

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Departamento de Informática y Automática



TESIS DOCTORAL

Análisis medio de algoritmos de reducción sobre árboles

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

María Inés Fernandez Camacho

Madrid, 2015

ET
JCM
1988

T
510.5
FER

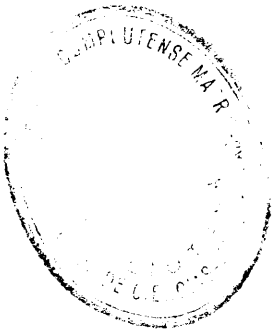
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Informática y Automática

BIBLIOTECA UCM



5304845224

**ANALISIS MEDIO DE ALGORITMOS
DE REDUCCION SOBRE ARBOLES**



B.35.928

María Inés Fernández Camacho
Madrid, 1988

Colección Tesis Doctorales. N.º 382/88

© María Inés Fernández Camacho

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 - 28015 Madrid
Madrid, 1988
Ricoh 3700
Depósito Legal: M-26565-1988

NC: X-53-017267-3

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Departamento de Informática y Automática

Facultad de Ciencias Matemáticas

**ANALISIS MEDIO DE ALGORITMOS
DE REDUCCION SOBRE ARBOLES**

MARIA INES FERNANDEZ CAMACHO

Director del trabajo: J.M. STEYAERT

Octubre 1987

Esta Tesis fue leída el día once de enero de 1988, en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, ante el siguiente tribunal :

Presidente : Dr. Antonio Vaquero Sánchez

Vocales : Dr. Philippe Flajolet

Dr. José Díaz Cort

Dr. Mario Rodríguez Artalejo

(Secretario):Dr. Francisco Luis Hernández Rodríguez,

habiendo obtenido la calificación de

Apto CUM LAUDE por unanimidad .

**ANALISIS MEDIO DE ALGORITMOS
DE REDUCCION SOBRE ARBOLES**

**Memoria presentada por MARIA INES FERNANDEZ CAMACHO
para la obtención del Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas
por la Universidad Complutense de Madrid.**

Madrid, Octubre de 1987

Trabajo dirigido por el Profesor Dr. JEAN-MARC STEYAERT.

A todos los míos

Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor Josep Díaz el asesoramiento y ayuda que desde un principio me brindó, sin los cuales este trabajo no habría surgido ; así como el haberme presentado al profesor Jean-Marc Steyaert, y haberme facilitado mi primera estancia en l'Ecole Polytechnique durante noviembre de 1985, dentro del marco de la Cooperación entre dicho centro y la Facultad de Informática de Barcelona ; estancia que me permitió comenzar a trabajar bajo la dirección del profesor Steyaert.

Quiero expresar mi sincero agradecimiento al profesor Steyaert por haberme dado el tema de este trabajo y haber aceptado dirigirlo. Quiero agradecerle asimismo su constante asesoramiento e interés, y su trato siempre amable en particular durante mis dos estancias en l'Ecole Polytechnique ; la segunda de ellas, de enero a abril de este año, tuvo lugar gracias a una beca de la Comunidad Autónoma de Madrid, y permitió dar un fuerte avance a este trabajo. Mi grato recuerdo a las personas con las que allí traté, y que siempre fueron agradables conmigo, en particular a los miembros del grupo Algoritmos del INRIA.

No puedo olvidar tampoco al profesor Rafael Casas junto al que trabajé en mis visitas a Barcelona y Paris , ni sus juicios siempre clarificadores.

Mi sincero agradecimiento a mis compañeros de Madrid testigos diarios del desarrollo de este trabajo y cuyo apoyo nunca me faltó, y en particular a Teresa Hortalá , David de Frutos , Mario Rodríguez y Jesús Esquinas .

Finalmente mi agradecimiento a todos mis próximos que han padecido la realización de este trabajo y que pese a ello nunca me fallaron.

Indice

- <u>Introducción</u>	i
- <u>Capítulo 1</u> : Introducción al análisis de algoritmos.	
Conceptos básicos.	1
1. Los árboles como estructuras de datos.	1
2. Familias de árboles. Series formales.	4
2.1 Familias simples.	5
2.2 Series formales de árboles.	6
3. Complejidad de algoritmos.	10
4. Recursos algebraicos de enumeración.	14
5. Métodos asintóticos.	22
6. Enumeración de familias simples.	28
- <u>Capítulo 2</u> : Evaluación del tamaño medio de árboles simplificados.	33
1. Idempotencia.	34
1.1 Árboles p-arios con q etiquetas para las hojas.	35
1.2 Árboles generales con q etiquetas para las hojas.	55
1.3 Familias simples.	62
2. Idempotencia más conmutatividad.	81
3. Nilpotencia.	90
3.1 Árboles binarios con dos etiquetas para las hojas.	90
3.2 Árboles m-arios.	98

- <u>Capítulo 3</u> : Comportamiento medio de algoritmos bottom-up sobre árboles.	118
1. Idempotencia.	124
1.1 Complejidad media.	124
1.2 Complejidad en el peor de los casos.	138
2. Idempotencia más conmutatividad.	142
2.1 Complejidad media.	142
2.2 Complejidad en el peor de los casos.	158
3. Nilpotencia.	169
3.1 Complejidad media.	169
3.2 Complejidad en el peor de los casos.	177
4. Algunas posibles vías de generalización.	178
- <u>Apéndice 1</u>	193
- <u>Apéndice 2</u>	197
- <u>Bibliografía</u>	214

Introducción

La importancia del análisis de algoritmos dentro de la Informática viene motivada de manera natural por la necesidad de definir criterios que permitan comparar la eficiencia de distintos algoritmos propuestos para la resolución de un mismo problema. Más en concreto la tarea del análisis de un algoritmo suele centrarse en la predicción de la cantidad de recursos, normalmente referidos a tiempo de ejecución o/y espacio de memoria que necesitaría el algoritmo al operar sobre datos de un determinado tipo. Aunque lo deseable sería poder disponer de algoritmos muy rápidos que consuman poca memoria, usualmente resulta difícil obtener algoritmos tales, y de hecho al intentar diseñar buenos algoritmos según uno de tales criterios suele provocarse la pérdida de eficiencia respecto al otro. No obstante parece que de entre ellos el que puede considerarse más importante es el tiempo de ejecución, dado que de poco sirve conocer la existencia de solución para un problema, si el método para obtenerla sobrepasa la esperanza de vida de varias generaciones humanas. Y en concreto este es el criterio que vamos a seguir en este trabajo. Bajo el mismo es bastante frecuente elegir como medida de complejidad el número de instrucciones ejecutadas, ponderadas o no por ciertos pesos según el tipo de instrucción de que se trate, o bien restringirse al número de operaciones consideradas como elementales que se ejecuten, etc... Incluso para determinados algoritmos pueden considerarse medidas todavía más sencillas, como puede ser el número de comparaciones significativas realizadas en algoritmos de ordenación, o en tests de igualdad entre estructuras de datos no elementales, etc... De modo que una vez fijada la medida de complejidad que nos

interesa, vamos a poder asociar a cada algoritmo una función de coste que nos permita conocer el crecimiento del tiempo de ejecución de un algoritmo en función del tamaño de sus datos, para lo cual habrá de definirse previamente lo que se entiende por tamaño de los datos. Así, en problemas de ordenación éste podría ser el número de objetos a ordenar ; en algoritmos matriciales, las dimensiones de las matrices argumentos ; cuando se trabaja sobre grafos su número de vértices ; y si en concreto son árboles puede interesar incluso restringirse a nodos internos, etc...

Finalmente para comparar la eficiencia de dos algoritmos propuestos para un mismo problema, se procede a comparar sus funciones de coste asociadas.

Inicialmente se abordó la hoy conocida como complejidad o análisis de un algoritmo en el peor de los casos, que consiste en la determinación del comportamiento del algoritmo en la situación más desfavorable, entendiéndose como tal aquella que provoque mayor consumo de recursos de ordenador, respecto al criterio escogido. Este estudio requiere frecuentemente la construcción de configuraciones de datos muy concretas, y a menudo rebuscadas, que fuerzan el comportamiento extremo del algoritmo.

Ahora bien, pronto pudo constatar que algoritmos con funciones de coste similares diferían bastante en la práctica, así como que algoritmos catalogados como "malos" por tener un consumo teórico de tiempo muy elevado, resultaba que convergían rápidamente sobre la mayoría de los casos que se presentaban en la realidad. Un ejemplo clásico de esta última situación es el algoritmo del simplex en programación lineal. Existen configuraciones de datos [KM70] para las que el tiempo de

ejecución crece exponencialmente con el tamaño del problema, y sin embargo la práctica cotidiana lo avala como un buen algoritmo.

Es por este tipo de hechos que el análisis medio de algoritmos va cobrando cada vez mayor importancia, pues desde un punto de vista práctico parece que el comportamiento medio de un algoritmo sobre todas las configuraciones de datos posibles es un indicador mejor, más significativo, de la mayor o menor eficiencia de un algoritmo frente a otro, que una comparación basada en el peor de los casos. Ahora bien, este tipo de análisis requiere la introducción de una distribución de probabilidad sobre el espacio de los posibles datos de un problema, lo cual puede resultar en ocasiones bastante difícil.

Otra forma de introducir distribuciones de probabilidad en el análisis de algoritmos es a través de los llamados algoritmos probabilísticos, como los utilizados para resolver ciertos problemas de optimización combinatoria, teoría de grafos o factorización de polinomios.

Tales algoritmos incluyen puntos de ramificación no determinísticos en los cuales a lo largo de la ejecución se elige la rama a seguir según una cierta distribución de probabilidad. En otros casos a lo anterior se une el hecho de que no se trata de algoritmos que calculen una solución exacta, sino una aproximación de la solución óptima del problema, buscándose entonces que la esperanza del error relativo cometido sea despreciable.

Como un primer ejemplo mencionamos el algoritmo de Berlekamp para factorización de polinomios [Be70], [La81], cuyo estudio en el peor de los casos no aporta mucha información,

por poder ser su complejidad infinita ; pero sin embargo la probabilidad de que tal cosa ocurra es nula como se demuestra en [FS82] . En [Ka76] , [Ra76] y [Di82] pueden encontrarse también otros ejemplos de algoritmos probabilísticos para diversos tipos de problemas de teoría de grafos y optimización combinatoria.

Naturalmente para este tipo de algoritmos el único estudio de complejidad que parece pertinente es el de su comportamiento en media ; si bien la problemática de este tipo de algoritmos es bien distinta de la que presentan los algoritmos deterministas que estudiaremos en este trabajo, y simplemente hemos hecho mención de ellos por su interés actual, sobre todo en aquellas situaciones en las que el estudio directo de un determinado proceso resulta muy difícil o casi aparentemente imposible, no ocurriendo lo mismo con algún proceso aleatorio que sin embargo lo aproxima.

En concreto los algoritmos que estudiaremos operan de forma determinista sobre estructuras de datos de tipo árbol. Por lo tanto podremos considerar aceptable la suposición de distribución uniforme entre los datos de un determinado tamaño ; lo que viene justificado por estudios de tipo estadístico sobre problemas concretos, como por ejemplo los que manejan expresiones aritmético-lógicas que, como es bien sabido, admiten una representación arborescente, a la que podemos aplicar el estudio que hemos realizado. No obstante el método permitiría tratar todas aquellas distribuciones que resultan de un proceso de ramificación [MM78] .

Pero antes de concretar el tipo de algoritmos objeto de este trabajo, hemos de enunciar todavía una serie de reflexiones

generales acerca de los caminos a seguir en el análisis de algoritmos. Para ello seguiremos a [Kn68,69,73] , que ha contribuido en gran medida a potenciar el análisis de algoritmos tanto en el caso peor como en media, así como a evidenciar la importancia que en dicho estudio tienen los métodos clásicos de enumeración combinatoria y análisis real.

Pues bien, frecuentemente el estudio del comportamiento medio de algoritmos que operan sobre estructuras discretas va a conducirnos al estudio combinatorio de ciertos parámetros asociados con el algoritmo. Así, siguiendo a [Kn73] , el análisis de un gran número de algoritmos puede descomponerse principalmente en tres fases :

- Obtención a partir del algoritmo, de los parámetros combinatorios básicos que influyen en su comportamiento.
- Obtención de ecuaciones recurrentes que caractericen dichos parámetros.
- Obtención de soluciones explícitas o aproximadas (estimaciones asintóticas) para las recurrencias anteriores que nos permitan concluir acerca del comportamiento medio del algoritmo.

En relación con el problema de enumeración combinatoria de los parámetros asociados al coste del algoritmo, ocurre que en muchas situaciones tal problema puede abordarse de una forma sistemática por medio del llamado método del operador simbólico [Fl85] . El problema de enumeración de una clase de estructuras combinatorias C , se reduce a encontrar constructores que permitan obtener C como combinación de estructuras más simples, o de la propia estructura C , si su definición es recursiva. El método del operador simbólico utiliza una serie de lemas que bajo

ciertas condiciones permiten traducir directamente tales construcciones combinatorias que se expresan como series formales, como operaciones sobre las funciones generatrices correspondientes. Así, mientras que los métodos clásicos de resolución de recurrencias basados en descomposiciones son a veces bastantes sensibles frente a pequeñas variaciones en la formulación del problema, el método del operador simbólico ofrece un tratamiento más sistemático y flexible.

Este método puede aplicarse no sólo a problemas de enumeración combinatoria, sino también en el estudio de valores medios de parámetros. En esta línea, Flajolet y Steyaert proponen en [FS83] un método sistemático para el análisis medio de una gran clase de algoritmos recursivos sobre árboles, que se caracterizan por su recorrido top-down de los inputs, así como por el hecho de que no los modifican. Posteriormente, en [St84] se dió un desarrollo más detallado de dicho método, junto con algunas extensiones y abundantes aplicaciones.

Como resume Steyaert en su introducción de [St84], la idea clave del método que proponen se basa en que en un buen número de casos, los algoritmos objetos de estudio no son otra cosa que reconocedores de configuraciones especiales, que se presentan como subestructuras de la entrada que reciben. Entonces cada algoritmo va a poder expresarse por medio de operaciones elementales sobre la estructura inicial de entrada, eventualmente quizás de manera recursiva; operaciones a las que se asocian costes específicos que dependen de la implementación concreta escogida. Se considera entonces el conjunto de todos los datos posibles del algoritmo como una serie formal, y a cada operación elemental se le asocia un operador sobre dichas series formales

que representa la operación, con lo que el algoritmo recursivo queda traducido así en un sistema de ecuaciones sobre series formales. Además a cada operación se le asocia también un operador que traduce su coste en función del de aquellas operaciones elementales que aparezcan en su construcción, y de esta manera se obtiene a partir del algoritmo un nuevo sistema de ecuaciones, cuya solución es la serie formal del conjunto de datos posibles ponderados por el coste de ejecución del algoritmo sobre cada uno de ellos. Finalmente, mediante transformaciones algebraicas elementales (morfismos) se obtiene un sistema de ecuaciones, cuya solución es la serie de las sumas de los costes de ejecución del algoritmo sobre todos los datos de un tamaño dado.

Por último la obtención de una solución explícita o de un valor que aproxime asintóticamente la solución del sistema anterior, permitirá evaluar el comportamiento en media del algoritmo. La utilización de técnicas del análisis complejo en la obtención de aproximaciones asintóticas de parámetros combinatorios resulta una herramienta muy potente en situaciones de lo más diversas, como puede constatarse por ejemplo en [F179] , [Od82] , [SF83] , [FO82] , etc... ; o en [F185] , donde tras exponer las principales bases de estas técnicas, se ofrece una recopilación de casos a los que se aplican, que van desde la enumeración por tamaños de árboles de una familia simple, a estimaciones medias de la altura de los árboles de determinadas familias ; comportamiento medio de algoritmos de diferenciación simbólica, número medio de comparaciones para ordenar siguiendo Quicksort ; tiempo medio en reconocimiento de patrones ; número medio de registros necesarios para evaluar

árboles binarios asociados a expresiones aritméticas, etc...

En este trabajo abordamos el estudio de varios algoritmos que operan sobre estructuras de tipo árbol, modificándolas según un proceder recursivo que actúa de las hojas a la raíz. Estos algoritmos, que llamamos de reducción o simplificación de árboles, pueden verse en cierto modo como reglas de reescritura de términos. Los términos vienen representados por medio de árboles, y las reglas se aplican según una filosofía estrictamente bottom-up a los subárboles (subtérminos) resultantes de la aplicación de la regla en cuestión a cada uno de los subárboles radicales del árbol original. Además en cada momento la decisión de aplicación efectiva de la regla, se basa en la igualdad o no de determinados subárboles previamente obtenidos según el mismo criterio, entendiéndose por aplicación efectiva la realización de una nueva modificación sobre el árbol procesado.

Para el tratamiento de este tipo de procesos intentamos aplicar, en la medida de lo posible, la metodología expuesta más arriba.

Fijada una regla o criterio de reducción consideramos la noción de árbol (expresión) irreducible que induce. Un árbol será irreducible si permanece inalterado tras aplicársele el criterio fijado. Dichos árboles constituyen el conjunto de outputs posibles del algoritmo asociado a la regla de simplificación escogida. En una primera parte, comenzamos estudiando la media y varianza del tamaño de los árboles simplificados obtenidos a partir de diversos algoritmos de reducción, con análogo proceder estructural, según la filosofía bottom-up mencionada con anterioridad. Este estudio se encuentra en el capítulo 2 de este

trabajo, donde se procede de lo particular a lo general. La razón de este proceder no está sólo en un respeto del orden cronológico en el que han sido abordados los problemas, sino también en el deseo de expresar cómo bajo un mismo esquema inicial, se van complicando cada vez más los estudios de analiticidad de las series que se presentan, a medida que se generaliza el tipo de familia de árboles considerados como inputs del algoritmo ; y cómo dichas complicaciones requieren cada vez técnicas más afinadas del análisis real y complejo.

En el capítulo 3 se aborda el estudio del comportamiento medio de los algoritmos de reducción presentados en el capítulo anterior.

