

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**Departamento de Óptica**



**TESIS DOCTORAL**

**Parametrización espacial de haces luminosos y su  
conformado mediante diversos sistemas ópticos No-  
ABCD**

TESIS DOCTORAL

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

**Gemma Piquero Sanz**

Directores:

Pedro M. Mejías Arias  
Rosario Martínez Herrero

**Madrid, 2002**

ISBN: 978-84-669-0452-0

© Gemma Piquero Sanz, 1994

Parametrización espacial de  
haces luminosos y su conformado  
mediante diversos sistemas  
ópticos no-ABCD



# Parametrización espacial de haces luminosos y su conformado mediante diversos sistemas ópticos no-ABCD

Gemma Piquero Sanz

*Memoria presentada para optar al grado de Doctora en Ciencias Físicas por la Universidad Complutense de Madrid*

*Dirigida por*

Dr. Pedro M. Mejías Arias  
Dra. Rosario Martínez Herrero

Departamento de Óptica  
Facultad de Ciencias Físicas  
Universidad Complutense de Madrid

Septiembre de 1994

Portada: Distribución espacial de intensidad del haz láser utilizado en nuestros experimentos.

A mis padres, Andry y Félix



## Agradecimientos

Durante los años en los que se ha venido desarrollando el trabajo presentado en esta memoria han sido muchas las personas que, desde diferentes ámbitos, han contribuido a que se llevara a cabo. Por ello, quisiera aprovechar esta oportunidad para expresarles mi agradecimiento.

En primer lugar quiero dar las gracias a los Drs. Pedro M. Mejías Arias y Rosario Martínez Herrero, directores de este trabajo y sin los cuales no hubiera sido posible el mismo. Gracias por todo lo que me habéis enseñado y por vuestro continuo apoyo científico y humano, atención y disponibilidad. Gracias también por haber revisado cuidadosa y concienzudamente cada una de las versiones previas de esta memoria.

Agradezco asimismo a todos los miembros del Departamento de Óptica el que hayan contribuido a crear un ambiente agradable de trabajo. Con muchos de ellos no sólo he compartido despachos, laboratorios, equipos, sino también algunos momentos de ocio.

En especial quiero dar las gracias al Dr. Julio Serna, por su desinteresada ayuda, por sus valiosos consejos y críticas y por las numerosas y fructíferas discusiones que hemos tenido. Gracias por haberme aguantado durante estos años.

También agradezco al Director del Departamento de Óptica, Profesor D. Eusebio Bernabeu, los medios puestos a mi disposición.

Es evidente que sin la influencia y el apoyo de otras muchas personas yo no estaría escribiendo esta memoria:

En primer lugar mis padres, a los que quiero agradecer, entre otras muchas cosas (muchísimas), la educación que he recibido de ellos, el haber estado siempre que les he necesitado y su continuo apoyo en todas las decisiones que he tomado.

Mis hermanos Ana y Félix, han conseguido con su buen humor mantenerme siempre optimista.

Carlos, del que he aprendido muchas cosas, no sólo ha aguantado pa-



cientemente mis agobios, sino que me ha animado en todo momento.

Quiero mencionar también a todos mis amigos de dentro y fuera de la Facultad con los que he compartido tan buenos ratos.

Gemma Piquero  
Madrid, septiembre de 1994

Deseo agradecer además a las siguientes instituciones la financiación de este trabajo:

- Ministerio de Educación y Ciencia, por la beca del Programa Nacional de Formación de Personal Investigador que me concedieron durante los años 1990, 1991, 1992 y 1993.
- Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT) por el proyecto ROB 90-0539 titulado “Conformado de haz en sistemas sensoriales y de procesado industrial”.
- Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT) por el proyecto TAP 93-211 titulado “Parametrización espacial de haces laser”.
- Ministerio de Educación y Ciencia por su “Ayuda para estancias breves en el extranjero,” que me permitió trabajar dos meses en el laboratorio Forschungsinstitut für OptiK, FGAN-Ffo, de Tübingen (Alemania).

# Índice

<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Parámetros característicos hasta segundo orden de haces luminosos</b>	<b>5</b>
2.1 Caracterización y parametrización de haces . . . . .	5
2.2 Propagación a través de sistemas ópticos de primer orden . .	9
2.3 Parámetro de calidad . . . . .	12
<b>3 Calidad de haz luminoso a través de axicones y lentes toroidales</b>	<b>17</b>
3.1 Introducción . . . . .	17
3.2 Estudio de la calidad: caso general . . . . .	20
3.3 Equivalencia entre lente toroidal y combinación lente-axicón .	22
3.4 Estudio de la calidad para haces gaussianos . . . . .	24
<b>4 Propagación de haces luminosos a través de transmitancias de fase cuártica: caso bidimensional</b>	<b>27</b>
4.1 Introducción . . . . .	27
4.2 Cálculo de la calidad . . . . .	28
4.3 Lentes con aberración esférica . . . . .	32
4.4 Apéndice . . . . .	35
<b>5 Propagación de haces luminosos a través de transmitancias de fase cuártica: caso tridimensional</b>	<b>37</b>
5.1 Introducción . . . . .	37
5.2 Formalismo y definiciones de los parámetros a utilizar . . . .	38

5.3	Modificación de la calidad mediante transmitancias de fase cuártica . . . . .	40
5.3.1	Lente circular . . . . .	41
5.3.2	Dos lentes cilíndricas ortogonales . . . . .	44
5.3.3	Comparación de los dos sistemas ópticos anteriores . . . . .	45
5.4	Calidad de haces gaussianos propagándose a través de transmitancias de fase cuártica . . . . .	46
5.4.1	Resultados experimentales . . . . .	49
5.5	Apéndices . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Parámetros característicos de orden más alto de haces luminosos: curtosis</b>	<b>61</b>
6.1	Introducción . . . . .	61
6.2	Parámetro de curtosis . . . . .	62
6.3	Clasificación de los haces según el parámetro de curtosis . . . . .	65
6.4	Propagación de la curtosis a través de sistemas ABCD . . . . .	69
6.5	Casos especiales . . . . .	72
6.5.1	Modos de Hermite-Gauss . . . . .	72
6.5.2	Haces de tipo Gauss-Schell . . . . .	74
6.5.3	Ondas planas a través de transmitancias supergaussianas . . . . .	76
6.6	Relación curtosis-calidad para un haz luminoso propagándose a través de transmitancias de fase cuártica . . . . .	79
6.7	Curtosis de un haz gaussiano propagándose a través de una lente con aberración esférica . . . . .	82
6.7.1	Expresiones analíticas . . . . .	82
6.7.2	Variación de la curtosis con los parámetros característicos de la lente . . . . .	84
6.7.3	Resultados experimentales . . . . .	84
6.8	Apéndices . . . . .	89
<b>7</b>	<b>Conformado punto a punto de haces luminosos: una aplicación</b>	<b>93</b>
7.1	Introducción . . . . .	93
7.2	Reflexión sobre un cilindro elíptico . . . . .	95
<b>8</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>99</b>

<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>
Referencias básicas de la tesis . . . . .	101
Referencias generales . . . . .	103



# Capítulo 1

## Introducción

Como es bien conocido, desde su aparición a principios de los 60, el láser se ha extendido de forma masiva a los campos más diversos, incluyendo la industria, la medicina y las comunicaciones.

Hasta no hace mucho, las especificaciones exigidas a los haces láser estaban relacionadas principalmente con sus posibilidades de enfoque en regiones más o menos pequeñas y con la obtención de elevadas energías. La continua expansión del empleo de láseres y sus nuevas aplicaciones han hecho preciso, sin embargo, lograr determinadas características espaciales de sus perfiles de intensidad, así como el necesario control y modificación de los mismos.

Con el fin de obtener distribuciones de intensidad prefijadas, buen número de trabajos aparecidos en la literatura consideran un conformado punto a punto, es decir, trabajan directamente con el perfil de intensidades del haz. Dichos estudios utilizan técnicas de absorción, apodización, segmentación del haz, efectos de polarización, reflexión, refracción o difracción, resultando de esta forma distribuciones de intensidad anulares, lineales, etc. Sin embargo, por lo general se trata de procedimientos en los cuales se obtienen casi siempre resultados sólo numéricos y en casos muy concretos, siendo además el cálculo largo y poco flexible.

En este trabajo partimos de un enfoque diferente, proponemos la realización de un conformado del haz de tipo global, mediante la modificación de determinados parámetros espaciales característicos también globales. De esta forma, podremos estudiar cómo cambian tales parámetros tras atravesar el haz determinados sistemas ópticos, o, a la inversa, qué tipo de dispositivo deberá emplearse para obtener ciertos valores prefijados de los parámetros.

Para ello, primero será necesario elegir una caracterización espacial adecuada de haces de luz arbitrarios, así como establecer unos criterios apropia-

dos de calidad, tema éste de intenso desarrollo y actividad en la actualidad.

En este sentido, hemos elegido una caracterización propuesta en trabajos anteriores debido a que es:

- Válida para haces arbitrarios.
- Permite cálculos analíticos y numéricos.
- Los parámetros son medibles.
- Se comportan adecuadamente bajo propagación.

Dicha caracterización está basada en la descripción de un haz general a partir de su densidad espectral mutua, dentro de la aproximación escalar, despreciando efectos de polarización, considerando campos cuasimonocromáticos y empleando la aproximación paraxial para tratar la propagación de los haces. Mediante esta caracterización trabajaremos con una serie de parámetros que definen de forma global la estructura espacial del haz láser. Hemos investigado, además, un nuevo parámetro, la curtosis, estrechamente conectado con la forma del perfil espacial del haz.

Por otra parte, los resultados obtenidos hasta la fecha estaban relacionados con haces propagándose a través de sistemas ópticos de primer orden o sistemas ABCD, tales como tramos de propagación libre, espejos o lentes. Se demostró que a través de los mismos el parámetro de calidad se conservaba, lo que nos lleva, consecuentemente, a la necesidad de manejar sistemas no-ABCD si deseamos conformar el haz, mejorando u optimizando dicho factor de calidad.

Esta es la razón por la que los diversos sistemas conformadores de haz que consideraremos en este trabajo son sistemas ópticos no-ABCD tales como axicones, transmitancias de fase cuártica, lentes con aberración esférica, etc. Como hemos dicho, tales sistemas se consideran desde un punto de vista de conformado global. No obstante, y como aplicación del conformado punto a punto, se incluye asimismo un método simple de obtención de distribuciones bidimensionales gaussianas de intensidad mediante el uso de un espejo esférico.

En la presentación de nuestros resultados en esta memoria seguiremos el siguiente esquema: el primer capítulo lo constituye esta introducción. En el segundo se hará un breve repaso del formalismo bidimensional que utilizaremos en lo sucesivo y de los parámetros hasta segundo orden más empleados en la caracterización espacial de haces luminosos. Veremos la utilidad del parámetro de calidad en la caracterización espacial de haces y su invariancia

a través de sistemas ópticos ABCD. En los siguientes capítulos se estudiará la propagación de haces a través de diversos sistemas no-ABCD. Así, en el tercer capítulo analizaremos el empleo de axicones y lentes toroidales. En el cuarto, consideraremos la propagación de haces simétricos en intensidad a través de transmitancias de fase cuártica suponiendo sistemas bidimensionales. En el quinto, generalizaremos lo anterior al caso tridimensional. Con el fin de obtener más información acerca del perfil espacial del haz tendremos en cuenta parámetros de orden más alto, como es la curtosis. Un estudio de dicho parámetro será realizado en el capítulo seis, en el cual se investigará también el conformado de haces mediante la modificación de dicho parámetro. Como hemos apuntado previamente, el capítulo siete lo dedicaremos a una aplicación del conformado punto a punto. Finalmente en el capítulo ocho se expondrán las conclusiones de este trabajo. En cuanto a los contenidos originales presentados en esta memoria, pueden considerarse como tales los mostrados en los capítulos tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho.





## Capítulo 2

# Parámetros característicos hasta segundo orden de haces luminosos

Según se mencionó en la introducción, en primer lugar describiremos el formalismo que vamos a usar en los siguientes capítulos y revisaremos los parámetros más utilizados hasta ahora en la caracterización de haces luminosos.

Introduciremos el formalismo bidimensional ya descrito y empleado en trabajos anteriores [MM90a,MM90b,MM90c,MM91,MM92c,MM93a,MM93e,MM93f,SE93,MM94,MM94b], definiendo conceptos fundamentales como anchura, divergencia y calidad. Dicho formalismo será además directamente aplicable a buen número de casos prácticos (haces factorizables y sistemas ópticos con simetría ortogonal, es decir, separables según dos ejes perpendiculares).

### 2.1 Caracterización y parametrización de haces

La caracterización que vamos a utilizar en esta memoria está basada en la denominada función de distribución de Wigner del haz. A partir de los promedios de dicha función se han definido unos parámetros íntimamente relacionados con las características globales de los haces.

Hemos elegido dicha función teniendo en cuenta sus interesantes propiedades así como los buenos resultados que se derivan de su aplicación. Además, esta función tiene la ventaja de ser una representación conjunta en posiciones y direcciones.

Pueden encontrarse, no obstante, en la literatura otras funciones de distribución [WE92] aplicadas también a la caracterización de haces. Se han establecido relaciones de equivalencia entre éstas y la que nosotros aplicare-

mos en esta memoria [MM93d], comprobándose que las leyes de propagación de los promedios espacio-angulares de orden inferior o igual a 2 tienen la misma forma analítica para dichas distribuciones.

La función de distribución de Wigner para el caso bidimensional puede definirse en la forma,

$$h(x, u, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x + s/2, x - s/2, z) \exp(ikus) ds, \quad (2.1)$$

donde  $x$  denota la variable espacial transversal a la dirección de propagación  $z$ ,  $u$  es la variable direccional que representa un ángulo de propagación ( $ku = k_x$ , despreciando la contribución de las ondas evanescentes), y  $k$  es el número de onda ( $k = 2\pi/\lambda$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda). En la ecuación (2.1),  $\Gamma(x_1, x_2, z)$  representa la densidad espectral mutua que caracteriza el haz hasta segundo orden, y que proporciona la correlación del campo en dos posiciones  $x_1$  y  $x_2$  para cada frecuencia. Dicha función puede definirse como [BW75,BA86],

$$\Gamma(x_1, x_2, z) = \langle \phi^*(x_1, z) \phi(x_2, z) \rangle_C, \quad (2.2)$$

donde  $\phi(x)$  es la amplitud del campo, el símbolo  $\langle \quad \rangle_C$  representa el promedio sobre la colectividad y el asterisco  $*$  denota conjugación compleja. En esta expresión no hemos escrito explícitamente la frecuencia ya que, como dijimos en la introducción, estamos trabajando con campos cuasimocromáticos.

Recuérdese también [BW75] que la densidad espectral es hermítica, esto es,

$$\Gamma(x_1, x_2) = \Gamma^*(x_2, x_1), \quad (2.3)$$

y definida no negativa, es decir,

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) \Gamma(x_1, x_2) f^*(x_2) dx_1 dx_2 \geq 0, \quad (2.4)$$

para toda función  $f(x)$ .

Por otra parte, los promedios de órdenes  $m$  y  $n$  de las variables espaciales y angulares, respectivamente, de la función de distribución de Wigner se definen en la forma

$$\langle x^m u^n \rangle_z = \frac{1}{I_0} \frac{k}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} x^m u^n h(x, u, z) dx du, \quad (2.5)$$

donde  $I_0$  denota la intensidad total del haz (que es una cantidad finita y no nula), es decir,

$$I_0 = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, u, z) dx du = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x) dx. \quad (2.6)$$

Nótese que cuando trabajamos con haces completamente coherentes la densidad espectral mutua  $\Gamma(x_1, x_2)$  se reduce a

$$\Gamma(x_1, x_2) = \phi^*(x_1)\phi(x_2),$$

o lo que es lo mismo

$$\Gamma(x, s) = \phi^*(x + s/2)\phi(x - s/2).$$

En este caso, en lugar de utilizar directamente la función de distribución de Wigner podemos calcular sus promedios directamente a partir de la expresión de la amplitud del campo  $\phi(x)$ , mediante la fórmula

$$\begin{aligned} \langle x^m u^n \rangle &= \frac{1}{I_0} \frac{k}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} x^m u^n \phi^*(x + s/2) \phi(x - s/2) \\ &\quad \times \exp(ikus) dx du ds. \end{aligned} \quad (2.7)$$

A partir de las ecuaciones anteriores y centrándonos sólo en aquellos promedios para los cuales  $n + m \leq 2$  e incluyendo las fórmulas simplificadas que se obtendrían en el caso coherente, podemos definir la posición media del haz  $\langle x \rangle$  y la dirección del mismo  $\langle u \rangle$  en la forma

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{1}{I_0} \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x h(x, u, z) dx du \\ &= \frac{1}{I_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x \phi^*(x) \phi(x) dx, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= \frac{1}{I_0} \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u h(x, u, z) dx du \\ &= \frac{1}{2ikI_0} \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi^*(x)\phi'(x) - \phi'^*(x)\phi(x)] dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

En otras palabras,  $\langle x \rangle$  y  $\langle u \rangle$  determinan el centro de gravedad del haz en posiciones y en direcciones, respectivamente. En las ecuaciones (2.8) y (2.9) el signo ' indica derivación respecto de la variable espacial  $x$ .

Los parámetros de orden dos se definen de manera análoga como sigue:

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \frac{1}{I_0} \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x, u, z) dx du \\ &= \frac{1}{I_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \phi^*(x) \phi(x) dx,\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}\langle xu \rangle &= \frac{1}{I_0} \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x u h(x, u, z) dx du \\ &= \frac{1}{2ikI_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x [\phi^*(x) \phi'(x) - \phi'^*(x) \phi(x)] dx\end{aligned}\quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}\langle u^2 \rangle &= \frac{1}{I_0} \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 h(x, u, z) dx du \\ &= \frac{1}{k^2 I_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x) \phi'^*(x) dx,\end{aligned}\quad (2.12)$$

donde, si suponemos que  $\langle x \rangle = \langle u \rangle = 0$  (lo cual no es una verdadera restricción ya que equivale a un desplazamiento del sistema de coordenadas),  $\langle x^2 \rangle$  puede considerarse una cantidad proporcional al cuadrado de la anchura del haz, y  $\langle u^2 \rangle$  un parámetro proporcional al cuadrado de la divergencia en campo lejano [LP88]. Concretamente, para el caso de un haz gaussiano de la forma

$$\phi(x) = A_g \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \exp\left(+ik\frac{x^2}{2R}\right),\quad (2.13)$$

donde  $A_g$  es una constante de normalización, se tiene

$$\langle x^2 \rangle = w^2/4,\quad (2.14)$$

$$\langle u^2 \rangle = \theta^2/4,\quad (2.15)$$

donde la anchura del haz  $w$  está definida como la distancia al origen para la cual la intensidad se reduce  $1/e^2$ , y donde  $\theta$  es la mitad del ángulo de divergencia en campo lejano.

En cuanto al parámetro  $\langle xu \rangle$ , se ha demostrado que está relacionado con el radio de curvatura  $R$  del frente esférico que mejor se ajusta al haz mediante la ecuación [BE91,PA92]

$$R = \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle xu \rangle}.\quad (2.16)$$

Por otra parte, las leyes de propagación de los parámetros anteriores hacen posible que, a partir de la medida de estos parámetros en un determinado plano arbitrario, se puedan inferir dichos parámetros en cualquier otro plano. Analizaremos a continuación dicha propagación a través de sistemas ópticos de primer orden.

## 2.2 Propagación a través de sistemas ópticos de primer orden

Si consideramos un sistema óptico lineal cuya respuesta de impulso es  $g(x_i, x_f)$ , la relación entre la amplitud del haz a la salida  $\phi_f(x_f)$  y la amplitud a la entrada  $\phi_i(x_i)$  vendrá dada por [GO68]

$$\phi_f(x_f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_i, x_f) \phi_i(x_i) dx_i, \quad (2.17)$$

donde los subíndices  $i$  y  $f$  indican los planos de entrada y de salida del sistema óptico, respectivamente. De forma análoga se puede expresar la propagación de la función de distribución de Wigner a través de tales sistemas [BA86],

$$h_f(x_f, u_f) = \iint_{-\infty}^{+\infty} K(x_f, u_f, x_i, u_i) h_i(x_i, u_i) dx_i du_i, \quad (2.18)$$

donde  $K(x_f, u_f, x_i, u_i)$  es el núcleo de la transformación y está relacionado con la respuesta de impulso  $g(x_i, x_f)$  del sistema concreto [BA79, BA86].

Entre los sistemas lineales más comunes podemos mencionar los de primer orden (dentro de la aproximación paraxial) tales como tramos de propagación libre, interfases de revolución, espejos, lentes no aberradas y medios con variación cuadrática transversal del índice de refracción.

Estos sistemas pueden ser representados de forma simple mediante las denominadas matrices ABCD reales, ampliamente usadas en óptica geométrica para describir la propagación de rayos a través de sistemas ópticos en aproximación paraxial. En efecto, se sabe que la relación entre el rayo que sale por el punto  $x_f$  (altura sobre el eje de propagación  $z$ ), con una dirección caracterizada por una pendiente  $u_f$ , y el rayo que entra por el punto  $x_i$  con pendiente  $u_i$  viene dada por

$$\begin{pmatrix} x_f \\ u_f \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_i \\ u_i \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

es la matriz simpléctica (suponiendo que los planos de salida y de entrada están en medios con igual índice de refracción) que representa al sistema óptico. Simplecticidad equivale en dos dimensiones a que se verifique la condición

$$AD - BC = 1. \quad (2.21)$$

Para esta clase de sistemas, la ley de propagación de la función de distribución de Wigner toma la forma [BA79,BA86,LP88]

$$h(x_f, u_f, z_f) = h(Dx_f - Bu_f, -Cx_f + Au_f, z_i) = h(x_i, u_i, z_i). \quad (2.22)$$

A partir de la ecuación anterior para sistemas de primer orden, se obtienen las leyes de propagación de los promedios de la función de distribución de Wigner a través de sistemas ABCD. Se ha demostrado [SE93] que para cualquier función  $f$  de las variables  $x$  y  $u$  se satisface

$$\langle f(x_f, u_f) \rangle_f = \langle f(Ax_i + Bu_i, Cx_i + Du_i) \rangle_i, \quad (2.23)$$

que, en el caso especial de los promedios de orden  $m$  y  $n$  de las variables espaciales y angulares, queda

$$\langle x^m u^n \rangle_f = \langle (Ax + Bu)^m (Cx + Du)^n \rangle_i. \quad (2.24)$$

En particular, si consideramos la propagación en el espacio libre, su matriz ABCD resulta ser

$$M_z = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Aplicando esta matriz a la expresión (2.24) se obtienen los promedios del haz en un determinado plano a partir de sus valores en cualquier otro plano arbitrario mediante la expresión

$$\langle x^m u^n \rangle_z = \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m-j)!} \langle x^j u^{m+n-j} \rangle_0 z^{m-j}, \quad (2.26)$$

donde el subíndice 0 indica que, por comodidad, los promedios se han tomado en el plano  $z = 0$ .

Particularizando la expresión anterior para los parámetros de segundo orden, la ley de propagación en el espacio libre nos queda en la forma:

$$\langle x^2 \rangle_z = \langle x^2 \rangle_0 + 2\langle xu \rangle_0 z + \langle u^2 \rangle_0 z^2, \quad (2.27)$$

$$\langle xu \rangle_z = \langle xu \rangle_0 + \langle u^2 \rangle_0 z, \quad (2.28)$$

$$\langle u^2 \rangle_z = \langle u^2 \rangle_0. \quad (2.29)$$

Como vemos por las ecuaciones (2.27)-(2.29), el radio del haz al cuadrado posee un comportamiento parabólico cuando el haz se propaga libremente, mientras que  $\langle u^2 \rangle$  permanece constante.

Otro de los parámetros útiles en la caracterización de haces es la posición del plano de la cintura, definido como el plano en el cual  $\langle x^2 \rangle_z$  alcanza su valor mínimo, y cuya posición  $z_c$  viene dada por:

$$z_c = -\frac{\langle xu \rangle_0}{\langle u^2 \rangle_0}. \quad (2.30)$$

En este plano se cumple además que  $\langle xu \rangle_{z_c} = 0$ , lo que implica que el radio de curvatura medio  $R(z_c)$  es infinito, (nótese que esto no significa que el haz sea necesariamente real en el plano de su cintura [MM92b]).

En términos de  $z_c$  y de la anchura mínima  $\langle x^2 \rangle_c$ , las ecuaciones de evolución de  $\langle x^2 \rangle$  y  $R$  con  $z$  pueden escribirse como siguen:

$$\langle x^2 \rangle_z = \langle x^2 \rangle_c \left[ 1 + \left( \frac{z - z_c}{z_R} \right)^2 \right], \quad (2.31)$$

$$R(z) = (z - z_c) \left[ 1 + \left( \frac{z_R}{z - z_c} \right)^2 \right], \quad (2.32)$$

donde  $z_R$  es la longitud de Rayleigh definida como la distancia (medida desde el plano de la cintura) requerida para que el tamaño de haz  $\langle x^2 \rangle$  se duplique. En función de los parámetros de segundo orden ésta se escribe en la forma

$$z_R^2 = \frac{\langle x^2 \rangle_c^2}{\langle x^2 \rangle \langle u^2 \rangle - \langle xu \rangle^2} = \frac{\langle x^2 \rangle \langle u^2 \rangle - \langle xu \rangle^2}{\langle u^2 \rangle^2}. \quad (2.33)$$

En particular, para haces gaussianos la longitud de Rayleigh vale

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (2.34)$$

donde  $w_0$  es la anchura mínima o anchura en el plano de la cintura.



### 2.3 Parámetro de calidad

Hasta aquí los parámetros introducidos definen características espaciales que cambian conforme el haz se propaga (libremente o a través de sistemas de primer orden). Sin embargo, sería conveniente utilizar un parámetro que caracterice de forma global al haz, que fuese medible y que además fuera invariante bajo propagación a través de sistemas ópticos ABCD. Hasta la fecha se han propuesto diversos parámetros de calidad, entre los que deben destacarse el definido por Lavi *et al* [LP88] (los cuales utilizaron la función de distribución de Wigner aplicada a haces generales parcialmente coherentes, pero sólo la manejaron en el plano de la cintura), y el introducido por Siegman [SI90], (relacionado con el producto del tamaño del haz en la cintura por su divergencia en campo lejano). Otros criterios utilizan asimismo la denominada razón de Strehl (*Strehl ratio*) [BH87]. Sin embargo, con carácter general puede afirmarse que todas estas definiciones de calidad de haz están relacionadas de un modo u otro con distintos métodos para definir y medir la anchura (o el diámetro) de un perfil de intensidad arbitrario.

Algunos de tales procedimientos son mencionados brevemente a continuación [AH71,HS85,HS85a,BH87,ND89,SJ89,FO90,SI93b]:

– Método “ $1/e^2$ ” (ó  $1/e$ ).

La mayor parte de las definiciones dependen en alguna manera de la medida de la anchura del haz en campo lejano y próximo. En este método se define la anchura de un haz como la distancia entre los puntos en donde la intensidad se reduce a  $1/e$  ó  $1/e^2$  del valor de la intensidad pico. Esta definición tiene la ventaja de su simplicidad, pero adolece de falta de un formalismo teórico que permita determinar la variación de la anchura (introducida de esta forma) conforme el haz se propaga libremente. Por otra parte, esta definición puede ser confusa cuando se aplica a haces con valles y crestas, como, por ejemplo, haces de tipo *donut*.

– Método de la cuchilla.

También se denomina método del 10% ó 90%. En este procedimiento se utiliza una cuchilla lineal (o dos cuchillas ortogonales entre sí) y se define la anchura del haz como la distancia entre los puntos en los cuales la cuchilla, desplazándose perpendicularmente a su borde, intercepta el 10% y 90% de la potencia total del haz. Este método es aplicable a haces irregulares y de baja calidad, solventando uno de

los problemas del método anterior. Desgraciadamente, sin embargo, esta definición carece de formalismo teórico en el mismo sentido que comentábamos en el párrafo anterior.

- Método del *pinhole* o abertura variable (*power in the bucket method*).

Otro criterio comúnmente usado al manejar láseres de potencia es medir la fracción de la potencia total del haz contenida en aberturas de diámetro variable. La anchura del haz viene dada en tal caso en función de la abertura o del ángulo sólido subtendido por el haz emergente de la abertura en campo lejano. El valor de dicha anchura puede, sin embargo, variar dependiendo de dónde se coloque el centro de la abertura. Este procedimiento también carece de formalismo analítico riguroso.

- Método de la razón de Strehl (*Strehl Ratio*).

Este método está basado en la medida de la intensidad del haz sobre el eje de propagación en campo lejano. Generalmente se define la razón de Strehl (aunque no hay un completo acuerdo entre las distintas definiciones existentes en la literatura) como la relación entre la intensidad pico en campo lejano para el haz real y la de una fuente con la misma potencia total distribuida uniformemente a través de una abertura del mismo tamaño y forma que la que limita en la práctica el haz láser. La razón de Strehl o cualquier otra medida que esté basada en el valor de la intensidad pico en campo lejano, puede ser de especial utilidad, en comparación con medidas de anchura del haz, cuando se manejan sistemas en los cuales lo que interesa es la intensidad a grandes distancias, como en radares ópticos o sistemas de comunicaciones.

- Método del ajuste por una gaussiana.

Consiste en ajustar el perfil de intensidad real del haz a un perfil gaussiano y tomar como anchura la anchura de dicha distribución gaussiana  $w$ . Aquí surge un problema de muy difícil solución cuando se trata de ajustar funciones que presentan varios lóbulos.

A la vista de la gran diversidad de definiciones y criterios de calidad existentes en la literatura, se ha hecho preciso elegir de forma sistemática para nuestro trabajo alguno de ellos.

