.W$. Entonces existe un conjunto abierto U, tal que: 1.° U está contenido en W. 2.° $M_0=M.U$ y 3.° la frontera de M_0 (relativa), es la intersección de M con la frontera (absoluta) de U, es decir, en fórmulas $f(M_0)=M.f(U)$. En el caso que consideramos, se precisa y generaliza el comportamiento de las fronteras respecto de la operación de reunión, exponiendo con el detalle necesario, las finas investigaciones de Menger, de gran trascendencia para el estudio general de la teoría de los *recubrimientos* y también para la de la dimensión.

11. El objeto de esta lección es el estudio de una importante noción: la de «conexión». Se trata de una propiedad de los espacios topológicos o de sus subconjuntos de carácter *global*, admitida por las figuras más importantes de la Geometría, las *variedades n*-dimensionales ($n=1, 2, 3, \ldots$ inf.). A este propósito se hacen algunas consideraciones interesantes sobre los conceptos de *origen global*, como el que nos ocupa, y los de *origen local* (como por ej., el de *número de dimensiones* de un espacio o de un conjunto); ello no impide el que los primeros no sean susceptibles de definición «local» y los segundos de definición «global», pero siempre son más fecundas y manejables las definiciones homónimas, como se muestra analizando una porción de conceptos clásicos y modernos de la Matemática.

Después de exponer brevemente el desarrollo histórico del concepto de conexión se fija éste, enunciando que un espacio no vacío se llama *convexo*, cuando *no es suma* de dos subconjuntos cerrados sin puntos comunes, a menos que uno de ellos sea vacío. Es útil señalar que tal definición también se puede enunciar en alguna de las formas siguientes: Se dirá conexo un espacio cuando para toda descomposición del espacio en dos subconjuntos cerrados no vacíos, la intersección de ambos sumandos es *no vacía* (también se suele decir no nula o distinta de cero), o bien, cuando para toda descomposición del espacio en dos subconjuntos no vacíos y sin puntos comunes M_1 y M_2, el uno contiene un punto de acumulación del otro, lo cual se expresa en fórmulas, así: $\overline{M}_1 \cdot M_2 + M_1 \cdot \overline{M}_2 \neq 0$. Esta última relación se llama de LENNES-HAUSDORFF.

Se exponen a continuación las propiedades fundamentales de los espacios conexos, extendiendo antes la definición a cualquier conjunto de un espacio topológico, mediante la operación ya tantas veces aplicada de relativización; la forma que toma entonces la definición de conexión es: El conjunto A es conexo cuando no es suma o reunión de dos subconjuntos de A, no vacíos y sin puntos comunes, cerrados *en* A (relativamente a A). La exposición de las propiedades citadas exige, para simplificar, utilizar el concepto de «recubrimiento»; se define éste, así como lo que se llama «orden de un recubrimiento» y si el espacio es métrico o metrizable, los *ε-recubrimientos*. Es útil también utilizar el concepto de *cadena de conjuntos* que *une* dos conjuntos dados, y el de *sistema encadenado* de conjuntos, o *cadena* de conjuntos. He aquí ahora las propiedades que para lo sucesivo más nos interesan:

1. Para que un espacio E sea conexo, es necesario y suficiente, que *todo* recubrimiento finito U de E posea la propiedad siguiente, usualmente designada por (Z): Si U y U' son dos conjuntos no vacíos del sistema de recubrimiento, éste contiene una *cadena* de conjuntos.

2. Si un conjunto conexo A de E, está contenido en la reunión o suma de dos conjuntos exteriores H y H', cerrados o abiertos de E, entonces está contenido en uno de los dos sumandos.

3. Si dos puntos cualesquiera de un conjunto M pertenecen a un subconjunto conexo de M, entonces M es conexo.

4. Si M y M' son dos conjuntos conexos y su intersección es no nula, entonces la suma de ambos es un conjunto conexo.

5. La reunión de un conjunto cualquiera de conjuntos conexos, no exteriores tomados dos a dos, es conexa.

6. Si M es un conjunto conexo y N un conjunto que contiene a M y está contenido en la acumulación M de $\overline{M}$, entonces N es conexo.