En cuanto a la filosofía seguida, en primer lugar procedemos a particionar el conjunto de árboles posibles inputs del algoritmo en estudio, en clases de árboles con idéntico simplificado (output) según tal algoritmo. A continuación vemos como traducir el sistema de definición recursivo marcado por el algoritmo, a un sistema infinito de ecuaciones sobre series de potencias, que nos caracteriza recurrentemente la función generatriz asociada a cada una de las clases de la partición anterior. Seguidamente mostramos como utilizar tales ecuaciones para obtener una ecuación funcional que nos permita resolver nuestro problema (obtención de valores medios de costes o parámetros) apoyándonos en el teorema de Darboux para aproximaciones asintóticas de coeficientes de series de potencias.

Hacemos hincapié en como el uso de series formales para la enumeración de los parámetros combinatorios en juego, seguido del estudio de las singularidades de las series generatrices

x

asociadas, permiten tratar estos problemas de forma sistemática. Para el estudio de los comportamientos asintóticos de los valores en estudio, se pone de manifiesto la importancia de diversas técnicas de análisis real y complejo, y muy en particular el teorema de Darboux ya mencionado, junto con el teorema de la función implícita y el teorema de Weierstrass sobre la completitud del espacio de las funciones holomorfas.

Completamos el estudio del capítulo 3 , con la comparación de los resultados obtenidos relativos al comportamiento medio de los algoritmos estudiados con su comportamiento en el caso peor. También se exponen algunos argumentos a favor de que los resultados obtenidos tanto en el capítulo 2 como en el 3 , serían razonablemente extensibles a todo criterio de simplificación de árboles que actúe según una filosofía estrictamente bottom-up , de manera que nunca incremente el tamaño del output respecto al input, y que base sus simplificaciones en un test sobre igualdad de ciertos subárboles resultado de la aplicación del criterio en cuestión a los correspondientes subárboles del árbol original, y que considere toda hoja como simplificada.

Algoritmos de las características de los aquí estudiados aparecen de forma natural por ejemplo en la simplificación de términos del cálculo proposicional.

Los capítulos reseñados van precedidos de un capítulo introductorio en el que se presentan las principales definiciones y resultados matemáticos utilizados a lo largo del trabajo.

Capítulo 1

Introducción al análisis de algoritmos : Conceptos básicos

En este capítulo preliminar daremos una serie de definiciones y resultados clásicos generales que necesitaremos a lo largo de este trabajo. Para algunos resultados se dará un bosquejo de su demostración, y para todos referencias en las que se encuentran desarrollados.

1. Los árboles como estructuras de datos

Es de sobra conocido en el mundo informático, la importancia de los árboles como estructuras de datos, tanto para almacenar eficientemente conjuntos de datos sobre los que se han de ejecutar operaciones tales como búsqueda, inserción, supresión, etc...; como para representar cómodamente objetos tales como programas o expresiones algebraicas.

Recordaremos a continuación la definición de árbol :

Definición

Un árbol es un conjunto finito de elementos, llamados vértices o nodos, que contiene un elemento distinguido llamado raíz del árbol, y cuyos restantes elementos están particionados en un número finito de subconjuntos disjuntos, cada uno de los cuales es a su vez un árbol, que se llama subárbol radical del árbol original.

En realidad esta definición es la caracterización recursiva de la definición clásica de teoría de grafos, que define árbol como grafo planar conexo dirigido y sin ciclos.

Para los conceptos relacionados con una estructura de tipo árbol tales como hoja, nodo interno, aridad, nivel, profundidad, antecesor, etc... , de un nodo del árbol ; así como rama derecha, árbol completo, profundidad o altura del árbol, camino, etc... ,

pueden consultarse por ejemplo [HS76] , [Rn68] , o [AHU74] . No hacemos aquí mención expresa de ellos por considerarlos suficientemente conocidos.

En cuanto a la utilización de los árboles como representación cómoda de objetos, recordemos por ejemplo los árboles de expresiones aritméticas, que eliminan las ambigüedades propias de la escritura lineal y evitan los paréntesis parciales y reglas de prioridad entre operadores, dando además un procedimiento de evaluación según la opción de recorrido de árbol escogida.

Es también conocido que los árboles pueden implementarse de muy diversas formas de cara a una manipulación eficaz en cada caso del objeto abstracto árbol, como puede consultarse por ejemplo en las tres referencias citadas anteriormente : [AHU74] , [HS76] , [Rn68] . En lenguajes de tipo PASCAL pueden representarse utilizando memoria dinámica, con variables de tipo puntero, por ejemplo según la siguiente descripción de tipo asociado a un nodo de un árbol p-ario :

```

TYPE
  ARBOL = ↑ NODO ;
  NODO = RECORD
    inf : elemento ;
    h : array (.1..p.) of ARBOL
  END ;

```

donde "elemento" es el tipo de la etiqueta (información) asociada a cada nodo.

Este tipo de implementación permite tratar cómodamente el

caso de los árboles p-arios, en el que todos los nodos internos tienen aridad p . Las hojas quedan caracterizadas por el hecho de que todos sus hijos tienen el valor estándar nil . En la declaración de nodos pueden añadirse otros campos para recoger por ejemplo la aridad de un nodo, cuando se trata de árboles heterogéneos, o un puntero hacia el padre que permita remontar la estructura, etc...

En este trabajo manejaremos este tipo de implementación, que, como por otra parte es bien sabido, puede simularse utilizando memoria estática (arrays) [AHU74].

En cuanto a la notación que seguiremos, identificaremos en la práctica, como se hace habitualmente en PASCAL, el nodo considerado, el subárbol del que es raíz y el puntero que los referencia, lo que normalmente no provoca ningún problema real de ambigüedad.

De manera que dado un nodo T ,

- $T.inf$ denota el valor de su etiqueta.
- $T.ar$ denota su aridad (número de hijos).
- $T.h(i)$ $1 \leq i \leq T.ar$, denota su hijo i -ésimo.

Además en el caso de árboles binarios utilizaremos, la notación $T.h_i$, $T.h_d$, en lugar de $T.h(1)$ y $T.h(2)$, haciendo referencia a la denominación usual de hijo izquierdo e hijo derecho empleada en estos casos.

Por último resaltar que tanto esta implementación como su equivalente mediante arrays, verifican que el tiempo de acceso a un nodo desde su padre, medido como número de operaciones elementales a realizar, es una constante independiente de la naturaleza de los nodos del árbol; propiedad esta que se utilizará a lo largo de este trabajo en todos los cálculos de evaluación de parámetros asociados con estructuras de este tipo.

2. Familias de árboles . Series formales .

Resulta evidente que en el análisis de algoritmos es muy importante disponer de una forma lo más sencilla posible de descripción de los datos a manejar. En concreto, cuando estos son estructuras de tipo árbol que admiten una descripción de tipo sintáctico, se manejan usualmente tres tipos de caracterizaciones: en términos de ecuaciones, de gramáticas o de series formales. Las gramáticas de árboles fueron introducidas por Thatcher [Th73] y posteriormente se han efectuado numerosos estudios relativos a gramáticas y familias de árboles en el marco de la semántica algebraica definida por Nivat [Ni75]. La utilización de ecuaciones sobre familias de árboles es ilustrada ampliamente por Good en [Go65], y fue desarrollada con posterioridad de manera sistemática por Flajolet [F179]. En [BR82], Berstel y Reutenauer realizan un estudio teórico en términos de series formales, unificando los dos tratamientos anteriores.

La caracterización que utilizaremos a lo largo de este trabajo es la de series formales de árboles, y según la filosofía presentada en [F179], que define tales series por medio de ecuaciones que traduce sistemáticamente, bajo ciertas condiciones, en términos de ecuaciones entre funciones generatrices.

En la sección 2.1 presentamos el concepto de familia simple de árboles, al cual se ajustarán todas las familias de árboles posibles datos de los algoritmos que analizaremos posteriormente.

En la sección 2.2 presentamos el concepto de serie formal de árboles.

2.1. Familias simples

La noción de familia simple que adoptaremos es la utilizada en [St84], que recoge, con ligeras modificaciones, el concepto de familia simplemente generada de Meir y Moon [MM78].

Definición

Sea S un conjunto de símbolos (eventualmente infinito), dotado de una función aridad $v : S \rightarrow \mathbb{N}$. El conjunto $M(S, v)$ de los árboles construidos sobre S , se define recursivamente como el menor conjunto tal que :

- i) $\forall s \in S \quad v(s) = 0 \Rightarrow \textcircled{s} \in M(S, v)$
- ii) $\forall s \in S \quad \forall T_1, T_2, \dots, T_{v(s)} \in M(S, v)$
 $\textcircled{s}(T_1, T_2, \dots, T_{v(s)}) \in M(S, v)$

Mediante $\textcircled{s}(T_1, T_2, \dots, T_{v(s)})$ representamos el árbol cuya raíz lleva la etiqueta (símbolo) s , y cuyos subárboles radicales de izquierda a derecha son $T_1, T_2, \dots, T_{v(s)}$. En adelante utilizaremos indistintamente las notaciones :

$$\textcircled{s}(T_1, T_2, \dots, T_{v(s)}) \quad \circ \quad \begin{array}{c} \textcircled{s} \\ / \quad | \quad \backslash \\ T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_{v(s)} \end{array}$$

Definición

Sea $M(S, v)$ el conjunto de árboles construido sobre S . Decimos que $M(S, v)$ es una familia simple generada por S si :

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N} \quad |(v^{-1}(n))| \leq k \quad [1]$$

La condición de mayoración [1] no es en absoluto restrictiva desde el punto de vista informático, y sin embargo simplifica los enunciados de resultados posteriores sobre familias simples.

La familia $M(S, \nu)$ se corresponde con el álgebra libre generada por S , o siguiendo la terminología utilizada en [Ni75], con el magma libre generado por S .

2.2 Series formales de árboles.

Una serie formal de árboles es una función que asocia un número a cada árbol. Su principal papel es o bien la enumeración de una clase de árboles, o bien la representación del resultado de algún cómputo sobre los mismos.

Definición

Dada una familia de árboles \mathcal{F} , se llama serie formal sobre \mathcal{F} a toda aplicación $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$.

El valor de f para un árbol $T \in \mathcal{F}$, se denotará por $f(T)$, y recibe el nombre de coeficiente de T en f . Esta denominación se debe al hecho de que f puede considerarse como la suma formal $f = \sum_{T \in \mathcal{F}} f(T) T$.

Clásicamente se definen las operaciones siguientes sobre series formales de árboles:

- Multiplicación por una constante $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha f = \sum_{T \in \mathcal{F}} \alpha f(T) T$
- Adición: $f_1 + f_2 = \sum_{T \in \mathcal{F}} (f_1(T) + f_2(T)) T$
- Sean ahora $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ familias de árboles incluidas en una familia simple $M(S, \nu)$. Para todo símbolo $s \in S$, y toda tupla $(f_i)_{1 \leq i \leq \nu(s)}$, de series formales sobre \mathcal{F}_i , definimos la serie formal composición por s , $s(f_1, \dots, f_{\nu(s)})$, mediante

$$s(f_1, \dots, f_{\nu(s)}) = \sum_{\substack{T_i \in \mathcal{F}_i \\ 1 < i < \nu(s)}} \prod_{i=1}^{\nu(s)} f_i(T_i) \otimes (T_1, \dots, T_{\nu(s)})$$

Los coeficientes de los árboles en esta serie son pues los productos de los respectivos "pesos" de los subárboles radicales. Esta operación de composición permitirá traducir en términos de series formales las ponderaciones definidas recursivamente sobre estructuras de tipo árbol.

La familia de las series formales sobre un magma $M(S, \nu)$, dotada de las operaciones anteriores tiene estructura de S-magma.

Dada una familia de árboles F , llamaremos serie formal asociada a F , a aquella que asocia "peso" 1 a todo árbol $T \in F$, y como suma formal la escribiremos: $F = \sum_{T \in F} T$.

Supongamos que F es una familia simple $M(S, \nu)$. Entonces

$$F = \sum_{s \in S} \textcircled{s} (\underbrace{F, \dots, F}_{\nu(s) \text{ veces}}) \quad [2]$$

lo que no hace más que traducir la definición recursiva de la familia $F = M(S, \nu)$.

De hecho dada cualquier descripción no ambigua de una familia de árboles, vamos a poder definir su serie formal asociada mediante una ecuación cuyos términos son series formales sobre árboles. En este caso la no ambigüedad se sigue del hecho de que dado un árbol T , su descomposición en su raíz \textcircled{s} , y la $\nu(s)$ -upla de sus subárboles radicales sea única.

Ejemplos

i) Árboles binarios: Se construyen a partir de símbolos \square de aridad cero y símbolos \circ de aridad dos.

Su serie formal asociada \mathfrak{B} verifica la ecuación:

$$\mathfrak{B} = \square + \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathfrak{B} \quad \mathfrak{B} \end{array} \quad [3]$$

ii) Árboles generales: Se construyen a partir de símbolos \circ_i , $i \in \mathbb{N}$, de aridad i .

Su serie formal asociada G verifica la ecuación :

$$G = \sum_{i \in M} \sigma_i(G, \dots, G) \quad [4]$$

i veces

iii) Expresiones aritméticas : consideremos los árboles de expresiones aritméticas contruidos a partir de los operadores - (unario), + y x (binarios), y las variables (aridad cero) $v \in V$ (conjunto finito arbitrario) .

Su serie formal asociada A verifica la ecuación

$$A = \sum_{v \in V} \textcircled{v} + \textcircled{-} \begin{array}{c} | \\ A \end{array} + \textcircled{+} \begin{array}{cc} / & \backslash \\ A & A \end{array} + \textcircled{\times} \begin{array}{cc} / & \backslash \\ A & A \end{array}$$

Los tres ejemplos anteriores corresponden a familias simples.

A veces los árboles de una determinada familia no vienen caracterizados por una única ecuación sino por un sistema de ecuaciones en términos de series formales de árboles. Tal es el caso del siguiente ejemplo :

iv) Árboles coloreados : Son los árboles contruidos con dos tipos de nodos \textcircled{n} negros y \textcircled{b} blancos, de manera que

- La raíz es de tipo negro ;
- Un nodo negro tiene a lo sumo un único sucesor, que de existir ha de ser de tipo blanco ;
- Un nodo blanco tiene cero o dos hijos, y en este último caso el hijo izquierdo ha de ser blanco y el hijo derecho negro ;
- Las hojas serán negras o blancas en conformidad con las reglas anteriores.

La serie formal N asociada a esta familia de árboles verifica el siguiente sistema :

$$N = \textcircled{n} + \textcircled{n} \begin{array}{c} | \\ N \end{array} \quad \text{donde} \quad N = \textcircled{b} + \textcircled{b} \begin{array}{cc} / & \backslash \\ N & N \end{array} \quad [5]$$

Un sistema de este tipo se llama lineal, y no admite más que una única solución [BR82] .

Finalmente daremos un par de ejemplos clásicos de series formales asociadas a parámetros definidos sobre árboles de una familia :

v) Tamaño de un árbol : Dado un árbol T podemos definir su tamaño $|T|$, por ejemplo como su número total de nodos ; lo que nos permite la siguiente caracterización recursiva :

$$|T| = \begin{cases} 1 & \text{si } T \text{ es una hoja} \\ 1 + \sum_{1 \leq i \leq v(s)} |T_i| & \text{si } T = \oplus (T_1, \dots, T_{v(s)}) \text{ y } v(s) \neq \emptyset \end{cases}$$

Sea $F = M(S, v)$ una familia simple de árboles, y consideremos la serie formal de árboles T asociada al tamaño de los árboles de la familia .

Por definición $T = \sum_{T \in F} |T| T$ que a partir de la caracterización recursiva anterior se traduce fácilmente en la siguiente ecuación :

$$T = F + \sum_{\substack{s \in S \\ v(s) \neq \emptyset}} \left[\oplus (T, F, \dots, F) + \oplus (F, T, \dots, F) + \dots + \oplus (F, F, \dots, T) \right]$$

donde en cada término F aparece $v(s)-1$ veces, fijando T en todas las posiciones posibles. Esta ecuación está justificada por el hecho de que un árbol $T = \oplus (T_1, \dots, T_{v(s)})$ aparece $v(s) + 1$ veces en el miembro derecho con los coeficientes respectivos $1, |T_1|, \dots, |T_{v(s)}|$.

vi) Longitud del camino interno de un árbol : Dado un árbol T su longitud del camino interno $lci(T)$ es la suma de las

distancias (número de arcos) de cada nodo a la raíz ; lo que puede definirse recursivamente de la siguiente forma :

$$lci(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } T \text{ es una hoja} \\ |T| - 1 + \sum_{1 \leq i \leq v(s)} lci(T_i) & \text{si } T = \textcircled{\oplus}(T_1, \dots, T_{v(s)}) \\ & \text{y } v(s) \neq 0 \end{cases}$$

Sea \mathcal{L} la serie formal asociada a la longitud del camino interno de los árboles de una familia simple $\mathcal{F} = M(S, v)$.

Entonces $\mathcal{L} = \sum_{T \in \mathcal{L}} lci(T) T$ y utilizando la relación recursiva

anterior obtenemos la siguiente ecuación para \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = T - \mathcal{F} + \sum_{\substack{s \in S \\ v(s) \neq 0}} \left[\textcircled{\oplus}(\mathcal{L}, \mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) + \dots + \textcircled{\oplus}(\mathcal{F}, \mathcal{F}, \dots, \mathcal{L}) \right]$$

cuya validez se comprueba como en el caso anterior.

Para terminar indicar que la noción de series formales de árboles puede extenderse a cualquier cuerpo K para los coeficientes, [BR82], hablándose entonces de series formales de árboles con coeficientes en K . Nuestra definición se correspondería pues con la noción de series formales de árboles con coeficientes en \mathbb{R} .

3. Complejidad de algoritmos

Como ya mencionábamos en la introducción, el hecho de que para un mismo problema existan diferentes algoritmos que lo resuelvan, motiva la importancia de disponer de criterios precisos sobre la optimalidad, factibilidad y eficacia de un algoritmo, que permitan compararlos entre sí. En esta línea, Cobham y Hartmanis-Stearns [HS65] introdujeron formalmente la noción de complejidad de algoritmos. Posteriormente, se han

propuesto numerosas medidas de complejidad y modelos de cálculo que han producido abundante literatura, entre la que destacamos [Kn68,73] como clásico ; [AHU74] por contener un resumen sucinto de los principales fenómenos en este terreno ; y más recientemente la reopilación en castellano [Di82] .