En esta memoria hemos tomado como parámetro global de calidad (el cual resume las características espaciales del haz) el designado por  $Q$ , introducido recientemente [SM91] y que viene expresado en términos de los

promedios de segundo orden, descritos en este capítulo, en la forma

$$Q = \langle x^2 \rangle \langle u^2 \rangle - \langle xu \rangle^2, \quad (2.35)$$

definición válida para todo  $z$  (en la que se ha supuesto de nuevo que  $\langle x \rangle = \langle u \rangle = 0$ ). Entre las propiedades más relevantes de este parámetro y que lo hacen especialmente útil para nuestros propósitos podemos citar las siguientes:

- i. Se mantiene invariante bajo propagación a través de sistemas ópticos de primer orden [LP88, SM88].
- ii. La calidad en el plano de la cintura toma la forma especialmente simple

$$Q_c = \langle x^2 \rangle_c \langle u^2 \rangle_c. \quad (2.36)$$

- iii. Se satisface un principio de indeterminación, es decir, existe una cota mínima para  $Q$  (mejor calidad posible):

$$Q \geq \frac{1}{4k^2},$$

donde la igualdad es alcanzada por los haces gaussianos [BA79, LP88].

- iv. Este parámetro está relacionado con el definido en [SI90] mediante la expresión

$$\frac{(M^2)^2}{4k^2} = Q. \quad (2.37)$$

Nótese, sin embargo, que la diferencia más importante entre estos dos parámetros de calidad radica en la base teórica en la que se fundamentan. Por ejemplo  $M^2$  se define para haces coherentes o para superposiciones incoherentes de haces coherentes, mientras que  $Q$  se define para haces generales parcialmente coherentes.

Es de destacar que, conceptualmente, el factor de calidad puede ser considerado como la capacidad que posee un haz para ser enfocado sobre una determinada región con el menor tamaño y con la menor divergencia posible. Es por consiguiente un parámetro global que caracteriza conjuntamente el comportamiento del haz en campo próximo y lejano.

Por otro lado, la invariancia de  $Q$  hace de este factor una propiedad intrínseca del haz. Parece clara, por tanto, la idoneidad de manejar este parámetro para caracterizar un conformado de tipo global de un haz láser.

En este sentido hay que señalar que, como se desprende inmediatamente de la propiedad i) anterior, para conformar un haz es necesario emplear dispositivos o sistemas no-ABCD, ya que sólo a través de ellos puede modificarse dicho parámetro (y, en consecuencia, conformarse de forma global el haz). Abordaremos precisamente esta tarea en los capítulos siguientes de esta memoria.



## Capítulo 3

# Calidad de haz luminoso a través de axicones y lentes toroidales

### 3.1 Introducción

En 1954 McLeod introdujo un nuevo sistema óptico denominado axicón y lo definió como cualquier dispositivo con simetría de revolución tal que la imagen que forma de un objeto puntual, situado sobre su eje de simetría, no es otro objeto puntual, sino un segmento de línea recta con longitud finita sobre dicho eje [MC54,MC60]. El ejemplo más sencillo de axicón es una lente o espejo cónico (ver figura 3.1). Sin embargo, el término axicón fue utilizado para denominar otros elementos y dispositivos ópticos no convencionales, de forma que esta palabra resultó insuficiente para abarcar la gran variedad de esta clase de sistemas.

Surgió así el término *meso-óptica* que sirve para describir los sistemas ópticos tales que la imagen de un punto es una distribución unidimensional, bidimensional o tridimensional finita, como, por ejemplo, segmentos de línea recta, anillos, elipses, etc. El término *meso-óptico* cubre axicones (tanto refractantes como reflectantes), kinoformas (*kinoforms*), focalizadores (*focusators*), así como varios dispositivos compuestos en los que se incluyen elementos tradicionales formadores de imagen y holográficos, entre otros. El ejemplo más sencillo de sistema *meso-óptico* lo constituye una lente cilíndrica, la cual transforma un punto en una línea.

En este capítulo, con el término axicón designaremos una lente cónica plana que puede ser, en general, convergente o divergente (ver figura 3.1), y que está caracterizada por su ángulo  $\alpha$ , su índice de refracción  $n$  y su diámetro transversal  $D$ .

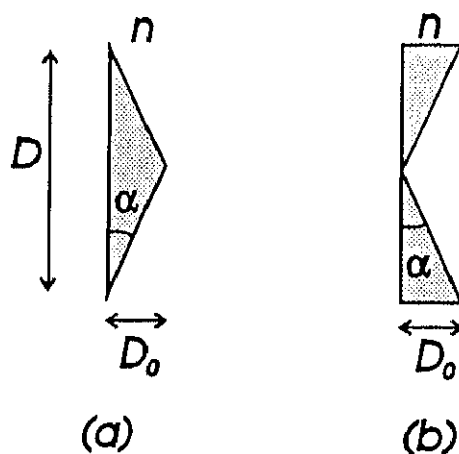


Figura 3.1: Esquema de axicón (a) convergente y (b) divergente.

Las aplicaciones de los axicones son diversas. Así, por ejemplo, se pueden utilizar como expansores de haz y en sistemas telescópicos [SO89]. También, y como ya dijimos anteriormente, mediante un axicón se pueden obtener distribuciones lineales de intensidad cuando iluminamos con un frente de onda plano y de intensidad constante, formándose un segmento de longitud finita (ver figura 3.2). A dicha longitud se la denomina profundidad de foco  $L$  y ha sido calculada a partir de las leyes de la óptica geométrica en función de los parámetros característicos del axicón [RT78]. Se tiene

$$L \approx \frac{D}{2(n-1)\alpha}. \quad (3.1)$$

Otra importante aplicación de los axicones en la cual centraremos nuestra atención en el presente capítulo, fue sugerida ya por McLeod en su primer artículo. Se trata de la obtención de distribuciones anulares de intensidad, de interés, por ejemplo, en el procesado de materiales y en fotomicrolitografía. Esto puede ser llevado a cabo mediante la combinación de una lente más un axicón, aunque también se pueden obtener mediante lentes toroidales, las cuales, como veremos en una de las secciones de este capítulo, constituyen un sistema equivalente al anterior. (Una situación similar se produce al incidir un haz láser gaussiano de alta potencia sobre un líquido absorbente, induciendo un gradiente de temperaturas y, por consiguiente, dando lugar a una variación en el índice de refracción, que genera una lente térmica [MD92]).

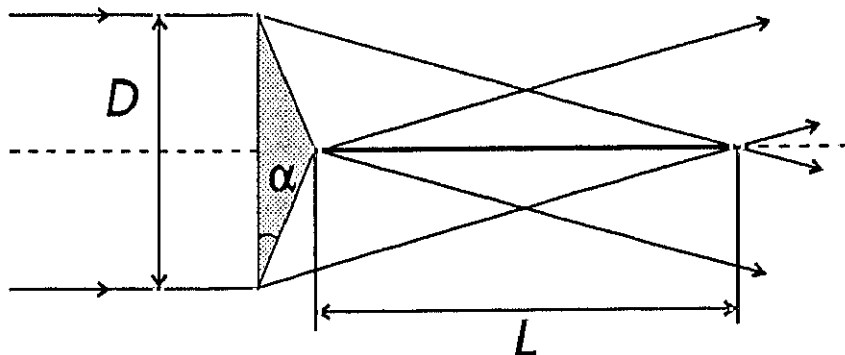


Figura 3.2: Formación de distribuciones lineales de intensidad.

El empleo de axicones para la obtención de distribuciones anulares de intensidad es aconsejable a fin de alcanzar una alta eficiencia en la concentración de energía y evitar los posibles efectos difraccionales. De hecho, cuando un haz gaussiano colimado se propaga a través del sistema combinado lente-axicón el radio de los anillos  $R_0$  que se forman en el plano focal de dicha lente, viene dado por [RT78],

$$R_0 \approx (n - 1)\alpha f, \quad (3.2)$$

siendo  $f$  la distancia focal paraxial de la lente convergente. Para variar el tamaño de los mismos, bastaría utilizar una lente con distinta focal o, como sugiere Bélanger *et al.* [BR78], un segundo axicón.

Cuando el haz no está colimado, puede demostrarse que los anillos se forman en un plano donde la intensidad pico es máxima; la posición de dicho plano dependerá de la posición de la cintura del haz incidente.

Si realizamos un corte transversal del anillo en dicho plano ha sido asimismo demostrado teórica y experimentalmente que la distribución de intensidad se aproxima a una distribución gaussiana (véase figura 3.3) [BR78]. Dicho perfil posee una anchura mínima en este plano, siendo además  $\approx 1.65$  veces la anchura mínima que tiene el mismo haz gaussiano cuando se enfoca mediante una lente convergente [SI86]. Por otro lado, dicha anchura es proporcional a la focal de la lente e inversamente proporcional a la anchura  $w$  del haz incidente. En consecuencia, puede ser modificada a voluntad variando los parámetros característicos del haz de entrada mediante una lente previa.



En lo que sigue trataremos de hallar una expresión analítica simple que nos proporcione la variación del parámetro de calidad de un haz cuando se propaga a través de dichos sistemas conformadores, analizando la posible optimización de dicho parámetro.

### 3.2 Estudio de la calidad: caso general

A continuación analizaremos el paso de un haz genérico coherente a través de un axicón, elegido, por simplicidad, divergente (figura 3.1). Calcularemos la calidad del haz a la salida del sistema óptico en función de los parámetros de haz a la entrada y de las características de dicho sistema. En este caso, así como en los diversos sistemas ópticos no-ABCD que se estudian en esta memoria, el tratamiento habitual basado en las matrices ABCD no puede utilizarse. Sin embargo, como la propagación a través de una transmitancia  $t(x)$  es un sistema lineal [GO68], podremos usar el formalismo bidimensional descrito en el capítulo 2 para el cálculo de los promedios  $\langle x^m u^n \rangle$  de la función de distribución de Wigner. De esta forma estableceremos relaciones entre dichos promedios antes y después de atravesar el sistema óptico. Consideramos que el haz está centrado respecto del eje de simetría del axicón, que tomaremos como eje  $z$ . Como indicaremos al final de este capítulo, los resultados que obtengamos permanecerán esencialmente válidos en el caso tridimensional.

Dentro de la aproximación paraxial y suponiendo que el tamaño transversal del axicón es suficientemente grande comparado con el tamaño del haz como para poder despreciar los efectos difraccionales en los bordes, podemos considerar que dicho elemento se comporta como una transmitancia de fase pura de la forma

$$t(x) = \exp[i\varphi(x)], \quad (3.3)$$

donde  $\varphi(x)$  es una función real que podemos escribir como,

$$\varphi(x) = k(D_0 + d(x)), \quad (3.4)$$

siendo  $D_0$  la anchura total del axicón (ver figura 3.1) y

$$d(x) = |x| \operatorname{tg} \alpha(n - 1), \quad (3.5)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo del axicón y  $n$  es el índice de refracción del mismo. La relación entre la amplitud del campo a la salida y a la entrada de la transmitancia será [GO68]

$$\phi_f(x) = t(x) \phi_i(x), \quad (3.6)$$

donde  $\phi_i(x)$  y  $\phi_f(x)$  están definidos en el mismo plano antes y después, respectivamente, de atravesar el axicón. Haciendo uso de las ecuaciones (2.10-2.12) y dado que el haz está centrado respecto del axicón, los promedios hasta segundo orden a la salida del mismo valdrán:

$$\langle x \rangle_f = \langle x \rangle_i = 0, \quad (3.7)$$

$$\langle u \rangle_f = \langle u \rangle_i = 0, \quad (3.8)$$

$$\langle x^2 \rangle_f = \langle x^2 \rangle_i, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \langle u^2 \rangle_f &= \langle u^2 \rangle_i + (n-1)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{kI_0} 2i(n-1) \operatorname{tg} \alpha \\ &\times \int_0^\infty [\phi_i(x)\phi_i'^*(x) - \phi_i'(x)\phi_i^*(x)] dx, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\langle xu \rangle_f = \langle xu \rangle_i + 2(n-1) \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{I_0} \int_0^\infty x |\phi_i(x)|^2 dx, \quad (3.11)$$

$$I_{0f} = I_{0i} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_i(x)|^2 dx = I_0, \quad (3.12)$$

donde  $I_0$  es la intensidad total (que se conserva al pasar a través de transmitancias de fase). Tomaremos por sencillez  $I_0 = 1$  (condición de normalización).

A partir de las ecuaciones (3.9), (3.10) y (3.11), podemos calcular el parámetro de calidad (definido en el capítulo anterior) a la salida del axicón en función de su valor a la entrada. Nos queda

$$\begin{aligned} Q_f - Q_i &= (n-1)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \langle x^2 \rangle_i \\ &+ \frac{2}{k} i(n-1) \operatorname{tg} \alpha \langle x^2 \rangle_i \int_0^\infty [\phi_i(x)\phi_i'^*(x) - \phi_i'(x)\phi_i^*(x)] dx \\ &- 4(n-1)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \left[ \int_0^\infty x |\phi_i(x)|^2 dx \right]^2 \\ &- 4(n-1) \operatorname{tg} \alpha \langle xu \rangle_i \int_0^\infty x |\phi_i(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Teniendo en cuenta (ver capítulo 2) que el parámetro  $Q$  es invariante bajo sistemas ABCD con simetría rotacional, la expresión anterior nos da, por consiguiente, la calidad a la salida de dispositivos ópticos que combinan axicones con otros sistemas de primer orden, como por ejemplo lentes. En

particular, según demostraremos en la siguiente sección, la combinación de un axicón divergente y una lente convergente es un sistema ópticamente equivalente a una lente toroidal. Por esta razón la ecuación (3.13) será también aplicable a este tipo de lentes esféricas.

### 3.3 Equivalencia entre lente toroidal y combinación lente-axicón

Puede demostrarse que la fase que introduce el sistema formado por una lente esférica más un axicón sobre un haz paraxial viene dada por

$$\varphi_1(x) = k \left( n \Delta_0 + D_0 - \frac{1}{2f} x^2 + (n-1) \operatorname{tg} \alpha |x| \right). \quad (3.14)$$

donde  $f$  es la focal paraxial de la lente delgada y  $\Delta_0$  es el espesor máximo de dicha lente (ver figura 3.3). De forma análoga al caso anterior puede verse que una lente toroidal introducirá un cambio en la fase dado por:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= k \left( n_t \Delta_0 - \frac{(|x| - d_t)^2}{2f_t} \right) \\ &= k \left( n_t \Delta_0 - \frac{x^2}{2f_t} + k \frac{|x|d_t}{f_t} - k \frac{d_t^2}{2f_t} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde  $n_t$  es el índice de refracción,  $f_t$  la focal paraxial de cada lóbulo (por separado) de dicha lente y  $d_t$  es el radio mayor, distancia del centro del sistema al centro de cada lóbulo (ver figura 3.4).

Puede comprobarse inmediatamente que ambos sistemas son equivalentes si identificamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2f} &\longrightarrow \frac{1}{2f_t}, \\ (n-1) \operatorname{tg} \alpha &\longrightarrow \frac{d_t}{f_t}. \end{aligned}$$

Nótese que, en las ecuaciones anteriores, los términos que introducen un cambio en la fase independiente del punto (por ejemplo,  $(kn\Delta_0 + kD_0)$  y  $(kn_t\Delta_0 + kd_t^2/2f_t)$ ) no afectan al factor de calidad.

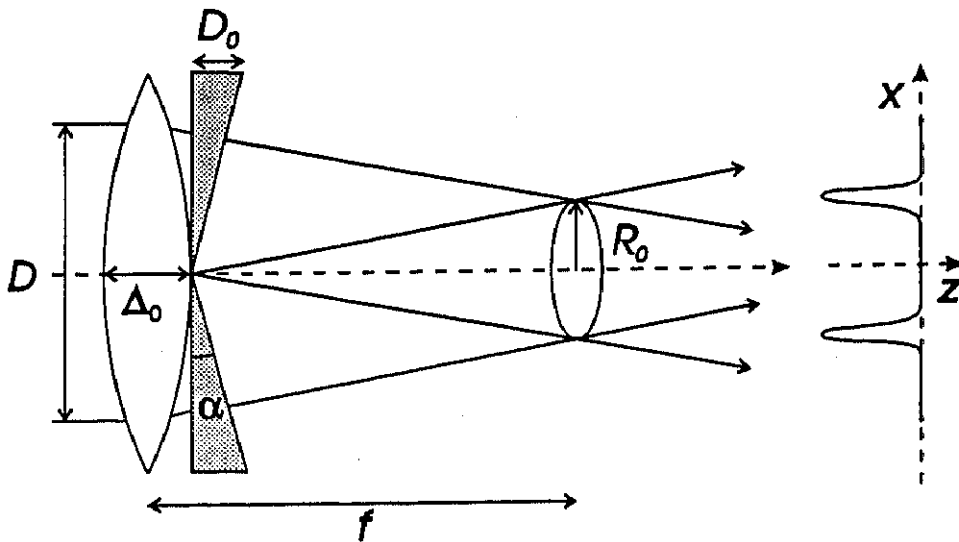


Figura 3.3: Formación de la distribución anular de intensidad cuando un haz colimado se propaga a través del sistema lente convergente-axicón. En el plano focal se ha realizado un corte transversal de la distribución espacial de intensidad.

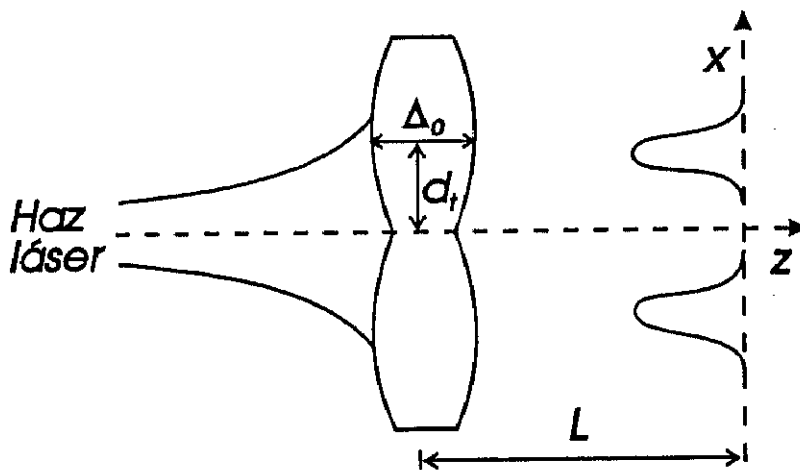


Figura 3.4: Sección transversal de una lente toroidal en el plano meridional del sistema y pasando por el centro del mismo.

### 3.4 Estudio de la calidad para haces gaussianos

Consideremos como caso de especial interés un haz gaussiano coherente divergente (de intensidad normalizada a la unidad), incidiendo perpendicularmente sobre un axicón. Sabemos que la expresión de la amplitud del campo incidente es entonces de la forma

$$\phi_1(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{w^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \exp\left(ik\frac{x^2}{2R}\right), \quad (3.16)$$

donde  $w(z)$  y  $R(z)$  representan la anchura y el radio de curvatura del haz en el plano del axicón, respectivamente. Las integrales que aparecen en las ecuaciones (3.10) y (3.11) se reducen en este caso a

$$\int_0^\infty (\phi_1'(x)\phi_1^*(x) - \phi_1(x)\phi_1'^*(x)) dx = \frac{2ik}{R} \int_0^\infty x |\phi_1(x)|^2 dx, \quad (3.17)$$

$$\int_0^\infty x |\phi_1(x)|^2 dx = \frac{w}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad (3.18)$$

cumpléndose además

$$\langle x^2 \rangle = \frac{w^2}{4}. \quad (3.19)$$

Haciendo uso de las ecuaciones anteriores, la degradación en la calidad que sufre el haz gaussiano al atravesar el axicón vendrá dada por la siguiente expresión analítica simple

$$Q_2 - Q_1 = (n-1)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \left(\frac{\pi-2}{4\pi}\right) w^2. \quad (3.20)$$

El término de la derecha de la ecuación (3.20) nos da el cambio neto en la calidad de un haz gaussiano después de pasar por un axicón. Este cambio depende de la anchura del haz en el plano de entrada, del índice de refracción del material y del ángulo del axicón, pero es independiente de la longitud de onda del campo. Esto implica que el efecto nocivo del axicón sobre la calidad inicial del haz sería, en porcentaje, menor para mayores longitudes de onda. Por tanto, será más conveniente utilizar este tipo de dispositivos cuando trabajemos con láseres de  $\text{CO}_2$  que cuando lo hagamos con láseres de He-Ne.

Por otra parte, si consideramos lentes toroidales, el cambio en la calidad tomará la forma

$$Q_2 - Q_1 = \left(\frac{d_t}{f_t}\right)^2 \left(\frac{\pi-2}{4\pi}\right) w^2, \quad (3.21)$$

esto es, vendrá dado en términos del radio mayor  $d_t$ , de la focal paraxial  $f_t$  y de la anchura del haz  $w$  sobre dicha lente.

A partir de la ecuación (3.21) se concluye, en resumen, que la calidad de un haz gaussiano propagándose a través de lentes toroidales se optimiza:

- i. Si la focal de la lente  $f_t$  aumenta.
- ii. Si manejamos haces de menor tamaño.
- iii. Eligiendo lentes toroidales más pequeñas.

En el caso tridimensional puede comprobarse que la expresión de la variación de la calidad es análoga a la ecuación (3.20) salvo por lo que respecta al factor de proporcionalidad  $(\pi - 2)/4\pi$ , que en ese caso debería reemplazarse por  $(4 - \pi)/8$ . Por consiguiente, las conclusiones permanecen esencialmente válidas.



## Capítulo 4

# Propagación de haces luminosos a través de transmitancias de fase cuártica: caso bidimensional

### 4.1 Introducción

Como ya se indicó en el capítulo 1, uno de los principales problemas a investigar que presenta el conformado espacial global de haces láser es la mejora u optimización del parámetro de calidad de los mismos definido en el capítulo 2 a partir de los promedios de la intensidad y de la intensidad radiante del campo. La utilización de transmitancias de fase pura parece un procedimiento apropiado de conformado, ya que mantiene invariable la potencia total del haz, a diferencia de lo que ocurre con otro tipo de transmitancias como son las transmitancias gaussianas y supergaussianas [MM92b,SM92,SM92c,MM93,SM93a]. Estudiaremos en este capítulo la propagación de haces simétricos en intensidad a través de un tipo particular de transmitancias de fase como son las de orden cuarto (definidas en la sección siguiente), si bien las expresiones generales obtenidas para los parámetros de orden menor o igual a dos son igualmente válidas para cualquier transmitancia de fase. En un trabajo realizado simultáneamente al que presentamos aquí, se consideró también la propagación de haces simétricos en intensidad a través de transmitancias de fase de tipo general [MM93].

El interés de las transmitancias de orden cuarto se incrementa si se tiene en cuenta que representan los efectos de la lente térmica generada en láseres de estado sólido de alta potencia [MM93c]. Más aún, una transmitancia de fase cuártica constituye, como veremos más adelante, un modelo adecuado



para caracterizar la aberración esférica de una lente. Por tanto, los resultados que obtendremos en general para este tipo de transmitancias serán aplicables a estas situaciones.

Uno de los resultados más relevantes que presentaremos en este capítulo demuestra que una lente con un cierto grado de aberración esférica puede mejorar en ciertos casos la calidad de un haz (si se exceptúan haces cuya fase tenga forma cuadrática). Esta conclusión está en completo acuerdo con la mostrada en [MM93], así como con la deducida por Siegman para el caso particular de haces láser coherentes con términos de fase cuadrática degradados por la utilización de lentes con aberración esférica [SI93a].

En concreto, en lo que sigue estudiaremos cómo influyen las distorsiones de fase de tipo cuártico cuando haces simétricos parcialmente coherentes se propagan a través de éstas y cómo se modifican sus parámetros característicos hasta segundo orden relacionados con la anchura, divergencia y calidad del haz. Obtendremos una expresión analítica para el cambio en el parámetro de calidad, estudiando las condiciones explícitas para mejorar dicha calidad así como el valor de este parámetro optimizado al cumplirse las condiciones anteriores. Posteriormente particularizaremos los resultados para el caso de haces totalmente coherentes (haces láser gaussianos) y dedicaremos una sección al estudio de la variación de la calidad de dichos haces propagándose a través de lentes delgadas que presentan aberración esférica.

## 4.2 Cálculo de la calidad

En esta sección determinaremos el cambio en el parámetro de calidad de un haz simétrico en intensidad y parcialmente coherente. En el presente capítulo por simplicidad supondremos que tanto los haces como las transmitancias son factorizables por lo que consideraremos el caso bidimensional. Una extensión de estos resultados para haces generales no simétricos y transmitancias no necesariamente factorizables será abordada en el capítulo 5.

Un haz arbitrario parcialmente coherente y simétrico en intensidad está caracterizado por una densidad espectral mutua  $\Gamma(x_1, x_2)$ , que cumple

$$\Gamma(x, x) = \Gamma(-x, -x) = I(x) = I(-x), \quad (4.1)$$

donde  $x$  es la variable transversal a la dirección de propagación  $z$ , e  $I(x)$  representa la intensidad del haz para cada  $x$ .

Es claro que  $\Gamma(x, x)$  a la salida de una lámina de fase pura cuya transmitancia viene dada por la expresión  $\exp [i\varphi(x)]$  es de la forma

$$\Gamma_f(x_1, x_2) = \Gamma_i(x_1, x_2) \{ \exp i[\varphi(x_2) - \varphi(x_1)] \}, \quad (4.2)$$

donde los subíndices  $i$  y  $f$  corresponden a la densidad espectral mutua antes y después de atravesar la lámina de fase, respectivamente. Utilizando las definiciones del capítulo 2, calculamos los promedios  $\langle x^m u^n \rangle$  para  $m+n \leq 2$  en función de la densidad espectral mutua:

$$\langle x \rangle_f = \langle x \rangle_i = 0, \quad (4.3)$$

$$\langle x^2 \rangle_f = \langle x^2 \rangle_i, \quad (4.4)$$

$$\langle u \rangle_f = \langle u \rangle_i + \left( \frac{1}{k I_0} \right) \int \varphi'(x) \Gamma_i(x, x) dx, \quad (4.5)$$

$$\langle xu \rangle_f = \langle xu \rangle_i + \left( \frac{1}{k I_0} \right) \int x \varphi'(x) \Gamma_i(x, x) dx, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \langle u^2 \rangle_f &= \langle u^2 \rangle_i + \left( \frac{i}{k^2 I_0} \right) \int \varphi'(x) \left( \frac{\partial \Gamma_i(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma_i(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_1, x_2=x} dx \\ &+ \left( \frac{1}{k^2 I_0} \right) \int (\varphi'(x))^2 \Gamma_i(x, x) dx, \end{aligned} \quad (4.7)$$

junto con  $I_f(x) = I_i(x)$ , donde

$$I_0 = \int \Gamma(x, x) dx$$

y las primas indican derivación respecto de  $x$ . Las expresiones anteriores son válidas para funciones de fase arbitrarias  $\varphi(x)$ . Tanto la intensidad  $I(x)$  como el promedio de orden dos del haz  $\langle x^2 \rangle$  en el plano de salida de la transmitancia de fase no se modifican. Por otra parte  $\langle x \rangle_i$  y  $\langle x \rangle_f$  son nulos ya que nuestro haz a la entrada y a la salida es simétrico en intensidad y lo suponemos centrado respecto del eje de simetría.

Particularizaremos las ecuaciones anteriores a aquellas transmitancias de fase de la forma,

$$\varphi(x) = k(ax^2 + bx^4). \quad (4.8)$$

De momento supondremos  $a$  y  $b$  constantes (cuando consideremos lentes con aberración esférica estos parámetros dependerán del haz de entrada).

Sustituyendo la expresión (4.8) en las ecuaciones (4.4)-(4.7) obtenemos

$$\langle u \rangle_f = 0, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \langle xu \rangle_f^2 &= \langle xu \rangle_i^2 + 4a^2 \langle x^2 \rangle_i^2 + 16b^2 \langle x^4 \rangle_i^2 + 4a \langle xu \rangle_i \langle x^2 \rangle_i + 8b \langle x^4 \rangle_i \langle xu \rangle_i \\ &\quad + 16ab \langle x^4 \rangle_i \langle x^2 \rangle_i, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \langle u^2 \rangle_f &= \langle u^2 \rangle_i + 4a \langle xu \rangle_i + 8b \langle x^3 u \rangle_i + 4a^2 \langle x^2 \rangle_i + 16b^2 \langle x^6 \rangle_i \\ &\quad + 16ab \langle x^4 \rangle_i, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde hemos supuesto, por simplicidad, que  $\langle u \rangle_i = 0$  (en caso de que este promedio fuera distinto de cero, podríamos anularlo simplemente cambiando la dirección de propagación elegida en nuestro sistema de referencia). Es importante notar que los valores de los promedios de segundo orden en el plano de salida de la lámina de fase cuártica dependen de los valores de los promedios de orden más alto del haz a la entrada.

Partiendo de la definición del parámetro de calidad introducido en el capítulo 2, en donde suponíamos  $\langle x \rangle = \langle u \rangle = 0$ , y sustituyendo los valores de  $\langle x^2 \rangle_f$ ,  $\langle xu \rangle_f^2$  y  $\langle u^2 \rangle_f$  en la ecuación (2.35), se llega a

$$\Delta Q = Q_f - Q_i = 16b^2 S + 8bT, \quad (4.12)$$

donde a la cantidad  $\Delta Q$  la llamaremos factor de ganancia de calidad, y

$$S = \langle x^6 \rangle_i \langle x^2 \rangle_i - \langle x^4 \rangle_i^2, \quad (4.13)$$

$$T = \langle x^3 u \rangle_i \langle x^2 \rangle_i - \langle x^4 \rangle_i \langle xu \rangle_i. \quad (4.14)$$

A partir de estas ecuaciones podemos inferir las siguientes conclusiones:

i. Cuando  $T = 0$ , el factor de ganancia es positivo siempre, ya que  $S$  es también una cantidad positiva (ver apéndice), y por consiguiente la calidad se degrada. Esta condición la satisfacen aquellos haces que son reales en el plano donde colocamos la transmitancia, ya que para dichos haces los promedios  $\langle x^3 u \rangle$  y  $\langle xu \rangle$  se anulan.

ii. Cuando  $T \neq 0$ , el factor de ganancia es negativo (la calidad mejora) si

$$- \operatorname{sgn} b \neq \operatorname{sgn} T,$$

y

$$- |b| < |T| / 2S.$$

Esta consecuencia se obtiene directamente despejando  $b$  de la desigualdad  $\Delta Q < 0$ .

iii. La calidad del haz se optimiza cuando

$$|b| = \frac{|T|}{4S}. \quad (4.15)$$

En tal caso, el valor de ganancia de calidad óptimo, es decir la mejora máxima que podemos obtener será

$$\Delta Q = -\frac{T^2}{S}. \quad (4.16)$$

Para llegar a esta tercera propiedad se ha minimizado el factor de ganancia de calidad en la ecuación (4.12), es decir,

$$\frac{\partial \Delta Q}{\partial b} = 0, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta Q}{\partial b^2} > 0, \quad (4.18)$$

que se satisfacen cuando

$$b = -\operatorname{sgn} T \frac{|T|}{4S}. \quad (4.19)$$

Una consecuencia final de especial interés se cumple para aquellos haces cuya densidad espectral mutua sea de la forma

$$\Gamma(x_1, x_2) = A(x_1, x_2) \exp[ikd(x_2^2 - x_1^2)], \quad (4.20)$$

donde  $A$  toma valores reales y  $d$  es una constante también real. Para tales haces la calidad siempre se degrada. Importantes ejemplos de esta clase de campos para los cuales el empleo de transmitancias de fase cuártica no sirve para mejorar su calidad son los haces de tipo Gauss-Schell y los modos de Hermite-Gauss.