Como ejercicio de aplicación de las cuestiones explicadas en esta lección, se analizan diversos ejemplos; en particular se muestra cómo la recta cartesiana R^1, es conexa, y en general, los espacios cartesianos R^n. Se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que un conjunto abierto G de R^n, sea conexo, es que cada dos puntos de G puedan unirse mediante una línea poligonal simple dentro de G.

12. Continuando con el tema de la lección anterior, se estudia en ésta un concepto derivado del de conexión: el de «componente». Si E es un espacio o un conjunto de puntos de un espacio, la relación entre dos puntos, definida por ser *conexos en* E, es decir, estar en un mismo subconjunto conexo de E, es una *relación de equivalencia*, puesto que es simétrica, reflexiva y transitiva. Queda así descompuesto E en clases de puntos equivalentes y cada subconjunto formado por tales clases, se dice que es una *componente* de E. Cada punto, cada subconjunto conexo de E está contenido o pertenece a *una sola* componente, y por tanto, cada una de éstas es un conjunto conexo y conjunto conexo *maximal*, o como también se dice, *saturado* respecto de la propiedad de conexión. Las componentes son en ciertos casos, que veremos, conjuntos cerrados y abiertos a la vez, de E. Es obvio el carácter invariante de la nueva noción, respecto de las transformaciones continuas.

Si un conjunto abierto es conexo, se llamará una *región*, o si pertenece a un espacio cartesiano, un *recinto*.

Se demuestran los teoremas siguientes:

1. Si A es un subconjunto conexo de un espacio conexo E y C es una componente del complemento E—A, entonces E—C es conexo.

2. Si A es un subconjunto conexo de un espacio E y H es un conjunto abierto y cerrado en E—A, entonces A+H es conexo. Como corolario se deduce, que si F es un conjunto conexo cerrado de un espacio cartesiano R^n, o del R^n completado con un «punto del infinito», es decir, la esfera o espacio esférico *n*-dimensional S^n, o del espacio cartesiano de una infinidad numerable de dimensiones (espacio de FRÉCHET), o del espacio de HILBERT, y G es una suma de componentes del complemento $c(F)$ de F, entonces F+G es conexo.

Un conjunto conexo y cerrado que contiene más de un punto, se dirá *continuo en sentido amplio* o *continuo generalizado* (la voz *continuo* se usa de un modo estricto para designar los conjuntos o espacios conexos y *compactos*, conjuntos de importancia primordial en la topología y que constituirán uno de los objetos preferentes de este curso de lecciones).

Como en lecciones anteriores, se presentan ejemplos adecuados aclaratorios.

13. Antes de restringir una vez más la clase de los espacios topológicos que nos han de servir en lo sucesivo, estableceremos algunas propiedades que se llaman de «densidad» y otras de «separación», de carácter bastante general y que nos serán útiles. Sea M un conjunto en un espacio y M' un subconjunto de M; M' se dice *denso en* M cuando todo punto de M o es punto de M' o es punto de acumulación de M'. Se deduce una propiedad importante de los espacios separables, que a menudo se toma como definición de los mismos, a saber: En todo espacio separable E existe un subconjunto *numerable denso en* E. Es digno de notarse que este subconjunto numerable, en el caso de los compactos, puede *construirse* sin usar el