El análisis de un algoritmo consiste en la predicción de la cantidad de recursos que utilizará el algoritmo cuando opere sobre un input dado. Según la noción de recurso adoptada se hablará de complejidad en tiempo o complejidad en espacio. Entre las medidas usuales propuestas para el tiempo están el número de pasos, de instrucciones básicas o de operaciones de un determinado tipo ; en cuanto al espacio puede medirse por ejemplo en bits, palabras o número de registros ocupados durante la ejecución del algoritmo.

A continuación vamos a enumerar los conceptos básicos que manejaremos a lo largo de este trabajo. Las definiciones son válidas para cualquier medida de complejidad usual ; no obstante nosotros estudiaremos siempre complejidad en tiempo, y utilizaremos normalmente como medida de complejidad de referencia el número de instrucciones ejecutadas, pudiendo estar cada instrucción eventualmente ponderada por una constante que representa su coste sobre una máquina concreta dada. Tal medida de complejidad será denotada por τ .

Sea A un algoritmo que opera sobre un conjunto de datos C , sobre los que el algoritmo siempre para, proporcionando el resultado requerido.

Dado $e \in C$, denotamos por $\tau_A(e)$ el coste de ejecución de A sobre e , con respecto a la medida τ .

Para comparar los costes de ejecución de diversos algoritmos que resuelven el mismo problema para un mismo conjunto \mathcal{E} de datos, es necesario disponer de una noción de tamaño sobre los elementos de \mathcal{E} , $|| \cdot || : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{M}$, de manera que

$$\forall n \in \mathbb{M} \quad \mathcal{E}_n = \{ e \in \mathcal{E} / |e| = n \} \text{ sea finito .}$$

Usualmente el tamaño de una palabra es su longitud, de un árbol su número de nodos (total o sólo sus nodos internos), de un array su dimensión, etc...

Suelen proponerse tres tipos de caracterización con respecto a τ , del comportamiento del algoritmo A sobre \mathcal{E}_n , según se defina la función complejidad: $\theta A : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$

- Complejidad en el mejor de los casos :

$$\theta A(n) = \min \{ \tau A(e) / e \in \mathcal{E}_n \}$$

- Complejidad en el peor de los casos :

$$\theta A(n) = \max \{ \tau A(e) / e \in \mathcal{E}_n \}$$

- Complejidad en media :

$$\theta A(n) = E(\tau A(e) / e \in \mathcal{E}_n) \text{ donde } E(X) \text{ denota la esperanza matemática de la variable } X .$$

Los dos primeros conceptos hacen referencia a comportamientos extremos del algoritmo ; por otra parte, el valor que tradicionalmente se considera es el orden de crecimiento de $\theta A(n)$ cuando n tiende a infinito ; hablándose de algoritmos lineales, cuadráticos, exponenciales, etc... , según que cuando $n \rightarrow \infty$, $\theta A(n)$ sea respectivamente $O(n)$, $O(n^2)$, $O(\alpha^n)$, etc...

La determinación de estos tipos de complejidad requiere frecuentemente la construcción de configuraciones bastante artificiosas que fuerzan las cotas extremas de complejidad, aunque en la práctica tales casos límites tengan una probabilidad ínfima de presentarse. Precisamente la constatación práctica de

este hecho es lo que motiva el estudio de la complejidad media de algoritmos. Ahora bien, tal estudio necesita la suposición de un modelo probabilístico sobre el conjunto \mathcal{E}_n de posibles inputs de tamaño n . Dicho modelo habrá de escogerse a partir del problema concreto, entre los que parezcan más naturales. Nosotros adoptaremos el llamado modelo empírico, que suele utilizarse por ejemplo en el análisis de algoritmos que operan sobre palabras, o sobre árboles de términos o expresiones en sistemas de compilación o de manipulación simbólica. Tal modelo considera equiprobables todos los elementos de \mathcal{E}_n .

Así pasamos a definir la noción concreta de complejidad media que manejaremos en este trabajo.

Definición

Sea A un algoritmo que opera sobre un conjunto de datos \mathcal{E} , dotado de una noción de tamaño. Denotaremos por τ_n el coste acumulado de A sobre todos los datos de tamaño n :

$$\tau_n = \sum_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ |e|=n}} \tau A(e)$$

El coste medio $\overline{\tau}_n$ sobre los datos de tamaño n se define por:

$$\overline{\tau}_n = \frac{\tau_n}{|\{e \in \mathcal{E} / |e|=n\}|} \quad [6]$$

Como veremos más adelante para determinar el comportamiento asintótico de $\overline{\tau}_n$ cuando $n \rightarrow \infty$, nos será de gran utilidad la llamada función generatriz de coste del algoritmo A :

$$\tau_a(z) = \sum_{n \geq 0} \tau_n z^n \quad [7]$$

Cuando el conjunto de datos \mathcal{E} sea un producto cartesiano

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \dots \times \mathcal{E}_p$ introduciremos en ocasiones una serie de coste multivariada:

$$\tau_A(z_1, \dots, z_p) = \sum_{(e_1, \dots, e_p) \in \mathcal{E}} \tau_A(e_1, \dots, e_p) z_1^{|e_1|} \dots z_p^{|e_p|} \quad (8)$$

Además, generalmente se definirá como tamaño del dato (e_1, \dots, e_p) la suma de los tamaños de sus componentes :

$$|(e_1, \dots, e_p)| = |e_1| + \dots + |e_p|$$

y en consecuencia $\tau_A(z)$ se obtiene fácilmente sustituyendo cada z_i que aparezca en $\tau_A(z_1, \dots, z_p)$ por z :

$$\tau_A(z) = \tau_A(z_1/z, \dots, z_p/z)$$

sin que por ello vaya a producirse confusión por el doble uso de la notación τ_A .

Finalmente, dado que los algoritmos que estudiaremos operan sobre árboles, utilizaremos la serie formal de coste :

$$\tau_A = \sum_{e \in \mathcal{E}} \tau_A(e) e$$

en la que cada dato e , aparece ponderado por el coste del algoritmo sobre él mismo.

4. Recursos algebraicos de enumeración

Como hemos visto en la sección anterior, para estudiar el comportamiento medio de un algoritmo hemos de evaluar la cantidad [6], lo que nos conduce rápidamente a problemas de enumeración no sólo sobre el conjunto \mathcal{E} de posibles datos de entrada (determinar el número de objetos de tamaño n), sino también sobre otros parámetros combinatorios asociados a dicho conjunto (calcular el número de objetos de tamaño n con una propiedad determinada); o incluso, a nivel por ejemplo de series generatrices de costes, al problema de sumar las contribuciones de todos los objetos de un mismo tamaño. En resumen, se puede

considerar que dado un multiconjunto \mathcal{E} dotado de una noción de tamaño $|\cdot|$, han de evaluarse las cantidades

$$a_n = \sum_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ |e|=n}} m(e) \quad , \quad n \geq 0$$

donde $m(e)$ es la multiplicidad del elemento e . Para ello se define clásicamente la noción de función o serie generatriz asociada al problema de enumeración correspondiente, como la serie formal o serie en variables conmutativas :

$$a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n .$$

El hecho de calificarla de serie formal se debe a que para su definición no es necesaria la convergencia de la serie.

En las secciones 12 y 13 del libro de Comtet [Co74] puede encontrarse un estudio detallado sobre funciones generatrices. Como referencias más breves sobre tales funciones y su aplicación en combinatoria pueden consultarse entre otros el capítulo 2 de [Be71] y la sección 1.2 de [Kn68].

La noción de serie generatriz que hemos introducido corresponde a las llamadas ordinarias. Otro tipo de función generatriz clásico es el denominado exponencial, en el que el coeficiente n -ésimo de la serie aparece dividido por $n!$. Dado que en este trabajo sólo manejaremos funciones generatrices de tipo ordinario, omitiremos este calificativo al referirnos a ellas.

El problema reside ahora en la caracterización, usualmente en forma de ecuación funcional, de la serie generatriz en cuestión, a partir de la definición de \mathcal{E} . Esto suele hacerse frecuentemente por medio de recurrencias entre los a_i , pero para determinados tipos de estructuras de tipo árbol puede

seguirse un cierto esquema global que permite un tratamiento sistemático del problema. Dicho esquema global se basa en el método del operador simbólico comentado en la introducción de este trabajo, que puede encontrarse más detalladamente en [F185] mientras que su utilización para el análisis sistemático del comportamiento medio de algoritmos recursivos de proceder top-down sobre árboles, puede encontrarse en [FS83] y más detalladamente en [St84].

Definición

Sea $\mathcal{F} = M(S, \nu)$ una familia simple de árboles y sea h una aplicación de S en el conjunto de los polinomios en p indeterminadas x_1, \dots, x_p , tal que $\forall s \in S \quad \nu(s) \neq 0 \implies h(s) \in \mathbb{R}$. Se llama morfismo inducido por h del magma de las series formales sobre \mathcal{F} en el anillo de las series formales en p indeterminadas x_1, \dots, x_p , a la aplicación \bar{h} definida por:

- $\bar{h}(\alpha f) = \alpha \bar{h}(f)$ para toda serie formal de árboles f y todo número real α .
- $\bar{h}(f_1 + f_2) = \bar{h}(f_1) + \bar{h}(f_2)$ para todo par de series formales de árboles f_1 y f_2 .
- $\bar{h}(\textcircled{S}(f_1, \dots, f_{\nu(s)})) = h(s) \prod_{i=1}^{\nu(s)} \bar{h}(f_i)$ para todo $s \in S$ y toda $\nu(s)$ -upla $(f_1, \dots, f_{\nu(s)})$ de series formales de árboles.

En particular se tiene que para todo símbolo s de aridad cero, $\bar{h}(s) = h(s)$. Además la condición impuesta a h garantiza la ausencia de sumas infinitas de términos correspondientes a un mismo monomio. En lo que sigue denotaremos por h tanto a la aplicación h como al morfismo \bar{h} que induce.

Partiendo entonces de un sistema de ecuaciones que define una serie formal de árboles \mathcal{F} , se podrá deducir, módulo la buena elección del morfismo h , un sistema de ecuaciones sobre las series generatrices correspondientes.

Ejemplos

i) Árboles binarios : Sea b_n el número de árboles binarios con n nodos (internos o no) ; la serie $B(z) = \sum_n b_n z^n$ satisface la ecuación $B(z) = z + zB^2(z)$ [9] como puede comprobarse fácilmente aplicando el morfismo h definido por $h(o) = h(\circ) = z$ a la ecuación [3] que caracteriza la serie formal de árboles \mathcal{B} , asociada a la familia de árboles binarios.

ii) Árboles generales : Sea g_n el número de árboles generales con n nodos ; su serie generatriz de enumeración asociada $G(z) = \sum_n g_n z^n$ verifica la ecuación :

$$G(z) = \sum_{n \geq 0} zG^n(z) \text{ sin más que aplicar el morfismo}$$

$$h(o_i) = z, i \geq 0, \text{ en la ecuación [4].}$$

iii) Familias simples : Sea $\mathcal{F} = M(S, \nu)$ una familia simple. La condición [1] de simplicidad nos garantiza que el número f_n de árboles de tamaño n es finito. Sea $c_n = |\nu^{-1}(n)|$, es decir el número de símbolos de S de aridad n ; y sea

$$\phi(u) = \sum_{n \geq 0} c_n u^n \quad [10]$$

ϕ recibe el nombre de descriptor de la familia.

Utilizando de nuevo el morfismo estándar: $h(s) = z \quad \forall s \in S$ obtenemos, a partir de la ecuación [2], la siguiente ecuación

$$\text{funcional para la función generatriz } f(z) = \sum_n f_n z^n :$$

$$f(z) = z \phi(f(z)) \quad [11]$$

En efecto, de la aplicación directa del morfismo obtenemos

$$f(z) = \sum_{s \in S} z (f(z))^{v(s)}$$

que utilizando [10] nos proporciona [11].

iv) Árboles p-arios : Se construyen a partir de dos tipos de nodos, \square de aridad cero y \circ de aridad p.

Su serie formal de árboles asociada \mathcal{P} verifica entonces la ecuación $\mathcal{P} = \square + \circ (\underbrace{\mathcal{P}, \dots, \mathcal{P}}_{p \text{ veces}})$.

Si denotamos por p_n el número de árboles p-arios de tamaño n, podremos caracterizar, a partir de la ecuación recurrente anterior, la serie generatriz $P(z) = \sum_n p_n z^n$ mediante la ecuación $P(z) = 1 + z P^p(z)$ módulo el morfismo $h(\square) = 1, h(\circ) = z$, o mediante la ecuación $P(z) = z + z P^p(z)$ módulo el morfismo $h(\square) = h(\circ) = z$, según que definamos respectivamente como tamaño de un árbol el número de sus nodos internos o su número total de nodos.

v) Árboles coloreados : Sean $cn_{p,q}$ y $cb_{p,q}$ el número de árboles coloreados con raíz negra y blanca respectivamente, que tienen p nodos negros y q blancos. Sean

$cn(u,v) = \sum_{p,q} cn_{p,q} u^p v^q$ y $cb(u,v) = \sum_{p,q} cb_{p,q} u^p v^q$ las funciones generatrices asociadas. Tales series verifican el sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} cn(u,v) &= u + u cb(u,v) \\ cb(u,v) &= v + v cb(u,v) cn(u,v) \end{aligned} \quad [12]$$

En todos los ejemplos anteriores hemos utilizado el llamado morfismo estándar que asocia a cada árbol T el monomio $z^{|T|}$, donde |T| denota el tamaño de T. Este morfismo será utilizado ampliamente a lo largo de este trabajo.

Antes de pasar a enunciar los teoremas de inversión de Lagrange y Lagrange-Good, que nos servirán en muchas ocasiones para obtener fácilmente una expresión para los coeficientes de series generatrices, que son soluciones implícitas de ecuaciones o sistemas de ecuaciones de los tipos anteriores, vamos a dar algunas notaciones que emplearemos a lo largo del trabajo.

Notación

Denotaremos por $[z^n] f(z) = f_n$ al n -ésimo coeficiente de la serie $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$.

Para una serie en varias variables

$$f(z_1, \dots, z_p) = \sum_{n_1, \dots, n_p \geq 0} f_{n_1, \dots, n_p} z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}$$

denotaremos sus coeficientes por medio de las expresiones

$$[z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}] f(z_1, \dots, z_p) = f_{n_1, \dots, n_p}.$$

También se utilizará la notación abreviada

$$\bar{z} = (z_1, \dots, z_p), \quad \bar{z}^{\bar{n}} = (z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}), \quad \text{y}$$

$$\bar{f}(\bar{z}) = (f_1(z_1, \dots, z_p), \dots, f_m(z_1, \dots, z_p)).$$

El tamaño de una n -upla vendrá sugerido por el contexto, y usualmente se tomará como tal la suma de los tamaños de las componentes.

Y establecida esta notación pasamos a enunciar los teoremas anunciados:

Teorema de inversión de Lagrange.

Sea $F(u) = \sum_{n \geq 0} c_n u^n$ una serie formal de coeficientes reales tal que $F(0) \neq 0$ (el término constante c_0 es no nulo).

La ecuación $y = x F(y)$ admite una única solución en forma de serie formal $y(x) = \sum_n y_n x^n$, y además se tiene que para toda serie $f(u)$

$$[x^n] f(y(x)) = [u^n] f(u) F^n(u) \left[1 - \frac{u F'(u)}{F(u)} \right]$$

donde $F'(u) = \frac{d}{du} F(u) = \sum_{n \geq 0} n c_n u^{n-1}$.

En particular

$$[x^n] y(x) = \frac{1}{n} [u^{n-1}] F^n(u)$$

y en general para cualquier potencia k se tiene la llamada fórmula de Lagrange-Bürmann :

$$[x^n] y^k(x) = \frac{k}{n} [u^{n-k}] F^n(u).$$

Este teorema fué generalizado por Good [Go60] para el caso de un sistema de p ecuaciones con p incógnitas del tipo

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 F_1(\bar{y}) \\ &\dots \dots \dots \\ y_p &= x_p F_p(\bar{y}) \end{aligned} \quad [13]$$

donde las y_i son las incógnitas, las x_i variables y las $F_i(\bar{u})$ series formales en las variables u_j , con coeficientes reales; verificándose que $F_i(\bar{0}) \neq 0 \quad \forall i \quad 1 \leq i \leq p$.

Bajo estas condiciones se tiene el siguiente

Teorema de Lagrange-Good

El sistema [13] admite una solución única (y_1, \dots, y_p) en el conjunto de las series formales en p variables x_1, \dots, x_p con coeficientes reales, verificándose además para toda serie $f(\bar{u})$ la siguiente igualdad :

$$[\bar{x} \bar{n}] f(\bar{y}(\bar{x})) = [\bar{u} \bar{n}] f(\bar{u}) \bar{F}^{\bar{n}}(\bar{u}) \det \left(\delta_{ij} - \frac{u_i}{F_i} \frac{\partial}{\partial u_j} F_i \right)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker y $\det(a_{ij})$ denota el determinante de la matriz de coeficientes a_{ij} $1 \leq i, j \leq p$.

Para estos resultados, que queremos señalar son puramente combinatorios, se han dado numerosas demostraciones desde campos bien distintos. Pruebas analíticas que imponen que tanto las F_i como las f sean analíticas en un entorno del origen, pueden encontrarse por ejemplo en [Go60] y [Di68]. Ahora bien el resultado es válido incluso cuando no se da tal hipótesis de analiticidad sobre las F_i y f , y en particular pueden encontrarse demostraciones algebraicas por ejemplo en [Co74], [Tu75] y [Ho79], así como puramente combinatorias en [Ra60] y [Ch75], que no imponen ninguna condición de analiticidad para dichas series.