En efecto, para esta clase de campos  $T = 0$ , ya que los promedios  $\langle xu \rangle$  y  $\langle x^3 u \rangle$  son proporcionales (con el mismo factor de proporcionalidad) a  $\langle x^2 \rangle$  y a  $\langle x^4 \rangle$  respectivamente. En este caso el factor de ganancia siempre es positivo como vimos por la primera propiedad, y vale

$$\Delta Q = 16b^2 (\langle x^6 \rangle_i \langle x^2 \rangle_i - \langle x^4 \rangle_i^2). \quad (4.21)$$

En el caso particular de haces gaussianos, para los que, además, los promedios en intensidad obedecen a expresiones simples

$$\begin{aligned} \langle x^4 \rangle &= 3\langle x^2 \rangle^2, \\ \langle x^6 \rangle &= 3 \cdot 5 \langle x^2 \rangle^3, \\ \langle x^8 \rangle &= 3 \cdot 5 \cdot 7 \langle x^2 \rangle^4, \\ &\vdots \\ \langle x^n \rangle &= (n-1)!! \langle x^2 \rangle^{(n/2)}, \end{aligned}$$

la variación de la calidad vendrá dada por,

$$\Delta Q = 96b^2 \langle x^2 \rangle_i^4, \quad (4.22)$$

es decir, la degradación de la calidad cuando un haz gaussiano se propaga a través de transmitancias de fase cuártica es proporcional a la cuarta potencia del promedio de orden dos del haz sobre la transmitancia.

Esta última propiedad está de acuerdo con los resultados obtenidos por Martínez-Herrero y Mejías en [MM93] y por Siegman en [SI93] quien demostró que aberraciones de fase cuártica siempre degradan el factor de calidad de haces láser coherentes con términos de fase cuadráticos.

Como caso especial de transmitancia de fase de orden cuarto vamos a considerar a continuación una lente con aberración esférica.

### 4.3 Lentes con aberración esférica

Conviene aclarar primero el convenio de signos elegido: hemos tomado el signo positivo en la fase de los haces cuando éstos son divergentes y negativo cuando son convergentes. En cuanto al signo de la fase relativa introducida por la lente, este es negativo para lentes convergentes ( $f \geq 0$ ) y positivo para las divergentes ( $f \leq 0$ ). Por tanto, si consideramos lentes delgadas con aberración esférica, la función de transmitancia que representa dicha lente tiene la misma forma que una transmitancia cuártica, es decir

$$t(x) = \exp [i\varphi(x)], \quad (4.23)$$

donde

$$\varphi(x) = k(ax^2 + bx^4). \quad (4.24)$$

Ahora  $a$  y  $b$  ya no son constantes sino que dependen de ciertos parámetros característicos de la lente y del haz incidente. En concreto, las expresiones de  $a$  y  $b$  que se obtienen aplicando la teoría de tercer orden en las fórmulas del trazado de rayos, son [JW57,MA91]

$$a = -\frac{1}{2f}, \quad (4.25)$$

$$b = \frac{n^3 + p_l^2(3n+2)(n^2+1-2n) + q_l^2(n+2) + p_l q_l(n^2-1)}{32(n-1)^2 n f^3} \quad (4.26)$$

donde  $n$  y  $f$  son, respectivamente, el índice de refracción y la focal paraxial de la lente, y donde

$$q_l = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}, \quad (4.27)$$

es el denominado factor de forma de la lente, y

$$p_l = \frac{s'_l - s_l}{s'_l + s_l}, \quad (4.28)$$

es el llamado factor de posición del haz respecto de la lente. En las ecuaciones anteriores  $R_1$  y  $R_2$  representan los radios de curvatura de las dos caras de la lente y  $s'_l$  y  $s_l$  las distancias objeto e imagen paraxiales que tomaremos como radios de curvatura  $R'$  y  $R$  (radios efectivos de curvatura [SI90, BE91, PA92]) del haz emergente e incidente sobre el plano de la lente, respectivamente [JW57]. Esto es válido ya que supondremos que en aproximación paraxial tanto el haz de entrada como el de salida poseen sobre el plano de la lente frentes de onda esféricos provenientes de fuentes puntuales objeto e imagen que estarían situadas a distancias  $R$  y  $R'$  de dicho plano, respectivamente. Si elegimos un caso simple, como por ejemplo una lente planoconvexa, su factor de forma dependerá de hacia donde coloquemos la cara plana, de manera que si el haz incide directamente sobre esta cara  $q_l = -1$ , y si incide por la otra  $q_l = +1$  (figura 4.1). En cuanto al factor de posición, como hemos dicho, éste depende de los radios de curvatura del haz incidente y refractado en aproximación paraxial (suponiendo que la lente no estuviera aberrada). Así, en el caso de un haz que incida colimado  $p_l = -1$  y si, por el contrario, la lente es empleada para colimar el haz este factor toma el valor  $p_l = +1$  (figura 4.1). En [SI93a] sólo se han considerado estos dos casos, pero, en general para un haz no colimado, el factor  $p_l$  variará con  $R$  y  $f$  (o bien con  $R'$  y  $f$ ).

Estos dos parámetros  $p_l$  y  $q_l$  están relacionados de manera que cuando la aberración esférica es mínima el factor de forma y el factor de posición vienen ligados por la ecuación [JW57]:

$$q_l = \frac{2(n^2 - 1)p_l}{(n + 2)}. \quad (4.29)$$

Se ha realizado un cálculo concreto de cómo varía  $p_l$  y por tanto  $b$  con el radio de curvatura del haz incidente. Para ello hemos elegido un haz gaussiano colimado ( $R = \infty$ ) y el mismo haz pero con un radio de curvatura sobre el plano de la lente aproximadamente igual a la distancia de Rayleigh (que

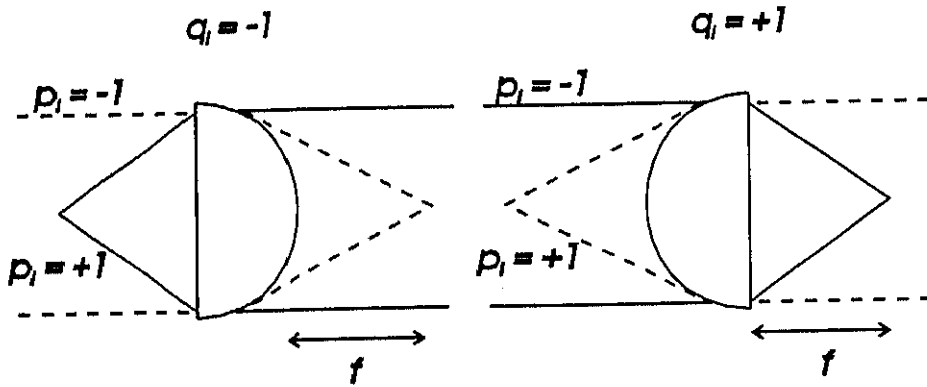


Figura 4.1: Parámetros  $p_l$  y  $q_l$  de un haz colimado para las dos orientaciones posibles de una lente planoconvexa.

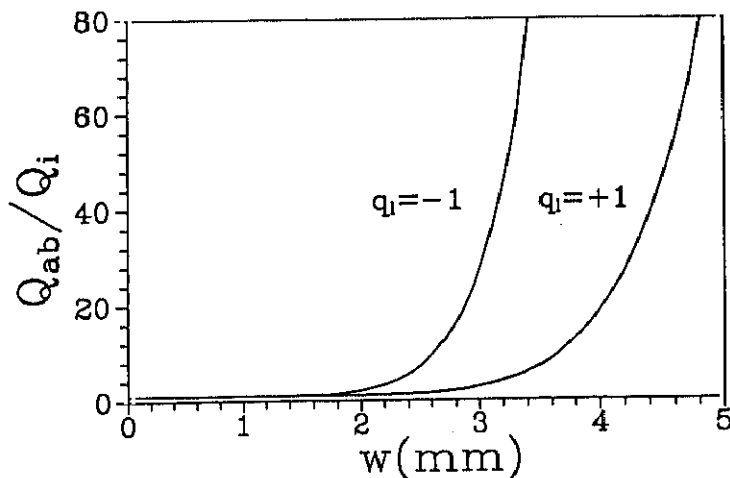
para haces gaussianos con anchura  $w_0$  en la cintura es  $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$ ). Para nuestro haz consideraremos que  $w_0 = 1\text{ mm}$  y  $\lambda = 633 \cdot 10^{-6}\text{ mm}$ , y en cuanto a la lente aberrada la supondremos de focal  $f = 60\text{ mm}$ . Analizaremos los dos factores de forma (según las dos posibles orientaciones) de una lente planoconvexa. Los resultados se exponen en la tabla 4.1.

Tabla 4.1: Variación de  $b$  en función del factor de forma  $q_l$  de la lente y de los parámetros  $p_l$  y  $R$  del haz a la entrada.

$R$	$q_l$	$p_l$	$b(\times 10^{-6}\text{ mm}^{-3})$
$\infty$	+1	-1	1.350
$\infty$	-1	-1	5.208
$z_R$	+1	-1.025	1.334
$z_R$	-1	-1.025	5.288

Como podemos observar, la variación de  $b$  con  $R$  para un mismo  $q_l$  es suficientemente pequeña, por lo que, en la mayoría de los casos, tomaremos un valor fijo de  $R$  y por lo tanto de  $p_l$ . Además, para un determinado valor de  $p_l$  podemos ver que el factor de aberración es claramente menor para  $q_l = +1$ . Esto conlleva que cuando se trabaje con lentes planoconvexas y se quieran atenuar los efectos de la aberración esférica, el haz debe incidir sobre la cara convexa.

Por otra parte, el parámetro de calidad a la salida de la lente aberrada,



**Figura 4.2:** Cociente  $Q_{ab}/Q_i$  a la salida de una lente con aberración esférica en función de la anchura  $w$  del haz sobre el plano de la lente, para las dos posibles orientaciones de ésta. En la figura se ha supuesto  $f = 60$  mm y  $p_l = -1$ . Recuerdese que  $w$  está relacionado con  $\langle x^2 \rangle_i$  mediante la ecuación (2.14).

$Q_{ab}/Q_i$  (normalizado por la calidad del haz gaussiano incidente), viene dado en función del tamaño del haz sobre el plano de dicha lente por la fórmula (ver ecuación (4.22))

$$Q_{ab}/Q_i = 1 + 384 k^2 b^2 \langle x^2 \rangle_i^4, \quad (4.30)$$

de donde se infiere que, para un mismo haz (por ejemplo, un haz gaussiano con  $p_l = -1$ ), la degradación de la calidad será marcadamente diferente dependiendo de la orientación de la lente. Esta diferencia puede apreciarse claramente en la figura 4.2.

## 4.4 Apéndice

A continuación demostraremos que  $S$  es una cantidad positiva. Partiremos de los promedios definidos como

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{I_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 I(x) dx, \quad (4.A.1)$$



$$\langle x^4 \rangle = \frac{1}{I_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 I(x) dx, \quad (4.A.2)$$

$$\langle x^6 \rangle = \frac{1}{I_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 I(x) dx. \quad (4.A.3)$$

y de la desigualdad de Schwarz para integrales

$$\left| \int_b^a f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \left( \int_b^a |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_b^a |g(x)|^2 dx \right), \quad (4.A.4)$$

cumpléndose la igualdad cuando  $f(x)/g(x)$  es una constante. Entonces, aplicándolo a nuestro caso, si escribimos

$$\langle x^4 \rangle^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x \sqrt{I(x)} x^3 \sqrt{I(x)} dx \right|^2, \quad (4.A.5)$$

y hacemos  $f(x) = x \sqrt{I(x)}$  y  $g(x) = x^3 \sqrt{I(x)}$ , nos quedará

$$\langle x^4 \rangle^2 < \langle x^2 \rangle \langle x^6 \rangle \quad (4.A.6)$$

y, por consiguiente,  $S > 0$ .

## Capítulo 5

# Propagación de haces luminosos a través de transmitancias de fase cuártica: caso tridimensional

### 5.1 Introducción

En los capítulos anteriores utilizamos un formalismo bidimensional, aplicable a gran número de situaciones aunque no a todas, de manera que, en ocasiones, es preciso utilizar haces y sistemas intrínsecamente tridimensionales. Parámetros de calidad apropiados son, en tales casos, los denominados  $Q_{3D}$  y  $J$ , introducidos en trabajos previos [SM90,SM91,SM92a,SM92d].

En este capítulo haremos en primer lugar, una breve revisión del formalismo tridimensional y de los parámetros anteriormente citados, aplicando tales conceptos a la propagación de haces generales tridimensionales coherentes a través de transmitancias de fase cuártica, consideradas ahora como sistemas ópticos tridimensionales.

Como tipos específicos de transmitancias de fase de orden cuarto se tratarán dos casos de especial interés: por un lado una lente rotacionalmente simétrica con aberración esférica y por otro, un par de lentes cilíndricas idénticas pero ortogonales, en contacto una con otra, que también presentan aberración esférica. Obtendremos expresiones analíticas para los dos parámetros de calidad anteriores en el plano de salida de la transmitancia de fase cuártica, y se explicitarán una serie de condiciones para determinar si la calidad mejora o empeora cuando consideramos diversos tipos de haces láser, como son los haces denominados factorizables y los rotacionalmente simétricos.

Recuérdese que uno de los resultados descritos en el capítulo anterior mostraba la posibilidad de mejorar la calidad de algunos haces utilizando transmitancias de fase cuártica. Sin embargo, como mostraremos en este capítulo, la generalización del resultado anterior a haces cualesquiera y transmitancias de fase tridimensionales (3-D) dará lugar a la aparición de nuevas propiedades, principalmente debidas a la existencia de ciertos momentos cruzados que no aparecían en el caso bidimensional. Por ejemplo, es bien conocido en óptica de Fourier que, en ausencia de aberraciones, el sistema formado por dos lentes cilíndricas idénticas pero ortogonales, en contacto una con la otra, es ópticamente equivalente a una única lente circular de la misma focal. Y esto ocurre para haces arbitrarios. Sin embargo, como veremos, esta equivalencia no se da cuando incluimos el efecto de la aberración esférica.

## 5.2 Formalismo y definiciones de los parámetros a utilizar

Introduciremos primero la función de distribución de Wigner en tres dimensiones a partir de la densidad espectral mutua  $\Gamma(\rho, s, z)$ , que para haces coherentes toma la forma

$$\begin{aligned} h(\rho, \eta; z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\rho + s/2, \rho - s/2; z) \exp(ik\eta s) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(\rho + s/2) \phi(\rho - s/2; z) \exp(ik\eta s) ds, \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde  $k$  es como siempre el número de onda,  $\phi(x, y)$  la amplitud del campo en el plano que estamos considerando,  $\rho = (x, y)$ , siendo  $x$  e  $y$  las variables transversales a la dirección de propagación  $z$ , y  $\eta = (u, v)$ , con  $u$  y  $v$  representando los ángulos de propagación. Nótese que  $(ku, kv) = (k_x, k_y)$  son las componentes del vector de onda a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente. La variable muda  $s$  aparece en la función  $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , donde  $\mathbf{x}_i$ , ( $i = 1, 2$ ), son los vectores bidimensionales de posición, como consecuencia del cambio de variables  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{s}$ ,  $\rho = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$  requerido para escribir la ecuación (5.1). En lo que sigue supondremos de nuevo que  $\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle u \rangle = \langle v \rangle = 0$ . Integrando  $h(\rho, \eta; z)$  con respecto a las variables angulares y espaciales obtenemos (salvo constantes de proporcionalidad) la irradiancia y la intensidad radiante del campo respectivamente. Al igual que hacíamos en el capítulo 2, los promedios de la función de distribución de Wigner se definen ahora

como

$$\langle f \rangle = \frac{1}{I_0} \frac{k^2}{4\pi^2} \iiint \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy du dv f(x, y, u, v) h(x, y, u, v), \quad (5.2)$$

donde  $I_0$  es la intensidad total del haz y  $f$  representa alguna función de las variables angulares o de las espaciales o bien de ambas. Teniendo en cuenta las definiciones previas, el parámetro de calidad en tres dimensiones  $Q_{3D}$  (generalización inmediata del definido para el caso bidimensional) viene dado por [SM91]

$$Q_{3D} = \langle x^2 + y^2 \rangle \langle u^2 + v^2 \rangle - \langle xu + yv \rangle^2. \quad (5.3)$$

En cuanto al significado físico de los promedios que aparecen en esta expresión, de forma análoga al caso bidimensional, el promedio  $\langle x^2 + y^2 \rangle$  puede ser interpretado como la anchura del haz (al cuadrado), y  $\langle u^2 + v^2 \rangle$  como la divergencia en campo lejano (también al cuadrado), la cual es independiente de  $z$  bajo propagación libre.

Cuando medimos en el plano de la cintura, es decir, cuando  $\langle x^2 + y^2 \rangle$  es mínimo, entonces la calidad se reduce al producto  $\langle x^2 + y^2 \rangle_c \langle u^2 + v^2 \rangle_c$ . Por otra parte se sigue satisfaciendo un principio de indeterminación cuyo mínimo es alcanzado por haces gaussianos coherentes y rotacionalmente simétricos. Este valor resulta ser  $Q_{3D} = 1/k^2$ . Y este parámetro de calidad sigue estando relacionado con el factor  $M_r^2$ , en la forma  $(M_r^2)^2 = k^2 Q_{3D}$ .

Restringiéndonos a sistemas ópticos rotacionalmente simétricos se ha demostrado que  $Q_{3D}$  no cambia cuando se propaga a través de dichos sistemas. Esto es cierto incluso para haces sin esa simetría y con términos cruzados no nulos como  $\langle xy \rangle$ ,  $\langle uv \rangle$ , etc. Desgraciadamente, sin embargo, esta propiedad de invariancia no se cumple cuando utilizamos sistemas ópticos generales [SM91], como ocurre por ejemplo cuando el haz se propaga a través de lentes cilíndricas astigmáticas. No obstante, para sistemas y haces arbitrarios, ha sido propuesto otro parámetro de calidad  $J$  [SM90, SM91, MM93a, MM93e], el cual sí es invariante a través de cualquier sistema óptico de primer orden y satisface la desigualdad  $J \geq 1/2k^2$ , (el valor mínimo es alcanzado para los haces gaussianos).

Este parámetro se define en la forma

$$J = Q_x + Q_y - 2P \quad (5.4)$$

donde

$$Q_x = \langle x^2 \rangle \langle u^2 \rangle - \langle xu \rangle^2 \geq \frac{1}{4k^2}, \quad (5.5)$$

$$Q_v = \langle y^2 \rangle \langle v^2 \rangle - \langle yv \rangle^2 \geq \frac{1}{4k^2}, \quad (5.6)$$

pueden ser interpretados como los parámetros de calidad asociados a los ejes  $x$  e  $y$ , y

$$P = \langle xv \rangle \langle yu \rangle - \langle xy \rangle \langle uv \rangle, \quad (5.7)$$

representa el término propiamente tridimensional, puesto que incluye términos cruzados no presentes en el caso bidimensional. Es interesante señalar que, como fue apuntado en [SM91], el parámetro  $J$  contiene información acerca del comportamiento astigmático del haz a través de los promedios cruzados que aparecen en  $P$ . No insistiremos aquí más en estas cuestiones, remitiéndonos a la bibliografía mencionada (ver también [MM94a]).

A continuación y con objeto de simplificar la notación, llamaremos al parámetro de calidad tridimensional  $Q_{3D}$  simplemente  $Q$ .

Hasta ahora, estos parámetros han sido estudiados para haces propagándose a través de sistemas ópticos de primer orden o sistemas ABCD. Como ya hemos mencionado anteriormente el conformado de un haz se puede realizar modificando los parámetros característicos mediante la utilización de sistemas ópticos no-ABCD. Elegiremos de nuevo en este capítulo las transmitancias de fase cuártica.

### 5.3 Modificación de la calidad mediante transmitancias de fase cuártica

En el capítulo anterior estudiamos el cambio experimentado por algunos parámetros característicos de los haces al propagarse a través de transmitancias de fase cuártica consideradas como sistemas ópticos bidimensionales. Representábamos la fase cuártica mediante una lámina de fase pura cuya función de transmitancia era de la forma

$$t(x) = \exp\left(ikbx^4\right), \quad (5.8)$$

y obteníamos un cambio en la calidad dado por la ecuación (4.12). Para generalizar ese resultado al caso de transmitancias tridimensionales y para haces arbitrarios, primero tenemos que conocer la forma explícita de la función  $t(x, y)$  (definida ahora en función de las variables  $x$  e  $y$ ) que representa la transmitancia de fase cuártica en 3-D. Por consideraciones analíticas hemos elegido dos casos de importancia práctica:

- i. Una sola lente circular (rotacionalmente simétrica) con aberración esférica.
- ii. Dos lentes cilíndricas idénticas pero ortogonales, esféricamente aberradas y en contacto una con la otra.

Estudiaremos separadamente estos dos sistemas ópticos. En cada caso aplicaremos los resultados a dos tipos particulares de campos de especial interés, como son los haces rotacionalmente simétricos (haces cuya amplitud  $\phi(x, y)$  es una función de la variable radial  $r_v = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ), y haces factorizables (aquellos cuya amplitud  $\phi(x, y)$  puede ser escrita en la forma  $\phi(x, y) = \phi_x(x)\phi_y(y)$ ). Posteriormente compararemos los dos sistemas ópticos y particularizaremos para el caso de haces gaussianos rotacionalmente simétricos y con astigmatismo simple. Dentro de la última sección describiremos el procedimiento de medida y los resultados experimentales para el caso de un haz gaussiano propagándose a través de una única lente con aberración esférica.

### 5.3.1 Lente circular

En este caso, la función  $t(x, y)$  que representa el cambio en la fase producido por la aberración esférica se escribe de la forma

$$t_1(x, y) = \exp[ikb(x^2 + y^2)^2], \quad (5.9)$$

donde el subíndice "1" indica que consideramos una única lente.

Mediante un laborioso cálculo (en el apéndice 5.D mostramos algunos ejemplos), se llega a

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= (Q_f)_1 - (Q_i)_1 = 16b^2(S_x + S_y + P_{xy} + U_{xy}) \\ &\quad + 8b(T_x + T_y - Q_{xy} + R_{xy}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

y

$$\begin{aligned} \Delta J_1 &= (J_f)_1 - (J_i)_1 = 16b^2(S_x + S_y - 4S_{xy} + V_{xy} - 2W_{xy}) \\ &\quad + 8b(T_x + T_y - T_{xy} + Z_{xy}), \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde los subíndices  $i$  y  $f$  indican que los parámetros de calidad han sido calculados antes y después de atravesar la transmitancia, y

$$S_x = \langle x^6 \rangle \langle x^2 \rangle - \langle x^4 \rangle^2, \quad (5.12)$$

$$S_y = \langle y^6 \rangle \langle y^2 \rangle - \langle y^4 \rangle^2, \quad (5.13)$$

$$S_{xy} = \langle xy^3 \rangle \langle x^3y \rangle, \quad (5.14)$$

$$P_{xy} = \langle x^6 \rangle \langle y^2 \rangle + \langle y^6 \rangle \langle x^2 \rangle - 2\langle x^4 \rangle \langle y^4 \rangle, \quad (5.15)$$

$$U_{xy} = 3(\langle x^4y^2 \rangle + \langle y^4x^2 \rangle)(\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle) - 4\langle x^2y^2 \rangle^2 - 4\langle x^2y^2 \rangle(\langle x^4 \rangle + \langle y^4 \rangle), \quad (5.16)$$

$$T_x = \langle x^2 \rangle \langle x^3u \rangle - \langle xu \rangle \langle x^4 \rangle, \quad (5.17)$$

$$T_y = \langle y^2 \rangle \langle y^3v \rangle - \langle yv \rangle \langle y^4 \rangle, \quad (5.18)$$

$$Q_{xy} = \langle x^3u \rangle \langle y^2 \rangle - \langle xu \rangle \langle y^4 \rangle + \langle y^3v \rangle \langle x^2 \rangle - \langle yv \rangle \langle x^4 \rangle, \quad (5.19)$$

$$R_{xy} = (\langle yx^2v \rangle + \langle xy^2u \rangle)(\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle) - 2(\langle xu \rangle + \langle yv \rangle)\langle x^2y^2 \rangle, \quad (5.20)$$

$$T_{xy} = \langle xv \rangle \langle x^3y \rangle + \langle yu \rangle \langle xy^3 \rangle, \quad (5.21)$$

$$V_{xy} = \langle x^2 \rangle (\langle x^2y^4 \rangle + 2\langle x^4y^2 \rangle) + \langle y^2 \rangle (\langle y^2x^4 \rangle + 2\langle y^4x^2 \rangle) - 2\langle x^2y^2 \rangle^2 - 2\langle x^2y^2 \rangle(\langle x^4 \rangle + \langle y^4 \rangle), \quad (5.22)$$

$$W_{xy} = \langle xy^3 \rangle^2 + \langle yx^3 \rangle^2, \quad (5.23)$$

$$Z_{xy} = \langle x^2 \rangle \langle xy^2u \rangle + \langle y^2 \rangle \langle yx^2v \rangle - \langle x^2y^2 \rangle (\langle xu \rangle + \langle yv \rangle) - \langle xv \rangle \langle xy^3 \rangle - \langle yu \rangle \langle yx^3 \rangle. \quad (5.24)$$

Las expresiones anteriores han sido calculadas sobre el plano de entrada de la lente refiriendo el haz (en cualquier plano  $z$ ) a sus ejes principales, definidos como aquellos para los cuales el término cruzado  $\langle xy \rangle = 0$  [MM90b, SM90, SM91, MM93a, MM93e]. Esta elección la mantendremos a lo largo de todo el capítulo.

Por otra parte, estas fórmulas constituyen la generalización que íbamos buscando. Como veremos en lo que sigue, la existencia de promedios cruzados genera ciertas propiedades diferentes al caso bidimensional. Nótese, además, que todos los parámetros que aparecen en las expresiones anteriores son medibles. Así, por ejemplo, los promedios espaciales tales como  $\langle x^6 \rangle$ ,  $\langle x^2y^4 \rangle$ , etc, pueden ser directamente determinados a partir de medidas de intensidad en un plano. A su vez, los promedios cruzados en las variables espaciales y angulares asociados al mismo eje de coordenadas (por ejemplo,  $\langle xu \rangle$ ,  $\langle xu^3 \rangle$ ,  $\langle y^2v^2 \rangle$ , etc) pueden ser obtenidos a partir de medidas de intensidad en varios planos. Por ejemplo, el valor del promedio  $\langle xu \rangle$  en un cierto plano  $z = 0$  puede ser obtenido a partir de la ecuación

$$\langle x^2 \rangle_z = \langle x^2 \rangle_0 + 2\langle xu \rangle_0 z + \langle u^2 \rangle_0 z^2, \quad (5.25)$$

teniendo en cuenta que los promedios  $\langle x^2 \rangle_z$ ,  $\langle x^2 \rangle_0$  y  $\langle u^2 \rangle_0$  pueden inferirse a partir de medidas de intensidad en varios planos. Finalmente, para medir los

promedios cruzados en los cuales las variables angulares sean ortogonales a las variables espaciales ( $\langle xv \rangle$ ,  $\langle xy^2u \rangle$ , etc) se precisa la utilización de sistemas ópticos astigmáticos. Por ejemplo, para determinar  $\langle yu \rangle$  puede emplearse una lente cilíndrica auxiliar no-aberrada [SE93].

A continuación estudiaremos el comportamiento de la calidad a la salida de una lente circular aberrada considerando dos clases de haces.

### Haces rotacionalmente simétricos

Para analizar con más detalle el comportamiento de la calidad, es importante notar que los factores que multiplican al factor  $b^2$  en las ecuaciones (5.10) y (5.11) son positivos (ver apéndices 5.A y 5.B). Esto implica que la mejora de la calidad sólo depende del signo del segundo término del miembro de la derecha en estas ecuaciones.

Por otra parte, para esta clase de haces  $\Delta J_1$  es proporcional a  $\Delta Q_1$ , por lo que sólo será necesario analizar este último parámetro. Se cumple además  $T_x = T_y$  y  $Q_{xy} = 2T_x$ . Por consiguiente, el signo de  $\Delta Q_1$  ahora sólo depende del signo del producto  $bR_{xy}$ , de forma que cuando  $bR_{xy} < 0$  es posible mejorar la calidad de los haces, como ocurría en el caso bidimensional.

En particular, para aquellos haces rotacionalmente simétricos que además satisfagan

$$\langle x^2y^2 \rangle = \langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle, \quad (5.26)$$

$$\langle xny^2 \rangle = \langle xu \rangle \langle y^2 \rangle, \quad (5.27)$$

$$\langle x^2yv \rangle = \langle x^2 \rangle \langle yv \rangle, \quad (5.28)$$

se verificará  $\Delta Q_1 > 0$  (la calidad siempre empeora).