AXIOMA DE ZERMELO (axioma cuyo empleo es superfluo en la mayoría de los estudios topológicos. sobre todo en los que se refieren a los conjuntos más frecuentes: continuos, conjuntos cerrados, regiones; por lo contrario, el citado axioma deviene indispensable, cuando se examinan clases más vastas de conjuntos, por ej., la de los conjuntos conexos, la de los semicontinuos, etc.). Se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que un subconjunto A de B, sea denso en B, es que $A = B$. Otro concepto importante es el de conjunto *no denso en ninguna parte de* M, que conduce a distinguir dos clases de conjuntos: los de 1.ª *categoria* que son, sumas de una infinidad numerable de conjuntos en ninguna parte de M densos y los de 2.ª categoria, los demás. También se analizan los conceptos de *denso en sí, en sí densos, perfecto, puntos de condensación, conjunto condensado*; aquí se presenta oportunidad de estudiar un conjunto notable de la recta cartesiana (generalizable al espacio cartesiano n-dimensional), el DISCONTINUO DE CANTOR. Más adelante se demostrará, por ej., que todo compacto es una imagen unívoca y continua del discontinuo citado, construído en el segmento (0,1). Juega un papel de primera importancia en la teoría de funciones y sobre todo en la parte de la Topología que se llama «Teoría descriptiva de los conjuntos» (conjuntos borelianos, conjuntos analíticos y conjunto proyectivos o de LUSIN). También nos ocupamos en esta lección de los *conjuntos fronteras*: un conjunto recibe tal denominación, cuando su complementario es denso; de aquí se deduce una definición de conjunto no denso, aquel cuya acumulación es un conjunto frontera. Se estudian las principales propiedades de todos estos conjuntos, y se establecen las notaciones correspondientes relativizadas y localizadas.

14. Como indicamos en la lección anterior, nos ocupamos en la presente y antes de pasar al estudio detallado de los espacios compactos o compactos, simplemente, de un teorema fundamentalísimo, en especial para la teoría de la dimensión: el TEOREMA GENERAL DE SEPARACION de MENGER. He aquí su enunciado:

Sea un conjunto M del espacio separable E, que es suma de dos conjuntos A y B, cerrados en M; sea además W un conjunto dado que contiene a $A - A.B$. Entonces existe un conjunto abierto U con las dos propiedades siguientes: 1. U contiene a $A - A.B$ y está contenido en W. 2. Las intersecciones de la acumulación de U con M y con A, coinciden, esto es: $\overline{U}.M = \overline{U}.A$. En la demostración del teorema se utiliza una restricción sobre la naturaleza de los entornos a la que repetidas veces hemos aludido: la de que todo entorno contenga otro, tal que su acumulación esté contenida en el primero.

Se deduce como corolario, que si A y B son dos conjuntos exteriores (sin puntos comunes), cerrados en su suma, existen dos conjuntos abiertos exteriores U y V, tales que A está contenido en U y B en V.

15. Las lecciones anteriores se han dedicado a estudiar las principales propiedades de los espacios topológicos, partiendo de los más generales hasta llegar a los espacios separables regulares (es decir, de base numerable y que cumplen el axioma de VIETORIS). Empezamos en esta lección a ocuparnos de una nueva clase, quizá la más importante, más restrictiva que las anteriores, la de los espacios *compactos*. Antes se demuestra la posibilidad de deducir de todo recubrimiento por conjuntos abiertos de un espacio separable, otro recubrimiento pero *numerable* de dicho espacio. A continuación se demuestra la equivalencia de las tres propiedades siguientes, fundamentales en toda la Topología, para un espacio separable: Sea E un tal espacio, o un C conjunto contenido en él (como ya sabemos, se puede considerar C en sí, como un espacio separable, con la topología inducida en él por la de E); entonces son equivalentes las tres propiedades:

1.ª El conjunto C, para todo subconjunto infinito contenido en él, contiene al menos, un punto de acumulación de este subconjunto.

2.ª Toda sucesión monótona decreciente de subconjuntos no vacíos, cerrados en él y contenidos en C, tiene una intersección no vacía.

3.ª De todo recubrimiento abierto de C se puede extraer un sistema «finito» que recubre igualmente a C.

El método de demostración consiste en probar que la 1.ª propiedad implica la 2.ª, ésta la tercera, y ésta, a su vez, la 1.ª Un espacio separable que posee una cualquiera de ellas, y por tanto las otras dos, se dirá *compacto*.