Ejemplos

1) Árboles binarios

Aplicando el teorema de Lagrange a la fórmula [9] obtenemos

$$[z^n] B(z) = \frac{1}{n} [u^{n-1}] \left[1 + u^2 \right]^n,$$

y por la fórmula del binomio de Newton

$$[z^n] B(z) = \begin{cases} \frac{1}{n} \binom{n}{(n-1)/2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Por argumentos clásicos de tipo combinatorio puede demostrarse fácilmente que el número total n de nodos de un árbol binario es siempre impar y que $n = 2p + 1$ siendo p el número de nodos internos del árbol. Entonces

$$[z^{2p+1}] B(z) = \frac{1}{2p+1} \left[\begin{matrix} 2p+1 \\ p \end{matrix} \right] = \frac{1}{p+1} \left[\begin{matrix} 2p \\ p \end{matrix} \right]$$

fórmula clásica de los números de Catalán .

ii) Familias simples

Aplicando el teorema de Lagrange a la fórmula [11]

tenemos que $[z^n] f(z) = \frac{1}{n} [u^{n-1}] \phi^n(u)$.

Ahora bien la utilidad de este resultado está limitada por el hecho de que $\phi(u)$ permita o no una aplicación sencilla de la fórmula del binomio.

iii) Árboles coloreados

Aplicando el teorema de Lagrange-Good al sistema [12]

obtenemos

$$[u^p v^q] cn(u, v) = [cn^p cb^q] cn (1 + cb)^p (1 + cb cn)^q \left(\begin{array}{l} 1 - \frac{cn}{1 + cb} \\ - \frac{cb(1+cb)}{1 + cb cn} \quad \frac{1}{1 + cb cn} \end{array} \right)$$

expresión difícilmente manejable en la práctica.

Situaciones como ésta motivan la búsqueda de nuevas técnicas que si bien no resuelven explícitamente el problema, al menos den expresiones aproximadas que resulten manejables. A ello dedicaremos la siguiente sección.

5. Métodos asintóticos

En el estudio del comportamiento asintótico de los coeficientes de series generatrices a partir de las ecuaciones funcionales obtenidas para ellas según las técnicas anteriores, interesa considerar, siempre que sea posible, tales series como desarrollos de Taylor de funciones de variable compleja. Se estudiarán entonces tales series como funciones analíticas y se deducirá el comportamiento de sus coeficientes a partir de la naturaleza de sus singularidades.

En algunos casos podrán obtenerse soluciones explícitas para las ecuaciones establecidas para las series generatrices, en términos de funciones clásicas con desarrollos de Taylor conocidos [St 84 pag 35], pero esta situación es bastante rara. No obstante no va a ser necesario disponer de una expresión explícita tal, para poder concluir acerca de los coeficientes de las series estudiadas.

Sea $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ una serie en una variable compleja z y de coeficientes complejos. El conocimiento de su radio de convergencia nos proporciona una primera información sobre el comportamiento de los coeficientes. En efecto, si denotamos por ρ el radio de convergencia de $a(z)$, entonces sabemos que $a(z)$ es analítica en $\{z \in \mathbb{C} / |z| < \rho\}$, y que

$$\rho^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}; \text{ es decir que para todo } \varepsilon > 0$$

$$(1 - \varepsilon)^n \rho^{-n} \text{ i.o. } a_n \text{ (a.e. } \rho^{-n}(1 + \varepsilon)^n$$

donde i.o. (infinitely often) significa que la desigualdad se cumple para un número infinito de valores, y a.e. (almost everywhere) que la misma se tiene salvo para una cantidad finita de valores.

Por otra parte existe al menos un punto del círculo de convergencia, $|z| = \rho$, de $a(z)$ donde ésta no es analítica: una singularidad. Entonces el comportamiento de la función alrededor de dicha singularidad, que denominaremos dominante al igual que a todas aquellas que se encuentren sobre tal círculo de convergencia, permite determinar el orden de crecimiento exponencial de los a_n . Pero esta información es a menudo insuficiente para nuestros objetivos; necesitaremos conocer de hecho un equivalente asintótico de los coeficientes a_n de la serie para poder llevar a cabo nuestro análisis.

La herramienta básica que se encuentra en la base de la mayor parte de los resultados analíticos que utilizaremos es el teorema fundamental de Cauchy : [Ca61] , [Ma73] , [He74] , ...

Teorema de Cauchy

Sea $a(z)$ una función analítica en un dominio \mathcal{D} abierto que incluye al origen, y sea C una curva simple cerrada, en torno al origen, incluida en \mathcal{D} y orientada positivamente. Entonces el n -ésimo coeficiente de la serie de Taylor de $a(z)$ en $z = 0$ viene dado por la integral

$$[z^n] a(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C a(z) \frac{dz}{z^{n+1}}$$

Este teorema, junto con la fórmula de Stirling, permite obtener fácilmente aproximaciones asintóticas de los coeficientes de los desarrollos en serie de funciones meromorfas (con singularidades de tipo polo) [St84] , [Fl85] .

Aquí nos ocuparemos más en detalle del caso en que la función $a(z)$ no es meromorfa y posee singularidades dominantes de tipo algebraico (de la forma $(1 - z/\rho)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$) presentando el método que utilizaremos asiduamente a lo largo de nuestro trabajo para tal tipo de funciones. Dicho método debido a Darboux supone un conocimiento bastante fino de la naturaleza de las singularidades, lo que hace necesario en algunos casos la utilización de métodos todavía más elaborados, que no necesitaremos en este trabajo pero que queremos mencionar por su importancia. Tal es el caso por ejemplo del método del punto de silla utilizado en [SF83] , o las técnicas de prolongación analítica a que se recurre en [FO82] y [Od82] .

Teorema de Darboux

Sea $f(z)$ una función analítica en un entorno del origen de radio ρ , con una única singularidad, $z = \rho$, sobre su círculo de convergencia. Supongamos además que $f(z)$ admite en $z = \rho$ el desarrollo local

$$f(z) = \left[1 - \frac{z}{\rho}\right]^{-s} g(z) + h(z)$$

donde :

- i) $s \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$
- ii) $g(z)$ y $h(z)$ son analíticas en un entorno de $z = \rho$.
- iii) $g(\rho) \neq 0$.

Entonces el n -ésimo coeficiente del desarrollo de Taylor de $f(z)$ en el origen satisface cuando $n \rightarrow \infty$

$$[z^n] f(z) \approx \rho^{-n} \sum_{i=0}^n g_i (-1)^i \binom{i-s}{n}$$

donde g_i es el coeficiente i -ésimo del desarrollo de Taylor de $g(z)$ en $z = \rho$.

Demostración

Nos limitaremos a dar un esquema de la desarrollada en [He74]. En el artículo original [Da1878], donde se orienta la demostración de forma diferente, pueden encontrarse numerosos ejemplos de aplicaciones interesantes.

Consideremos el desarrollo de Taylor de $g(z)$ en $z = \rho$

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} g_n \left[1 - \frac{z}{\rho}\right]^n.$$

Sea $\sigma = 1 + \max(0, \lfloor s \rfloor)$; definimos

$$G_\sigma(z) = \sum_{0 \leq i \leq \sigma} g_i \left[1 - \frac{z}{\rho}\right]^i \quad \text{y} \quad F_\sigma(z) = f(z) - \left[1 - \frac{z}{\rho}\right]^{-s} G_\sigma(z).$$

Entonces $F_\sigma(z)$ es analítica para $|z| < \rho$, tiene una única singularidad sobre su círculo de convergencia en $z = \rho$, y

además está acotada y es $\sigma + 1$ veces continuamente diferenciable sobre su círculo de convergencia

$C = \{ z \in \mathbb{C} / |z| = \rho \}$. Un sencillo argumento de continuidad nos permite entonces utilizar el teorema de Cauchy sobre el círculo C , con lo que tenemos que

$[z^n] F_\sigma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F_\sigma(z) \frac{dz}{z^{n+1}}$, y ahora integrando por partes $\sigma + 1$ veces se obtiene una mayoración del n -ésimo coeficiente de $F_\sigma(z)$:

$$[z^n] F_\sigma(z) = O(\rho^{-n} n^{-\sigma-1}) \quad [14]$$

Ahora bien, a partir de la fórmula del binomio

$$[z^n] g_i \left[1 - \frac{z}{\rho} \right]^{-s+i} = g_i \rho^{-n} (-1)^n \binom{i-s}{n} \quad , \text{ para } 0 \leq i \leq \sigma$$

y para concluir el teorema basta ahora con observar que

$$[z^n] f(z) = \sum_{0 \leq i \leq \sigma} [z^n] g_i \left[1 - \frac{z}{\rho} \right]^{-s+i} + [z^n] F_\sigma(z) \quad [15]$$

Por otra parte

$$(-1)^n \binom{i-s}{n} = \frac{n^{s-i-1}}{\Gamma(s-i)} (1 + O(1/n)) \quad n \rightarrow \infty$$

donde Γ es la función de Euler que generaliza la función

factorial: $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, para $\text{Re}(x) > 0$.

Entonces

$$[z^n] g_i \left[1 - \frac{z}{\rho} \right]^{-s+i} = \frac{n^{s-i-1}}{\Gamma(s-i)} g_i \rho^{-n} (1 + O(1/n)) \quad n \rightarrow \infty$$

lo que unido a [14] permite deducir que en [15] el término preponderante en la suma es el primero ($i = 0$), lo que lleva frecuentemente a enunciar como conclusión del teorema

$$[z^n] f(z) = \rho^{-n} n^{s-1} \frac{g(\rho)}{\Gamma(s)} (1 + O(1/n)) \quad n \rightarrow \infty$$

lo que suele ser suficiente para el estudio de valores medios de parámetros pero no en general para momentos de orden superior, como veremos en el próximo capítulo.

El teorema de Darboux se extiende fácilmente al caso de varias singularidades algebraicas sobre el círculo de convergencia. Es suficiente entonces sumar las contribuciones de cada singularidad.

Para terminar esta sección vamos a enunciar tres resultados de tipo general clásicos del análisis complejo que utilizaremos asiduamente a lo largo de este trabajo.

Teorema de la función implícita [Ca61]

Sean $f_j(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p)$ $j = 1, \dots, n$, funciones holomorfas en un entorno de un punto $x_j = a_j$; $z_k = c_k$. Supongamos que el determinante funcional $\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$ es $\neq 0$ en dicho punto. Entonces las ecuaciones

$$y_j = f_j(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p) \quad j = 1, \dots, n,$$

pueden resolverse cuando las x_j y las z_k estén suficientemente próximas a las a_j y c_k respectivamente, y las y_j suficientemente próximas a las $b_j = f_j(a_1, \dots, a_n; c_1, \dots, c_p)$, de la siguiente forma: $x_j = g_j(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_p)$ donde las g_j son funciones holomorfas en un entorno del punto $(b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_p)$.

Criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme [Ma73]

Sea g_n una sucesión de funciones definidas sobre un dominio $A \subset \mathbb{C}$. Supongamos que existe una sucesión de números reales (M_n) con $M_n \geq 0$ tal que

$$i) |g_n(z)| \leq M_n \quad \forall z \in A, \text{ y}$$

$$ii) \sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ converge.}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge absoluta y uniformemente sobre A .

Teorema de Weierstrass [Ma73]

Si g_k son funciones analíticas en una región $A \subset \mathbb{C}$, y $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente sobre todo disco cerrado incluido en A , entonces $g(z)$ es analítica en A y $g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g'_k(z)$ puntualmente en A y también uniformemente sobre todo disco cerrado contenido en A .

Para profundizar más sobre temas de análisis complejo pueden consultarse por ejemplo [Ca61], [Ma73], [He74], [Di68], etc...

A continuación mostramos un ejemplo clásico de utilización de las técnicas precedentes; estudiaremos el comportamiento asintótico del número de árboles de un determinado tamaño pertenecientes a una familia simple [MM78, St84]. El citado resultado será asiduamente utilizado a lo largo de este trabajo.

6. Enumeración de familias simples

Sea $F = M(S, v)$ una familia simple cuya función generatriz verifica la ecuación $f(z) = z \phi(f(z))$ con $\phi(u) = \sum_{n \geq 0} c_n u^n$, $c_0 \neq 0$.

Consideremos la ecuación funcional

$$F(z, u) \equiv u - z\phi(u) = 0 \quad [16]$$

que define implícitamente u como función de z .

Por la condición [1] de simplicidad, $\phi(u)$ tiene radio de convergencia 1, si la serie es infinita e infinito en otro caso, y por lo tanto $F(z, u)$ es analítica en $(0, 0)$, siendo $F(0, 0) = 0$. Además como $\phi(0) = c_0 \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial u}(0, 0) \neq 0$.

Entonces, por el teorema de la función implícita, la ecuación [16] tiene una solución en u (precisamente $f(z)$), analítica en un entorno del origen. Además, el radio de convergencia de $f(z)$ queda determinado por el cero (o ceros) de menor módulo de la derivada de $\frac{u}{\phi(u)}$, que verifique el sistema

$$\frac{\partial F}{\partial u}(z, u) = 0, \quad F(z, u) = 0 \quad [17]$$

Supondremos para simplificar la exposición del método desarrollado, que $\phi(u)$ cumple la condición de m.c.d. :

$$\text{m.c.d. } (n) \neq 0 / c_n \neq 0 = 1$$

Con ello se está diciendo que $\phi(u)$ no es múltiplo de una potencia entera u^p de u para $p > 1$, lo que nos garantiza que la raíz buscada es única real y positiva. En efecto, el cero (o ceros) de menor módulo de la derivada de $\frac{u}{\phi(u)}$, verifica la ecuación $u \phi'(u) = \phi(u)$ [18]

$$\text{que puede reescribirse así : } \sum_{n \geq 0} (n-1) c_n u^n = c_0 \quad [19]$$

con lo que [18] admite una raíz real positiva sobre el disco de convergencia de ϕ , por ser los c_n reales positivos. Tal raíz la denotaremos por τ . La minimalidad del módulo de τ queda garantizada por ser los c_n positivos, mientras que la unicidad de τ como raíz de menor módulo se debe a la condición de m.c.d. . En efecto, tomemos $\rho = \frac{\tau}{\phi(\tau)}$, con lo que (ρ, τ) verifica el sistema [17] y por lo tanto

$|\frac{\partial F}{\partial u}(z, u)| = |1 - z\phi'(u)| \neq 0 \quad \forall z, u \in \mathbb{C} \quad |z| < \rho \quad \text{y} \quad |u| < \tau$;
 además $f(z)$ es analítica $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \rho$; $f(\rho) = \tau$ y $z = \rho$ es una singularidad dominante de $f(z)$. Supongamos ahora que $c_1 \neq 0$, entonces $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = \rho, z \neq \rho$ tenemos que $|f(z)| < f(\rho) = \tau$ puesto que $c_0, c_1 > 0$. Luego

$|\phi'(f(z))| < \phi'(\tau) = 1/\rho$, ya que ρ verifica el sistema [17]. Entonces $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = \rho$, $z \neq \rho$, $|\phi'(f(z))| < 1/\rho$, y por lo tanto $|\frac{\partial F}{\partial f}(z, f(z))| \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq \rho$ excepto para $z = \rho$.

Luego $f(z)$ sólo tiene una única singularidad dominante, en $z = \rho$, real positiva y que verifica el sistema:

$$\begin{aligned} \tau \phi'(\tau) &= \phi(\tau) \\ \rho &= \frac{\tau}{\phi(\tau)} = \frac{1}{\phi'(\tau)} \end{aligned} \quad [20]$$

Si $c_1 = 0$, pero tenemos la condición de m.c.d., se razona de manera análoga sin más que notar que tal condición, unida al carácter positivo de los coeficientes de $f(z)$, implica la existencia de al menos un monomio en $f(z)$ que no toma valores reales positivos.

Por otra parte, a partir de [19] y [20] tenemos que $\phi(\tau) > c_0 \geq 1$ y $\tau \leq c_0$, y por tanto $\rho < \tau$ y $\rho < 1$. El hecho de que $\rho < 1$ era de esperar ya que existe una infinidad de n para los que $[z^n] f(z) \geq 1$.

Estudiemos a continuación el comportamiento local de $f(z)$ en $z = \rho$. Para ello consideramos el desarrollo de Taylor de

$z = \frac{u}{\phi(u)}$ en un entorno de $u = \tau$.

$$z = \frac{\tau}{\phi(\tau)} + \sum_{n \geq 2} s_n (u - \tau)^n \quad \text{donde} \quad s_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n z}{du^n}(\tau)$$

o lo que es lo mismo

$$z - \rho = s_2 (u - \tau)^2 \left[1 + \sum_{n \geq 3} \frac{s_n}{s_2} (u - \tau)^{n-2} \right] \quad [21]$$

Nótese que $s_2 = -\frac{\tau \phi''(\tau)}{2 \phi'(\tau)} \neq 0$.