### Haces factorizables

Para este tipo de haces se verifica que

$$\begin{aligned} T_x + T_y - Q_{xy} + R_{xy} = & ((x^2) - \langle y^2 \rangle)(\langle x^3u \rangle - \langle y^3v \rangle) + (\langle x^4 \rangle - \langle y^4 \rangle) \\ & \times (\langle yv \rangle - \langle xu \rangle) - \langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle (\langle xu \rangle + \langle yv \rangle) \\ & + \langle x^2 \rangle^2 \langle yv \rangle + \langle y^2 \rangle^2 \langle xu \rangle. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Por tanto la calidad mejorará dependiendo de las relaciones entre los promedios de orden dos y cuatro. Entonces, para aquellos haces que además



satisfagan  $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$  y  $\langle x^4 \rangle = \langle y^4 \rangle$ , el parámetro  $\Delta Q_1 > 0$  y por tanto la calidad (representada por este parámetro) siempre se degradará. Sin embargo  $\Delta J_1$  puede ser negativo, ya que el factor

$$T_x + T_y - T_{xy} + Z_{xy} = \langle x^2 \rangle \langle x^3 u \rangle - \langle x^4 \rangle \langle x u \rangle + \langle y^2 \rangle \langle y^3 v \rangle - \langle y^4 \rangle \langle y v \rangle \quad (5.30)$$

dependerá de los valores particulares que tomen los promedios de orden cuarto. Existirán, en consecuencia, casos en los cuales sea posible mejorar dicho parámetro  $J$ . No debe sorprender en exceso la posible diferencia cualitativa de comportamiento de los factores de calidad  $Q$  y  $J$  (veremos más ejemplos en lo que sigue). Aunque sus definiciones y propiedades poseen importantes similitudes, sin embargo, también existen diferencias esenciales entre ambos. Naturalmente, si se desean comparar distintos haces entre sí, es preciso emplear el mismo parámetro (ya sea  $Q$  o  $J$ ) para caracterizar sus calidades respectivas.

### 5.3.2 Dos lentes cilíndricas ortogonales

Consideraremos ahora dos lentes cilíndricas idénticas (con la misma focal y el mismo factor de aberración) pero ortogonales, cuya función de transmitancia cuártica se escribirá, por tanto, en la forma

$$t_2(x) = \exp[ikb(x^4 + y^4)], \quad (5.31)$$

donde el subíndice "2" indica que se trata ahora de las dos lentes. Entonces se tiene

$$\Delta Q_2 = 16b^2(S_x + S_y + P_{xy}) + 8b(T_x + T_y - Q_{xy}), \quad (5.32)$$

$$\Delta J_2 = 16b^2(S_x + S_y - 2S_{xy}) + 8b(T_x + T_y - T_{xy}). \quad (5.33)$$

Puede demostrarse (ver apéndices 5.A y 5.C) que los términos que van con  $b^2$  también son positivos.

Para el caso general de dos lentes cilíndricas con dos factores de aberración diferentes ( $b_1$  y  $b_2$ ), las expresiones son

$$\begin{aligned} \Delta Q_2 = & 16b_1^2(S_x + \langle y^2 \rangle \langle x^6 \rangle) + 16b_2^2(S_y + \langle x^2 \rangle \langle y^6 \rangle) - 32b_1 b_2 \langle x^4 \rangle \langle y^4 \rangle \\ & + 8b_1(T_x + \langle y^2 \rangle \langle x^3 u \rangle - \langle y v \rangle \langle x^4 \rangle) \\ & + 8b_2(T_y + \langle x^2 \rangle \langle y^3 v \rangle - \langle x u \rangle \langle y^4 \rangle). \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \Delta J_2 = & 16b_1^2 S_x + 16b_2^2 S_y + 8b_1(T_x - \langle x v \rangle \langle y x^3 \rangle) \\ & + 8b_2(T_y - \langle y u \rangle \langle x y^3 \rangle) - 32b_1 b_2 S_{xy}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

que se reducen a las ecuaciones (5.32) y (5.33) cuando  $b_1 = b_2 = b$ , como era de esperar.

El comportamiento descrito para una sola lente no es equivalente al de las dos lentes cilíndricas, como veremos en la sección siguiente al analizar qué sucede para los dos tipos de haces considerados en la sección 5.3.1 cuando se propagan a través de este sistema.

### Haces rotacionalmente simétricos

Para esta clase de haces tenemos

$$T_x + T_y - Q_{xy} = 0. \quad (5.36)$$

Esto implica que el parámetro de calidad  $Q$  de cualquier haz rotacionalmente simétrico siempre se incrementa después de pasar a través de este sistema óptico aberrado. Por otra parte, puesto que  $T_{xy} = 0$  y  $T_x = T_y$ , el signo de  $\Delta J_2$  dependerá del signo del producto  $bT_x$  y por tanto la calidad (expresada en términos del parámetro  $J$ ) de estos haces puede mejorar.

### Haces factorizables

Para este tipo de haces las variaciones del parámetro  $\Delta Q$  y del parámetro  $\Delta J$  pueden ser, en general, positivas o negativas, dependiendo de los valores concretos de los promedios para dichos haces. Por consiguiente, no puede extraerse un comportamiento definitivo al respecto.

#### 5.3.3 Comparación de los dos sistemas ópticos anteriores

De las expresiones anteriores puede inferirse con carácter general que ambos incrementos de los parámetros de calidad,  $\Delta J_l$  y  $\Delta Q_l$  ( $l = 1, 2$ ), son positivos si la amplitud del haz es real en el plano de la transmitancia. En otras palabras, en ese caso ambos sistemas con aberración esférica degradarán la calidad de cualquier haz. Esto es debido a que para haces reales se cumple  $\langle x^m u^{2n+1} \rangle = 0$ ,  $m, n = 1, 2, \dots$  (Este resultado es consistente con una propiedad de optimización general que se obtuvo recientemente para láminas de fase pura en [MM93]).

De lo anterior parece desprenderse que, en la mayoría de los casos, la calidad de un haz se degradará después de pasar a través de sistemas ópticos con aberraciones. Sin embargo, se nos plantea la cuestión de si es mejor (en

cuanto a calidad) utilizar el sistema de dos lentes cilíndricas ortogonales o una única lente circular. En otras palabras, cuál de estos dos sistemas degradará menos la calidad (recuérdese que, como mencionamos al comienzo del capítulo, ambos sistemas son ópticamente equivalentes en ausencia de aberraciones).

En este sentido nótese que, a partir de las ecuaciones (5.10), (5.11), (5.32) y (5.33), se obtiene

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = 16b^2 U_{xy} + 8b R_{xy}, \quad (5.37)$$

$$\Delta J_1 - \Delta J_2 = 16b^2 (V_{xy} - 2W_{xy} - 2S_{xy}) + 8b Z_{xy}. \quad (5.38)$$

Esto implica que el sistema formado por las dos lentes mejorará la calidad si la diferencia  $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$  (o de forma análoga  $\Delta J_1 - \Delta J_2$ ) es positiva.

En lo que sigue consideraremos como caso de especial interés los haces gaussianos.

## 5.4 Calidad de haces gaussianos propagándose a través de transmitancias de fase cuártica

En el caso particular de haces gaussianos con simetría rotacional de la forma

$$\phi(x, y) = A \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right) \exp\left[ik \frac{x^2 + y^2}{2R}\right], \quad (5.39)$$

los incrementos de calidad anteriores para una lente circular y dos lentes cilíndricas con aberración esférica toman, respectivamente, la forma

$$\Delta Q_1 = 16b^2 (S_x + S_y + P_{xy} + U_{xy}) = 512 b^2 \langle x^2 \rangle^4, \quad (5.40)$$

$$\Delta Q_2 = 16b^2 (S_x + S_y + P_{xy}) = 384 b^2 \langle x^2 \rangle^4, \quad (5.41)$$

expresiones obtenidas a partir de las relaciones

$$S_x = S_y = 6 \langle x^2 \rangle^4, \quad (5.42)$$

$$P_{xy} = 12 \langle x^2 \rangle^4, \quad (5.43)$$

$$U_{xy} = 8 \langle x^2 \rangle^4 > 0, \quad (5.44)$$

$$R_{xy} = W_{xy} = S_{xy} = Z_{xy} = 0, \quad (5.45)$$

$$V_{xy} = 4 \langle x^2 \rangle^4. \quad (5.46)$$

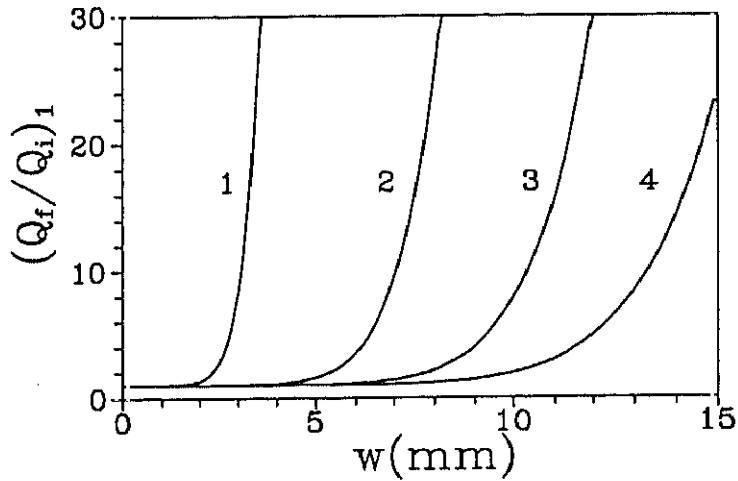


Figura 5.1: Factor de calidad  $(Q_f)_1$  (normalizado a la calidad del haz incidente  $(Q_i)_1$ ) para un haz gaussiano propagándose a través de una lente plano-convexa esféricamente aberrada ( $q_l = -1$  y  $p_l = 1$ ) en función de la anchura del haz incidente  $w$  en el plano de la lente. Las distancias focales que hemos elegido son 5, 15, 25, 35 cm, y corresponden a las curvas 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

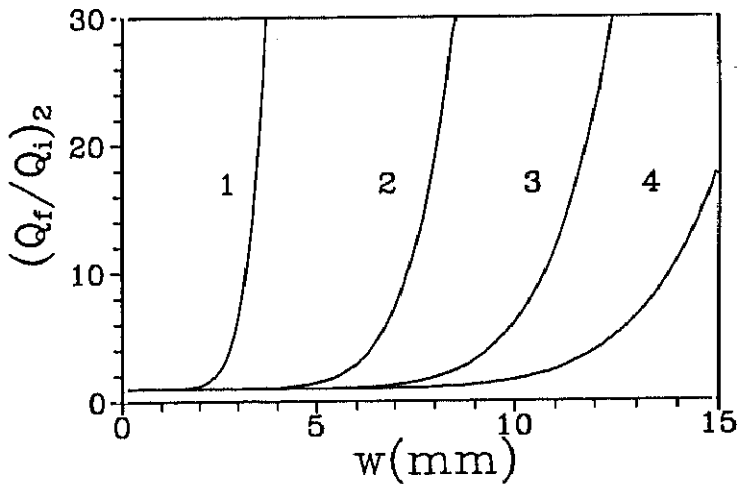
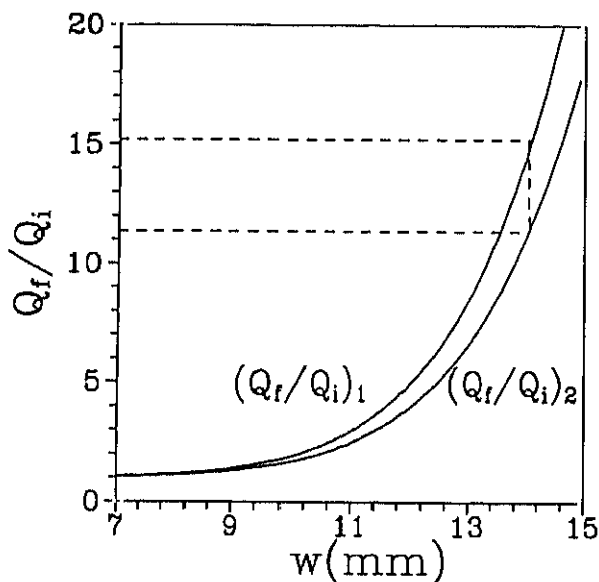


Figura 5.2: Factor de calidad normalizado  $(Q_f/Q_i)_2$  para un haz gaussiano propagándose a través de dos lentes cilíndricas (plano-convexas) esféricamente aberradas ( $q_l = -1$  y  $p_l = 1$ ) en función de la anchura del haz  $w$  en el plano de la lente. Las distancias focales son las mismas que en la figura anterior.



**Figura 5.3:** Comparación entre los factores de calidad normalizados  $(Q_f/Q_i)_1$  y  $(Q_f/Q_i)_2$  para una focal de 35 cm. Nótese en la figura que para algunos valores de la anchura del haz la diferencia entre  $(Q_f/Q_i)_1$  y  $(Q_f/Q_i)_2$  es aproximadamente del 25 %.

A partir de aquí podemos inferir la relación entre ambos sistemas ópticos aberrados mediante el cociente

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = \frac{4}{3}. \tag{5.47}$$

A la vista de esta ecuación se concluye que la calidad de un haz gaussiano se degrada menos cuando éste se propaga a través de dos lentes ortogonales con aberración esférica que cuando lo hace a través de una lente circular con aberración esférica. Por otra parte, las variaciones de la calidad son proporcionales a la cuarta potencia del promedio de orden dos de la intensidad (ver figuras 5.1 y 5.2). En la figura 5.3 se comparan los factores de calidad normalizados  $(Q_f/Q_i)_1$  y  $(Q_f/Q_i)_2$  donde  $Q_i$  representa la calidad del haz gaussiano incidente ( $= 1/k^2$ ).

Si consideramos ahora el caso de haces gaussianos con astigmatismo simple (haces separables), obtenemos

$$U_{xy} = 14 \langle x^2 \rangle^2 \langle y^2 \rangle^2 - 3 \langle x^2 \rangle^3 \langle y^2 \rangle - 3 \langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle^3, \tag{5.48}$$

$$R_{xy} = \langle x^2 \rangle^2 \langle yv \rangle + \langle y^2 \rangle^2 \langle xu \rangle - \langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle \langle xu \rangle + \langle yv \rangle, \quad (5.49)$$

$$V_{xy} - 2W_{xy} - 2S_{xy} = 4\langle x^2 \rangle^2 \langle y^2 \rangle^2, \quad (5.50)$$

$$Z_{xy} = 0. \quad (5.51)$$

Para estos haces y con respecto al parámetro de calidad  $J$ , las ecuaciones (5.33) y (5.48)-(5.51) implican que, empleando las dos lentes cilíndricas, la calidad siempre empeoraría menos que utilizando una sola lente circular. Sin embargo, si tenemos en cuenta el parámetro  $Q$ , la mejor elección dependerá de los valores específicos de los promedios de segundo orden del haz en el plano donde se coloque el sistema y de la fase según cada eje principal. Por ejemplo, para haces cuya amplitud es real en el plano de la transmitancia, el sistema de las dos lentes será preferible si

$$14\langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle - 3(\langle x^2 \rangle^2 + \langle y^2 \rangle^2) > 0. \quad (5.52)$$

#### 5.4.1 Resultados experimentales

En esta sección describiremos el procedimiento experimental utilizado para medir la variación de la calidad de un haz gaussiano cuando se propaga a través de una lente circular con aberración esférica. Analizaremos por simplicidad los parámetros  $Q_x$  y  $Q_y$ , ya que, al trabajar con haces gaussianos y sistemas rotacionalmente simétricos, el parámetro  $Q_{3D}$  no añadirá más información.

En las medidas realizadas hemos utilizado un láser continuo de Helio-Neon (Spectra-Physics, modelo 117A) estabilizado en intensidad ( $\pm 0.4\%$  en una hora) emitiendo en el modo fundamental  $TEM_{00}$  y con una potencia  $\simeq 1.0$  mW y una longitud de onda de 632.8 nm. Las características de salida del haz son su anchura  $w \simeq 0.25$  mm y su divergencia en campo lejano  $\theta \simeq 0.8$  mrad (una imagen del perfil espacial de este haz puede verse en la figura de la portada de esta memoria). Para evitar la saturación de la cámara se han empleado dos prismas dispuestos como aparece en la figura 5.4, cada uno de los cuales refleja aproximadamente un 4% de la luz que incide sobre ellos. Por otra parte también se han utilizado filtros neutros de distintas densidades ópticas.

Para obtener las anchuras de haz  $w_x$  y  $w_y$  (que son proporcionales a  $(\langle x^2 \rangle)^{1/2}$  y a  $(\langle y^2 \rangle)^{1/2}$  respectivamente), se ha utilizado una cámara CCD (Pulnix, modelo TM-765) cuya área sensitiva es de 8.8 mm  $\times$  6.6 mm, con 756 pixels en el eje horizontal y 581 pixels en el eje vertical. Los pixels son

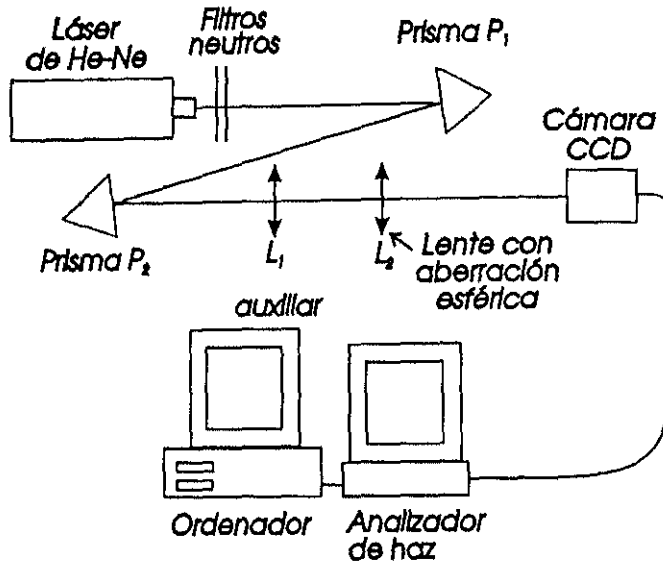


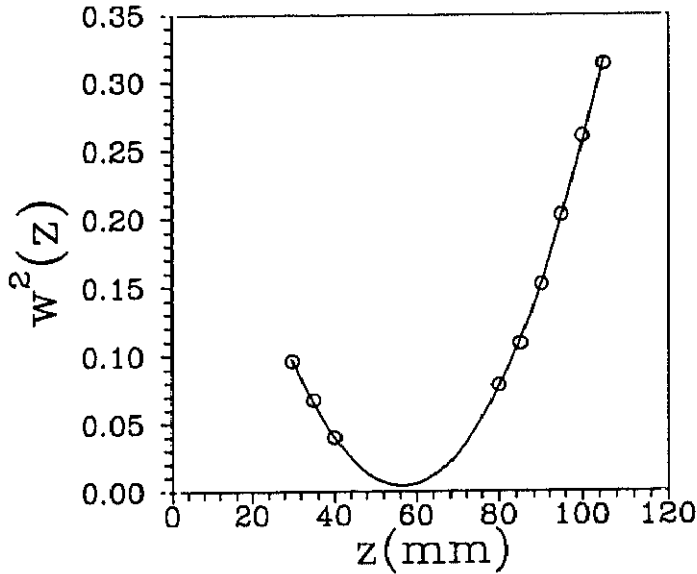
Figura 5.4: Montaje experimental empleado en la medida de la variación de la calidad de un haz gaussiano a través de una lente con aberración esférica.

cuadrados con un tamaño de  $11 \mu\text{m}$  de lado. La cámara está conectada a un analizador de haz (SPIRICON, modelo LBA-100A) en donde se digitaliza el perfil espacial de los haces en tiempo real calculando su anchura en las direcciones  $x$  e  $y$ .

Antes de empezar a tomar las imágenes se hizo un calibrado del sistema ajustando los niveles de ganancia y del nivel de cero (*black level* u *offset*). Por otra parte, con el fin de disminuir posibles ruidos se han promediado 16 imágenes, y hemos eliminado la posible intensidad de fondo (*background*) tomando una imagen de referencia en ausencia del haz láser y restándosela a todas las medidas realizadas.

Los cambios producidos en los factores de calidad  $Q_x$  y  $Q_y$  de un haz láser cuando éste se propaga a través de una lente con aberración esférica han sido medidos utilizando el montaje experimental mostrado en la figura 5.4.

Para expandir el haz y obtener así la anchura deseada sobre la lente aberrada se ha utilizado una lente auxiliar  $L_1$  plano-convexa orientada con la cara convexa hacia el haz incidente ( $q_l = +1$ ) de focal paraxial  $f \simeq 60 \text{ mm}$  y de diámetro  $\simeq 30 \text{ mm}$ . Dado el tamaño del haz sobre esta primera lente,



**Figura 5.5:** Propagación de la anchura del haz al cuadrado  $w^2$  con la distancia  $z$  y su ajuste a una parábola.

la influencia de la aberración esférica de la misma podemos considerarla despreciable. Se empleó una segunda lente  $L_2$  (con aberración esférica) también plano-convexa, orientada de la misma forma, de focal  $f \simeq 60$  mm y diámetro  $\simeq 25$  mm.

Puede determinarse el factor de calidad de un cierto haz midiendo la anchura ( $\langle x^2 \rangle$  y  $\langle y^2 \rangle$ ) del mismo en diversos planos  $z$  a lo largo de su trayectoria y ajustando las medidas a una parábola [BM90, SM91, RE92, DL93]. En nuestro caso, la relación entre los factores de calidad antes y después de la lente aberrada se obtiene midiendo la anchura del haz ( $\langle x^2 \rangle$  y  $\langle y^2 \rangle$ ) en varias posiciones de la cámara CCD antes y después de dicha lente, para posteriormente ajustar los resultados a una parábola.

En estos ajustes, hemos tomado como origen  $z = 0$  el plano donde está colocada la lente. En la figura 5.5 han sido representados los puntos experimentales de una de las medidas de la calidad y el ajuste a una parábola de la forma

$$\langle x^2 \rangle_z = A + Bz + Cz^2, \quad (5.53)$$

en donde, a partir de la ley de propagación (2.27) para  $\langle x^2 \rangle$  se infieren los



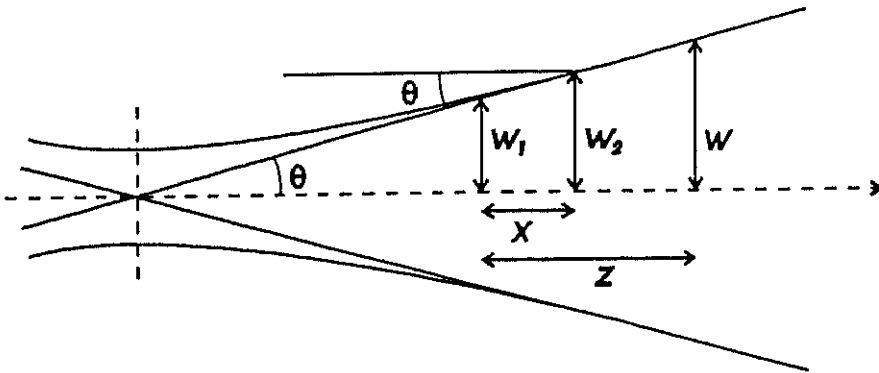


Figura 5.6: Esquema y notación utilizados en la medida de la anchura del haz  $w$  sobre la lente aberrada.

valores

$$A = \langle x^2 \rangle_0, \quad (5.54)$$

$$B = 2\langle xu \rangle_0, \quad (5.55)$$

$$C = \langle u^2 \rangle_0. \quad (5.56)$$

De las ecuaciones anteriores puede determinarse el factor de calidad  $Q_x$  (ecuación 5.5), y de forma análoga, ajustando los promedios  $\langle y^2 \rangle_z$  para diferentes  $z$  obtenemos el factor  $Q_y$ . Como hemos mencionado anteriormente, para cambiar el tamaño del haz  $w$  sobre la lente aberrada hemos utilizado la lente auxiliar ( $L_1$ ) variando su posición con respecto a  $L_2$ . El valor de  $w$  se ha determinado midiendo las anchuras del haz ( $w_1$  y  $w_2$  en la figura 5.6) en dos posiciones alejadas de su cintura y aplicando la siguiente expresión de acuerdo con la figura 5.6 (teniendo en cuenta la aproximación paraxial  $\text{tg } \theta \approx \theta$ )

$$w = w_1 + \frac{w_2 - w_1}{x} z. \quad (5.57)$$

Los resultados teóricos a comparar con los experimentales han sido obtenidos a partir de las ecuaciones que nos dan los parámetros de calidad del haz a la salida de la lente aberrada  $Q_x/Q_i$  y  $Q_y/Q_i$  (normalizados dividiendo por la calidad del haz incidente) en función de la anchura del haz sobre el plano de la lente según dos ejes ortogonales  $x$  e  $y$ , es decir,

$$Q_x/Q_i = 1 + 512 k^2 b^2 \langle x^2 \rangle^4 = 1 + 2 \cdot k^2 b^2 w_x^8, \quad (5.58)$$

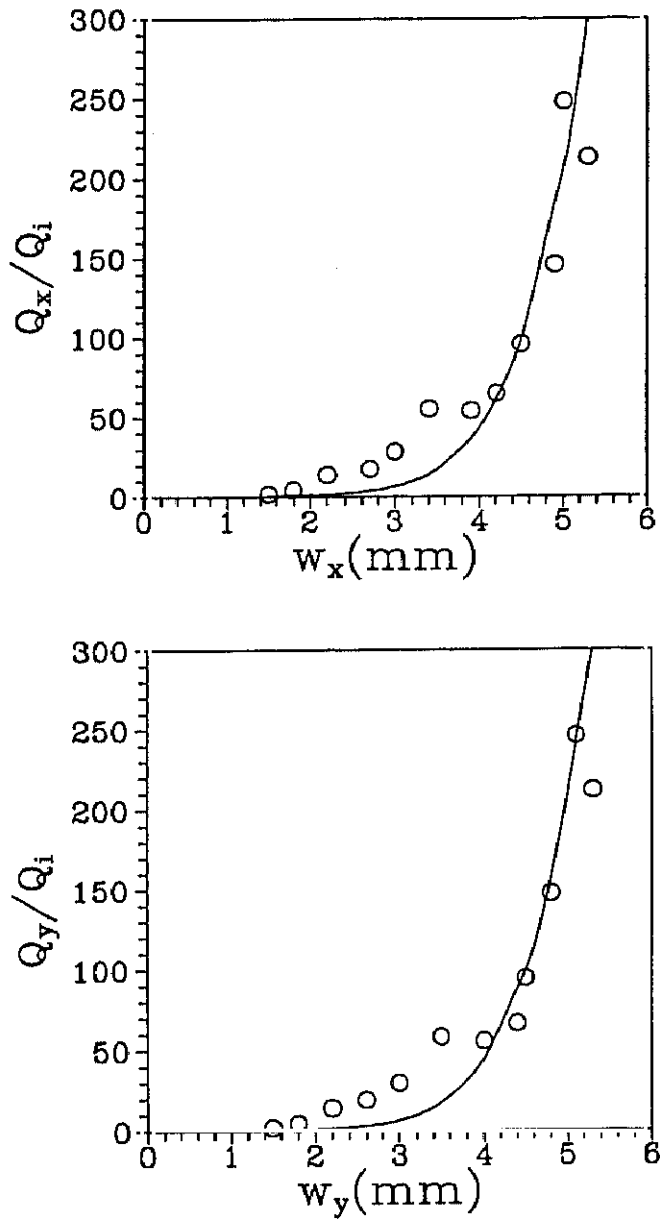


Figura 5.7: Factor de calidad en función de la anchura del haz gaussiano sobre la lente aberrada.

$$Q_y/Q_i = 1 + 512k^2b^2\langle y^2 \rangle^4 = 1 + 2 \cdot k^2b^2w_y^8, \quad (5.59)$$

en donde hemos hecho uso de las relaciones  $\langle x^2 \rangle = w_x^2/4$  y  $\langle y^2 \rangle = w_y^2/4$ , y hemos tomado como factor  $b$  un valor fijo ( $b \simeq 1.80 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-3}$ ), ya que, para el rango de distancias  $z$  en las que nos movemos, este factor se mantiene prácticamente constante como ya vimos en el capítulo anterior (sección 4.3). En la figura 5.7 se comparan las previsiones teóricas (representadas en línea continua) con los valores experimentales (círculos). Se observa un buen ajuste especialmente para valores de  $Q$  elevados. Las discrepancias, que se acentúan cuando  $Q$  se aproxima a su valor límite, pueden considerarse en buena parte como inevitables, y son debidas al propio sistema de medida. Como fuentes principales de error, debemos citar las dos siguientes (ver también sección 6.7.3):

– Errores en la medida del tamaño.

Debidos fundamentalmente al uso de filtros que pueden truncar o deformar el haz.

– Errores relacionados con el método de ajuste polinómico.

En el ajuste a una parábola tendremos mayor exactitud en la determinación de la anchura mínima (tras atravesar  $L_2$ ) si las medidas se realizan en planos no demasiado alejados del plano de la cintura (para lo cual necesitamos el uso de filtros a fin de evitar efectos de saturación). Pero la precisión en la medida de la divergencia en campo lejano será, en contrapartida, menor, ya que en las posiciones de los extremos de la parábola disponemos de una menor intensidad (este error puede llegar a ser del 30% si nos movemos en regiones tales que  $z < z_R$  [BM90]). Si por el contrario, queremos conseguir una mayor precisión en la divergencia, deberemos entonces medir en planos alejados de la cintura, con lo cual el valor de la anchura mínima será menos preciso. Se trata, pues, de precisiones contrapuestas.

Cualesquiera de las fuentes de error anteriores junto con pequeños desalineamientos del sistema de medida pueden degradar fácilmente la calidad, especialmente si estamos trabajando con haces gaussianos con calidad límite, en cuyo caso los errores relativos se incrementarán obviamente. Por esta razón las discrepancias son mayores en la zona de la curva donde  $Q$  es menor. Para el resto de los valores se han estimado en un 20 % los errores experimentales en la calidad, lo que, dadas las dificultades inherentes a esta

clase de medidas, es considerado actualmente como una correcta medición (2nd Workshop on Laser Beam Characterization, Berlin, Mayo, 1994).

Por otra parte, en la figura 5.7 también se aprecia la rapidez con que se degrada la calidad al aumentar la anchura sobre esta segunda lente ( $L_2$ ). Estos resultados coinciden con los obtenidos simultánea pero independientemente por Siegman [SI93a].

## 5.5 Apéndices

### Apéndice 5.A

En este apéndice demostraremos la siguiente proposición (que usaremos en los apéndices 5.B y 5.C).

Si una matriz  $4 \times 4$   $N$ , es definida positiva entonces se verifica que

$$\text{tr}(J^t N J N) \geq 0, \quad (5.A.1)$$

donde el símbolo "tr" denota la traza de la matriz, y el superíndice  $t$  indica la matriz traspuesta. La matriz  $J$  se define como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.A.2)$$

donde  $I$  es la matriz identidad  $2 \times 2$  y  $0$  la matriz nula.