Se da un sucinta noticia histórica de este importantísimo concepto desde ARZELÀ y luego FRÉCHET, hasta ALEXANDROFF, MENGER y URYSOHN. FRÉCHET dice que un espacio es «compacto» cuando en él, todo conjunto de infinitos puntos posee por lo menos un punto de acumulación, que, naturalmente, pertenece al espacio en cuestión. Se deduce que todo conjunto cerrado de un espacio compacto, es a su vez compacto y recíprocamente, todo conjunto compacto (compacto como espacio relativo), contenido en un espacio compacto, es cerrado. Es frecuente designar, en la literatura matemática a estos conjuntos compactos, con la denominación de «compactos en sí», para distinguirlos de aquellos conjuntos contenidos en un espacio compacto, que considerados como espacios relativos al espacio ambiente, no lo son, pero sí como subconjuntos. Así, por ejemplo: El interior de una esfera del espacio euclídeo de tres dimensiones, considerado como un «espacio» independiente, no es compacto, pero considerado como un «subconjunto» o conjunto contenido en el espacio euclídeo citado, sí lo es, en virtud del clásico teorema de WEIERSTRASS. Nosotros sin embargo, siguiendo la tendencia actual (ALEXANDROFF-HOPF), diremos espacios y conjuntos compactos en vez de «compactos en sí» y a los conjuntos, como el acabado de citar, que son compactos en cuanto están situados en un espacio topológico, los llamaremos conjuntos compactos *en* *E* (E denota el espacio ambiente). Un espacio métrico compacto, se dirá que es un *compacto*. Se insiste en el papel preponderante que en lo expuesto hasta ahora tiene la *propiedad* 1.ª y se señala que a pesar de ello, la 3.ª tiene aún mayor interés, si cabe: tomándola como punto de partida se llega a otro importantísimo concepto de la actual Topología: el de espacio *bicompacto*. Tal se llama a todo espacio topológico en el cual, de todo recubrimiento abierto de él, se puede extraer un recubrimiento *finito*; un espacio compacto puede no ser bicompacto (por ej., el espacio formado por todos los números ordinales de CANTOR de la 1.ª y 2.ª clases, topologizado convenientemente). Se demuestra que todo conjunto compacto con base numerable es bicompacto y que todo «compacto» es bicompacto.

Como siempre, se utilizan diversos ejemplos para aclarar y precisar los conceptos y propiedades estudiados en la lección. En especial se considera el caso de los espacios euclídeos n-dimensionales, mostrando cómo en ellos (R^n) la clase de los conjuntos compactos *en* R^n coinciden con la de los conjuntos *acotados* o *limitados* y la de los conjuntos *cerrados* y *acotados* coinciden con la de los compactos y con la de los conjuntos bicompactos. En el espacio de HILBERT no ocurre lo mismo: un conjunto cerrado y limitado no tiene porqué ser compacto, como demuestra un ejemplo que se propone: el conjunto de los puntos con todas sus coordenadas 0, excepto la k-ésima.

16. Continúa esta lección el estudio de los espacios y conjuntos compactos iniciado en la anterior. Una consecuencia importante de la 2.ª propiedad, que caracteriza a los espacios separables compactos, es que, si G es un conjunto abierto que contiene a la intersección F (no vacía) de una sucesión monótona decreciente de conjuntos, no vacíos, cerrados, F_n, entonces existe un número natural k, tal que, para todo n mayor que k, F_n *está contenido en* G.

Un concepto menos restrictivo que el de *compacticidad* y de gran interés y utilidad, es el de *compacticidad local*: un subconjunto M de un espacio topológico E o mejor un espacio topológico, se dice *localmente compacto*, si cada uno de sus puntos posee un entorno cuya acumulación es compacta. Análogamente se define la *bicompacticidad local*. Ilustra la conveniencia de introducir este nuevo concepto el hecho bien conocido de que la recta, el plano, y en general el espacio euclídeo n-dimensional, que no son bicompactos (ni compactos), devienen tales sin más que añadirles un punto (el llamado «punto del infinito»). Esto plantea el problema de caracterizar todos los espacios topológicos regulares, que mediante la agregación de *un punto*, pueden convertirse en espacios bicompactos, respectivamente compactos. Justamente, la noción citada resuelve el problema. Así, se demuestra que: Todo espacio de HAUSDORFF (o sea, tal que cada dos de sus puntos poseen entornos exteriores entre sí) localmente bicompacto (resp. compacto), y sólo tales espacios, deviene espacio bicompacto (resp. compacto), mediante la agregación de un punto. Más todavía, en el caso de la bicompacticidad local, tal operación sólo es posible de un modo, es decir, la topología del nuevo espacio queda *unívocamente* determinada por la del dado. Se presentan ejemplos que ilustran convenientemente la cuestión tratada y se proponen algunos problemas sencillos.