Ahora la ecuación [21] de la que $f(z)$ es solución en u , se descompone en

$$(\rho - z)^{1/2} = \pm (u - \tau) \psi(u - \tau) \quad [22]$$

donde $\psi(v) = \sqrt{-s_2 \left[1 + \sum_{n \geq 3} \frac{s_n}{s_2} v^{n-2} \right]}$ es analítica en cero

$$\text{y } \psi(0) = \sqrt{\frac{\tau \phi''(\tau)}{2 \phi'(\tau)}}.$$

Además, por el teorema de la función implícita, [22] admite, para cada signo, una solución en términos de $(\rho - z)^{1/2}$ que es localmente analítica en función de $(\rho - z)^{1/2}$. Como $f(z)$ es de coeficientes positivos, corresponde a la solución con el signo menos. Entonces $f(z) - \tau = \frac{(\rho - z)^{1/2}}{-\psi(f(z) - \tau)}$, y ahora aplicando el teorema de inversión de Lagrange

$$f(z) = \tau + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} (\rho - z)^{n/2} [v^{n-1}] \psi^{-n}(v).$$

Finalmente, reagrupando los miembros de este desarrollo según la paridad de n , obtenemos

$$f(z) = g(z) (1 - z/\rho)^{1/2} + h(z) \quad \text{donde}$$

$$g(z) = \frac{-\sqrt{\rho}}{\psi(0)} + \sum_{\substack{n \geq 3 \\ n \text{ impar}}} \frac{-1}{n} \rho^{n/2} (1 - z/\rho)^{\frac{n-1}{2}} [v^{n-1}] \psi^{-n}(v) \quad [23]$$

$$h(z) = \tau + \sum_{\substack{n \geq 2 \\ n \text{ par}}} \frac{1}{n} \rho^{n/2} (1 - z/\rho)^{n/2} [v^{n-1}] \psi^{-n}(v)$$

Nótese por último que $g(z)$ y $h(z)$ son analíticas en $z = \rho$, con $g(\rho) = -\sqrt{\frac{2 \phi(\tau)}{\phi''(\tau)}}$ y $h(\rho) = \tau$. Con lo que

nos encontramos en las condiciones de aplicación del teorema de Darboux, y podemos concluir el siguiente

Teorema (enumeración de familias simples) [BRS75,MM78]

Sea \mathcal{F} una familia simple de árboles cuya serie generatriz verifica la ecuación funcional $f(z) = z \phi(f(z))$, con ϕ satisfaciendo la condición de m.c.d. . Entonces el número de árboles de tamaño n de \mathcal{F} tiene el equivalente asintótico

$$[z^n] f(z) = \beta \rho^{-n} n^{-3/2} (1 + O(1/n)) \quad n \rightarrow \infty \quad [24]$$

donde $\beta = \sqrt{\frac{\phi(\tau)}{2\pi \phi''(\tau)}}$, $\rho = \frac{\tau}{\phi(\tau)}$, y τ es la raíz de menor módulo de la ecuación $\phi(u) - u \phi'(u) = 0$.

Nótese, finalmente, que la condición de m.c.d. no es una restricción fuerte, ya que si m.c.d. $(n \geq 1 / c_n \neq 0) = c \neq 1$, entonces la ecuación [17] admite c soluciones de menor módulo en $u = \tau e^{2\pi k i / c}$, $0 \leq k < c$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, cada una de las cuales va asociada a una singularidad de $f(z)$ de módulo $\rho = \frac{\tau}{\phi(\tau)}$; singularidades que difieren en una raíz c -ésima de la unidad. Entonces basta aplicar el razonamiento anterior a cada uno de los puntos de ramificación de $f(z)$, en $z = \rho e^{2\pi k i / c}$, $0 \leq k < c$. Ahora el teorema de Darboux se aplica sumando las contribuciones de cada singularidad; y con la misma notación del teorema anterior, y a partir de consideraciones elementales de simetría, se concluye que

$$[z^n] f(z) = \begin{cases} c \beta \rho^{-n} n^{-3/2} (1 + O(1/n)) & \text{si } n \bmod c = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Capítulo 2

Evaluación del tamaño medio de árboles simplificados

En este capítulo se aborda el estudio de diversos tipos de parámetros definidos sobre árboles, de manera recursiva y según una filosofía bottom-up (de las hojas a la raíz).

En concreto se trabaja con algoritmos que modifican la estructura de entrada según un cierto criterio de reducción o simplificación aplicado a los subárboles resultantes de la aplicación recursiva del citado criterio a cada uno de los subárboles radicales del árbol original.

Más en particular los algoritmos considerados utilizan criterios de simplificación basados en propiedades de idempotencia, idempotencia más conmutatividad y nilpotencia, respectivamente. Todos ellos se encuentran, pues, en la base de los sistemas de cálculo formal y de deducción lógica, lo que nos hace considerar los esquemas de evaluación desarrollados tanto en este capítulo como en el siguiente, en el que abordaremos el estudio de la complejidad media de dichos algoritmos, como firmes candidatos a métodos generales que permitan predecir el comportamiento de una gran clase de parámetros y programas relativos a estos problemas fundamentales de cálculo formal y deducción lógica. Mostramos en primer lugar como traducir los esquemas de definición recursivos a un conjunto infinito de ecuaciones sobre series de potencias, y a continuación como utilizar tales ecuaciones con vistas a la obtención de una ecuación funcional que nos permita resolver el problema ayudándonos del teorema de Darboux-Polya para aproximaciones asintóticas de coeficientes de series de potencias. En esta segunda fase pondremos en evidencia el valor de la utilización de series de potencias en varias variables.

En el apéndice 2 contrastamos, para diversas familias de árboles, las aproximaciones, obtenidas con ayuda de ordenador, de las constantes teóricas de proporcionalidad asintóticas correspondientes a los parámetros en estudio, con los resultados obtenidos por medio de simulaciones en ordenador de los procesos estudiados. Queda patente la gran similitud entre las aproximaciones obtenidas y los resultados experimentales proporcionados por la simulación.

1. Idempotencia

Vamos a considerar un sistema de reescritura que da como salida una única copia de un subárbol cuando todos sus subárboles radicales son idénticos.

Comenzaremos desarrollando el estudio para el caso de un único tipo de operación de carácter idempotente y aridad arbitraria p (árboles p -arios), y para el caso de infinitos tipos de operaciones de cualquier aridad pero verificando todas ellas la propiedad de idempotencia (árboles generales); para terminar esta sección con la generalización de los resultados obtenidos a cualquier tipo de familia simple de árboles con operaciones de carácter idempotente.

Los resultados presentados en las secciones 1.1 y 1.2 aparecerán en [FC8?] donde se extiende el estudio realizado en [CS86] para el caso de los árboles binarios.

El hecho de que el criterio de simplificación adoptado se base en la idempotencia de los operadores sobre los nodos internos de los árboles estudiados, permite afirmar que los resultados obtenidos podrían concretarse para la simplificación de términos del cálculo proposicional o equivalentemente del álgebra conjuntista (construidos con unión e intersección).

1.1. Árboles p-arios con q etiquetas para las hojas

Consideremos la familia \mathcal{Q} de los árboles p-arios con q posibles etiquetas para sus hojas ($p, q \geq 2$). El algoritmo de simplificación con el que trabajaremos transforma dichos árboles procediendo de las hojas a la raíz, reemplazando cada subárbol con p subárboles radicales idénticos (tras simplificación) por una única copia de uno de ellos.

En la figura 1 se da el texto de este procedimiento en pseudo-PASCAL.

```

FUNCTION SIMP(T: Q): Q ;
  IF T.ar = 0 THEN SIMP := T
    ELSE FOR i := 1 TO p DO t(i) := SIMP(T.h(i)) OD;
         i := i ; con := true ;
         WHILE (i ≤ (p - 1)) AND con DO
           IF EQUAL(t(i), t(i+1)) THEN i := i + 1
             ELSE con := false
           OD ;
         IF con THEN SIMP := t(1)
           ELSE SIMP := o(t(1), ..., t(p))
END SIMP .

```

EQUAL testea la igualdad de dos árboles en orden prefijo

Figura 1

En particular todo árbol de \mathcal{Q} en el que todas las hojas lleven idéntica etiqueta e , se simplifica al árbol formado por una única hoja etiquetada con e ; más en general, todo árbol obtenido a partir de un árbol p-ario mediante sustitución de todas sus hojas por un mismo árbol t de \mathcal{Q} , se simplifica al simplificado de t .

Nuestro primer objetivo aquí, es el estudio del tamaño medio de un árbol simplificado con respecto a su tamaño inicial; entendiéndose como tamaño de un árbol t el número de sus nodos internos, que denotaremos por $|t|$. Supondremos, como es usual, que todos los árboles de un mismo tamaño son equiprobables.

La familia de árboles \mathcal{Q} viene definida por la serie formal de árboles

$$Q = \sum_{i=1}^q e_i + \underbrace{o(Q, \dots, Q)}_p$$

donde (e_1, \dots, e_q) es el conjunto de posibles etiquetas para las hojas de los árboles de la familia. Entonces la función generatriz asociada a \mathcal{Q} , $Q(z) = \sum q_n z^n$, donde q_n es el número de árboles de tamaño n de la familia \mathcal{Q} , verifica la ecuación

$$Q(z) = q + zQ^p(z) \quad [1]$$

Ahora a partir del teorema de la función implícita y del teorema de inversión de Lagrange, aplicando a [1] un desarrollo análogo al seguido en el capítulo anterior para la enumeración de familias simples, se obtiene que el radio de convergencia de $Q(z)$ es $\rho = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p q^{p-1}}$; que $Q(z)$ sólo tiene una singularidad, en $z = \rho$, sobre su círculo de convergencia; y que en un entorno de $z = \rho$, admite el siguiente desarrollo

$$Q(z) = g(z) (1 - z/\rho)^{1/2} + h(z) \quad [2]$$

siendo

$$g(z) = \frac{-\rho^{1/2}}{\psi(\theta)} + \sum_{\substack{n \geq 3 \\ n \text{ impar}}}^{-1/n} \rho^{n/2} (1 - z/\rho)^{(n-1)/2} [u^{n-1}] \psi^{-n}(v)$$

y

$$h(z) = \tau + \sum_{\substack{n \geq 2 \\ n \text{ par}}} \frac{1}{n} \rho^{n/2} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{n/2} [v^{n-1}] \varphi^{-n}(v)$$

donde

$$\varphi(v) = \sqrt{-s_2 \left(1 + \sum_{n \geq 3} \frac{s_n}{s_2} v^{n-2}\right)}$$

$$\text{con } s_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n(z)}{d u^n}(\tau), \text{ siendo } z = \frac{u - q}{u^p} \text{ y}$$

$$\tau = Q(\rho) = \frac{p \cdot q}{p-1}.$$

La unicidad de la singularidad dominante se deduce a partir del hecho de que verifica el sistema

$$\begin{cases} 1 = p \rho \tau^{p-1} \\ \rho = \frac{\tau - q}{\tau^p} \end{cases} \quad [3]$$

Además $g(z)$ y $h(z)$ son analíticas en un entorno de $z = \rho$ con lo cual podemos concluir que

$$q_n = \frac{g(\rho)}{-2\sqrt{\pi}} \rho^{-n} n^{-3/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\text{con } g(\rho) = \frac{-q}{p-1} \sqrt{\frac{2p}{p-1}} \quad [4]$$

ya que estamos en las condiciones de aplicación del teorema de Darboux - Polya .

Sea \mathcal{S} la clase de todos los árboles de \mathcal{Q} irreducibles ; es decir, aquellos que no pueden ser simplificados por el algoritmo anterior. \mathcal{S} puede caracterizarse recursivamente así :

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^q \mathcal{S}_i + \{ \circ(t_1, \dots, t_p) / t_1, \dots, t_p \in \mathcal{S}, \exists i, j \in \{1, \dots, p\} \ t_i \neq t_j \} \quad [5]$$

Consideremos la función generatriz de dos variables

$$X(y, z) = \sum_{T \in \mathcal{Q}} y^{|SIMP(T)|} z^{|T|} = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=0}^n i_{m,n} y^m z^n$$

donde $i_{m,n}$ representa el número de árboles de tamaño n cuyo

simplificado, siguiendo el algoritmo anterior, es de tamaño m . Entonces, para cada n dado, el cociente $\frac{i_{m,n}}{q_n}$ nos da la probabilidad de que un árbol de tamaño n tenga un simplificado de tamaño m . Y el tamaño medio de los árboles simplificados que se obtienen a partir de un árbol aleatorio de tamaño n de \mathcal{Q} , viene dado por el $\sum_{m=0}^n m \frac{i_{m,n}}{q_n}$.

Denotaremos por $S(z)$ la función generatriz del tamaño de los árboles obtenidos a partir del algoritmo en estudio.

$$S(z) = \sum_{T \in \mathcal{Q}} |\text{SIMP}(T)| z^{|T|} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

donde $s_n = \sum_{m=0}^n m i_{m,n}$. Y se observa que el valor en $y = 1$, de la derivada de $X(y, z)$ con respecto a y , es justamente $S(z)$: $S(z) = X'_y(1, z)$

Ahora bien, no resulta fácil, al menos aparentemente, encontrar una ecuación funcional sencilla para $S(z)$ que nos permita razonar como en el caso de $Q(z)$. No obstante, sacando partido al peculiar proceder recursivo del algoritmo, lograremos obtener una ecuación funcional para $S(z)$ que verifique las hipótesis del teorema de Darboux - Polya. La idea principal para ello, es la traducción del esquema de definición recursivo a un sistema infinito de ecuaciones funcionales, que definen de manera recursiva una sucesión de funciones generatrices asociadas a los elementos de una determinada partición de la familia de árboles \mathcal{Q} , basada en los elementos de \mathcal{I} . Concretamente, particionamos la familia \mathcal{Q} en clases de árboles con el mismo simplificado. Para cada $t \in \mathcal{I}$ definimos $\mathcal{Q}_t = \{ T \in \mathcal{Q} / \text{SIMP}(T) = t \}$. Es claro que \mathcal{Q} es la unión disjunta de las clases \mathcal{Q}_t cuando t recorre \mathcal{I} .

Dado $t \in \mathcal{F}$, $Q_t(z) = \sum_{\substack{T \in \mathcal{A} \\ t = \text{SIMP}(T)}} z^{|T|}$ es la función generatriz

de todos los árboles T de \mathcal{A} cuyo simplificado es t .

Entonces $Q(z) = \sum_{t \in \mathcal{F}} Q_t(z)$.

Ahora definimos los elementos de la partición $(a_t)_{t \in \mathcal{F}}$ por medio del siguiente sistema recursivo de series formales de árboles:

$$\forall e \in (e_1, \dots, e_q) \quad a_e = \textcircled{e} + \underbrace{o(a_{e_1}, \dots, a_{e_p})}_p \quad [6]$$

$$\forall t = o(t_1, \dots, t_p) \in \mathcal{F} \quad a_t = \underbrace{o(a_{t_1}, \dots, a_{t_p})}_p + \underbrace{o(a_{t_1}, \dots, a_{t_p})}_p$$

La primera de estas expresiones recoge el hecho de que si un árbol se simplifica al árbol \textcircled{e} , es o bien porque se trata de dicho árbol, o bien porque sus p subárboles radicales se simplifican a \textcircled{e} . La segunda expresa el hecho de que si un árbol tiene como simplificado $o(t_1, \dots, t_p)$ es o bien porque su subárbol radical i -ésimo tiene como simplificado t_i para cada $i \in (1, \dots, p)$; o bien porque sus p subárboles radicales tienen como simplificado $o(t_1, \dots, t_p)$.

Ahora a partir de [6] obtenemos el siguiente sistema infinito de ecuaciones que nos define recursivamente el conjunto de funciones generatrices $(Q_t)_{t \in \mathcal{F}}$.

En primer lugar

$$\forall e \in (e_1, \dots, e_q) \quad Q_e(z) = 1 + z Q_e^p(z) = P(z) \quad [7]$$

donde $P(z)$ es la función generatriz asociada a la familia \mathcal{P} de árboles p -arios.

Por otra parte para toda p -upla de árboles irreducibles en la que al menos dos de ellos son distintos, se tiene

$$Q_{o(t_1, \dots, t_p)}(z) = z \prod_{i=1}^p Q_{t_i}(z) + z Q_{o(t_1, \dots, t_p)}^p(z) \quad [8]$$

Utilizamos ahora el hecho de que \mathcal{Q} es la unión disjunta de las clases \mathcal{Q}_t con $t \in \mathcal{S}$, lo que nos permite reescribir $X(y,z)$ de la forma siguiente :

$$\begin{aligned} X(y,z) &= \sum_{T \in \mathcal{A}} y^{|\text{SIMP}(T)|} z^{|T|} = \sum_{t \in \mathcal{S}} \sum_{T \in \mathcal{A}_t} z^{|T|} y^{|t|} \\ &= \sum_{t \in \mathcal{S}} y^{|t|} Q_t(z) , \end{aligned}$$

y recordando que $S(z) = X'_y(1,z)$, llegamos a que

$$S(z) = \sum_{t \in \mathcal{S}} |t| Q_t(z) .$$

Ahora bien, a partir de (8), y para todo árbol irreducible $t = \circ(t_1, \dots, t_p)$ de tamaño superior a cero, se tiene que

$$y^{|t|} Q_t(z) = y z \prod_{i=1}^p y^{|t_i|} Q_{t_i}(z) + z y^{|t|} Q_t^p(z) ;$$

con lo que utilizando también (7), y sumando todas las ecuaciones resultantes, se obtiene

$$\begin{aligned} X(y,z) &= q + z Q_e^p(z) + y z \sum_{(t_1, \dots, t_p) \in \Omega} \prod_{i=1}^p y^{|t_i|} Q_{t_i}(z) \\ &+ z \sum_{\substack{t \in \mathcal{S} \\ |t| > 0}} y^{|t|} Q_t^p(z) \end{aligned}$$

donde $\Omega = \{ (t_1, \dots, t_p) \in \mathcal{S}^p / \exists i, j \in \{1, \dots, p\} t_i \neq t_j \}$, sin más que recordar la caracterización recursiva (5) de la clase de árboles irreducibles \mathcal{S} .

Con lo que

$$X(y,z) = q + y z X^p(y,z) - z \sum_{t \in \mathcal{S}} (y^p |t| + 1 - y^{|t|}) Q_t^p(z) \quad [9]$$

sin más que notar que

$$\sum_{(t_1, \dots, t_p) \in \Omega} \prod_{i=1}^p y^{|t_i|} Q_{t_i}(z) = X^p(y,z) - \sum_{t \in \mathcal{S}} y^p |t| Q_t^p(z)$$

Derivando en [9] con respecto a y , tomando $y = 1$, y

resolviendo la ecuación lineal resultante, llegamos a que

$$S(z) = \frac{zQ^p(z) - z \sum_{t \in \mathbb{N}} ((p-1)|t| + 1) Q_t^p(z)}{1 - pz Q^{p-1}(z)} \quad [10]$$

sin más que observar que $X(1, z) = Q(z)$.