#### Demostración

Puesto que  $J^t = J^{-1}$ , tenemos que, si  $N$  es una matriz definida positiva, entonces  $J^t N J$  también lo es. La desigualdad (5.A.1) se obtiene finalmente a partir del hecho de que si dos matrices  $A$  y  $B$  son definidas positivas entonces

$$\text{tr}(A B) \geq 0. \quad (5.A.3)$$

### Apéndice 5.B

En este apéndice se demuestra que

$$S_x + S_y - 2S_{xy} \geq 0, \quad (5.B.1)$$

y que

$$S_x + S_y + P_{xy} \geq 0. \quad (5.B.2)$$

**Demostración**

Mostraremos primero que

$$S_x + S_y - 2S_{xy} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{J}^t \mathbf{N} \mathbf{J} \mathbf{N}), \quad (5.B.3)$$

donde  $\mathbf{J}$  está definido por la ecuación (5.A.2) y ahora hemos tomado

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^t & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (5.B.4)$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & 0 \\ 0 & \langle y^2 \rangle \end{pmatrix}, \quad (5.B.5)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \langle x^4 \rangle & \langle xy^3 \rangle \\ \langle x^3y \rangle & \langle y^4 \rangle \end{pmatrix}, \quad (5.B.6)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \langle x^6 \rangle & \langle x^3y^3 \rangle \\ \langle x^3y^3 \rangle & \langle y^6 \rangle \end{pmatrix}. \quad (5.B.7)$$

Puede comprobarse que

$$\text{tr}(\mathbf{J}^t \mathbf{N} \mathbf{J} \mathbf{N}) = 2\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{D}) - 2\text{tr}(\mathbf{B}^2) = 2(S_x + S_y - 2S_{xy}). \quad (5.B.8)$$

Por otra parte, la matriz  $\mathbf{N}$  puede ser escrita en la forma

$$\mathbf{N} = \langle f f^t \rangle, \quad (5.B.9)$$

donde

$$f^t = (x, y, x^3, y^3). \quad (5.B.10)$$

A partir de la ecuación (5.B.9) puede verse que  $\mathbf{N}$  es una matriz definida positiva, con lo que la desigualdad (5.B.1) se obtiene finalmente recordando la proposición demostrada en el apéndice 5.A.

Por otra parte se tiene

$$S_x + S_y + P_{xy} = \text{tr} \mathbf{A} \text{tr} \mathbf{D} - (\text{tr} \mathbf{B})^2. \quad (5.B.11)$$

Si ahora definimos

$$f_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad f_2 = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix}, \quad (5.B.12)$$

podemos escribir

$$\mathbf{A} = \langle f_1 f_1^t \rangle; \quad \mathbf{B} = \langle f_1 f_2^t \rangle; \quad \mathbf{D} = \langle f_2 f_2^t \rangle. \quad (5.B.13)$$

Entonces la desigualdad (5.B.2) se deduce teniendo en cuenta que

$$(\text{tr} \langle f_1 f_2^t \rangle)^2 \leq \text{tr} \langle f_1 f_1^t \rangle \text{tr} \langle f_2 f_2^t \rangle = \text{tr} \mathbf{A} \text{tr} \mathbf{D}. \quad (5.B.14)$$

## Apéndice 5.C

En este apéndice vamos a demostrar que

$$S_x + S_y - 4S_{xy} + V_{xy} - 2W_{xy} \geq 0, \quad (5.C.1)$$

y que

$$S_x + S_y + P_{xy} + U_{xy} \geq 0. \quad (5.C.2)$$

### Demostración

Siendo  $J$  la matriz definida por la ecuación (5.A.2) demostraremos primero que

$$S_x + S_y - 4S_{xy} + V_{xy} - 2W_{xy} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{J}^t \mathbf{N} \mathbf{J} \mathbf{N}), \quad (5.C.3)$$

donde

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^t & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (5.C.4)$$

y ahora

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & 0 \\ 0 & \langle y^2 \rangle \end{pmatrix}, \quad (5.C.5)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \langle x^4 \rangle + \langle x^2 y^2 \rangle & \langle x^3 y \rangle + \langle x y^3 \rangle \\ \langle x^3 y \rangle + \langle x y^3 \rangle & \langle y^4 \rangle + \langle x^2 y^2 \rangle \end{pmatrix}, \quad (5.C.6)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \langle x^6 \rangle + \langle x^2 y^4 \rangle + 2\langle x^4 y^2 \rangle & \langle x^5 y \rangle + \langle x y^5 \rangle + 2\langle x^3 y^3 \rangle \\ \langle x^5 y \rangle + \langle x y^5 \rangle + 2\langle x^3 y^3 \rangle & \langle y^6 \rangle + \langle y^2 x^4 \rangle + 2\langle y^4 x^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (5.C.7)$$

A partir de las definiciones de estas matrices se llega a

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{J}^t \mathbf{N} \mathbf{J} \mathbf{N}) = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{D}) - \text{tr}(\mathbf{B}^2). \quad (5.C.8)$$

Por otra parte, es sencillo comprobar que

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{D}) &= \langle x^2 \rangle \langle x^6 \rangle + \langle x^2 \rangle \langle x^2 y^4 \rangle + 2\langle x^2 \rangle \langle x^4 y^2 \rangle + \langle y^2 \rangle \langle y^6 \rangle \\ &\quad + \langle y^2 \rangle \langle x^4 y^2 \rangle + 2\langle y^2 \rangle \langle x^2 y^4 \rangle, \end{aligned} \quad (5.C.9)$$

y que

$$\text{tr}(\mathbf{B}^2) = (\langle x^4 \rangle + \langle x^2 y^2 \rangle)^2 + (\langle y^4 \rangle + \langle x^2 y^2 \rangle)^2 + 2(\langle x^3 y \rangle + \langle y^3 x \rangle)^2. \quad (5.C.10)$$

Llevando estas dos últimas expresiones a la ecuación (5.C.8) se obtiene

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr}(J^t N J N) = S_x + S_y - 4S_{xy} + V_{xy} - 2W_{xy}. \quad (5.C.11)$$

A continuación demostraremos que esta traza es no-negativa.

La matriz  $N$  puede ser también expresada de la forma

$$N = \langle g g^t \rangle, \quad (5.C.12)$$

donde

$$g^t = (x, y, x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2)), \quad (5.C.13)$$

y por tanto  $N$  es una matriz definida positiva. La desigualdad (5.C.1) se obtiene finalmente haciendo uso de la propiedad demostrada en el apéndice 5.5.A.

Por otro lado, también puede comprobarse que

$$S_x + S_y + P_{xy} + U_{xy} = \operatorname{tr} A \operatorname{tr} D - (\operatorname{tr} B)^2. \quad (5.C.14)$$

Además, las matrices  $A, B$  y  $D$  pueden ser escritas en la forma

$$A = \langle g_1 g_1^t \rangle; \quad B = \langle g_1 g_2^t \rangle; \quad D = \langle g_2 g_2^t \rangle, \quad (5.C.15)$$

donde ahora

$$g_1^t = (x, y); \quad g_2^t = (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2)). \quad (5.C.16)$$

Teniendo en cuenta esto obtenemos

$$(\operatorname{tr} B)^2 \leq \operatorname{tr} A \operatorname{tr} D, \quad (5.C.17)$$

a partir de la cual se infiere la desigualdad (5.C.2).

## Apéndice 5.D

Para el cálculo tanto del parámetro  $Q_{3D}$  como del parámetro  $J$  de un haz coherente general propagándose a través de lentes con aberración esférica es necesario hallar los diferentes promedios que aparecen en las expresiones (5.10) y (5.11). Como los cálculos son largos y tediosos, en esta memoria sólo mostraremos un par de ejemplos. Comenzaremos por  $\langle xv \rangle$ , cuya expresión en función de la amplitud del campo es

$$\langle xv \rangle = -\frac{1}{2ikI_0} \iint_{-\infty}^{+\infty} x \left( \frac{\partial \phi^*(x, y)}{\partial y} \phi(x, y) - \phi^*(x, y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \right) dx dy. \quad (5.D.1)$$

Si tomamos el sistema formado por dos lentes idénticas y ortogonales en contacto una con otra (subíndice 2), el haz a la salida será

$$\phi_{f2}(x, y) = \phi_i(x, y) \exp \left[ ikb(x^4 + y^4) \right], \quad (5.D.2)$$

donde  $\phi_i(x, y)$  denota el haz a la entrada del sistema. Por tanto sustituyendo esta expresión en la ecuación (5.D.1) obtenemos la expresión del promedio  $\langle xv \rangle_{f2}$  en función de los promedios del haz a la entrada en la forma

$$\langle xv \rangle_{f2} = \langle xv \rangle_i + 4b \langle xy^3 \rangle_i. \quad (5.D.3)$$

Si tomamos ahora como transmitancia de fase cuártica una sola lente con simetría circular y con aberración esférica (subíndice 1), el haz a la salida de este sistema óptico será

$$\phi_{f1}(x, y) = \phi_i(x, y) \exp \left[ ikb(x^2 + y^2)^2 \right]. \quad (5.D.4)$$

En este caso el promedio  $\langle xv \rangle_{f1}$  es

$$\langle xv \rangle_{f1} = \langle xv \rangle_i + 4b(\langle xy^3 \rangle_i + \langle yx^3 \rangle_i). \quad (5.D.5)$$

Otro de los promedios calculados ha sido  $\langle u^2 \rangle$ , cuya expresión en función de la amplitud del campo es

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{k^2 I_0} \iint_{-\infty}^{+\infty} |\phi_x(x, y)|^2 dx dy. \quad (5.D.6)$$

Para el caso de dos lentes y una sola lente se obtiene

$$\begin{aligned} \langle u^2 \rangle_{f1} &= \langle u^2 \rangle_i + 16b^2 \left( \langle x^6 \rangle_i + \langle x^2 y^4 \rangle_i + 2 \langle x^4 y^2 \rangle_i \right) \\ &\quad + 8b \left( \langle x^3 u \rangle_i + \langle x y^2 u \rangle_i \right), \end{aligned} \quad (5.D.7)$$

$$\langle u^2 \rangle_{f2} = \langle u^2 \rangle_i + 16b^2 \langle x^6 \rangle_i + 8b \langle x^3 u \rangle_i, \quad (5.D.8)$$

procediendo de forma análoga para calcular el resto de los promedios que aparecen en las ecuaciones (5.10) y (5.11).





## Capítulo 6

# Parámetros característicos de orden más alto de haces luminosos: curtosis

### 6.1 Introducción

Como mencionábamos en el primer capítulo, los parámetros más utilizados hasta ahora en la literatura para caracterizar un haz luminoso están relacionados con los promedios de primer y segundo orden de la intensidad y de la intensidad radiante del haz. Sin embargo, si deseáramos obtener mayor información acerca de las características de los haces, en especial de la forma del perfil espacial, sería necesario tener en cuenta parámetros de orden más alto. Han sido dos los parámetros de esta clase que han comenzado a utilizarse recientemente, relacionados con la simetría del perfil de intensidades del haz (coeficiente de *skewness*) o con su grado de apuntamiento [SN90,MM92a].

Por sus implicaciones prácticas nos centraremos en este capítulo en el segundo parámetro, que denominaremos *curtosis*. Definiremos con carácter general (en el caso tridimensional) qué es la curtosis, analizando algunas de sus propiedades, para posteriormente pasar a la situación bidimensional, realizándose una clasificación general de los haces según el número de extremos de dicho parámetro cuando éstos se propagan libremente. Asimismo estudiaremos sus leyes de propagación a través de sistemas ABCD, a partir de las cuales se establecerán ciertas relaciones entre los extremos de la curtosis y la posición de la cintura del haz. En una sección posterior, determinaremos la curtosis de varios modelos de haces sencillos. En particular

se verá que, para conformar haces gaussianos, modos de Hermite-Gauss y haces Gauss-Schell mediante la modificación de su parámetro de curtosis será necesario el uso de sistemas ópticos no-ABCD. Como caso de especial interés se ha realizado un estudio teórico y experimental de la variación del parámetro de la curtosis de un haz gaussiano que se propaga a través de una lente con aberración esférica.

## 6.2 Parámetro de curtosis

Desde un punto de vista matemático, el parámetro de curtosis para el caso general de distribuciones tridimensionales se define como [MK79]

$$K_{3D} = \langle (\mathbf{x}^t \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{x})^2 \rangle \quad (6.1)$$

donde  $\mathbf{x}$  es un vector de coordenadas espaciales  $(x, y)$ ,  $t$  indica trasposición y  $\mathbf{M}_k$  es una matriz de la forma

$$\mathbf{M}_k = \langle \mathbf{x} \mathbf{x}^t \rangle = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xy \rangle \\ \langle xy \rangle & \langle y^2 \rangle \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

donde el símbolo  $\langle \quad \rangle$  representa los promedios con respecto a dicha distribución tridimensional. A partir de (6.1) puede comprobarse que  $K_{3D}$  puede escribirse como

$$K_{3D} = \frac{\langle (x^2 \langle x^2 \rangle + y^2 \langle y^2 \rangle - 2xy \langle xy \rangle)^2 \rangle}{(\langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle - \langle xy \rangle^2)^2}. \quad (6.3)$$

Dicho parámetro es invariante bajo rotaciones, según puede demostrarse directamente aplicando la matriz de giro en las ecuaciones (6.1) y (6.2).

En efecto, denotemos por  $\mathbf{G}$  a dicha matriz de giro, de forma que

$$\mathbf{x} = \mathbf{G} \mathbf{x}_0 \quad (6.4)$$

y

$$\mathbf{M}_k^{-1} = (\mathbf{G}^{-1})^t \mathbf{M}_{k_0}^{-1} \mathbf{G}^{-1}. \quad (6.5)$$

Sustituyendo esta ecuación en la definición de la curtosis (ecuación (6.1)) se comprueba inmediatamente su invariancia rotacional.

Para haces luminosos la función de distribución que utilizaremos será la función de distribución de Wigner que fue definida en tres dimensiones en el capítulo anterior (ver ecuación (5.1)). Y los promedios que aparecen en

la expresión (5.2) serán también los calculados a partir de dicha función de distribución.

Consideremos en concreto haces gaussianos generales de la forma

$$\begin{aligned} \phi(x, y; z) = & \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2} - \frac{2xy}{w_{xy}^2}\right) \\ & \times \exp\left[+\frac{ik}{2}\left(\frac{x^2}{R_x} + \frac{y^2}{R_y} + \frac{2xy}{R_{xy}}\right)\right], \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde  $w_x, w_y, R_x$ , y  $R_y$  son las anchuras y los radios de curvatura de los frentes de onda respecto de los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente, y  $w_{xy}$  y  $R_{xy}$  están asociados a ciertos promedios cruzados característicos de haces gaussianos con astigmatismo general [AK69].

Se ha comprobado que el valor de la curtosis para esta clase de haces es  $K_{3D} = 8$ . Para ello se han utilizado los valores de los promedios

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{4} \frac{w_x^2}{1 - w_x^2 w_y^2 / w_{xy}^4}, \quad (6.7)$$

$$\langle y^2 \rangle = \frac{1}{4} \frac{w_y^2}{1 - w_x^2 w_y^2 / w_{xy}^4}, \quad (6.8)$$

$$\langle xy \rangle = -\frac{1}{4} \frac{w_x^2 w_y^2}{(1 - w_x^2 w_y^2 / w_{xy}^4) w_{xy}^2}, \quad (6.9)$$

$$\langle x^2 y^2 \rangle = \frac{w_x^2 w_y^2 + 2w_x^4 w_y^4 / w_{xy}^4}{16(1 - w_x^2 w_y^2 / w_{xy}^4)^2}, \quad (6.10)$$

$$\langle x^4 \rangle = \frac{3w_x^4}{16(1 - w_x^2 w_y^2 / w_{xy}^4)^2}, \quad (6.11)$$

$$\langle y^4 \rangle = \frac{3w_y^4}{16(1 - w_x^2 w_y^2 / w_{xy}^4)^2}, \quad (6.12)$$

$$\langle x^3 y \rangle = -\frac{3w_x^4 w_y^2 / w_{xy}^2}{16(1 - w_x^2 w_y^2 / w_{xy}^4)^2}, \quad (6.13)$$

$$\langle x y^3 \rangle = -\frac{3w_y^4 w_x^2 / w_{xy}^2}{16(1 - w_x^2 w_y^2 / w_{xy}^4)^2}. \quad (6.14)$$

y sustituido directamente en la ecuación (6.3). Estos haces tienen, por consiguiente, un valor constante de la curtosis y dicho valor constituye de hecho un invariante cuando el haz se propaga a través de sistemas de primer orden. En efecto, nótese que estos haces no cambian de forma a través de

tales sistemas, y si bien pueden rotar cuando se propagan libremente, hemos demostrado anteriormente que la curtosis es invariante bajo rotaciones.

En el caso de haces separables o factorizables según dos ejes ortogonales (como por ejemplo en el caso de diodos láser monomodo) la expresión de la curtosis tridimensional se reduce a

$$K_{3D} = K_x + K_y + 2, \quad (6.15)$$

donde  $K_x$  y  $K_y$  son los valores de la curtosis según los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente.

Por simplicidad, en lo que sigue manejaremos dicho parámetro según un determinado eje, es decir, analizaremos la curtosis bidimensional, cuya expresión toma entonces la forma

$$K = \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle^2}, \quad (6.16)$$

donde

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{I_0} \iint_{-\infty}^{+\infty} x^2 I(x, y) dx dy, \quad (6.17)$$

$$\langle x^4 \rangle = \frac{1}{I_0} \iint_{-\infty}^{+\infty} x^4 I(x, y) dx dy, \quad (6.18)$$

y donde

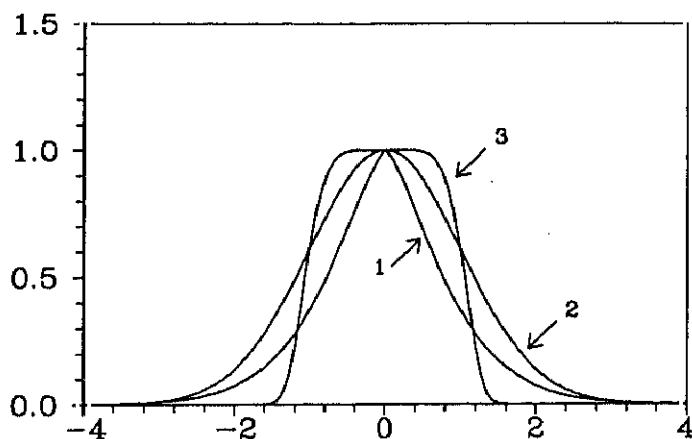
$$I_0 = \iint_{-\infty}^{+\infty} I(x, y) dx dy \quad (6.19)$$

denota la intensidad total. A partir de la desigualdad de Schwarz puede demostrarse que el parámetro de curtosis satisface la desigualdad

$$K \geq 1. \quad (6.20)$$

Para distribuciones gaussianas (recuérdese que estamos considerando el caso bidimensional) el parámetro de curtosis toma el valor  $K = 3$ . Así, cuando una distribución tiene la misma curtosis que la distribución normal, diremos que se trata de una función mesocúrtica; si el valor de la curtosis es superior ( $K > 3$ ) entonces diremos que dicha función es leptocúrtica; y, por último, si es menor ( $K < 3$ ) se dirá que es platicúrtica (figura 6.1).

El que el perfil sea platicúrtico o leptocúrtico implica que el haz (acampanado) está más o menos aplanado que el haz gaussiano, respectivamente. Esto no implica necesariamente una variación de la intensidad pico del haz.



**Figura 6.1:** Representación gráfica de una función leptocúrtica (1), mesocúrtica (2) y platicúrtica (3).

En conexión con esto, es importante señalar que el parámetro de curtosis ha sido analizado por diversos autores en el marco del análisis estadístico de datos. Algunos de éstos, a diferencia de la interpretación que acabamos de mostrar, lo consideran esencialmente como una estimación del peso de las colas de la distribución de intensidad en cuestión; sin embargo, otros piensan (opinión que compartimos) que la curtosis debe ser interpretada correctamente como una medida de ambos factores, es decir, el grado de planitud (o picudez) y el peso de las colas del perfil de intensidad [RU87, BA90].

### 6.3 Clasificación de los haces según el parámetro de curtosis

Para un haz propagándose libremente, la curtosis puede escribirse en función de la distancia  $z$  en la forma

$$K(z) = \frac{\langle x^4 \rangle_0 + 4\langle x^3 u \rangle_0 z + 6\langle x^2 u^2 \rangle_0 z^2 + 4\langle x u^3 \rangle_0 z^3 + \langle u^4 \rangle_0 z^4}{(\langle x^2 \rangle_0 + 2\langle x u \rangle_0 z + \langle u^2 \rangle_0 z^2)^2}, \quad (6.21)$$

donde el subíndice 0 indica que los promedios han sido calculados en el plano elegido como  $z = 0$ . Por otra parte llamaremos curtosis de un haz en campo

lejano a

$$K_\infty = K(z \rightarrow \pm\infty) = \frac{\langle u^4 \rangle}{\langle u^2 \rangle^2} \geq 1, \quad (6.22)$$

relacionada con el grado de planitud o picudez de dicho haz en el plano focal de una lente convergente. Para haces gaussianos este parámetro vale  $K_\infty = 3$ .

La función  $K(z)$  puede caracterizarse por el número de extremos que posea. Tales extremos se obtienen de la ecuación

$$\partial K(z)/\partial z = 0. \quad (6.23)$$

Haciendo uso de la expresión

$$\frac{\partial \langle x^m u^n \rangle_z}{\partial z} = m \langle x^{m-1} u^n + 1 \rangle_z, \quad (6.24)$$

la condición dada por la ecuación (6.23) también la podemos escribir como

$$m_0 z^4 + p_0 z^3 + q_0 z^2 + r_0 z + s_0 = 0, \quad (6.25)$$

donde  $m$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$  son funciones de los promedios (evaluados en el plano  $z = 0$ ) de la función de distribución de Wigner de la forma,

$$m = \langle u^4 \rangle \langle xu \rangle - \langle u^2 \rangle \langle xu^3 \rangle, \quad (6.26)$$

$$p = \langle u^4 \rangle \langle x^2 \rangle + 2 \langle xu^3 \rangle \langle xu \rangle - 3 \langle u^2 \rangle \langle x^2 u^2 \rangle, \quad (6.27)$$

$$q = 3 \langle xu^3 \rangle \langle x^2 \rangle - 3 \langle x^3 u \rangle \langle u^2 \rangle, \quad (6.28)$$

$$r = 3 \langle x^2 u^2 \rangle \langle x^2 \rangle - 2 \langle x^3 u \rangle \langle xu \rangle - \langle u^2 \rangle \langle x^4 \rangle, \quad (6.29)$$

$$s = \langle x^2 \rangle \langle x^3 u \rangle - \langle x^4 \rangle \langle xu \rangle, \quad (6.30)$$

satisfaciendo además

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 4m, \quad (6.31)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 3p, \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = 2q, \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = r. \quad (6.34)$$

Es inmediato comprobar que  $\partial m/\partial z = 0$ , es decir,  $m$  es un invariante del haz y, por consiguiente, es independiente del plano inicial que elijamos.

Por otra parte para clasificar un haz respecto del número de extremos de la función  $K(z)$  es útil definir

$$\Delta = 4 R_k^3 - S_k^2, \quad (6.35)$$

y

$$\Delta_1 = (9p^2q^2 - 32mq^3 - 27p^3r + 108mpqr - 108m^2r^2), \quad (6.36)$$

donde

$$R_k = q^2 - 3pr + 12ms, \quad (6.37)$$

$$S_k = 2q^3 - 9pqr - 72qms + 27mr^2 + 27p^2s. \quad (6.38)$$

Puede demostrarse que, al igual que  $m$ , los parámetros  $\Delta$ ,  $\Delta_1$ ,  $R$  y  $S$ , también son invariantes bajo propagación libre. El signo de los parámetros  $\Delta$  y  $\Delta_1$  determinan el número y multiplicidad de las soluciones de la ecuación (6.25). Teniendo en cuenta estas soluciones, realizaremos una clasificación general de los haces parcialmente coherentes, atendiendo al número y tipo de extremos de la curtosis  $K(z)$  bajo propagación libre (ver apéndice 6.A):

- **Tipo I:** La curtosis  $K(z)$  para estos haces presenta dos máximos y dos mínimos. Esto ocurrirá cuando se satisfaga,  $m \neq 0$  y  $\Delta > 0$ . En este caso existe al menos un plano (y un máximo de tres) en donde la curtosis toma el valor de  $K_\infty$ .
- **Tipo II:** Haces cuya función  $K(z)$  posee un máximo, un mínimo y un punto de inflexión. Las condiciones requeridas son ahora

$$m \neq 0; \quad \Delta = 0; \quad \Delta_1 \neq 0;$$

En este caso existe un único plano  $z = z_0$  en donde  $K(z_0) = K_\infty$ .

- **Tipo III:** La curtosis puede tener: a) dos máximos y un mínimo, o b) dos mínimos y un máximo. Las condiciones para que esto ocurra son  $m = 0$ ,  $p \neq 0$  y  $\Delta > 0$ .
- **Tipo IV:** Existe un plano en donde la curtosis es máxima y otro en donde es mínima, y un único plano,  $z = z_0$ , en donde la curtosis alcanza el valor  $K_\infty$ . Esta situación puede darse en tres casos:
  - i.  $m = p = 0$  y  $q \neq 0$ .
  - ii.  $m \neq 0$  y  $\Delta < 0$ .
  - iii.  $m \neq 0$ ,  $\Delta = 0$  y  $\Delta_1 = 0$ .



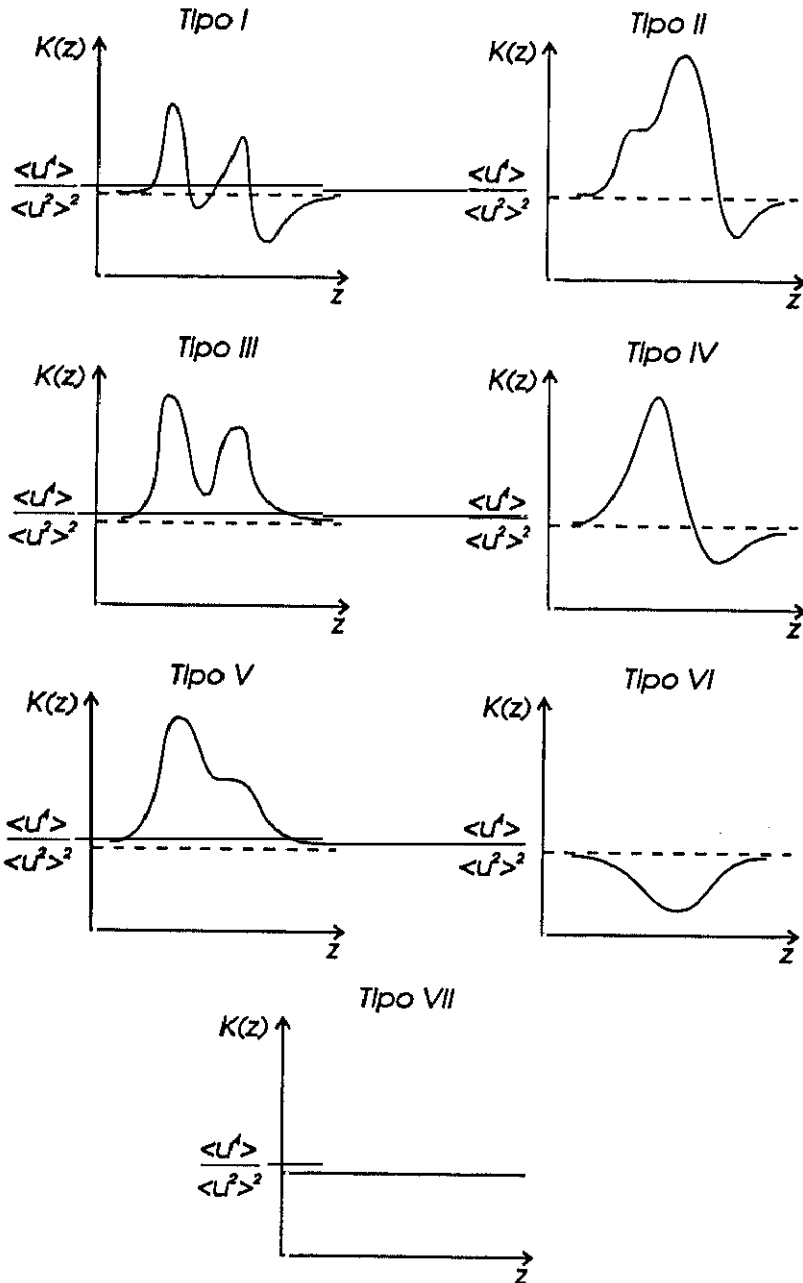


Figura 6.2: Ilustración de los diferentes tipos de haz de acuerdo con el esquema de clasificación de la sección 6.3. La línea discontinua corresponde al valor de la kurtosis en campo lejano.

– **Tipo V:**  $K(z)$  tiene: a) un máximo y un punto de inflexión, o b) un mínimo y un punto de inflexión. Esto se cumple cuando:

$$m = 0, p \neq 0, \Delta = 0 \text{ y } q^2 > 3pr.$$

– **Tipo VI:** La curtosis posee sólo un máximo o sólo un mínimo. Esto ocurre cuando se verifican una de las siguientes tres condiciones:

i.  $m = 0, p \neq 0 \text{ y } \Delta < 0.$

ii.  $m = 0, p \neq 0, \Delta = 0 \text{ y } q^2 = 3pr.$

iii.  $m = p = q = 0.$

En el caso iii. el máximo o el mínimo está en la cintura.

– **Tipo VII:** Por último, la curtosis para esta clase de haces es constante para todo  $z$ . Esto ocurre cuando se verifica que

$$m = p = q = r = s = 0.$$

Con este último tipo se completa la clasificación general. Las categorías anteriores cubren todas las posibilidades para un haz arbitrario. Es decir, cualquier haz parcialmente coherente pertenece necesariamente a uno de los tipos que hemos definido, y al propagarse libremente su curtosis cambia de acuerdo con alguno de los comportamientos mostrados en la figura 6.2.