En algunas de las cuestiones tratadas, ha sido preciso realizar una cierta operación de «elección», relacionada, por lo menos aparentemente con el célebre AXIOMA de ZERMELO de la teoría general de los conjuntos abstractos. Sin embargo, se demuestra que la mayor parte de la Topología, y en especial la teoría de los espacios separables regulares, se construye sin necesidad de utilizar dicho axioma. Con tal fin, se da un método que permite extraer de toda sucesión infinita o conjunto infinito, una sucesión convergente *determinada* y a continuación, otros que permiten elegir de modo «efectivo», un punto en cada conjunto cerrado, un punto en cada recinto, y en fin, una sucesión de puntos densa en el espacio considerado. Dentro del mismo orden de cuestiones, es importante, para muchas construcciones de sucesiones convergentes, el llamado «método diagonal», de CANTOR. Se fórmula mediante el teorema siguiente: Sea E^1, E^2, ..., E^i, ..., una sucesión de puntos, tal que a_n^i pertenece a R^i. Entonces es posible elegir una sucesión $n(1)$, $n(2)$, ..., $n(k)$, ..., de números naturales tal que, para un i fijo, determinado, toda sucesión

$$a_n^i(1),\quad a_n^i(2),\ldots,\quad a_n^i(k)\ldots.\quad \text{converja en el espacio } E^i$$

La última parte de la lección se dedica al estudio del comportamiento de las nociones introducidas respecto de las transformaciones continuas y de las topológicas. En primer lugar, se demuestra el teorema: Sea f una transformación unívoca y continua de un espacio compacto E en otro E'; entonces E' es también compacto. Si además, la transformación es *biunívoca*, y E' es regular, f es topológica. Por tanto, en particular, para los compactos de los espacios euclídeos, una transformación topológica queda caracterizada sólo por ser biunívoca y continua; para otros espacios en cambio. no basta tal denominación, precisa decir bicontinua. El mismo teorema vale sustituyendo la compacticidad por la bicompacticidad.

Congreso Internacional de Matemáticos

Del 8 al 12 del mes de noviembre último tuvo lugar en Roma, en el *Reale Istituto Nazionale di Alta Matemática*, el anunciado Congreso internacional de Matemáticos Hubo representantes de Bulgaria, Ciudad del Vaticano, Croacia, Alemania, Italia, Noruega, Holanda, Rumania, Suecia Suiza y Hungría. La Delegación española se vió impedida por las circunstancias de participar en el Congreso, pero envió un caluroso telegrama de adhesión; igual aconteció con la belga. El Congreso fué inaugurado en Campidoglio y S. E. F. SEVERI pronunció el discurso inaugural. Entre las conferencias generales y de información, figuraron las de los profesores:

HASSE (Göttingen): Perspectivas recientes en la teoría aritmética de las funciones algebraicas.

KERÉKJÁRTÓ (Budapest): La topología de los grupos continuos.

CONFORTO (Roma): El estado actual de la teoría de los sistemas de equivalencia y de las correspondencias entre variedades algebraicas.

SPEISER (Zürich): Problemas actuales de la teoría de los grupos abstractos.

RICCI (Milán): Problemas antiguos y recientes en el campo de la aritmética aditiva.

POPOFF (Sofía): La balística externa y la teoría de las ecuaciones integrales y diferenciales.

MOISIL (Bucarest): El Algebra de la lógica.

SIGNORINI (Roma): Recientes progresos en la teoría de las transformaciones termoelásticas finitas.