Por otra parte, derivando en [1] se obtiene

$$Q'(z) = \frac{Q^p(z)}{1 - pz Q^{p-1}(z)} \quad [11]$$

que aplicado a [10], y teniendo en cuenta que, por [1], se tiene $z Q^p(z) = Q(z) - q$, nos conduce a la siguiente

Proposición 1.1

La función generatriz, $S(z)$, del tamaño de los árboles simplificados viene dada por

$$S(z) = \frac{z Q'(z)}{Q(z) - q} (Q(z) - q - \alpha(z)) \quad [12]$$

donde $\alpha(z) = z \sum_{t \in \mathbb{N}} ((p-1)|t| + 1) Q_t^p(z)$.

Dado que $\forall z \in \mathbb{R}^+$ $S(z) = \sum_{T \in \mathcal{A}} |\text{SIMP}(T)| z^{|T|} \leq \sum_{T \in \mathcal{A}} |T| z^{|T|}$

y teniendo en cuenta que se trata de series de coeficientes positivos, sabemos que el radio de convergencia de $S(z)$ es

mayor o igual que el radio de convergencia $\rho = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p q^{p-1}}$

correspondiente a $Q(z)$. Pero por otra parte,

$S(z) = \sum_{T \in \mathcal{A}} |\text{SIMP}(T)| z^{|T|}$ tiene coeficientes superiores a $|\text{SIMP}(T)| > 0$

los del $\sum_{T \in \mathcal{A}} z^{|T|}$, cuyo radio de convergencia es ρ , lo que $|\text{SIMP}(T)| > 0$

nos permite concluir que el radio de convergencia de $S(z)$ es ρ .

Veremos a continuación que $\alpha(z)$ tiene un radio de convergencia superior a ρ , lo que nos garantiza que $z = \rho$ es la única singularidad de $S(z)$ sobre su círculo de convergencia, ya que la aplicación del teorema de la función implícita a $Q(z)$ nos asegura que ρ verifica el sistema [3], y que por tanto es la única raíz real positiva de $1 - p z Q^{p-1}(z)$, denominador de [10].

Una vez demostrada la analiticidad de $\alpha(z)$ en un entorno del origen de radio superior a ρ , podremos abordar finalmente la determinación del comportamiento local de $S(z)$ en un entorno de $z = \rho$.

Pero antes de estudiar la analiticidad de $\alpha(z)$, demostraremos un resultado previo de analiticidad de series de funciones que será asiduamente utilizado, tanto a lo largo de este capítulo como del siguiente. El mismo viene a decirnos bajo qué condiciones podemos asegurar que el radio de convergencia de una serie del tipo $\sum \alpha_i f_i^p(z)$, con $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, es estrictamente superior al de $\sum \alpha_i f_i(z)$, donde (α_i) es una sucesión de números reales positivos, y $(f_i(z))$ una sucesión de series de potencias con coeficientes positivos.

Proposición 1.2

Sea $(f_i(z))$ una sucesión de series de potencias con coeficientes positivos y un mismo radio de convergencia ω .

Supongamos que existe una sucesión (α_i) de números reales positivos tales que

$$i) \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \leq 1$$

ii) $\sum \alpha_i f_i(z)$ tiene radio de convergencia β , con $\beta < \omega$

Si además se verifica

- iii) Dado $p > 1$, $p \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon > 0$, y existen $c, \gamma, k \in \mathbb{R}^+$ con $\gamma^p < k$, de manera que $\forall i \forall z$ con $|z| < \beta + \varepsilon$ se tiene que $|f_i(z)| < c \gamma^{a_i}$ donde cada $a_i \in \mathbb{N}$, y $|(n / a_n = i)| \leq M k^{-i}$ para alguna constante $M \in \mathbb{R}^+$.

Entonces

- a) $\forall p \in \mathbb{N}$ $p > 1$, $\sum \alpha_i f_i^p(z)$ tiene radio de convergencia superior a β .
- b) Si además, las constantes ε, c, γ y k de iii) son independientes de p , y verifican $\gamma < 1$, $c\gamma < 1$, entonces $\sum_{p \geq 2} \sum_{i \geq 0} \alpha_i f_i^p(z)$ tiene radio de convergencia superior a β .

Antes de pasar a la demostración de esta proposición, comentaremos brevemente el significado de las hipótesis i) y iii). La primera de ellas viene a decir que los pesos α_i crecen lentamente, lo cual podría reflejarse igualmente con una condición del tipo i') $\limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{\alpha_i} \leq 1$, conservándose todos los resultados. En cuanto a la hipótesis iii), indica que las $f_i(z)$ están acotadas superiormente, en norma, de manera exponencial, con exponentes que crecen asintóticamente según una determinada tasa, lo que va a ser vital para garantizar la convergencia de la serie exponencial considerada en la prueba.

Demostración

a) Consideremos $f(z) = \sum \alpha_i f_i^p(z)$. A partir de iii) tenemos que $|\alpha_i f_i^p(z)| < c^p \alpha_i \gamma^{p a_i} \forall z$ $|z| < \beta + \varepsilon$.

Ahora bien: $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \gamma^{p a_i} \leq M \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j k^{-j} \gamma^{p j}$, que es

convergente por cumplirse i), y ser $\gamma^p < k$.

Luego $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i f_i^p(z)$ converge absoluta y uniformemente sobre $\{z / |z| < \beta + \varepsilon\}$ por el criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme.

Además $f(z)$ es analítica en $\{z / |z| < \beta + \varepsilon\}$ por la completitud del espacio de las funciones holomorfas; es decir, por ser analítica cada función $\alpha_i f_i^p(z)$, y converger $f(z)$ uniformemente sobre todo disco cerrado incluido en $\{z / |z| < \beta + \varepsilon\}$, según el teorema de Weierstrass.

b) Sea $g(z) = \sum_{p \geq 2} \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i f_i^p(z)$. Dado $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, sabemos que $|\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i f_i^p(z)| < \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i c^p \gamma^{p a_i} \forall z \in \{z / |z| < \beta + \varepsilon\}$.

También sabemos que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i c^p \gamma^{p a_i}$ es convergente. Por lo tanto, en particular para $p = 2$ tenemos que para cada $\varepsilon' > 0$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=j}^{\infty} \alpha_i (c \gamma^{a_i})^2 = A < \varepsilon' < 1$. [13]

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que los α_i son mayores o iguales a 1. Entonces para todo $p \geq 3$ tenemos que

$\alpha_i (c \gamma^{a_i})^p \leq \alpha_i^{p/2} (c \gamma^{a_i})^p$, con lo cual a partir de [13] podemos afirmar que $\exists j \in \mathbb{N} \forall p \geq 3$

$$\sum_{i=j}^{\infty} \alpha_i (c \gamma^{a_i})^p \leq \sum_{i=j}^{\infty} \alpha_i^{p/2} (c \gamma^{a_i})^p < A^{p/2} < \varepsilon'^{p/2} < 1.$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 2} \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i (c \gamma^{a_i})^p &= \sum_{p \geq 2} \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i (c \gamma^{a_i})^p + \\ &+ \sum_{p \geq 2} \sum_{i=j}^{\infty} \alpha_i (c \gamma^{a_i})^p < \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{p \geq 2} \alpha_i (c \gamma^{a_i})^p + \\ &+ \sum_{p \geq 2} A^{p/2} \text{ que es convergente por ser } \gamma < 1, c\gamma < 1 \end{aligned}$$

y $A < 1$.

Entonces la parte b) de la proposición queda demostrada

sin más que aplicar de nuevo el criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme, y la completitud del espacio de las funciones holomorfas.

Nótese que la proposición 1.2 sigue siendo cierta aunque no se conozca exactamente ω , e incluso si las $f_i(z)$ tuviesen distintos radios de convergencia, siempre y cuando se siga verificando iii).

Pasemos a continuación al estudio de la analiticidad de $\alpha(z)$.

Proposición 1.3

Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(z) = z \sum_{t \in \mathbb{N}} ((p-1)|t| + 1) Q_t^p(z)$ es analítica en la bola $\{z \mid |z| < \rho + \varepsilon\}$.

Demostración

Basta comprobar que se verifican las hipótesis de la proposición 1.2.

En primer lugar $\sum_{t \in \mathbb{N}} ((p-1)|t| + 1) Q_t(z)$ tiene radio de convergencia ρ , ya que $\sum_{t \in \mathbb{N}} ((p-1)|t| + 1) Q_t(z) = (p-1) \sum_{t \in \mathbb{N}} |t| Q_t(z) + \sum_{t \in \mathbb{N}} Q_t(z) = (p-1) S(z) + Q(z)$.

Además

$$\sum_{t \in \mathbb{N}} ((p-1)|t| + 1) Q_t(z) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{t \in \mathbb{N} \\ |t|=i}} ((p-1)i + 1) Q_t(z)$$

con lo que la hipótesis i) se verifica trivialmente.

Queda pues por probar la hipótesis iii). Para ello comenzamos por demostrar el siguiente

Lema 1.1

Para todo $p \geq 3$, siendo $z_0 = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p q}$ y

$\gamma = \frac{p-1}{p} \frac{1}{q} \frac{1}{\sqrt{2}}$ se verifica que para todo $t \in \mathcal{J}$

$$Q_t(z_0) < \frac{p}{p-1} \gamma |t| .$$

Demostración

Nótese que $\rho = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p q^{p-1}} < z_0 < \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}$, y que $\gamma^p < \rho$.

Razonaremos por inducción sobre el tamaño de t .

Por [7] sabemos que para todo $e \in \{e_1, \dots, e_q\}$

$Q_e(z) = P(z)$, con lo que $Q_e(z_0) < \frac{p}{p-1}$, pues $P(z)$ es una serie de potencias con coeficientes positivos; su radio de convergencia es $\frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}$, según el teorema de la función implícita; y $P\left(\frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}\right) = \frac{p}{p-1}$.

Sea $t \in \mathcal{J}$ con $|t| \geq 1$, y supongamos que para todo

$t^* \in \mathcal{J}$ con $|t^*| < |t|$ se verifica que $Q_{t^*}(z_0) < \frac{p}{p-1} \gamma |t^*|$.

A partir de [8] y de la hipótesis de inducción se obtiene

$$Q_t(z_0) - z_0 Q_t^p(z_0) = z_0 \prod_{i=1}^p Q_{t_i}^p(z_0) < z_0 \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \gamma |t|^{-1}$$

lo que nos permite concluir que $Q_t(z_0) < \frac{p}{p-1} \gamma |t|$ sin más que observar que:

a) La función $y(x) = x - z_0 x^p$, definida sobre \mathbb{R}^+ , es

creciente en $\left[0, \frac{1}{\sqrt[p]{p z_0}}\right]$, con

$$y\left(\frac{1}{\sqrt[p]{p z_0}}\right) = \frac{p-1}{\sqrt[p]{q}} > 1 .$$

$$b) Q_t(z_0) < \frac{1}{\sqrt[p]{p z_0}}.$$

$$c) \frac{p}{p-1} y|t| - z_0 \left(\frac{p}{p-1}\right)^p y^p |t| \geq z_0 \left(\frac{p}{p-1}\right)^p y|t|^{-1}$$

La figura 2 contribuirá a comprender mejor el razonamiento seguido.

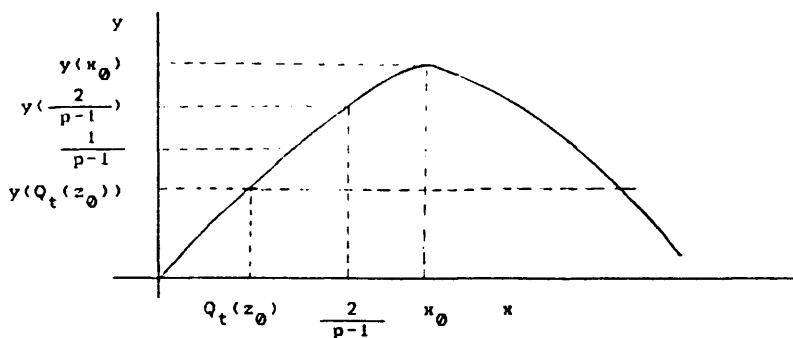


Figura 2

Para probar b), nótese que $z_0 \left(\frac{p}{p-1}\right)^p y|t|^{-1} \leq \frac{1}{p-1}$, de manera que $y(Q_t(z_0)) < \frac{1}{p-1}$. Pero $\frac{2}{p-1}$ es la menor raíz positiva de $x - z_0 x^p = \frac{2}{p-1} - z_0 \frac{2^p}{(p-1)^p} < y \left[\frac{1}{\sqrt[p]{p z_0}} \right]$ y por otra parte $\frac{1}{p-1} < \frac{2}{p-1} - z_0 \frac{2^p}{(p-1)^p}$, y aplicando a) llegamos a que $Q_t(z_0) < \frac{2}{p-1} < \frac{1}{\sqrt[p]{p z_0}}$.

Para comprobar c) hemos de verificar que

$$\frac{p}{p-1} - z_0 \left(\frac{p}{p-1}\right)^p y^{(p-1)} |t| \geq z_0 \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{1}{y}, \text{ para lo}$$

cual es suficiente ver que

$\frac{p}{p-1} - z_0 \left(\frac{p}{p-1}\right)^p v^{(p-1)} \geq z_0 \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{1}{v}$, ya que
 $|t| \geq 1$ y $v < 1$.

Ahora bien $\frac{p}{p-1} - z_0 \left(\frac{p}{p-1}\right)^p v^{(p-1)} \geq z_0 \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{1}{v}$
 $\iff 1 \geq \frac{\sqrt[5]{2}}{p-1} (v^p + 1)$ lo cual es cierto por ser $p \geq 3$
 y $v^p + 1 < 1 + \frac{1}{8\sqrt[5]{8}}$.

Lema 1.2

Siendo $p = 2$, para todo $z_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\frac{1}{4q} < z_0 < \frac{\sqrt{q}}{1 + 4q}, \text{ existe } v \in \mathbb{R}^+ \text{ con } v < \frac{1}{2\sqrt{q}},$$

tal que para todo $t \in \mathbb{N}$ se verifica $Q_t(z_0) < 2v^{|t|}$.

Demostración

Análoga a la del lema 1.1, por lo que nos limitaremos a señalar la relación entre v y z_0 .

$$v = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{q}} \text{ con } 2\sqrt{q}(q - \sqrt{q^2 - 1}) < \varepsilon < 1,$$

cumpliéndose la ecuación $z_0 = \frac{\varepsilon\sqrt{q}}{\varepsilon^2 + 4q}$.

Luego a partir de los lemas 1.1 y 1.2 sabemos que dado $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, existe $\varepsilon > 0$ y existen $c, v \in \mathbb{R}^+$ con $v^p < \rho$ tales que para todo $t \in \mathbb{N}$ y para todo z con $|z| < \rho + \varepsilon$ se tiene $|Q_t(z)| < c v^{|t|}$, ya que se trata de series de potencias con coeficientes positivos; y para una serie tal, $f(z)$, se verifica que si existe $z_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(z_0)$ converge, entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < z_0$, se tiene $|f(z)| < f(z_0)$.

Además para todo $\varepsilon > 0$

$\{t \in \mathbb{N} / |t| = i\} \subset \rho^{-i} (1 + \varepsilon)^i$, para casi todo $i \in \mathbb{N}$, puesto que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, de modo que $i_n \leq q_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Con lo que la parte a) de la proposición 1.2 nos permite concluir el resultado de la proposición 1.3, sin más que notar que $r^p < \rho \implies \exists \varepsilon' > 0 \quad r^p (1 + \varepsilon') < \rho$.

Obsérvese que haciendo uso de la nota que sigue a la demostración de la proposición 1.2, no hemos necesitado comprobar que el radio de convergencia de las funciones $Q_t(z)$, con $t \in \mathcal{J}$, coincida. De hecho puede comprobarse que efectivamente es así, siendo dicho radio de convergencia común igual a $\frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}$. Para ello se demuestra, siguiendo las mismas técnicas desarrolladas en los lemas 1.1 y 1.2, que

$$\forall t \in \mathcal{J} \quad \forall z \quad |z| < \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} \implies |Q_t(z)| < \frac{p}{p-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{|t|}.$$

Ahora, probada la analiticidad de $\alpha(z)$ en un entorno del origen de radio superior a ρ , nos encontramos en condiciones de demostrar el

Teorema 1.1

Los coeficientes de Taylor de $S(z)$ pueden aproximarse asintóticamente, cuando n tiende a infinito, por

$$s_n = \delta \rho^{-n} n^{-1/2} (1 + O(1/n))$$

$$\text{siendo } \rho = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p q^{p-1}}, \quad \delta = \frac{1}{2\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2p}{p-1}} \left(\frac{q}{p-1} - \alpha(\rho)\right)$$

$$\text{donde } \alpha(\rho) = \rho \sum_{t \in \mathcal{J}} ((p-1)|t| + 1) Q_t^p(\rho).$$

Demostración

A partir de [2] obtenemos

$$Q^p(z) = g_1(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{-1/2} + g_2(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{1/2} + h_1(z) \quad [14]$$

donde $g_1(z)$, $g_2(z)$ y $h_1(z)$ son analíticas en un entorno de

50

$$z = \rho, \text{ con } g_1(\rho) = -\frac{q(\rho)}{2\rho}; g_2(\rho) = -\frac{11p+2}{24p} \frac{p+1}{p-1} \frac{g(\rho)}{\rho}$$

$$\text{y } h_1(\rho) = -\frac{2}{3} \frac{p+1}{p-1} \frac{h(\rho) - q}{\rho}.$$

Entonces, a partir de las proposiciones anteriores, sustituyendo en [12] $Q(z)$ y $Q'(z)$ por sus respectivos desarrollos locales [2] y [14], y $\alpha(z)$ y z por sus desarrollos de Taylor en $z = \rho$, llegamos a que $S(z)$ admite en un entorno de $z = \rho$ el desarrollo

$$S(z) = A(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{-1/2} + B(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{1/2} + C(z) \quad [15]$$

con $A(z)$, $B(z)$ y $C(z)$ analíticas en un entorno de $z = \rho$, y

$$A(\rho) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2p}{p-1}} \left(\frac{q}{p-1} - \alpha(\rho)\right)$$

$$B(\rho) = -\frac{g(\rho)}{p-1} + \frac{\rho \alpha'(\rho)}{2} \sqrt{\frac{2p}{p-1}} + \frac{2-p}{12p} \frac{p+1}{p-1} A(\rho) \quad [16]$$

$$C(\rho) = -\frac{h(\rho)}{p-1} + \frac{p-2}{3(p-1)} \left(\frac{q}{p-1} - \alpha(\rho)\right)$$

satisfaciéndose por tanto las hipótesis del teorema de Darboux.