## 6.4 Propagación de la curtosis a través de sistemas ABCD

Con el fin de controlar el grado de aplanamiento del perfil espacial de un haz mediante el diseño de sistemas ópticos, resultará útil conocer las modificaciones en el comportamiento de la curtosis de un haz después de propagarse a través de uno o varios sistemas ABCD. En otras palabras, deberemos determinar a partir de la medida de los parámetros  $m$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$  en algún plano si el tipo de haz (de acuerdo a la clasificación anterior) se ha modificado al atravesar un sistema óptico de primer orden, y en caso afirmativo, cuáles son los nuevos valores de los parámetros  $m$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$  a la salida de dicho sistema.

Definamos una matriz  $5 \times 1$  de la forma

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} m \\ p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

a la cual denominaremos vector de propagación de la curtosis. Puesto que el comportamiento de  $K(z)$  puede ser inferido a partir de los valores de los parámetros  $m$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$  en algún plano inicial, con lo que para analizar el tipo de haz después de propagarse a través de un sistema ABCD bastará conocer el vector de propagación de la curtosis a la salida del mismo.

Si llamamos  $\alpha_i$  y  $\alpha_f$  a los vectores en los planos inicial y final, respectivamente, entonces puede comprobarse aplicando la ecuación (2.23) a las expresiones (6.26)-(6.30) que la relación entre ellos vendrá dada por

$$\alpha_f = M_\alpha \alpha_i, \quad (6.40)$$

donde los subíndices  $f$  e  $i$  corresponden a los planos final e inicial, y donde  $M_\alpha$  es una matriz  $5 \times 5$  de la siguiente forma.

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} D^4 & CD^3 & C^2D^2 & C^3D & C^4 \\ 4BD^3 & 3BCD^2 + AD^3 & 2(ACD^2 + BC^2D) & 3AC^2D + BC^3 & 4AC^3 \\ 6B^2D^2 & 3B^2CD + 3ABD^2 & (AD + BC)^2 & 3ABC^2 + 3A^2CD & 6A^2C^2 \\ 4B^3D & B^3C + 3AB^2D & 2(AB^2C + A^2BD) & 3A^2BC + A^3D & 4A^3C \\ B^4 & AB^3 & A^2B^2 & A^3B & A^4 \end{pmatrix},$$

siendo A, B, C y D los elementos de la matriz ABCD del sistema, que, como siempre, verifican  $AD - BC = 1$ .

La matriz  $M_\alpha$  cumple además que

$$\det M_\alpha \neq 0.$$

Esto quiere decir que para obtener un haz con  $m = p = q = r = s = 0$ , es decir, con curtosis constante bajo propagación libre es necesario que el vector de la propagación de la curtosis del haz de partida sea nulo. En relación con la clasificación anterior, concluimos que para obtener mediante un sistema ABCD un haz que pertenezca al tipo VII es necesario que el haz de partida pertenezca a este mismo tipo.

Asimismo, cuando un haz de tipo VII se propaga a través de sistemas de primer orden, su curtosis se mantiene constante y con el mismo valor, es decir, su grado de aplanamiento, sigue siendo el mismo. De aquí que, para cambiar dicho parámetro, esto es, modificar su estructura espacial haciéndolo más plano o más picudo, sea necesaria la utilización de sistemas ópticos no-ABCD.

Puede obtenerse una interesante consecuencia en relación a la posición relativa de los extremos de la curtosis con respecto al plano de la cintura del haz. En este sentido recordemos que en este plano la anchura es mínima y hay una mayor concentración de energía. A partir de las definiciones (6.26)-(6.30), puede demostrarse, eligiendo como plano de la cintura el plano  $z = 0$ , que la condición necesaria y suficiente para que tengamos un extremo de la curtosis en la cintura del haz es que  $s = 0$  en dicho plano (ver apéndice 6.B). O, lo que es equivalente, que  $\langle x^3 u \rangle_0 = 0$  en ese mismo plano (exceptuando, por supuesto, los haces pertenecientes al tipo VII). Esto lo satisfacen, por ejemplo, aquellos haces reales en el plano de la cintura. Más aún, en este caso el extremo de la curtosis será un mínimo si  $r > 0$ , mientras que tendremos un máximo si  $r < 0$  (ver apéndice 6.B).

En definitiva, podemos concluir que:

- Los haces reales poseen en general un extremo de la curtosis en el plano de la cintura. La excepción a esta regla la constituyen los haces cuya curtosis se mantiene constante, como son los modos de Hermite-Gauss y los haces Gauss-Schell.
- Los haces para los que  $\langle x^3 u \rangle_0$  es diferente de cero en la cintura no alcanzan en dicho plano un extremo de la curtosis.

Esta última conclusión choca un poco con la idea intuitiva (pero incorrecta) de que un haz en la cintura es donde está más apuntado.

Otra de las cuestiones abiertas que puede resolverse utilizando el esquema de clasificación anterior es el tratar de obtener mediante un sistema óptico de primer orden un haz que presente un valor extremo de la curtosis en la cintura a partir de otro haz que no lo posea. Como demostraremos a continuación, tal transformación será posible si y solo si el parámetro  $m$  del haz de entrada es nulo.

Para probar esto, partiremos de aquellos sistemas ópticos que conectan cintura con cintura para cualquier haz. Estos sistemas pueden ser

- i. Sistemas ópticos de tipo transformada de Fourier ( $A = D = 0$ ,  $BC = -1$ ), o bien
- ii. Sistemas que realizan cambios de escala —sistemas telescópicos— ( $B = C = 0$ ,  $AD = 1$ ).

Ahora bien, aplicando la matriz  $M$  para obtener el parámetro  $s$  en el plano de salida de un sistema óptico tenemos que:

$$m_i B^4 + p_i A B^3 + q_i A^2 B^2 + r_i A^3 B + A^4 s_i = s_f. \quad (6.41)$$

Dado que suponemos  $s_i \neq 0$ , para que el haz a la salida sea tal que  $s_f = 0$  (lo que implicaría que posee un extremo en la cintura) sólo podremos utilizar los sistemas del tipo transformada de Fourier. En tal caso la ecuación (6.41) se reduce a

$$m_i B^4 = 0 \implies m_i = 0, \quad (6.42)$$

y la implicación inversa también es cierta, Q.E.D. Es decir, un haz cuyo parámetro  $m$  sea distinto de cero no puede ser transformado en otro haz con un extremo de la curtosis en la cintura a través de un sistema óptico de primer orden. Esta conclusión llevada a la clasificación estudiada antes, implica que el haz de partida no puede ser de los tipos I, II ó VI (casos ii. y iii.).

## 6.5 Casos especiales

Con el fin de describir haces luminosos realistas, existen modelos de haz que permiten simplificar los desarrollos teóricos y así obtener resultados aplicables a un buen número de casos prácticos. En esta sección consideraremos algunos de estos modelos y veremos en cada caso como se comporta el parámetro de la curtosis.

### 6.5.1 Modos de Hermite-Gauss

Los modos de Hermite-Gauss ( $\text{TEM}_n$ ), son haces coherentes solución de la ecuación de ondas paraxial. Aquí describiremos dichos haces, normalizados a una intensidad total unidad, mediante la expresión [SI86]:

$$u_n(x, z) = \frac{1}{[\pi^{1/2} 2^n n! w(z)/\sqrt{2}]^{1/2}} H_n \left[ \frac{x\sqrt{2}}{w(z)} \right] \times \exp \left\{ -x^2 \left[ \frac{1}{w^2(z)} - i \frac{k}{2R(z)} \right] \right\}, \quad (6.43)$$

donde  $H_n(x)$  es el polinomio de Hermite de orden  $n$  [SI86],

$$w^2(z) = w_c^2 \left[ 1 + \left( \frac{z - z_c}{kw_c^2/2} \right)^2 \right], \quad (6.44)$$

y

$$R(z) = (z - z_c) \left[ 1 + \left( \frac{kw_c^2/2}{z - z_c} \right)^2 \right], \quad (6.45)$$

siendo  $z_c$  la posición del plano de la cintura y  $w_c$  la anchura del haz en ese plano. Cuando  $n = 0$  tendremos un haz gaussiano, mientras que para  $n > 0$  se obtienen haces con  $n + 1$  máximos en intensidad. A partir de su definición, ecuación (6.43), se observa que los modos de Hermite-Gauss conservan la forma al propagarse libremente. Es más, como es bien conocido [SI86] esta invariancia se mantiene en la propagación a través de cualquier sistema óptico ABCD.

En cuanto a los promedios introducidos en capítulos anteriores, para estos haces se cumple

$$\langle x^2 \rangle = (2n + 1) \frac{w^2}{4}, \quad (6.46)$$

$$\langle xu \rangle = (2n + 1) \frac{w^2}{4R}, \quad (6.47)$$

$$\langle u^2 \rangle = (2n + 1) \left( \frac{1}{k^2 w^2} + \frac{w^2}{4R^2} \right), \quad (6.48)$$

$$\langle x^4 \rangle = \frac{(6n^2 + 6n + 3)w^4}{16}, \quad (6.49)$$

$$\langle x^3 u \rangle = \frac{(6n^2 + 6n + 3)w^4}{16R}, \quad (6.50)$$

$$\langle x^2 u^2 \rangle = \frac{(1 + 2n + 2n^2)(4R^2 + 3k^2 w^4)}{16k^2 R^2}, \quad (6.51)$$

$$\langle x u^3 \rangle = \frac{3(1 + 2n + 2n^2)(4R^2 + k^2 w^4)}{16k^2 R^3}, \quad (6.52)$$

$$\langle u^4 \rangle = \frac{3(1 + 2n + 2n^2)(4R^2 + k^2 w^4)^2}{16k^4 R^4 w^4}, \quad (6.53)$$

y su parámetro de calidad toma la forma simple [SE93],

$$Q_{HG} = (2n + 1)^2 \frac{1}{4k^2}. \quad (6.54)$$

Vemos, pues, que  $Q$  aumenta (la calidad del haz empeora) al aumentar el orden del modo, de forma que, para el mismo tamaño de haz en el plano de la cintura  $\langle x^2 \rangle_c$ , un haz de orden  $n$  diverge  $2n + 1$  veces más rápido que uno gaussiano.

En cuanto a la curtosis, se ha comprobado que los parámetros  $m$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$  son iguales a cero y no cambian cuando el haz se propaga a través de sistemas ópticos de primer orden, por lo tanto, esta clase de haces pertenece al tipo VII de la clasificación anterior. Esta conclusión es consecuente con

lo que dijimos un poco más arriba, esto es, que este tipo de haces conservan la forma al propagarse a través de sistemas de primer orden. El valor de la curtosis encontrado para los modos de Hermite-Gauss es

$$K_{HG} = \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle^2} = \frac{\langle u^4 \rangle}{\langle u^2 \rangle^2} = \frac{6n^2 + 6n + 3}{4n^2 + 4n + 1}. \quad (6.55)$$

Cuando  $n = 0$  (haz gaussiano) el parámetro de la curtosis toma el valor  $K = 3$ , y en el límite para  $n$  grandes vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6n^2 + 6n + 3)}{(4n^2 + 4n + 1)} = 1.5, \quad (6.56)$$

lo que indica, que el haz, para grandes valores de  $n$ , puede considerarse bastante aplanado globalmente.

### 6.5.2 Haces de tipo Gauss-Schell

Existe otro modelo de haz ampliamente estudiado y de gran interés, por ejemplo, en los estudios radiométricos de fuentes con un cierto grado de coherencia. Nos estamos refiriendo a los llamados haces Gauss-Schell [CW78, GO80, DC83, SM92, SM92a, SE93].

Dichos haces se caracterizan por ser parcialmente coherentes y poseer un perfil de intensidad así como un grado complejo de coherencia gaussianos. Al ser parcialmente coherentes, una ventaja adicional que presenta este tipo de haces es la ausencia de problemas asociados a la coherencia total, como el moteado láser (*speckle*) o los anillos de difracción (*ringing*), manteniendo, sin embargo, una alta direccionalidad [CW78, DC83], lo que resulta útil en ciertas aplicaciones.

La densidad espectral mutua (en dos dimensiones) de un haz Gauss-Schell (cuya intensidad la supondremos normalizada a la unidad) se puede escribir como [SM88]:

$$\Gamma(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} w} \exp \left[ -\frac{x_1^2 + x_2^2}{w^2} - \frac{(x_1 - x_2)^2}{4\sigma_g^2} \right] \exp \left[ i \frac{k}{2R} (x_1^2 - x_2^2) \right], \quad (6.57)$$

donde  $\sigma_g$  representa la longitud de coherencia, y donde  $w$  y  $R$  designan, respectivamente, la anchura del haz y el radio de curvatura, tal y como los hemos definido en el capítulo 2.

Su función de distribución de Wigner toma la forma:

$$h(x, u) = 2 \chi \exp \left( -\frac{2x^2}{w^2} \right) \exp \left[ -k^2 \frac{w^2}{2} \chi^2 \left( u - \frac{x}{R} \right)^2 \right], \quad (6.58)$$

donde, para simplificar, hemos introducido la constante  $\chi$ ,

$$\chi^2 = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2}, \quad (6.59)$$

siendo  $\gamma = \sigma_g/\sigma$  el llamado grado de coherencia global [FS82] y  $\sigma = w/\sqrt{2}$ . Para el caso límite de completa coherencia, por ejemplo un haz gaussiano, se tendrá  $\sigma_g = \gamma = \infty$ ,  $\chi = 1$ , mientras que para un haz completamente incoherente,  $\sigma_g = \gamma = \chi = 0$ .

De la expresión de  $h(x, u)$  se concluye que estos haces además de ser gaussianos en intensidad en campo próximo también lo son direccionalmente (en campo lejano) con centro en  $u = x/R$  para cada  $x$ . También puede verse (ecuación (2.22)) que no cambian su forma al atravesar sistemas ópticos de primer orden, al igual que ocurría para los modos de Hermite-Gauss.

Para este tipo de haces se tiene

$$\langle x \rangle = \langle u \rangle = 0, \quad (6.60)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{w^2}{4}, \quad (6.61)$$

$$\langle xu \rangle = \frac{w^2}{4R}, \quad (6.62)$$

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{k^2 w^2 \chi^2} + \frac{w^2}{4R^2}, \quad (6.63)$$

$$\langle x^4 \rangle = \frac{3w^4}{16}, \quad (6.64)$$

$$\langle x^3 u \rangle = \frac{3w^4}{16R}, \quad (6.65)$$

$$\langle x^2 u^2 \rangle = \frac{1}{4k^2 \chi^2} + \frac{3w^4}{16R^2}, \quad (6.66)$$

$$\langle x u^3 \rangle = \frac{3}{4k^2 R \chi^2} + \frac{3w^4}{16R^3}, \quad (6.67)$$

$$\langle u^4 \rangle = \frac{3}{k^4 \chi^4 w^4} + \frac{3}{2k^2 R^2 \chi^2} + \frac{3w^4}{16R^4}, \quad (6.68)$$

y

$$Q_{GS} = \frac{1}{4k^2} \frac{1}{\chi^2}. \quad (6.69)$$

Es obvio a partir de la ecuación anterior que la calidad de estos haces aumenta conforme  $\chi$  se aproxima a la unidad (mayor coherencia), alcanzándose el máximo para el haz gaussiano [SM92a].



Puede demostrarse que para estos haces los parámetros  $m$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$  son nulos y por tanto pertenecen al tipo VII. Poseen además un valor definido de la curtosis (independiente de su grado de coherencia),

$$K_{GS} = 3,$$

que se mantiene invariable al propagarse a través de sistemas ABCD.

A la vista de estos resultados, para conformar (modificar el grado de aplanamiento) tanto de los modos de Hermite-Gauss como de los haces Gauss-Schell será necesario, por tanto, utilizar sistemas ópticos no-ABCD.

### 6.5.3 Ondas planas a través de transmitancias supergaussianas

Existe en la literatura cierto tipo de aberturas difractantes de borde suave denominadas habitualmente aberturas gaussianas o supergaussianas [SI86, BP91] (figura 6.3). En trabajos anteriores, ya mencionados en el capítulo 4, se halló la calidad de haces parcialmente coherentes a través de dichas aberturas.

En esta sección calcularemos los parámetros característicos de un frente de onda plano a la salida de una transmitancia de esta clase, poniendo especial énfasis en el parámetro de la curtosis.

Consideraremos, en consecuencia, funciones de distribución generales de la forma

$$g_n(x) = A \exp \left[ - \left( \frac{|x|}{w} \right)^{2n} \right] \quad (6.70)$$

donde  $A$  es un factor de normalización y  $n > 0$ . Para  $n > 1$  (con  $n$  entero) estas funciones son llamadas supergaussianas. Aplicando las definiciones del capítulo anterior, podemos calcular los promedios en el plano de salida de las transmitancias supergaussianas. Se obtiene

$$\langle x^2 \rangle = w^2 \frac{\Gamma(3/2n)}{\Gamma(1/2n)} \quad (6.71)$$

$$\langle xu \rangle = 0, \quad (6.72)$$

$$\langle u^2 \rangle = \frac{n^2}{k^2 w^2} \frac{\Gamma(2 - 1/2n)}{\Gamma(1/2n)} \quad (6.73)$$

$$\langle x^4 \rangle = w^4 \frac{\Gamma(5/2n)}{\Gamma(1/2n)}, \quad (6.74)$$

$$\langle x^2 u^2 \rangle = \frac{n^2}{k^2} \frac{\Gamma(4n + 1/2n)}{\Gamma(1/2n)} - \frac{1}{2k^2}, \quad (6.75)$$

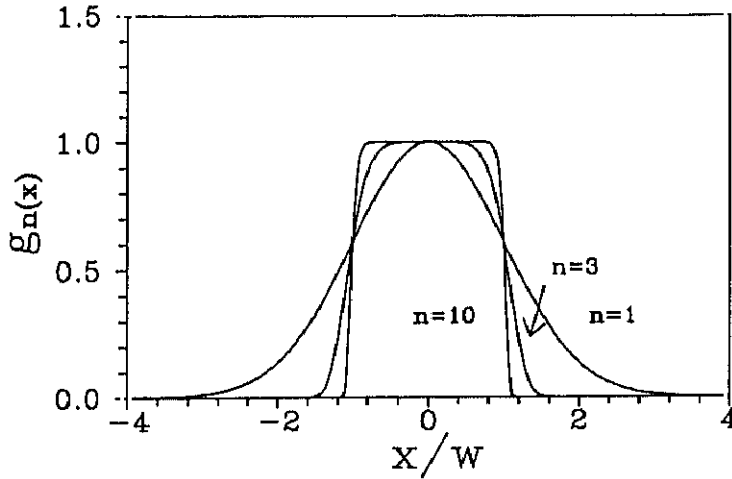


Figura 6.3: Representación de las transmitancias supergaussianas.

$$\langle x^3 u \rangle = \langle x u^3 \rangle = 0, \quad (6.76)$$

$$\langle u^4 \rangle = \frac{1}{k^4 w^4 \Gamma(1/2n)} [n^2 (2n-1)^2 \Gamma(4n-3/2n) - 2n^3 (2n-1) \times \Gamma(6n-3/2n) + n^4 \Gamma(8n-3/2n)], \quad (6.77)$$

$$Q_n = \frac{n^2 \Gamma(3/2n) \Gamma(2-1/2n)}{k^2 \Gamma(1/2n)^2}, \quad (6.78)$$

en donde  $\Gamma$  es la denominada función gamma [GR65].

A partir de las expresiones de  $\langle x^4 \rangle$  y  $\langle x^2 \rangle$  se puede calcular la curtosis en el plano de salida de una transmitancia general de la forma (6.70), obteniéndose

$$K_n = \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle^2} = \frac{\Gamma(1/2n) \Gamma(5/2n)}{\Gamma(3/2n)^2}. \quad (6.79)$$

Dicho parámetro, que depende del índice  $n$  de la transmitancia, para valores de  $n$  grandes, es decir, transmitancias muy aplanadas, tiende al valor 1.8, como puede observarse en la figura 6.4.

Por otra parte, para clasificar un haz plano propagándose a través de una transmitancia supergaussiana de acuerdo con el esquema que vimos antes, es necesario calcular los parámetros  $m$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$ , (funciones del índice  $n$ ). Aquí podemos distinguir varios casos, aunque para todos ellos  $m = q = s = 0$ .

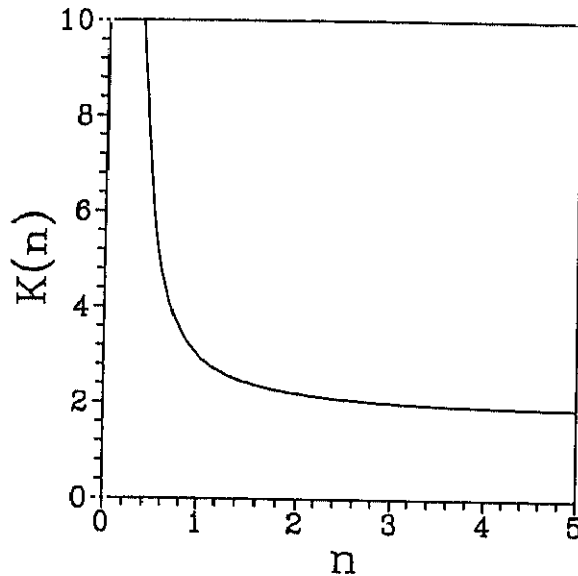


Figura 6.4: Curtosis en el plano de salida de una transmitancia de la forma (6.70) en función del índice  $n$ .

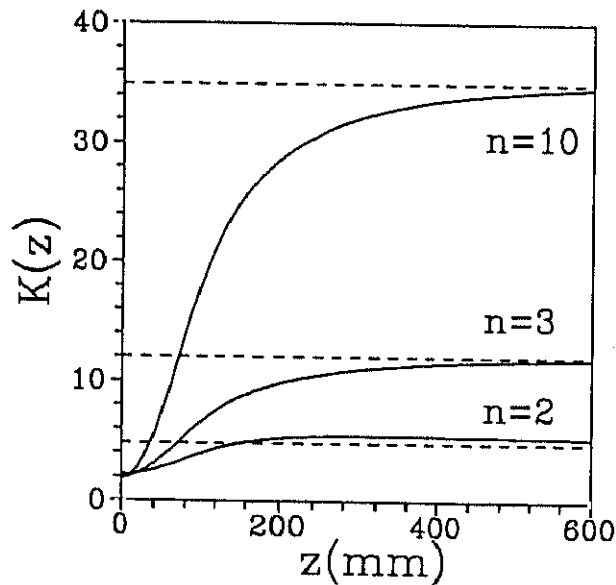


Figura 6.5: Curtosis a la salida de transmitancias supergaussianas de órdenes  $n = 2, 3$  y  $10$ . Las líneas punteadas corresponden al valor asintótico de la curtosis a grandes distancias.

- i. Cuando  $n = 1$ , entonces  $p = 0$  y  $r = 0$ . Este clase de haces pertenecen al tipo VII.
- ii. Para  $n = 2$ , entonces  $p < 0$  y  $r > 0$ . El haz pertenecería al tipo III (figura 6.5).
- iii. Si  $n \geq 3$ , entonces  $p > 0$  y  $r > 0$ . El haz pertenece ahora al tipo VI (figura 6.5).

## 6.6 Relación curtosis-calidad para un haz luminoso propagándose a través de transmitancias de fase cuártica

Según hemos visto en apartados anteriores, la curtosis puede expresarse en términos de la coordenada  $z$  en la forma

$$K'(z) = \frac{\langle x^4 \rangle_z}{\langle x^2 \rangle_z^2}. \quad (6.80)$$

Su derivada con respecto a  $z$  puede calcularse haciendo uso de la relación

$$\frac{\partial \langle x^m u^n \rangle_z}{\partial z} = m \langle x^{m-1} u^{n+1} \rangle_z, \quad (6.81)$$

obteniéndose

$$\frac{\partial K}{\partial z} = 4 \frac{\langle x^3 u \rangle_z \langle x^2 \rangle_z - \langle x u \rangle_z \langle x^4 \rangle_z}{\langle x^2 \rangle_z^3}, \quad (6.82)$$

cuyo numerador coincide (salvo un factor 4) con el parámetro  $T$  definido cuando calculábamos la variación de la calidad de un haz al propagarse a través de transmitancias de fase cuártica (véase la ecuación (4.12)). De las propiedades deducidas allí se infiere ahora que si colocáramos la transmitancia en algún plano donde la curtosis posee un extremo ( $\partial K / \partial z = K' = 4T = 0$ ), resultaría imposible mejorar la calidad de dicho haz.

En cualquier método de optimización de la calidad parece, pues, evidente la necesidad de excluir tales planos en el posicionamiento de la transmitancia de fase cuártica. Con el fin de evitar a tal efecto tener que efectuar medidas previas de la curtosis mostraremos a continuación un procedimiento sencillo que permite mejorar la calidad del haz y además es independiente del plano  $z$  donde se coloque la transmitancia. El método consiste en utilizar un sistema lente convergente-transmitancia, en el cual esta última se encuentra situada en el plano focal imagen de la lente.

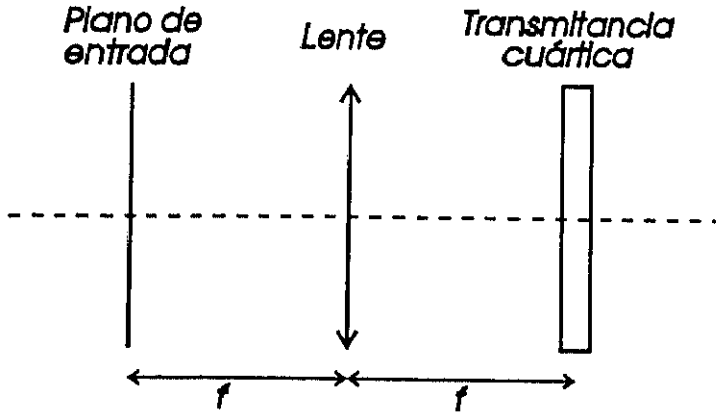


Figura 6.6: Sistema "2f" lente-transmitancia.

Si partimos del haz en el plano focal objeto de la misma, cuya focal paraxial es  $f$  (figura 6.6), entonces la matriz ABCD que representa al sistema "2f" antes de cruzar la transmitancia será

$$M_{2f} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.83)$$

con lo cual los promedios sobre el plano de la transmitancia, pero antes de atravesar ésta, resultan ser

$$\langle x^2 \rangle_f = f^2 \langle u^2 \rangle_i, \quad (6.84)$$

$$\langle x^4 \rangle_f = f^4 \langle u^4 \rangle_i, \quad (6.85)$$

$$\langle x^6 \rangle_f = f^6 \langle u^6 \rangle_i, \quad (6.86)$$

$$\langle xu \rangle_f = -\langle xu \rangle_i, \quad (6.87)$$

$$\langle x^3 u \rangle_f = -f^2 \langle xu^3 \rangle_i, \quad (6.88)$$

donde el subíndice  $i$  denota los valores calculados en el plano de entrada y el subíndice  $f$  denota los valores calculados en el plano de la transmitancia pero sin atravesar ésta (ver figura 6.6). Llevando estas expresiones a la ecuación (4.12) obtenemos el cambio de calidad de un haz a la salida del sistema (después de atravesar la transmitancia). Se tiene

$$\Delta Q_{l-t} = 16b^2 f^8 (\langle u^6 \rangle_i \langle u^2 \rangle_i - \langle u_i^4 \rangle^2) + 8bf^4 m, \quad (6.89)$$

donde el parámetro  $m$  es el definido en la ecuación (6.26). A partir de esta expresión, se concluye que la calidad mejora con este sistema si se cumplen

simultáneamente las siguientes condiciones:

i.  $m \neq 0$  (ya que  $\langle u^6 \rangle_i \langle u^2 \rangle_i - \langle u^4 \rangle_i^2 > 0$ ). Esto implica que el haz de entrada debe pertenecer necesariamente a uno de los tipos I, II o IV de la clasificación anterior.

ii.  $\text{sgn}(b) \neq \text{sgn}(m)$ .

iii.

$$|b| \leq \frac{|m|}{2f^4(\langle u_i^6 \rangle \langle u^2 \rangle_i - \langle u_i^4 \rangle^2)}.$$

La mejora de calidad adquiere el valor óptimo (respecto a  $b$ ) si

$$b = \frac{|m|}{4f^4(\langle u_i^6 \rangle \langle u^2 \rangle_i - \langle u_i^4 \rangle^2)}, \quad (6.90)$$

que es independiente de  $z$ . Para este valor de  $b$  la variación de la calidad vale

$$\Delta Q_{opt} = -\frac{m^2}{\langle u_i^6 \rangle \langle u^2 \rangle_i - \langle u_i^4 \rangle^2}. \quad (6.91)$$

Este valor (al igual que  $\Delta Q_{l-t}$ ) no depende de la posición relativa del sistema lente-transmitancia con respecto al haz, no siendo necesario, por tanto, excluir los planos donde la curtosis presente un extremo.

Nótese, por otra parte, que la variación  $\Delta Q_{opt}$  que acabamos de determinar coincide con la variación óptima de la calidad que se obtendría si sólo empleamos la transmitancia y la situamos en el plano  $z = \infty$ .

Para ver esto, recordemos la expresión de  $\Delta Q_{opt}$  que obtuvimos en el capítulo 4 para una transmitancia de fase cuártica:

$$\Delta Q_{opt} = -\frac{T^2}{S}, \quad (6.92)$$

en donde  $T$  y  $S$  dependían del plano  $z$  donde colocábamos la transmitancia. A partir de la relación entre  $T$  y  $\partial K/\partial z$ , se tiene

$$T(z) = mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s, \quad (6.93)$$

expresión que coincide con el polinomio definido en la ecuación (6.A.1).

Teniendo en cuenta lo anterior podemos escribir la variación máxima de la calidad (ecuación (6.92)) en la forma

$$\Delta Q_{opt} = -\left[ \frac{m^2}{\langle u^6 \rangle_i \langle u^2 \rangle_i - \langle u_i^4 \rangle^2} + \frac{Pol(z^7)}{Pol(z^8)} \right] \quad (6.94)$$

donde  $Pol(z^7)$  y  $Pol(z^8)$  son polinomios en  $z$  de orden siete y ocho, respectivamente. Finalmente, para  $z = \infty$  se llega a

$$\Delta Q_\infty = \lim_{z \rightarrow \infty} \Delta Q_{opt} = -\frac{m^2}{\langle u^6 \rangle \langle u^2 \rangle - \langle u^4 \rangle^2}, \quad (6.95)$$

que coincide con la mejora máxima de calidad que obtenemos cuando colocamos la transmitancia en el plano focal imagen de una lente.

## 6.7 Curtosis de un haz gaussiano propagándose a través de una lente con aberración esférica

### 6.7.1 Expresiones analíticas

De los apartados anteriores, se concluye que para modificar el perfil transversal de intensidad de un haz gaussiano, en cuanto a su grado de aplanamiento o picudez, es decir, transformar su parámetro de curtosis, es necesario utilizar sistemas ópticos no-ABCD. En esta sección, como sistema óptico no-ABCD hemos considerado una lente cilíndrica con aberración esférica, restringiéndonos, por simplicidad, al caso bidimensional.

Escribamos la amplitud del haz gaussiano (con simetría rotacional alrededor de  $z$ ) en el plano de una lente con aberración esférica en la forma

$$\phi_i(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \exp\left(ik \frac{x^2}{2R}\right), \quad (6.96)$$

donde  $A$  es un factor de normalización,  $w$  el tamaño del haz y  $R$  el radio de curvatura del mismo sobre dicho plano. Entonces, tras atravesar la lente la distribución de amplitud será

$$\phi_f(x) = \phi_i(x) t(x), \quad (6.97)$$

donde  $t(x)$  denota la transmitancia de fase que representa la actuación de la lente cilíndrica esféricamente aberrada (ver también la ecuación (4.24)).

Los promedios del haz requeridos para nuestros cálculos a la salida de la lente valdrán,

$$\langle x^2 \rangle_f = \langle x^2 \rangle_i, \quad (6.98)$$

$$\langle xu \rangle_f = \frac{(1 + 2aR)}{R} \langle x^2 \rangle_i + 4b \langle x^4 \rangle_i, \quad (6.99)$$

$$\langle x^3 u \rangle_f = \frac{(1 + 2aR)}{R} \langle x^4 \rangle_i + 4b \langle x^6 \rangle_i, \quad (6.100)$$

$$\langle u^2 \rangle_f = \langle x^2 \rangle_i \left[ \frac{4}{w^4 k^2} + \frac{(1 + 2aR)^2}{R^2} \right] + \frac{8b(1 + 2aR)}{R} \langle x^4 \rangle_i + 16b^2 \langle x^6 \rangle_i, \quad (6.101)$$

$$\langle x^2 u^2 \rangle_f = \frac{4}{w^4 k^2} \langle x^4 \rangle_i + \frac{(1 + 2aR)^2}{R^2} \langle x^4 \rangle_i + 16b^2 \langle x^8 \rangle_i + 8b \frac{(1 + 2aR)}{R} \langle x^6 \rangle_i - \frac{1}{2k^2}, \quad (6.102)$$

$$\langle x u^3 \rangle_f = \langle x^4 \rangle_i \left[ -\frac{16b}{w^2 k^2} + \frac{4(1 + 2aR)}{R w^4 k^2} + \frac{(1 + 2aR)^3}{R^3} \right] + \langle x^6 \rangle_i \left[ \frac{16b}{k^2 w^4} + \frac{12b(1 + 2aR)^2}{R^2} \right] + \langle x^8 \rangle_i \left[ 48b^2 \frac{(1 + 2aR)}{R} \right] + \langle x^{10} \rangle_i (64b^3), \quad (6.103)$$

$$\langle u^4 \rangle_f = \frac{4}{w^4 k^4} + \frac{(1 + 2aR)^2}{R^2} + \langle x^2 \rangle_i \left[ 24b \frac{(1 + 2aR)}{R k^2} - \frac{16}{w^6 k^4} - \frac{4(1 + 2aR)^2}{w^2 R^2 k^2} \right] + \langle x^4 \rangle_i \left[ \frac{144b^2}{k^2} + \frac{16}{k^4 w^8} + \frac{(1 + 2aR)^4}{R^4} + \frac{8(1 + 2aR)^2}{k^2 w^4 R^2} - \frac{96b(1 + 2aR)}{w^2 R k^2} \right] + \langle x^6 \rangle_i \left[ \frac{64b(1 + 2aR)}{k^2 w^4 R} + \frac{16b(1 + 2aR)^3}{R^3} - \frac{20 \cdot 16b^2}{w^2 k^2} \right] + \langle x^8 \rangle_i \left[ \frac{96b^2(1 + 2aR)^2}{R^2} + \frac{8 \cdot 16b^2}{k^2 w^4} \right] + \langle x^{10} \rangle_i \left[ 16^2 b^3 \frac{(1 + 2aR)}{R} \right] + \langle x^{12} \rangle_i 16^2 b^4, \quad (6.104)$$

donde  $a$  y  $b$  son los coeficientes definidos en las ecuaciones (4.25) y (4.26). Llevando estas expresiones a la ecuación (6.80), obtendremos el comportamiento de la curtosis bajo propagación libre. En primer lugar se observa que, tras atravesar la lente aberrada, el haz inicial deja de ser gaussiano. En la figura 6.8 se muestra el comportamiento típico de  $K$  después de la lente para los parámetros característicos elegidos en el experimento al que



nos referiremos en la sección 6.7.3. En la figura se aprecia que el haz llega a ser fuertemente platicúrtico o leptocúrtico en las regiones cercanas al plano focal paraxial de la lente aberrada. También para  $z$  grandes el haz es ligeramente leptocúrtico. Este resultado conlleva que el grado de apuntamiento de un haz gaussiano puede ser controlado mediante una lente de focal corta con aberración esférica significativa.

### 6.7.2 Variación de la curtosis con los parámetros característicos de la lente

La expresión del parámetro de la curtosis de un haz gaussiano cuando se propaga a través de una lente con aberración esférica es función de los promedios de orden superior e igual dos de la intensidad y de la intensidad radiante del haz a la entrada del sistema y de los coeficientes característicos  $a$  y  $b$  que definen la transmitancia de fase que representa la lente. Con una sola lente el signo de ambos coeficientes es el mismo, positivo si la lente es convergente y negativo si es divergente. Si queremos que  $a$  y  $b$  presenten signos opuestos no bastaría utilizar sólo una lente, sino que sería preciso emplear, por ejemplo, un sistema de dos lentes.

Nótese en este sentido que, en la presente sección, hemos considerado una lente convergente y por tanto  $a < 0$  y  $b < 0$ . Si cambiáramos el signo de  $b$ , entonces la variación de la curtosis se invertiría alrededor de la cintura. Si  $a > 0$  estaríamos considerando que la lente es divergente, si además el haz de entrada fuera gaussiano divergente, detrás de la lente la curtosis tendería (suavemente) a su valor asintótico  $K_\infty$ .

### 6.7.3 Resultados experimentales

En esta sección vamos a describir el procedimiento y resultados experimentales correspondientes a la medida de la variación de la curtosis de un haz gaussiano a través de una lente con aberración esférica. El montaje experimental utilizado es análogo al descrito en la sección 5.4.1 como puede verse en la figura 6.7.

En este experimento hemos elegido como lente aberrada una lente cilíndrica. Se ha utilizado de nuevo un láser de He-Ne estabilizado en intensidad emitiendo en el modo fundamental  $TEM_{00}$  con una longitud de onda de 632.8 nm. La atenuación se realiza mediante dos prismas y filtros neutros. El haz se expande mediante una lente auxiliar ( $L_1$ ) de focal paraxial  $f \simeq 60$  mm, índice de refracción  $n \simeq 1.5$  y apertura  $\simeq 31.5$  mm e incide

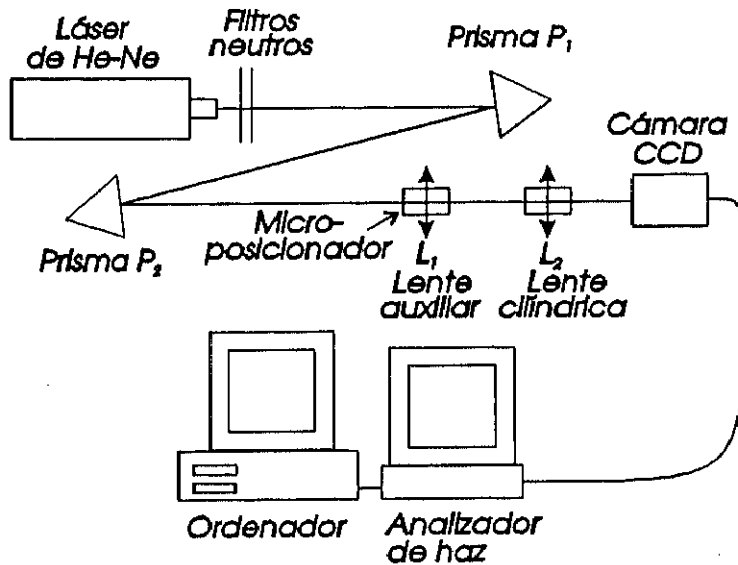


Figura 6.7: Montaje experimental. En este dispositivo  $L_2$  es una lente cilíndrica con aberración esférica.

sobre una segunda lente  $L_2$ , la cual, para ceñirnos al caso bidimensional, la elegimos cilíndrica de focal  $f \simeq 40$  mm, índice de refracción  $n \simeq 1.5$  y apertura  $\simeq 15$  mm y orientada de forma que el haz incide sobre la cara convexa ( $q_l = +1$ ). La anchura del haz y el radio de curvatura sobre la lente aberrada son  $w \simeq 2.5$  mm y  $R \simeq 310$  mm, respectivamente y el factor de aberración  $b \simeq 5.28 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-3}$ .

Las imágenes fueron tomadas con una cámara CCD ya descrita anteriormente y con un sistema de análisis de haz (SPIRICON, modelo LBA-100A). Tras el correspondiente procesado de datos se calculó el parámetro de curtosis  $K = \langle x^4 \rangle / \langle x^2 \rangle^2$  en cada plano.

En la figura 6.8 se ha representado el cociente  $K/K_i$  entre el parámetro de curtosis a la entrada  $K_i$  (cuyo valor es aproximadamente 3 como corresponde a un haz gaussiano) y a la salida  $K$  de la lente aberrada, en función de la distancia de propagación  $z$ . Asimismo se comparan los resultados teóricos y experimentales. Vemos que el parámetro de la curtosis exhibe dos extremos, un mínimo donde el haz alcanza su máxima planitud y un máximo donde el haz se hace más apuntado. Este haz corresponde por consiguiente al tipo

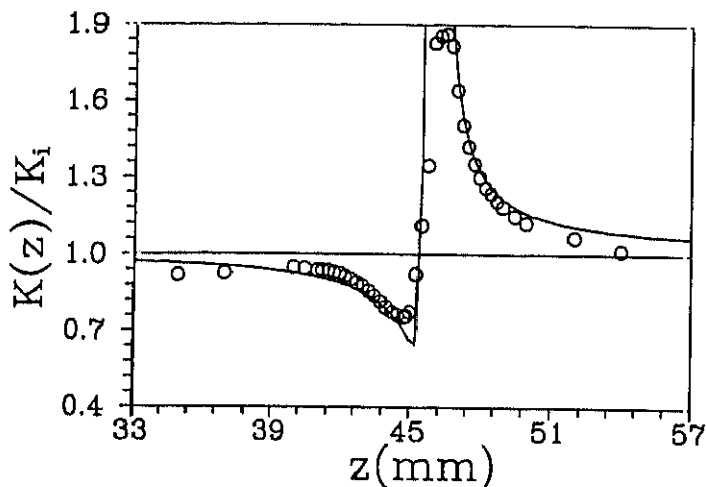


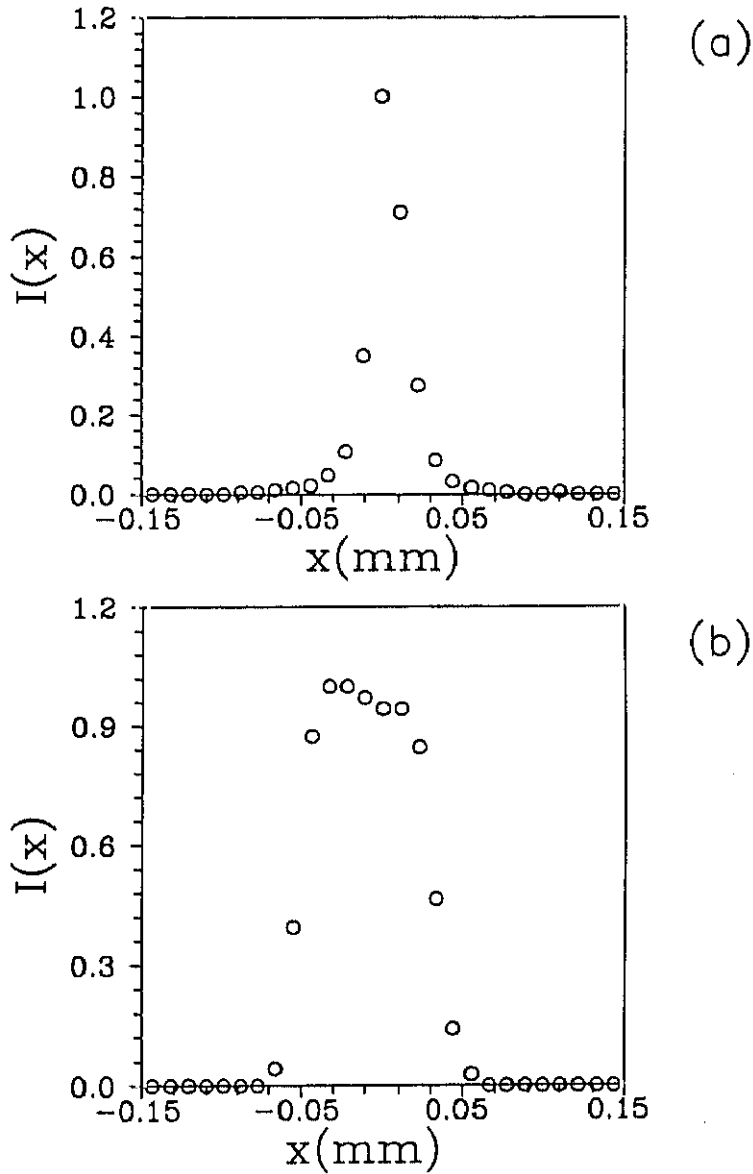
Figura 6.8: Parámetro de la curtosía (normalizado) frente a la distancia de propagación después de una lente (cilíndrica) situada en  $z = 0$ , con aberración esférica. La línea continua representa el comportamiento teórico y los círculos los valores experimentales. En el montaje experimental, el eje  $x$  fue elegido perpendicular a la generatriz de la lente cilíndrica.

IV en nuestra clasificación.<sup>1</sup>

Las imágenes representadas en las figuras 6.9 están tomadas en la región donde la curtosía tiene un comportamiento extremo y nos dan los perfiles de intensidad en el eje  $x$ . Se aprecia claramente cómo la forma del haz cambia drásticamente alrededor del plano focal. Por otra parte, pueden distinguirse dos regiones en la propagación del haz, a saber, la región comprendida entre  $z \simeq 33$  mm y  $z \simeq 45$  mm, en donde el haz es platicúrtico, y la región comprendida entre  $z \simeq 45$  mm y  $z \simeq 57$  mm, donde el haz es leptocúrtico, manteniéndose sólo ligeramente leptocúrtico cuando aumenta la distancia  $z$ . También existe un plano en donde dicho haz posee como valor de la curtosía el correspondiente a un haz gaussiano (haz mesocúrtico).

En la figura 6.8 se observa que los resultados teóricos (representados por una línea continua) se ajustan adecuadamente a los puntos experimentales. En cuanto a los errores estimados, éstos varían desde un 2% a un 10%, aumentando a medida que nos acercamos al valor máximo de la curtosía,

<sup>1</sup>Se ha medido recientemente la curtosía en láseres de  $\text{CO}_2$  de 1.5 kW de potencia [DL93], pudiendo observarse que estos haces también pertenecen al tipo IV.



**Figura 6.9:** Perfiles experimentales en las regiones platycúrtica (b) y leptocúrtica (a) cercanas al plano focal. La asimetría en la parte alta de la curva (b) es debida a inevitables imperfecciones y muy ligeros desalineamientos de los elementos ópticos del montaje experimental. Esta asimetría es despreciable fuera de la región focal (nótese, en este sentido, que el tamaño transversal del haz platycúrtico en la región focal es muy pequeño  $\approx 0.1$  mm).

en donde se produce un cierto desajuste. En esta región los valores teóricos de la curtosis son mucho mayores que los experimentales. Esto es debido a las limitaciones del procedimiento experimental (ver, por ejemplo, [TE93, WA93,RS93]). Entre ellas destacamos:

– Saturación de la cámara.

El pico aparece en una región en donde la intensidad del haz es muy elevada, siendo necesaria por tanto, la utilización de filtros. Estos afectan a la forma del haz, principalmente a las colas del mismo ya que pueden cortarlo o truncarlo, de forma que en las regiones donde estas colas son importantes (haz picudo con elevada curtosis) es donde la influencia de dichos filtros es mayor.

– Resolución de la cámara.

Dicha resolución es de  $11 \mu\text{m}$ , que en general es buena cuando la anchura del haz no es muy pequeña, pero para haces estrechos, como los observados en el plano focal, no es suficiente y puede dar lugar a errores significativos. Por otra parte, la discretización de las imágenes puede afectar considerablemente a la curtosis, influyendo más cuanto menor sea el número de puntos discretizados con intensidad significativa y más asimétricamente se realice dicha discretización.

– Rango dinámico y relación señal/ruido de la cámara.

El rango dinámico de la cámara puede llegar a ser insuficiente en haces con colas largas. En cuanto a la relación señal/ruido, si esta última no es suficientemente alta estaremos limitando por abajo el rango dinámico de la cámara, truncando el haz. Ambos factores pueden afectar notablemente a los parámetros de orden alto.

Para evaluar la influencia de las fuentes de error anteriores se ha realizado una simulación numérica sobre un tipo de distribuciones que abarca un rango amplio de valores de la curtosis. Son distribuciones de la forma

$$g_n(x) = \exp[-(a|x|)^{2n}] \quad (6.105)$$

donde  $n > 0$  (ya dijimos en la sección 6.5.3 que si  $n > 1$  con  $n$  entero se las denomina funciones supergaussianas). La curtosis de esta familia de funciones puede ser expresada analíticamente como una función del índice  $n$  (ecuación (6.79)). Elijamos ahora una función de distribución  $g_n$  con  $n < 1$ , cuyo valor de la curtosis sea igual al máximo teórico (valor pico del

cociente  $K(z)/K_i$  y cuya anchura sea idéntica al tamaño del haz medido experimentalmente en el plano donde la curtosis es máxima. Al realizarse un proceso numérico de corte de las colas del haz y de discretización del mismo de forma similar al que puede llevar a cabo la cámara, se obtiene un valor de la curtosis de la distribución resultante similar al valor medido. Señalemos, por último, que el efecto de la discretización y asimetría del perfil sobre el valor de la curtosis es tanto mayor cuanto más picudo o apuntado es el haz (leptocúrtico) y cuanto mayores sean las colas, y se hace prácticamente despreciable cuando los valores de la curtosis son bajos (haces platicúrticos).

## 6.8 Apéndices

### Apéndice 6.A

Para obtener los extremos de  $K(z)$ , necesitamos hallar las raíces reales del siguiente polinomio

$$P_k(z) = mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s. \quad (6.A.1)$$

En lo que sigue, consideraremos que  $m \neq 0$  (el caso  $m = 0$  será analizado al final). Para ello seguiremos el procedimiento descrito, por ejemplo, en [US48]:

Definamos

$$A_k = \begin{vmatrix} m & p & q & r & s & 0 & 0 \\ 0 & m & p & q & r & s & 0 \\ 0 & 0 & m & p & q & r & s \\ 4m & 3p & 2q & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4m & 3p & 2q & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4m & 3p & 2q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4m & 3p & 2q & r \end{vmatrix}, \quad (6.A.2)$$

$$D_k = m^6(z_1 - z_2)^2(z_1 - z_3)^2(z_1 - z_4)^2(z_2 - z_3)^2(z_2 - z_4)^2(z_3 - z_4)^2, \quad (6.A.3)$$

donde  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$  denotan las raíces de dicho polinomio. Puede demostrarse que [US48]

$$A_k = m D_k. \quad (6.A.4)$$

Por otro lado,

$$A_k = \frac{m}{27} \Delta, \quad (6.A.5)$$

donde  $\Delta$  es el definido en (6.35). De (6.A.4) y (6.A.5) se sigue que  $\text{sgn } \Delta = \text{sgn } D_k$ . Por tanto, a partir de (6.A.3), podemos distinguir los siguientes casos:

- i.  $\Delta > 0$ . Un polinomio general de cuarto orden podría tener en tal caso cuatro raíces reales o cuatro complejas. Sin embargo, las raíces de  $P_k(z)$  deben ser reales, lo que implica que  $K'(z)$  tendrá dos máximos y dos mínimos. La otra posibilidad (cuatro raíces complejas) debe ser excluida ya que, en ese caso,  $P_k(z) \neq 0$  para cualquier  $z$ -real, y esto querría decir que la curtosis sería siempre creciente (o decreciente) lo que es incompatible con el comportamiento asintótico de  $K'(z)$  cuando  $z = \pm\infty$  (ecuación (6.22)).
- ii.  $\Delta < 0$ .  $P_k(z)$  tiene dos raíces simples (no se consideran las raíces complejas pues  $z$  es una distancia y sólo puede tomar valores reales). En este caso  $K'(z)$  presenta un máximo y un mínimo.
- iii.  $\Delta = 0$ .  $P_k(z)$  tiene raíces múltiples y las posibilidades serían las siguientes:
  - $P_k(z)$  tiene una raíz cuádruple. En este caso, puede demostrarse que la primera derivada de la curtosis no nula es impar, por lo que el extremo será un punto de inflexión. Pero esto es incompatible con el comportamiento asintótico de  $K'(z)$ .
  - $P_k(z)$  tiene una raíz triple y una simple.  $K'(z)$  en este caso presenta un máximo y un mínimo.
  - $P_k(z)$  tiene dos raíces dobles, lo que implica que  $K'(z)$  tiene dos puntos de inflexión y de nuevo esto no es compatible con el comportamiento de  $K'(z)$  en campo lejano.
  - $P_k(z)$  tiene una raíz doble (punto de inflexión) y dos raíces simples (correspondientes a un máximo y un mínimo).

En iii. para distinguir los dos casos posibles vamos a analizar el número de raíces reales de  $dP_k(z)/dz$  utilizando un procedimiento análogo al empleado para determinar las raíces reales de  $P_k(z)$ . De éste puede comprobarse que dicho número viene dado por el signo de  $\Delta_1$ , definido en la sección 6.3. Se tiene entonces que

- en el caso de una raíz triple y una simple, la derivada de  $P_k(z)$  toma la forma

$$P'_k(z) = (z - z_1)^2 \{3(z - z_2) + (z - z_1)\}, \quad (6.A.6)$$

lo que implica que  $P'_k(z)$  posee una raíz doble y una simple. Esto se satisface cuando  $\Delta_1 = 0$ .

- en el caso de una raíz doble y dos raíces simples, la derivada de  $P_k(z)$  es

$$P'_k(z) = (z - z_1)\{2(z - z_2)(z - z_3) + (z - z_1)[(z - z_2) + (z - z_3)]\}. \quad (6.A.7)$$

En este caso  $P'_k(z)$  no tiene raíces múltiples. Y esto se cumple cuando  $\Delta_1 \neq 0$ .

Consideremos ahora la situación en la cual  $m = 0$  en (6.A.1). Puede probarse entonces que el tipo de raíces de  $P_k(z)$  sigue viniendo dado por el signo de  $\Delta$ , particularizado para  $m = 0$ , con lo que

- Si  $\Delta > 0$  tenemos tres raíces simples.
- Si  $\Delta < 0$ , tenemos una sola raíz real.
- Si  $\Delta = 0$  tenemos raíces múltiples. En este último caso hay dos posibilidades:

- Que  $P_k(z)$  tenga una raíz doble y una sencilla (correspondiente a un punto de inflexión y un máximo o un mínimo). En este caso

$$P_k(z) = (z - z_1)^2(z - z_2) \quad (6.A.8)$$

y su derivada poseería dos raíces simples. Esto se cumplirá cuando  $q^2 > 3pr$ .

- Que  $P_k(z)$  tenga una raíz triple (que sería un máximo o un mínimo). Ahora

$$P_k(z) = (z - z_1)^3 \quad (6.A.9)$$

y la derivada tendría una raíz doble, lo que se cumplirá cuando  $q^2 = 3pr$ .

## Apéndice 6.B

En este apéndice se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que el extremo de la curtosis se alcance en la cintura del haz es que en dicho plano se cumpla  $s = 0$ , o lo que es lo mismo  $\langle x^3 u \rangle = 0$ .



Partiendo de la condición de extremo de la curtosis

$$0 = mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s, \quad (6.B.1)$$

si tomamos como plano de la cintura el plano  $z = 0$ , entonces para que haya un extremo en dicho plano será necesario que  $s = 0$ , y como  $\langle xu \rangle = 0$  en la cintura, se tendrá  $\langle x^3u \rangle = 0$ . Esto se cumple en particular para los haces que son reales en su cintura. La implicación inversa se demuestra de forma análoga. Nótese también que, para los haces reales, dado que  $m = q = s = 0$ , la derivada segunda de la curtosis en la cintura toma el valor

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z^2} = \frac{4r}{\langle x^2 \rangle^3}. \quad (6.B.2)$$

Por consiguiente, en la cintura habrá un máximo o un mínimo de la curtosis dependiendo del signo de  $r$ .

## Capítulo 7

# Conformado punto a punto de haces luminosos: una aplicación

### 7.1 Introducción

Como ya dijimos en el capítulo 1, en muchas aplicaciones se requiere una determinada forma del perfil espacial de un haz, es decir, es necesaria una redistribución de la intensidad luminosa. Existen en la literatura numerosos artículos basados en el conformado punto a punto, los cuales manejan directamente el perfil de intensidad del haz, modificándolo para obtener distribuciones prefijadas. En algunos casos, estos métodos proporcionan expresiones analíticas pero, en su gran mayoría, los resultados son de tipo numérico.

En esta introducción enumeraremos algunos de los procedimientos existentes en la literatura para posteriormente centrarnos en una aportación nuestra original al conformado punto a punto.

Los diversos métodos de conformado están basados en diferentes técnicas: así Frieden [FR65] utiliza la refracción en dos lentes esféricas planas o un sistema de dos lentes aberradas para la obtención de una onda plana con perfil de intensidad uniforme a partir de un haz colimado pero con perfil gaussiano. En dicho trabajo se calcula numéricamente la asfericidad que deben tener las lentes para generar dicho perfil. También, haciendo uso del fenómeno de la refracción, Rhodes y Shealy [RS80] obtuvieron un sistema de ecuaciones diferenciales que permitía determinar la forma analítica específica de las superficies esféricas necesarias para transformar una onda plana de perfil arbitrario de intensidad en una distribución uniforme. En aquel caso las ecuaciones tuvieron que ser resueltas mediante métodos numéricos. Otros dispositivos conformadores de haz, también basados en la misma idea, son

los ya citados axicones, mediante los cuales pueden obtenerse distribuciones anulares de intensidad.

Algunos métodos, como el propuesto por Ih [III72], están basados en fenómenos de absorción. En el trabajo mencionado se considera una lente plano-convexa de un vidrio neutro absorbente para generar de nuevo un haz de intensidad uniforme a partir de un haz gaussiano.

En cuanto al conformado por métodos apodizantes mencionaremos los trabajos de Casperson *et al.* [CK77] y de Lee [LE81] en los cuales se utilizan filtros de fase generados por ordenador, así como los de Han *et al.* [H183], en los cuales se aplican filtros holográficos. En todos estos trabajos la finalidad es, de nuevo, la obtención de perfiles de intensidad uniforme a partir de haces gaussianos.

Por otra parte, mediante el manejo de la polarización, Simmons *et al.* [SL74] fueron capaces de modificar el perfil de intensidad de un haz utilizando los efectos Faraday y Pockels para conformar el haz.

La difracción de un haz luminoso fue igualmente aprovechada por algunos autores para modificar la distribución de intensidad del haz. Debemos citar aquí los artículos de Veldkamp [VE82] y Streibl [ST89].

Por último, mencionaremos diversos trabajos basados en la reflexión en ciertas superficies. Este procedimiento presenta la ventaja del total aprovechamiento de la intensidad del haz, así como de evitar problemas de calentamiento o ruptura debido a la absorción de energía por parte de las superficies refractantes.

Entre los trabajos publicados que utilizan superficies reflectantes, podemos citar los de Burhard y Shealy [BS73,SB73,BS75,BS81], los cuales obtienen expresiones analíticas para la reflexión especular de una onda plana, una fuente puntual o una fuente extensa sobre una superficie arbitraria, siendo válidas las ecuaciones para cualquier receptor.

Otros autores [MII74] consideraron el problema inverso, y encontraron la ecuación diferencial que proporcionaba la forma concreta de la superficie reflectante necesaria para obtener una distribución de intensidad prefijada. En algunos casos esta ecuación pudo resolverse analíticamente, pero en la mayoría de los mismos, esto debió hacerse numéricamente. Por último, en ciertos trabajos [III90] se ha utilizado la reflexión de un haz en el interior de un paralelepípedo de caras reflectantes, también con el fin de producir un perfil uniforme.

En la siguiente sección proponemos una aplicación basada igualmente en la reflexión en superficies esféricas. Veremos cómo pueden obtenerse distribuciones lineales (unidimensionales) de intensidad gaussiana sobre ciertas

regiones planas a partir de la reflexión en un cilindro elíptico.