Teorema 1.2

El tamaño medio (\overline{m}_n) de un árbol simplificado obtenido a partir de un árbol aleatorio de tamaño n de Q satisface

$$\overline{m}_n = \frac{s_n}{q_n} = \lambda n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\text{con } \lambda = 1 - \frac{p-1}{q} \alpha(\rho) \quad \text{y} \quad \rho = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p q^{p-1}}.$$

Demostración

Inmediata a partir de [4] y del teorema 1.1.

Para obtener la varianza v_n del tamaño de los árboles simplificados obtenidos a partir de árboles de Q de tamaño n , observamos que

$$v_n = \sum_{m=0}^n m^2 \frac{i_{m,n}}{q_n} - \left(\sum_{m=0}^n m \frac{i_{m,n}}{q_n} \right)^2 =$$

$$= \frac{[z^n] (X''_y(1,z) + X'_y(1,z))}{q_n} - \left(\frac{[z^n] X'_y(1,z)}{q_n} \right)^2 \quad [17]$$

Ahora derivando en [9] con respecto a y dos veces, haciendo $y = 1$, y resolviendo la ecuación lineal a la que se llega, obtenemos

$$X''_y(1,z) = \frac{2pzQ^{p-1}(z)S(z) + p(p-1)zQ^{p-2}(z)S^2(z) - \beta(z)}{1 - pzQ^{p-1}(z)} \quad [18]$$

donde $\beta(z) = (p+1) \sum_{t \in \mathbb{N}} |t| (|p-1| |t| + 1) Q_t^p(z)$.

Además $\beta(z)$ tiene radio de convergencia superior a ρ , por verificarse las hipótesis de la proposición 1.2, con lo que mediante un razonamiento análogo al realizado para $S(z)$, y recordando que $X''_y(1,z) = \sum_{T \in \mathbb{Q}} |\text{SIMP}(T)| (|\text{SIMP}(T)| - 1) z^{|T|}$, concluimos que ρ es el radio de convergencia de $X''_y(1,z)$, así como su única singularidad sobre su círculo de convergencia.

Ahora aplicando [1] y [11] en [18], llegamos a

$$X''_y(1,z) = \frac{z Q'(z)}{Q(z) - q} \left[p (Q(z) - q) \frac{S(z)}{Q(z)} (2 + \right.$$

$$\left. + (p-1) \frac{S(z)}{Q(z)} \right) - \beta(z) \right] \quad [19]$$

y sustituyendo en esta expresión $Q(z)$, $Q'(z)$ y $S(z)$ por sus desarrollos locales [2], [14] y [15], así como z y $\beta(z)$ por sus desarrollos de Taylor en $z = \rho$, obtenemos

$$X''_y(1,z) = D(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{-3/2} + E(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{-1/2}$$

$$+ F(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{1/2} + H(z)$$

donde $D(z)$, $E(z)$, $F(z)$ y $H(z)$ son analíticas en un entorno

de $z = \rho$, con $D(\rho) = -\frac{p(p-1)}{2} \frac{g(\rho) A^2(\rho)}{h^2(\rho)}$ y

$$E(\rho) = \frac{1}{2} \frac{g(\rho)}{h(\rho) - q} + \frac{1}{4} \frac{g^3(\rho)}{(h(\rho) - q)^2} + \frac{\rho \alpha'(\rho)}{h(\rho) - q} A(\rho) -$$

$$- \frac{1}{12} \left[\frac{11}{2(h(\rho) - q)} + \frac{1}{(p-1)h(\rho)} \right] A(\rho) (h(\rho) - q - \alpha(\rho))$$

[20]

lo que nos permite concluir el

Teorema 1.3

La varianza del tamaño de los árboles simplificados obtenidos a partir de árboles de q de tamaño n tiene el equivalente asintótico

$$v_n \approx V n \quad n \rightarrow \infty$$

donde

$$V = -\frac{p-1}{2} \left(\frac{q}{p-1} - \alpha(\rho) \right)^2 +$$

$$+ \left[2 \left(\frac{p-1}{q} \right)^2 \rho \alpha'(\rho) + \frac{p+1}{q} \right] \left[\frac{q}{p-1} - \alpha(\rho) \right] -$$

$$- \frac{p-1}{q} \beta(\rho) - \frac{p}{p-1}$$

$$\text{y } \rho = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p q^{p-1}}.$$

Demostración

Aplicando el teorema de Darboux a los correspondientes desarrollos locales, se tiene que

$$[z^n] (X_y^-(1, z) + X_y^+(1, z)) = \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} -1/2 \\ n \end{matrix} \right] ((2n+1) D(\rho) +$$

$$+ E(\rho) + A(\rho))$$

$$[z^n] X_y^+(1, z) = \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} 1/2 \\ n \end{matrix} \right] (-(2n-1) A(\rho) + B(\rho))$$

$$(z^n) Q(z) = \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} 3/2 \\ n \end{matrix} \right] \left[-\frac{2n-3}{3} g(\rho) - \rho g'(\rho) \right]$$

lo que aplicado a [17] nos permite concluir que

$$V = 4 \left[-\frac{D(\rho)}{g(\rho)} - \frac{A^2(\rho)}{g^2(\rho)} \right] n^2 + \left[\frac{4A^2(\rho)}{g^2(\rho)} + \frac{4A(\rho)B(\rho)}{g^2(\rho)} + \frac{6\rho g'(\rho)}{g(\rho)} \left[\frac{D(\rho)}{g(\rho)} + \frac{2A^2(\rho)}{g^2(\rho)} \right] - \frac{2(E(\rho) + A(\rho))}{g(\rho)} \right] n$$

$$\text{A partir de [20] y dado que } \frac{p(p-1)}{2h^2(\rho)} = \frac{1}{g^2(\rho)},$$

puede comprobarse que se anula el término en n^2 , obteniéndose la linealidad de la varianza. A continuación, a partir de [16] y [20], y tras un gran número de cálculos tediosos se obtiene el valor indicado de la constante V , correspondiente a la familia \mathcal{Q} .

Puede comprobarse que en el desarrollo anterior ni los valores de $\alpha(z)$ ni los de $\beta(z)$ influyen en la anulación de los términos de orden superior a n . La única información acerca de ellos que ha sido utilizada en el proceso anterior, es su analiticidad en un entorno del origen de radio superior a ρ . Todo ello nos permite afirmar lo siguiente:

Sea \mathcal{F} un criterio de simplificación para los árboles de \mathcal{Q} , y sea \mathcal{S} la familia de árboles de \mathcal{Q} que no pueden ser reducidos según \mathcal{F} . Definimos para cada árbol irreducible $t \in \mathcal{S}$

$$S_t(z) = \sum_{\substack{T \in \mathcal{Q} \\ t = \mathcal{F}(T)}} z^{|T|} ; \text{ de modo que } Q(z) = \sum_{t \in \mathcal{S}} S_t(z) .$$

Teorema 1.4

$$\text{Si } S(z) = \sum_{t \in \mathcal{S}} |t| S_t(z) \quad \text{y} \quad T(z) = \sum_{t \in \mathcal{S}} |t| (|t| - 1) S_t(z)$$

admiten desarrollos locales en $z = \rho$ de los tipos [12] y [19]

respectivamente, con $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ analíticas en un entorno del origen de radio superior a ρ , entonces la media \bar{m}_n y la varianza v_n del tamaño de los árboles simplificados según \mathcal{F} , a partir de árboles de \mathcal{Q} de tamaño n , son lineales asintóticamente, cuando n tiende a infinito, en el tamaño del input, teniendo los equivalentes asintóticos

$$\begin{aligned} \bar{m}_n &= \left[1 - \frac{p-1}{q} \alpha(\rho) \right] n \left[1 + O(1/n) \right] \\ v_n &= \left[-\frac{p-1}{q^2} \left[\frac{q}{p-1} - \alpha(\rho) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[2 \left(\frac{p-1}{q} \right)^2 \rho \alpha'(\rho) + \frac{p+1}{q} \right] \left[\frac{q}{p-1} - \alpha(\rho) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{p-1}{q} \beta(\rho) - \frac{p}{p-1} \right] n \left[1 + O(1/n) \right]. \end{aligned}$$

En concreto para garantizar la analiticidad de $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ en el dominio preciso, utilizaremos usualmente la siguiente

Proposición 1.4

Si $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ son del tipo $R(z) = \sum_{t \in \mathcal{J}} a(|t|) S_t^p(z)$

siendo $a(|t|)$ un polinomio en $|t|$ con coeficientes positivos; si además existe $\varepsilon > 0$, y existen $c, \gamma \in \mathbb{R}^+$, con $\gamma^p < K$ para un cierto $K \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall \varepsilon' > 0$

$$|\{t \in \mathcal{J} / |t| = i\}| < K^{-i} (1 + \varepsilon')^i \text{ para casi todo } i,$$

de manera que

$$\forall t \in \mathcal{J} \quad \forall z \quad |z| < \rho + \varepsilon \implies |S_t^p(z)| < c \gamma^{|t|}$$

entonces $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ son analíticas en la bola

$$\{z / |z| < \rho + \varepsilon\}.$$

Demostración

Basta comprobar que estamos en condiciones de aplicar la proposición 1.2.

1.2 Árboles generales con q etiquetas para las hojas

Consideraremos en este apartado la familia \mathcal{GQ} de los árboles generales con q posibles etiquetas para sus hojas ($q \geq 2$), sobre la que vamos a estudiar un algoritmo de simplificación análogo al del apartado 1.1. En la figura 3 se concreta la versión para \mathcal{GQ} de dicho algoritmo, utilizando pseudo-PASCAL.

```

FUNCTION SIMP ( T :  $\mathcal{GQ}$  ) :  $\mathcal{GQ}$  ;
IF T.ar = 0 THEN SIMP := T
ELSE FOR i := 1 TO T.ar DO t(i) := SIMP( T.h(i) ) OD;
    i := 1 ; con := true ;
    WHILE ( i < T.ar ) AND con DO
        IF EQUAL( t(i) , t(i+1) )
            THEN i := i + 1
            ELSE con := false OD
    IF con THEN SIMP := t(1)
        ELSE SIMP := o(t(1),...,t(T.ar))
END SIMP .

```

Figura 3

Nuestro objetivo es, de nuevo, el estudio de la media y varianza del tamaño de los árboles simplificados, con respecto a su tamaño inicial; entendiéndose ahora como tamaño de un árbol el número total de sus nodos.

El desarrollo a seguir es absolutamente análogo al del apartado anterior, por lo que aquí nos limitaremos a esbozarlo, enunciando además los resultados obtenidos.

La familia \mathcal{GQ} viene definida por la serie formal de árboles

$$GQ = \sum_{i=1}^q e_i + \sum_{p=1}^{\infty} o(\underbrace{GQ, \dots, GQ}_p)$$

donde (e_1, \dots, e_q) es el conjunto de posibles etiquetas para las hojas de los árboles de la familia. A partir de la misma puede deducirse que el radio de convergencia de su función generatriz asociada, $GQ(z)$, es $\rho = \frac{1}{(1 + \sqrt{q})^2}$, siendo ésta su única singularidad dominante. Por otra parte

$$GQ(z) = (1 - z/\rho)^{-1/2} g(z) + h(z) \quad [21]$$

siendo $h(z)$ entera, y $g(z)$ analítica en un entorno del origen

de radio $\frac{1}{(1 - \sqrt{q})^2}$, con $g(\rho) = \frac{-q^{1/4}}{1 + \sqrt{q}}$ y

$$h(\rho) = \frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{q}}.$$

Entonces por el teorema de Darboux - Polya obtenemos

$$g_{q,n} = \frac{g(\rho)}{-2\sqrt{\pi}} \rho^{-n} n^{-3/2} (1 + O(1/n)) \quad n \rightarrow \infty \quad [22]$$

La función generatriz asociada a la familia G de los árboles generales es $G(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2}$ cuyo radio de convergencia es $1/4$.

Sea \mathcal{S} entonces la clase de todos los árboles irreducibles de GQ , esto es que no pueden simplificarse según el algoritmo anterior.

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^q e_i + \sum_{p=2}^{\infty} (o(t_1, \dots, t_p) / t_1, \dots, t_p \in \mathcal{S}, \exists i, j \in \{1, \dots, p\}, t_i \neq t_j) \quad [23]$$

Consideramos la función generatriz

$$X(y, z) = \sum_{T \in GQ} y^{|\text{SIMP}(T)|} z^{|T|}$$

y sea $S(z) = \sum_{T \in \mathcal{GQ}} |\text{SIMP}(T)| z^{|T|}$ la función generatriz del tamaño de los árboles irreducibles obtenidos según el algoritmo anterior.

Para cada $t \in \mathcal{S}$, definimos

$$\mathcal{GQ}_t = \{ T \in \mathcal{GQ} / \text{SIMP}(T) = t \}, \text{ de modo que } \mathcal{GQ} = \bigcup_{t \in \mathcal{S}} \mathcal{GQ}_t,$$

siendo dicha unión disjunta.

Por lo que tomando $GQ_t(z) = \sum_{\substack{T \in \mathcal{GQ} \\ \text{SIMP}(T)=t}} z^{|T|}$, se tiene

$$GQ(z) = \sum_{t \in \mathcal{S}} GQ_t(z).$$

Para todo $t \in \mathcal{S}$, $GQ_t(z)$ queda definida por el sistema de ecuaciones

$$GQ_e(z) = G(z) \quad \forall e \in \{e_1, \dots, e_q\} \quad [24]$$

$$GQ_o(t_1, \dots, t_p)(z) = z \prod_{i=1}^p GQ_{t_i}(z) + z \sum_{j \geq 1} GQ_o^j(t_1, \dots, t_p)$$

$$\forall p \geq 2 \quad \forall t_1, \dots, t_p \in \mathcal{S} \quad \exists i, j \in \{1, \dots, p\} \quad t_i \neq t_j$$

Obsérvese que los árboles simplificados no incluyen nodos con un único hijo, razón por la cual el caso $p = 1$ está excluido.

Por otra parte

$$GQ'(z) = \frac{GQ(z)}{z \left(1 - z \sum_{p \geq 1} p GQ^{p-1}(z) \right)} \quad [25]$$

lo que unido a [24], y dado que $S(z) = X'_y(1, z)$ y

$$GQ(z) = X(1, z) \quad \text{nos permite concluir la}$$

Proposición 1.5

La función generatriz $S(z)$ del tamaño de los árboles simplificados viene dada por

$$S(z) = \frac{z GQ'(z)}{GQ(z)} \left((1-z) GQ(z) - \alpha(z) \right) \quad [26]$$

$$\text{con } \alpha(z) = z \sum_{p \geq 2} \sum_{t \in \mathbb{N}} (p-1) |t| + 1 \ GQ_t^p(z) .$$

Como veremos a continuación, $\alpha(z)$ es analítica en un entorno del origen de radio superior a ρ , con lo que $S(z)$ tiene radio de convergencia $\rho = \frac{1}{(1 + \sqrt{q})^2}$, que es además su única singularidad dominante.

Proposición 1.6

Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\sum_{p \geq 2} \sum_{t \in \mathbb{N}} (p-1) |t| + 1 \ GQ_t^p(z)$ es analítica en la bola $\{z \mid |z| < \rho + \varepsilon\}$.

Demostración

Para demostrar esta última proposición, basta ver una vez más, que se cumplen las hipótesis de la proposición 1.2.

La comprobación de la hipótesis iii) se apoya en el siguiente

Lema 1.3

Siendo $z_0 = \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{5(1 + \sqrt{q})^2}$, existe $\nu < \frac{1}{1 + \sqrt{q}}$ tal que para todo $t \in \mathbb{N}$ se verifica $GQ_t(z_0) < \nu |t|$.

Demostración

El lema se cumple para cualquier $\nu = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{q}}$ con

$$\frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{q} - \sqrt{(1 + \sqrt{q})^2 - \frac{4}{5}(1 + \sqrt{2})^2} \right] < \varepsilon < 1 .$$

La demostración es análoga a la del lema 1.1, sin más que observar:

a) La función $y(x) = x - z_0 \frac{x}{1-x}$, definida sobre $[0, 1)$, es creciente en $[0, 1 - \sqrt{z_0}]$, con

$$y(1 - \sqrt{z_0}) = (1 - \sqrt{z_0})^2 .$$

$$b) \quad GQ_t(z_0) < 1 - \sqrt{z_0} .$$

$$c) \quad y|t| - z_0 \frac{y|t|}{1 - y|t|} \geq z_0 y|t|^{-1} \quad \forall t \in \mathfrak{J} \quad |t| \geq 2 .$$

La comprobación de las restantes hipótesis de la proposición 1.2 es análoga a la realizada en el apartado anterior.

También puede demostrarse, utilizando la misma técnica que la empleada en el lema 1.3, que para cada $t \in \mathfrak{J}$, $GQ_t(z)$ tiene radio de convergencia igual a $1/4$, a partir del hecho de que $\forall z \in \mathbb{R}^+ \quad \rho < z < 1/4 \implies GQ_t(z) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)^{|t|}$.