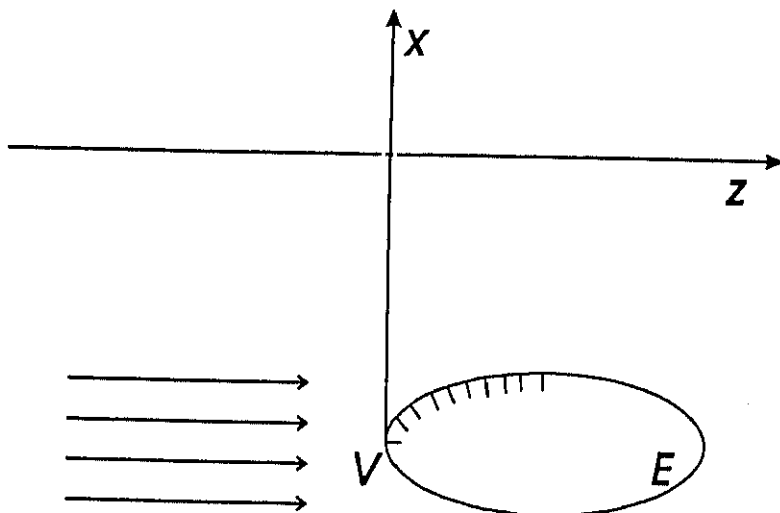
## 7.2 Reflexión sobre un cilindro elíptico

Como es conocido, el modo fundamental Hermite-Gauss producido en cavidades láser es un campo cuya distribución de intensidad es gaussiana, con simetría circular en cualquier plano normal a la dirección de propagación del haz (eje del resonador) [SI86]. Sin embargo, distribuciones lineales gaussianas (de uso, por ejemplo, en la generación de transmitancias lineales gaussianas [SM92,SM93a], que podrían ser empleadas para mejorar la calidad de los haces astigmáticos emergentes de diodos láser monomodo) no pueden ser directamente obtenidas a partir del haz de salida de un resonador láser. Para producirlas se propone en lo que sigue un método simple de conformado punto a punto basado en la reflexión de ondas planas sobre superficies elípticas. Por medio de este método pueden ser sintetizadas tales distribuciones de intensidad sobre ciertas regiones planas. Por otra parte, con este tipo de sistema óptico pueden emplearse fuentes no-monocromáticas, evitando de esta forma la aparición de ciertos efectos molestos en láseres, como son el moteado láser (*speckle*) o los anillos de difracción (*ringing*).

El método propuesto está esquematizado en la figura 7.1. Una onda plana policromática (de ancho espectro), se propaga en la dirección del eje  $z$  e incide sobre una superficie reflectante en forma de cilindro elíptico cuya sección transversal en cualquier plano normal al eje  $y$  es una elipse  $E$ . El haz reflejado es finalmente recogido sobre una superficie receptora plana definida por la ecuación  $x = x_0$  (tomando como origen del eje  $x$  el vértice de la elipse  $V$ ), la cual supondremos que contiene el eje  $z$  (ver figura 7.1).

Por la geometría del sistema puede observarse que los rayos incidentes son paralelos al eje  $z$ , y todos los rayos reflejados están contenidos en planos perpendiculares al eje  $y$ . En otras palabras, sólo debemos considerar rayos meridionales, y la distribución de luz reflejada será independiente de la coordenada  $y$ .

Nótese que, desde un punto de vista práctico, no es difícil obtener un haz bastante colimado, al menos sobre las regiones que nosotros consideramos aquí. Por otra parte, puesto que la incidencia rasante está explícitamente excluida, podemos despreciar los efectos de difracción en los bordes. También, por simplicidad, consideramos que la reflectividad permanece constante para los ángulos de incidencia y los intervalos de longitudes de onda que manejaremos aquí (de hecho, los cambios en la reflectividad no



**Figura 7.1:** Esquema del sistema: los ejes mayor y menor de la elipse  $E$  son paralelos a los ejes  $z$  y  $x$  respectivamente. El plano  $z = 0$  es tangente a la elipse en su vértice  $V$ .

superan el 2 %, pudiendo reducirse aún más eligiendo apropiadamente la polarización del haz y los materiales de recubrimiento).

Para calcular la intensidad reflejada en un plano arbitrario  $x = x_0$  aplicaremos un método de cálculo basado en la óptica geométrica no-paraxial [WE74].

Utilizaremos la ecuación general de una cuádrica en dos dimensiones (vamos a trabajar sólo con superficies cilíndricas), es decir,

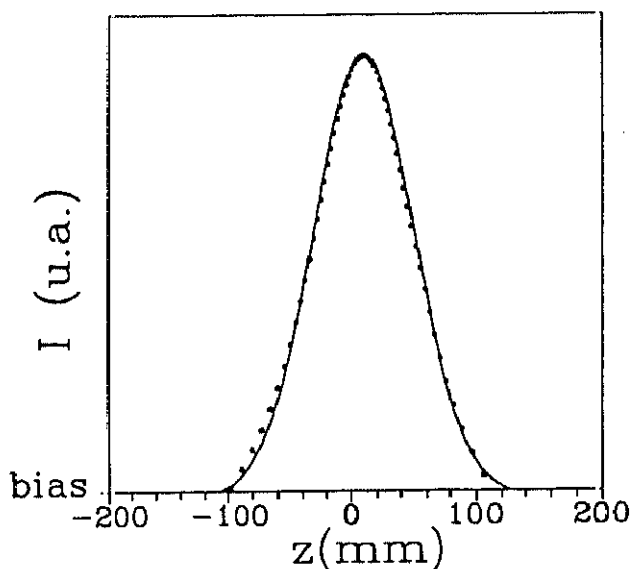
$$z(x) = \frac{cx^2}{1 + \sqrt{1 - m_e c^2 x^2}}, \quad (7.1)$$

donde  $c$  está relacionado con el tamaño del eje mayor de la elipse  $a_m$  en la forma  $a_m = 2/(cm_e)$  y  $m_e$  con la excentricidad  $\epsilon$  en la forma,

$$\epsilon = \begin{cases} \sqrt{1 - m_e} & \text{si } m_e > 0, \\ \sqrt{1 + m_e} & \text{si } m_e < 0. \end{cases}$$

Dependiendo de sus valores tendremos:

- Para  $\epsilon > 1$  una elipse prolata.



**Figura 7.2:** Comparación entre una función gaussiana más una constante (línea continua) y la intensidad reflejada en el plano  $x_0 = 6$  cm (línea punteada). Parámetros optimizados del cilindro elíptico: excentricidad  $\epsilon = 0.84$  y anchura del eje mayor  $a_m = 1.33$  cm.

- El valor de  $\epsilon = 1$  corresponde a una esfera.
- Si  $0 < \epsilon < 1$  es una elipse oblata.
- Cuando  $\epsilon = 0$  se trata de una parábola.
- Cuando  $\epsilon < 0$  la curva corresponde a una hipérbola.

En nuestro caso, el cilindro elíptico elegido (optimizado para nuestros propósitos) es oblato y de excentricidad  $\epsilon = 0.84$ . Aplicaremos en nuestro cálculo la ley de intensidades de la óptica geométrica [BW75]

$$I_1 dS_1 = I_2 dS_2, \quad (7.2)$$

donde  $I_1$  e  $I_2$  designan las intensidades asociadas a dos elementos de superficie  $dS_1$  y  $dS_2$  perpendiculares a cada pincel elemental de rayos. Tras la correspondiente computación, la distribución de intensidad en la superficie de un receptor normal al eje  $x$  resulta ser la mostrada en la figura 7.2 para un plano arbitrario  $y = y_0$ .

En dicha figura se compara también esta distribución con un perfil gaussiano. Como puede apreciarse, se logra un buen ajuste en una región de aproximadamente 20 cm para  $x_0 = 6$  cm (los restantes valores numéricos se dan en la figura 7.2).

Hay que señalar que, para obtener el mejor ajuste, se ha introducido en ordenadas un término constante (*bias*) sumado al perfil gaussiano. Este término *bias* puede englobarse, por ejemplo, en el procedimiento fotográfico requerido para producir una transmitancia lineal gaussiana mediante el revelado de la placa en la región lineal de la curva transmitancia-exposición.

Por otra parte, la anchura de nuestra distribución de intensidad gaussiana puede ser fácilmente controlada a voluntad. Para ello basta modificar la posición relativa de la superficie receptora desplazándola con respecto al cilindro elíptico. Y en cuanto al pico de la intensidad reflejada, éste puede ser seleccionado eligiendo adecuadamente la intensidad del haz de entrada.

## Capítulo 8

# Conclusiones

A partir de los resultados expuestos en esta memoria podemos concluir con carácter general que

- Es posible caracterizar mediante parámetros medibles de tipo global el comportamiento espacial de haces luminosos parcialmente coherentes propagándose a través de sistemas ópticos no-ABCD. Dicho comportamiento se ha analizado evaluando ciertos factores de calidad del haz, recientemente introducidos en la literatura, que lo caracterizan en campo próximo y lejano conjuntamente.
- Es posible caracterizar la forma del perfil espacial de un haz luminoso genérico mediante un parámetro global medible de cuarto orden, denominado curtosis. Dicho parámetro permite, además, clasificar los haces de acuerdo a su comportamiento bajo propagación libre.
- Es posible lograr un conformado global de los haces mediante la utilización de sistemas ópticos no-ABCD. Más aún, en la mayoría de los casos, el empleo de esta clase de sistemas no solo es posible sino necesaria.

Como conclusiones más específicas podemos señalar, en particular, que

- Se han obtenido expresiones analíticas de la variación de la calidad de un haz cuando se propaga a través de:
  - \* axicones,
  - \* lentes toroidales,
  - \* transmitancias de fase cuártica bi y tridimensionales,
  - \* lentes con aberración esférica.



- Se ha demostrado que, en determinados casos, la aberración esférica puede mejorar globalmente la calidad de un haz luminoso.
- Se ha visto que, para ciertos haces, el empleo de dos lentes cilíndricas idénticas ortogonales con aberración esférica proporciona mejor calidad de haz que la utilización de una única lente aberrada con simetría rotacional.
- Se ha establecido que el perfil de un haz gaussiano puede conformarse de forma controlada, haciéndolo más picudo o aplanado, mediante el empleo de lentes aberradas.
- Se ha encontrado que para mejorar la calidad de un haz mediante una transmitancia de fase cuártica es necesario posicionar ésta en algún plano donde la curtosis no alcance un extremo.
- Se ha introducido el denominado vector de propagación de la curtosis, el cual permite estudiar de forma compacta el comportamiento de dicho parámetro a través de sistemas ópticos de primer orden.
- Por último, y como aplicación del conformado punto a punto, se ha propuesto un procedimiento de obtención de distribuciones lineales gaussianas de intensidad mediante la reflexión de un haz plano, no necesariamente cuasimonocromático, en un cilindro elíptico reflectante.

# Bibliografía

## Referencias básicas de la tesis

Parte de los resultados que aparecen en esta memoria han sido presentados en los siguientes trabajos:

- G. Piquero, P. M. Mejías y R. Martínez-Herrero, "Linear Gaussian intensity distributions synthesized by reflection on elliptic cylinders: a proposal," *Applied Optics*, **31**, 2970 (1992).
- R. Martínez-Herrero, P. M. Mejías y G. Piquero "Quality improvement of partially coherent symmetric-intensity beams caused by quartic phase distortions," *Optics Letters*, **17**, 1650 (1992).
- P. M. Mejías, R. Martínez-Herrero, J. Serna, G. Piquero y M. Sánchez, "Caracterización espacial y calidad de haces luminosos a través de sistemas ópticos generales," *Óptica Pura y Aplicada*, **26**, 774 (1993).
- G. Piquero, P. M. Mejías y R. Martínez-Herrero, "On the kurtosis parameter of laser beams," en *Laser Beam Characterization*, P. M. Mejías, H. Weber, R. Martínez-Herrero y A. González-Ureña, editores (SEDO, Madrid, 1993), p. 141.
- R. Martínez-Herrero, G. Piquero y P. M. Mejías, "Sharpness changes of Gaussian beams induced by aspherical lenses," *Proc. Soc. Photo-Opt. Instr. Eng.*, **1983**, 138 (1993).
- G. Piquero, P. M. Mejías y R. Martínez-Herrero, "Quality changes of Gaussian beams propagating through axicons," *Optics Communications*, **105**, 289 (1994).
- G. Piquero, P. M. Mejías y R. Martínez-Herrero, "Sharpness changes of Gaussian beams propagating through aberrated lenses," *Optics Communications*, **107**, 179 (1994).

- R. Martínez-Herrero, G. Piquero y P. M. Mejías, "Beam quality changes produced by quartic phase transmittances," *Optical and Quantum Electronics*. Aceptado para publicación.
- R. Martínez-Herrero, G. Piquero y P. M. Mejías, "On the propagation of the kurtosis parameter of laser beams," (enviado para publicación).

## Referencias generales

- [AH71] J. A. Arnauld, W. M. Hubbard, G. D. Mandeville, B. de la Clavière, E. A. Franke y J. M. Franke, "Technique for fast measurement of gaussian laser beam parameters," *Appl. Opt.*, **10**, 2775-2776 (1971).
- [AK69] J. A. Arnaud y H. Kogelnik, "Gaussian Light Beams with General Astigmatism," *Appl. Opt.*, **8**, 1687-1693 (1969).
- [BA79] M. J. Bastiaans, "Wigner distribution function and its application to first-order optics," *J. Opt. Soc. Am.*, **69**, 1710-1716 (1979).
- [BA86] M. J. Bastiaans, "Application of the Wigner distribution function to partially coherent light," *J. Opt. Soc. Am. A*, **3**, 1227-1246 (1986).
- [BA89] M. J. Bastiaans, "Propagation laws for the second-order moments of the Wigner distribution function in first-order optical systems," *Optik*, **82**, 173-181 (1989).
- [BA90] K. P. Balanda y H. L. Macgillivray, "Kurtosis and spread," *Canad. J. Statist.*, **18**, 17-30 (1990).
- [BE91] P.-A. Bélanger, "Beam propagation and the ABCD ray matrices," *Opt. Lett.*, **16**, 196-198 (1991).
- [BH87] W.L. Bohn y Th. Hall, "Effect of Beam Quality on the Scaling of High-Energy Flow Lasers," *Gas Flow and Chemical Lasers*, E. Rosenwaks, ed. (Springer, Berlin, 1987), pp. 90-95.
- [BM90] K. F. Badawi, Th. Manderscheid y P. Gorria, "Characterization methodology of a High Power Laser Beam," Proceedings of the VI Conference of High Power Laser, *LASER-6: Welding, Treating, Machining with High Power Laser* (Paris, 1990).
- [BP91] P.-A. Bélanger y C. Paré, "Optical resonators using graded-phase mirrors," *Opt. Lett.*, **16**, 1057-1059 (1991).
- [BR78] P.-A. Bélanger y M. Rioux, "Ring pattern of a lens-axicon doublet illuminated by a Gaussian beam," *Appl. Opt.*, **17**, 1080-1086 (1978).

- [BS73] D. G. Burkhard y D. L. Shealy, "Flux density for ray propagation in geometrical optics," *J. Opt. Soc. Am.*, **63**, 299-304 (1973).
- [BS75] D. G. Burkhard y D. L. Shealy, "Specular aspheric surface to obtain a specified irradiance from discrete or continuous line source radiation: design," *Appl. Opt.*, **14**, 1279-1284 (1975).
- [BS81] D. G. Burkhard y D. L. Shealy, "Simplified formula for the illuminance in an optical system," *Appl. Opt.*, **20**, 897-909 (1981).
- [BW75] M. Born y E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon Press, Nueva York 1975).
- [CK77] L. W. Casperson, N. K. Kincheloe y O. M. Stafsudd, "Phase plates for laser beam compensation," *Opt. Comm.*, **21**, 1-4 (1977).
- [CW78] E. Collet y E. Wolf, "Is complete spatial coherence necessary for the generation of highly directional light beams?" *Opt. Lett.*, **2**, 27-29 (1978).
- [DC83] J. Deschamps, D. Courjon, y J. Bulabois, "Gaussian Schell-model sources: an example and some perspectives," *J. Opt. Soc. Am.*, **73**, 256-261 (1983).
- [DL93] K. Du y P. Loosen, "Characterization of laser beam using statistical optics," en *Laser Beam Characterization*, P. M. Mejías, H. Weber, R. Martínez-Herrero y A. González-Ureña, editores (SEDO, Madrid, 1993), 123-130.
- [FL92] J. M. Fleischer, "Standard for the measurement of beam widths, beam divergence, and beam propagation factor," *Photon. Inc*
- [FO90] M. Forbes, "Laser beam spatial measurement: comparing instruments," *Lasers & Optronics*, (Abril 1990).
- [FR65] B. R. Frieden, "Lossless Conversion of a plane laser wave to a plane wave of uniform irradiance," *Appl. Opt.*, **4**, 1400-1403 (1965).
- [FS82] A. T. Friberg y R. J. Sudol, "Propagation parameters of Gaussian Schell-model beams," *Opt. Commun.*, **41**, 383-387 (1982).
- [GO68] J. W. Goodman *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, Nueva York, 1968).

- [GO80] F. Gori, "Collett-Wolf sources and multimode lasers," *Opt. Commun.*, **34**, 301-305 (1980).
- [GR65] I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products* (Academic Press, Inc, San Diego 1980, cuarta edición) p. 655.
- [HI83] C-Y. Han, Y. Ishii y K. Murata, "Reshaping collimated laser beams with Gaussian profile to uniform profiles," *Appl. Opt.*, **22**, 3644-3647 (1983).
- [HS85] D. Hull y A. F. Stewart, "Laserbeam profiles-principles and definitions," *Laser & Applications*, 75-80 (Octubre, 1985).
- [HS85a] D. Hull y A. F. Stewart, "Laserbeam profiles-equipments and techniques," *Laser & Applications*, 71-76 (Noviembre, 1985).
- [IH72] C. S. Ih, "Absorption lens for producing uniform laser beam," *Appl. Opt.*, **11**, 694-695 (1972).
- [IH90] K. Iwasaki, T. Hayashi, T. Goto y S. Shimizu, "Square and uniform laser output device: theory and applications," *Appl. Opt.*, **90**, 1736-1744 (1990).
- [JW57] A. Jenkins y H. E. White, *Fundamentals of Optics*, Capítulo IX, (McGraw-Hill, Nueva York, 1957).
- [LD93] P. Loosen, K. Du. C. Maier, O. Märten y M. Scholl, "Laser beam characterization y measurement techniques," en *Laser Beam Characterization*, P. M. Mejías, H. Weber, R. Martínez-Herrero y A. González-Ureña, editores (SEDO, Madrid, 1993), 249-262.
- [LE81] W-H. Lee, "Method for converting a Gaussian beam into a uniform beam," *Opt. Comm.*, **36**, 469-471 (1981).
- [LP88] S. Lavi, R. Prochaska y E. Keren, "Generalized beam parameters and transformation laws for partially coherent light," *Appl. Opt.*, **27**, 3696-3703 (1988).
- [MA70] K. V. Mardia, "Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications," *Biometrika*, **57**, 519-530 (1970).
- [MA91] V. N. Mahajan, *Aberration Theory Made Simple*, (SPIE Optical Engineering Press, Washington 1991).

- [MA92] P. H. Malyak, "Two-mirror unobscured optical system for reshaping the irradiance distribution of a laser beam," *Appl. Opt.*, **22**, 4377-4383 (1992).
- [MC54] J. H. McLeod, "The axicon: a new type of optical element," *J. Opt. Soc. Am.*, **44**, 592-597 (1954).
- [MC60] J. H. McLeod, "Axicons and their uses," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 166-169 (1960).
- [MD92] A. Marcano y G. Da Costa, "Microstructure of the laser-induced thermal lens," *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, **1626**, 348-352 (1992).
- [MK79] K. V. Mardia, J. T. Kent y J. M. Bibby, *Multivariate analysis*, Capítulo I, (Academic Press, Nueva York 1979).
- [MH74] J. H. McDermit y T. E. Horton, "Reflective optics for obtaining prescribed irradiative distributions from collimated sources," *Appl. Opt.*, **13**, 1444-1450 (1974).
- [MM90a] R. Martínez-Herrero y P. M. Mejías, "Beam quality in laser amplifiers," *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, **1397**, 623-626 (1990).
- [MM90b] R. Martínez-Herrero, P. M. Mejías, J. L. H. Neira y M. Sánchez, "Propagation invariance of laser beam parameters through optical systems," *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, **1397**, 627-630 (1990).
- [MM90c] R. Martínez-Herrero y P. M. Mejías, "Laser beam propagation through inhomogeneous amplifying media," *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, **1397**, 619-622 (1990).
- [MM91] R. Martínez-Herrero y P. M. Mejías, "Beam characterization through active media," *Opt. Commun.*, **85**, 162-166 (1991).
- [MM92a] R. Martínez-Herrero, P. M. Mejías, M. Sánchez y J. L. H. Neira, "Third and fourth-order parametric characterization of partially coherent beams propagating through ABCD optical systems," *Opt. Quantum Electron.*, **24**, S1021-S1026 (1992).

- [MM92b] R. Martínez-Herrero y P. M. Mejías, "Expansion of the cross spectral density function of general fields and its application to beam characterization," *Opt. Commun.*, **94**, 197-202 (1992).
- [MM92c] R. Martínez-Herrero y P. M. Mejías, "Parametric characterization of depleted-centre intensity beams," en *Laser Energy Distribution Profiles*, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., **1834**, 74-78 (1992).
- [MM93] R. Martínez-Herrero y P. M. Mejías, "Quality improvement of symmetric-intensity beams propagating through pure phase plates," *Opt. Commun.*, **95**, 18 (1993).
- [MM93a] R. Martínez-Herrero y P. M. Mejías, "On the parametric characterization of general light beams," en *International Trends in Optics*, vol II (Academic Press), en prensa.
- [MM93b] R. Martínez-Herrero y P. M. Mejías, "Parametric characterization of hard-edge diffracted beams," en *Laser Beam Characterization*, P. M. Mejías, H. Weber, R. Martínez-Herrero y A. González-Ureña, editores (SEDO, Madrid, 1993), 197-206.
- [MM93c] R. Martínez-Herrero, P. M. Mejías, N. Hodgson y H. Weber, "On the influence of thermally-induced spherical aberration in laser cavities: second-order moments resonance conditions," en *Laser Beam Characterization*, P. M. Mejías, H. Weber, R. Martínez-Herrero y A. González-Ureña, editores (SEDO, Madrid, 1993), 227-236.
- [MM93d] R. Martínez-Herrero, P. M. Mejías y H. Weber, "On the different definitions of laser beam moments," *Opt. Quantum Electron.*, **25**, 423-428 (1993).
- [MM93e] R. Martínez-Herrero y P. M. Mejías, "Spatial characterization of partially coherent beams," *Proc. Soc. Photo-Opt. Instr. Eng.*, **1983**, 513-518 (1993).
- [MM93f] R. Martínez-Herrero y P. M. Mejías, "Second-order spatial characterization of hard-edge diffracted beams," *Opt. Lett.*, **18**, 1669-1671 (1993).



- [MM94] P. M. Mejías y R. Martínez-Herrero, "On the parametric characterization of pulsed beams," en *Laser Beam Characterization II*, J. Lüdtke, H. Weber, N. Reng y P. M. Mejías, editores, FLI Berlin (1994). En prensa.
- [MM94a] R. Martínez-Herrero, P. M. Mejías y C. Martínez, "On the quadratic form of the phase at the far-field: Defining a new parameter," en *Laser Beam Characterization II*, J. Lüdtke, H. Weber, N. Reng y P. M. Mejías, editores, FLI Berlin (1994). En prensa.
- [MM94b] R. Martínez-Herrero, P. M. Mejías y M. Arias, "Beam propagation through hard-edge apertures," en *Laser Beam Characterization II*, J. Lüdtke, H. Weber, N. Reng y P. M. Mejías, editores, FLI Berlin (1994). En prensa.
- [ND89] J. L. H. Neira, J. Delgado, G. Calvo y M. Sánchez, "Beam quality in high-power laser amplification," *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, **132**, 1-8 (1989).
- [OG78] J. W. Ogland, "Mirror system for uniform transformation in high-power annular lasers," *Appl. Opt.*, **17**, 2917-2923 (1978).
- [PA92] M. A. Porrás, J. Alda y E. Bernabeu, "Complex beam parameter and ABCD law for non-Gaussian and non-spherical light beams," *Appl. Opt.*, **31**, 6389-6402 (1992).
- [RE92] N. Reng y B. Eppich, "Definition and measurements of high-power laser beam parameters," *Opt. Quantum Electron.*, **24**, S973-S992 (1992).
- [RS93] C. B. Roundy, G. E. Slobodzian, K. Jensen y D. Ririe, "Digital imaging produces fast and accurate beam diagnosis," *Laser Focus World*, **29**, 117-125 (1993).
- [RS80] P. W. Rhodes y D. L. Shealy, "Refractive optical systems for irradiance redistribution of collimated radiation: their design and analysis," *Appl. Opt.*, **19**, 3545-3553 (1980).
- [RT78] M. Rioux, R. Tremblay y P.-A. Bélanger, "Linear, annular and radial focusing with axicons and applications to laser machining," *Appl. Opt.*, **17**, 1532-1536 (1978).

- [RU87] D. Ruppert, "What is kurtosis?," *The American Statistician*, **41**, 1-5 (1987).
- [SB73] D. L. Shealy y D. G. Burkhard, "Caustic surfaces and irradiance for reflection and refraction from an ellipsoid, elliptic paraboloid, and elliptic cone," *Appl. Opt.*, **12**, 2955-2959 (1973).
- [SC93] M. Scholl, "Analysis of the optical transformation properties of two-dimensional beam parameters and consequences for their measurability," en *Laser Beam Characterization*, P. M. Mejías, H. Weber, R. Martínez-Herrero y A. González-Ureña, editores (SEDO, Madrid, 1993), 287-298.
- [SE93] J. Serna Galán, "*Caracterización espacial de haces luminosos bajo propagación a través de sistemas ópticos de primer orden*," Tesis Doctoral presentada en la Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid (Septiembre 1993).
- [SI86] A. Siegman, *Lasers*, (Oxford University Press, Oxford, 1986).
- [SI90] A. E. Siegman, "New developments in laser resonators," en *Laser resonators*, Dale A. Holmes, Ed. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., **1224**, 2-14 (1990).
- [SI93] A. E. Siegman, "Binary phase plates cannot improve laser beam quality," *Appl. Opt.*, **23**, 573-577 (1993).
- [SI93a] A. E. Siegman, "Analysis of laser beam quality degradation caused by spherical aberration," *Appl. Opt.*, **23**, 5893-5901 (1993).
- [SI93b] A. E. Siegman, "Defining and measuring laser beam parameters," en *Laser Beam Characterization*, P. M. Mejías, H. Weber, R. Martínez-Herrero y A. González-Ureña, editores (SEDO, Madrid, 1993), 1-21.
- [SJ89] A. E. Siegman, T. Johnston y M. W. Sasnett, "Defining and measuring laser beam quality: the  $M^2$  factor." Borrador del 17 de agosto de 1989 (no publicado). Ver [SI90].
- [SL74] W.W. Simmons, G. W. Leppelmeier y B. C. Johnson, "Optical beam shaping devices using polarization effects," *Appl. Opt.*, **74**, 1629-1632 (1974).

- [SM88] R. Simon, N. Mukunda y E. C. G. Sudarshan, "Partially coherent beams and a generalized ABCD-law," *Opt. Comm.*, **65**, 322-328 (1988).
- [SM90] J. Serna, R. Martínez-Herrero y P. M. Mejías, "Spatial characterization of high-power multimode laser beams," *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, **1397**, 631-634 (1990).
- [SM91] J. Serna, R. Martínez-Herrero y P. M. Mejías, "Parametric characterization of general partially coherent beams propagating through ABCD optical systems," *J. Opt. Soc. Am. A*, **8**, 1094-1098 (1991).
- [SM92] J. Serna, P. M. Mejías y R. Martínez-Herrero, "Beam quality changes of Gaussian Schell-model fields propagating through Gaussian apertures," *App. Opt.*, **31**, 4330 (1992).
- [SM92a] J. Serna, P. M. Mejías y R. Martínez-Herrero, "Beam quality dependence on the coherence length of Gaussian Schell-model fields propagating through ABCD optical systems," *J. Mod. Opt.*, **39**, 625-635 (1992).
- [SM92b] J. Serna, P. M. Mejías y R. Martínez-Herrero, "Quality changes of beams propagating through super-Gaussian apertures," en *Laser Energy Distribution Profiles*, *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, **1834**, 162-168 (1992).
- [SM92c] J. Serna, P. M. Mejías y R. Martínez-Herrero, "Rotation of partially coherent beams propagating through free space," *Opt. Quantum Electron.*, **24**, S873-S880 (1992).
- [SM92d] J. Serna, P. M. Mejías y R. Martínez-Herrero, "Beam quality in monomode diode lasers," *Opt. Quantum Electron.*, **24**, S881-S887 (1992).
- [SM93a] J. Serna, P. M. Mejías y R. Martínez-Herrero, "Beam quality changes in Hermite-Gauss mode fields propagating through Gaussian apertures," *App. Opt.*, **32**, 1084 (1993).
- [SN90] M. Sánchez, J. L. H. Neira, J. Delgado y G. Calvo, "Free propagation of high order moments of laser beam intensity distribution," *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, **1397**, 635-638 (1990).

- [SO89] L. M. Soroko, "Axicons and meso-optical imaging devices," en *Progress in Optics*, Capítulo II (Elsevier, Nueva York, 1989).
- [SR92] A. E. Siegman y J. Ruff, "Effects of spherical aberration on laser beam quality," en *Laser Energy distribution Profiles*, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., **1834**, 130-139 (1992).
- [ST89] N. Streibl, "Beam shaping with optical array generators," *J. Mod. Opt.*, **36**, 1559-1573 (1989).
- [TE93] E. A. Teppo, "Diagnostic tools for laser beam characterization," en *Laser Beam Characterization*, P. M. Mejías, H. Weber, R. Martínez-Herrero y A. González-Ureña, editores (SEDO, Madrid, 1993), 23-29.
- [US48] J. V. Uspensky, "*Theory of Equations*," (McGraw-Hill, New York 1948).
- [VE82] W. B. Veldkamp, "Laser beam profile shaping with interlaced binary diffraction gratings," *Appl. Opt.*, **21**, 3209-3212 (1982).
- [WA93] B. A. Ward, "In-process sampling and analysis of the far-field of a 21 kW CO<sub>2</sub> laser beam," en *Laser Beam Characterization*, P. M. Mejías, H. Weber, R. Martínez-Herrero y A. González-Ureña, editores (SEDO, Madrid, 1993), 53-64.
- [WE74] W. T. Welford, *Aberrations of the symmetrical optical system*, (Adam Hilger Ltd, Bristol 1986).
- [WE92] H. Weber, "Propagation of higher-order intensity moments in quadratic-index media," *Opt. Quantum Electron.*, **24**, S1027-S1049 (1992).