Finalmente estamos en condiciones de probar los siguientes teoremas :

Teorema 1.5

Los coeficientes de Taylor de $S(z)$ pueden aproximarse asintóticamente, cuando n tiende a infinito, mediante

$$s_n = \delta \rho^{-n} n^{-1/2} (1 + O(1/n))$$

$$\text{donde } \rho = \frac{1}{(1 + \sqrt{q})^2} ;$$

$$\delta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{q^{1/4}}{1 + \sqrt{q}} \left(1 - \rho - \frac{1 + \sqrt{q}}{q} \alpha(\rho)\right)$$

$$\alpha(\rho) = \rho \sum_{p \geq 2} \sum_{t \in \mathfrak{J}} ((p-1)|t| + 1) GQ_t^p(\rho) .$$

Demostración

A partir de las proposiciones 1.5 y 1.6, que nos permiten obtener un desarrollo local de $S(z)$ en un entorno de $z = \rho$ de la forma

$$S(z) = A(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{-1/2} + B(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{1/2} + C(z) \quad [27]$$

donde $A(z)$, $B(z)$ y $C(z)$ son analíticas en un entorno de $z = \rho$, siendo

$$A(\rho) = -\frac{g(\rho)}{2} \left(1 - \rho - \frac{\alpha(\rho)}{h(\rho)}\right)$$

$$B(\rho) = \frac{1}{2} \left[\left(3\rho g'(\rho) + g(\rho)\right) \left(1 - \rho - \frac{\alpha(\rho)}{h(\rho)}\right) - \rho g(\rho) \left(1 + \frac{\alpha'(\rho)}{h(\rho)}\right) + \frac{\alpha(\rho)}{h(\rho)} \left[\frac{3\rho g(\rho) h'(\rho)}{h(\rho)} + \frac{g^3(\rho)}{h^2(\rho)} \right] \right]$$

$$C(\rho) = \rho h'(\rho) \left(1 - \rho - \frac{\alpha(\rho)}{h(\rho)}\right) - \frac{\alpha(\rho) g^2(\rho)}{2 h^2(\rho)}$$

Luego estamos en condiciones de aplicar el teorema de Darboux .

Teorema 1.6

El tamaño medio de los árboles simplificados obtenidos a partir de árboles de ζQ de tamaño n , satisface

$$\overline{m}_n = \frac{s_n}{g_{q,n}} = \lambda n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\text{con } \lambda = 1 - \rho - \frac{1 + \sqrt{q}}{\sqrt{q}} \alpha(\rho) \quad \text{siendo } \rho = \frac{1}{(1 + \sqrt{q})^2} .$$

Demostración

Inmediata a partir del teorema 1.5 y de [22] .

La varianza del tamaño de los árboles simplificados obtenidos a partir de árboles de ζQ de tamaño n , también se obtiene siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado 1.1 . De nuevo nos limitaremos a enunciar los resultados correspondientes.

Proposición 1.7

$$X_y''(1, z) = \frac{z GQ'(z)}{GQ(z)} \left[2 \frac{z(1-z) GQ'(z) - GQ(z)}{z GQ'(z)} S(z) + \right. \\ \left. + \frac{z GQ''(z) GQ(z) - 2 GQ'(z) (z GQ'(z) - GQ(z))}{z^2 GQ'^3(z)} S^2(z) - \beta(z) \right] \quad [28]$$

siendo $\beta(z) = z \sum_{p \geq 2} \sum_{t \in \mathbb{N}} |t| ((p-1)|t| + 1) GQ_t^p(z)$.

Teorema 1.7

La varianza del tamaño de los árboles simplificados obtenidos a partir de árboles de \mathcal{GQ} de tamaño n , tiene el siguiente equivalente asintótico, cuando n tiende a infinito:

$$v_n = V n (1 + O(1/n))$$

con

$$V = \frac{6\sqrt{q} + q - 3}{8\sqrt{q}} \lambda^2 + \left[3\rho - \frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{q}} + \frac{2\alpha'(\rho)}{(1 + \sqrt{q})\sqrt{q}} \right] \lambda - \\ - \frac{\sqrt{q}(2 + \sqrt{q})^2}{2} \rho^2 - \frac{1 + \sqrt{q}}{\sqrt{q}} \beta(\rho)$$

siendo $\lambda = 1 - \rho - \frac{1 + \sqrt{q}}{\sqrt{q}} \alpha(\rho)$ y $\rho = \frac{1}{(1 + \sqrt{q})^2}$.

Demostración

A partir de [28], sustituyendo $GQ(z)$, $GQ'(z)$, $GQ''(z)$ y $S(z)$ por sus respectivos desarrollos locales en términos de $(1 - z/\rho)^{1/2}$, en $z = \rho$, así como los desarrollos de Taylor de z y $\beta(z)$ en $z = \rho$, se obtiene para $X_y''(1, z)$ un desarrollo local del tipo

$$X_y''(1, z) = D(z) (1 - z/\rho)^{-3/2} + E(z) (1 - z/\rho)^{-1/2} + \\ + F(z) (1 - z/\rho)^{1/2} + H(z) \quad [29]$$

que satisface las hipótesis del teorema de Darboux, y siendo

$$D(\rho) = - \frac{A^2(\rho)}{g(\rho)}$$

$$\begin{aligned}
E(\rho) = & -2 \frac{A^2(\rho)}{g^2(\rho)} \left[g(\rho) - \frac{3g^3(\rho)}{2h^2(\rho)} - \frac{3\rho g(\rho)h'(\rho)}{h(\rho)} + \right. \\
& \left. + \frac{\rho g'(\rho)}{2} \right] - A(\rho) \left[(1-\rho) \left[1 - \frac{2g^2(\rho)}{h^2(\rho)} - \frac{3\rho h'(\rho)}{h(\rho)} \right] + \right. \\
& \left. + 1 - \frac{\rho g'(\rho)}{h(\rho)} \right] + \frac{(1-\rho)^2 g^3(\rho)}{4h^2(\rho)} + \frac{g(\rho)}{2h(\rho)} \beta(\rho) .
\end{aligned}$$

Finalmente aplicando el teorema de Darboux a [21], [27] y [29], y a partir de la ecuación [17], llegamos al resultado enunciado, siguiendo el mismo proceso que el utilizado en la demostración del teorema 1.3.

1.3 Familias simples

Finalizamos esta sección demostrando que los resultados sobre la media y la varianza del tamaño de los árboles simplificados, probados en las dos anteriores, pueden extenderse a cualquier familia simple.

Sea, pues, $\mathcal{F} = M(E, \nu)$ una familia simple de árboles, cuya serie generatriz, $f(z)$, verifica la ecuación funcional

$$f(z) = z \phi(f(z)) \quad \text{con} \quad \phi(u) = \sum_{n \geq 0} c_n u^n, \quad c_0 > 1 \quad \text{y con } \phi$$

satisfaciendo la condición de m.c.d. .

Bajo el mismo criterio de simplificación estudiado en el apartado anterior, llamaremos ahora \mathcal{S} a la familia de árboles de \mathcal{F} que no pueden ser reducidos según el mismo; y consideraremos la partición $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{S}}$ de \mathcal{F} definida análogamente a sus homólogas en los apartados anteriores, es decir

$$\forall t \in \mathcal{S} \quad \mathcal{F}_t = \{ T \in \mathcal{F} / \text{SIMP}(T) = t \}$$

Sea $(f_t(z))_{t \in \mathcal{S}}$ el conjunto de funciones generatrices

asociadas a los elementos de tal partición. A partir del criterio de simplificación SIMP, tenemos que dichas funciones quedan definidas recursivamente por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 f_s(z) &= z (1 + \phi^+(f_s(z))) \quad \forall s \in E \quad v(s) = 0 \\
 f_t(z) &= z \prod_{i=1}^{v(s)} f_{t_i}(z) + z \phi^+(f_t(z)) \quad \forall s \in E \quad v(s) \geq 2 \\
 \forall t &= \textcircled{s} (t_1, \dots, t_{v(s)}) \in \mathfrak{F} \quad [30]
 \end{aligned}$$

donde $\phi^+(u) = \sum_{n \geq 1} c_n u^n$

Nota: Supondremos siempre que existe $n \geq 2$ con c_n no nulo. El caso en el que únicamente c_0 y c_1 son no nulos carece de interés, y por otra parte su estudio sería absolutamente trivial, ya que en este caso los árboles, por su sencillez, se reducirían a palabras.

Ahora, con vistas al estudio del comportamiento asintótico de la media y la varianza del tamaño de los árboles simplificados obtenidos aplicando el criterio anterior, a árboles de \mathfrak{F} de un determinado tamaño, procedemos, como en los casos particulares precedentes, al estudio de las series generatrices:

$$\begin{aligned}
 S(z) &= \sum_{T \in \mathfrak{F}} |\text{SIMP}(T)| z^{|\mathbb{T}|} = \sum_{t \in \mathfrak{F}} |t| f_t(z) \\
 T(z) &= \sum_{T \in \mathfrak{F}} |\text{SIMP}(T)| (|\text{SIMP}(T)| - 1) z^{|\mathbb{T}|} \\
 &= \sum_{t \in \mathfrak{F}} |t| (|t| - 1) f_t(z)
 \end{aligned}$$

Por medio de razonamientos combinatorios estándar, se llega a que tales series poseen el mismo radio de convergencia, ρ , que la serie generatriz $f(z)$ asociada a la familia simple \mathfrak{F} de árboles a simplificar.

De nuevo introducimos la función generatriz de dos variables

$$X(y, z) = \sum_{T \in \mathcal{F}} y^{|\text{SIMP}(T)|} z^{|T|} = \sum_{t \in \mathcal{I}} y^{|t|} f_t(z)$$

de manera que $f(z) = X(1, z)$; $S(z) = X'_y(1, z)$ y

$$T(z) = X''_y(1, z) .$$

Entonces, a partir de [30], y teniendo en cuenta que la clase \mathcal{J} puede caracterizarse recursivamente mediante

$$\mathcal{J} = \sum_{s \in \mathcal{E}} \textcircled{S} + \bigcup_{\substack{s \in \mathcal{E} \\ v(s) \geq 2}} \left(\textcircled{S}(t_1, \dots, t_{v(s)}) / t_1, \dots, t_{v(s)} \in \mathcal{J} \right. \\ \left. \exists i, j \in \{1, \dots, v(s)\} \quad t_i \neq t_j \right) \quad [31]$$

obtenemos

$$X(y, z) = c_0 y z + c_1 z X(y, z) + y z \sum_{p \geq 2} c_p X^p(y, z) - \\ - z \sum_{p \geq 2} c_p \sum_{t \in \mathcal{I}} (y^p |t| + 1 - y^{|t|}) f_t^p(z)$$

Y derivando

$$S(z) = \frac{(1 - c_1 z) f(z) - \alpha(z)}{1 - z \phi'(f(z))} \quad [32]$$

$$T(z) = \frac{2 z S(z) (\phi'(f(z)) - c_1) + z S^2(z) \phi''(f(z)) - \beta(z)}{1 - z \phi'(f(z))}$$

$$\text{con } \alpha(z) = z \sum_{p \geq 2} \sum_{t \in \mathcal{I}} c_p ((p-1)|t| + 1) f_t^p(z)$$

$$\text{y } \beta(z) = z \sum_{p \geq 2} \sum_{t \in \mathcal{I}} c_p (p+1)|t| ((p-1)|t| + 1) f_t^p(z)$$

Además, como ϕ verifica la condición de m.c.d., sabemos que

ρ es la única raíz de menor módulo de la ecuación

$$1 - z \phi'(f(z)) = 0 ; \text{ por lo tanto, si demostramos que } \alpha(z) \text{ y}$$

$\beta(z)$ tienen radios de convergencia mayores que ρ , habremos

probado que tanto $S(z)$ como $T(z)$ tienen una única

singularidad dominante, en $z = \rho$.

Proposición 1.3

Existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\alpha(z) = z \sum_{p \geq 2} \sum_{t \in \mathcal{S}} c_p \left((p-1)|t| + 1 \right) f_t^p(z)$$

$$\text{y } \beta(z) = z \sum_{p \geq 2} \sum_{t \in \mathcal{S}} c_p (p+1)|t| \left((p-1)|t| + 1 \right) f_t^p(z)$$

son analíticas en la bola $\{z / |z| < \rho + \varepsilon\}$.

Demostración

Veremos, a través de una sucesión de lemas, que se verifican las hipótesis de la proposición 1.2.

Lema 1.4

Para cada $t \in \mathcal{S}$, $f_t(z)$ tiene radio de convergencia

$$\rho_0 > \rho, \text{ con } \rho_0 = \frac{\tau_0}{\phi^+(\tau_0)+1} \text{ siendo } \tau_0 \text{ la raíz de menor}$$

módulo de la ecuación $1 + \phi^+(u) - u \phi'(u) = 0$.

Demostración

Por inducción sobre el tamaño de t :

El caso básico corresponde a $|t| = 1$, ya que recordemos que ahora entendemos por tamaño de un árbol su número total de nodos.

Aplicando [30] tenemos que

$$f_t(z) = z \left(1 + \phi^+(f_t(z)) \right),$$

es decir, se trata de una familia simple cuyo descriptor difiere del de la familia F únicamente en el coeficiente c_0 , que pasa a ser 1 (una única clase de hojas). Por tanto $f_t(z)$ verifica también la condición de m.c.d., y como vimos en el capítulo 1 sección 6, $f_t(z)$ tiene una única singularidad dominante ρ_0 , real positiva, verificando el sistema

$$\begin{aligned} \tau_0 \phi'(\tau_0) &= 1 + \phi^+(\tau_0) \\ \rho_0 &= \frac{1}{\phi'(\tau_0)} = \frac{\tau_0}{\phi^+(\tau_0)+1} \end{aligned} \quad [33]$$

Ahora bien $\tau_0 \phi'(\tau_0) = 1 + \phi^+(\tau_0) \iff 1 = \sum_{n \geq 2} (n-1) c_n \tau_0^n$.

Por otra parte, a partir de [19] y [20] en el capítulo 1, tenemos

$$c_0 = \sum_{n \geq 2} (n-1) c_n \tau^n \quad ; \quad \rho = \frac{1}{\phi'(\tau)}$$

siendo τ la raíz de menor módulo de la ecuación

$u \phi'(u) - \phi(u) = 0$. Por lo tanto, como $c_0 > 1$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ $c_n \geq 0$, tenemos que $\tau_0 < \tau$, de modo que $\phi'(\tau_0) < \phi'(\tau)$, lo que equivale a decir $\rho < \rho_0$. Además $f_t(\rho_0) = \tau_0 \leq 1$, y $\rho_0 < 1$. Caso $\tau_0 < 1$:

Sea ahora $t \in \mathbb{R}$ $|t| \geq 2$, y supongamos que $\forall t^* \in \mathbb{R}$

$|t^*| < |t| \implies f_{t^*}(z)$ tiene radio de convergencia ρ_0 , y

$$f_{t^*}(\rho_0) < 1.$$

Por [30]

$$f_t(z) = z \sum_{i=1}^{v(t, \text{info})} f_{t_i}(z) + z \phi^+(f_t(z))$$

Evidentemente, por la hipótesis de inducción, el radio de convergencia de $f_t(z)$ ha de ser menor o igual que ρ_0 . Para ver que es igual, consideraremos la ecuación

$$x - \rho_0 \phi^+(x) = \rho_0 \sum_{i=1}^{v(t, \text{info})} f_{t_i}(\rho_0) \quad \text{para } x \in [0, 1] \quad [34]$$

Por hipótesis de inducción sabemos que $\sum_{i=1}^{v(t, \text{info})} f_{t_i}(\rho_0) = c < 1$

Ahora bien, $y(x) = x - \rho_0 \phi^+(x)$ es continua y creciente en $[0, \tau_0)$, $y(0) = 0$, y $x = \tau_0$ es la menor raíz real positiva de la ecuación $x - \rho_0 \phi^+(x) = \rho_0$, con lo que por continuidad, la menor raíz

real positiva, r , de la ecuación [34] es estrictamente inferior a τ_0 , por lo que $f_t(\rho_0) = r < \tau_0$, de modo que el radio de convergencia de $f_t(z)$ es mayor o igual que ρ_0 , concluyéndose la igualdad. Además $f_t(\rho_0) < 1$, ya que $\tau_0 < 1$.
 Caso $\tau_0 = 1$, trivial ($f_t(\rho_0) = 1 \quad \forall t \in \mathfrak{S}$).

Antes de pasar a la comprobación de la hipótesis iii) de la proposición 1.2, demostraremos un resultado previo, para el que no necesitamos que $\phi(u)$ cumpla la condición de m.c.d.. Así podremos generalizar sin ningún tipo de problemas, los resultados de esta sección a cualquier tipo de familia simple, ya que la condición de m.c.d. sólo es necesaria para garantizar la unicidad de la singularidad dominante, pero no influye en absoluto a la hora de estimar $f_t(\rho)$, ni $f(\rho)$.

Lema 1.5

$$\forall t \in \mathfrak{S} \quad |t| = 1 \implies f_t(\rho) < \sqrt{\frac{\rho}{1 - c_1 \rho}}.$$

Demostración

Siendo $t \in \mathfrak{S} \quad |t| = 1$ notaremos $x = f_t(\rho)$ para abreviar; y distinguiremos dos casos, según que el número de operaciones de aridad uno, c_1 , sea o no cero.

Caso a) $c_1 = 0$. Demostraremos que en tal caso $x < \sqrt{\rho}$.

En efecto, como $f(z) = \sum_{t \in \mathfrak{S}} f_t(z)$, tenemos que

$c_0 x < \tau = f(\rho)$, y por lo tanto para demostrar el lema bastaría comprobar que

$$\tau \leq c_0 \sqrt{\rho} \quad [35]$$

Ahora bien, $\tau = \rho (c_0 + \phi^+(\tau))$, con lo que

$$\tau \leq c_0 \sqrt{\rho} \iff c_0 + \phi^+(\tau) \leq \frac{c_0}{\sqrt{\rho}}, \text{ que recordando la}$$

expresión [19] del capítulo 1 equivale a

$$\sum_{n \geq 2} c_n \tau^n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{c_0}} - 1 \right) \sum_{n \geq 2} (n-1) c_n \tau^n \quad [36]$$

Esta última desigualdad es cierta siempre y cuando $\rho \leq 1/4$, lo que es cierto para todas aquellas familias simples con al menos dos operadores binarios distintos ($c_2 \geq 2$). Esta afirmación se basa en el siguiente hecho importante, que utilizaremos asiduamente en lo sucesivo:

"Dada una familia simple cualquiera F_1 , si añadimos nuevas operaciones, obteniendo una nueva familia F_2 , su función generatriz $f_2(z)$ tiene un radio de convergencia ρ_2 estrictamente inferior al radio ρ_1 de $f_1(z)$, asociada a F_1 . Además $f_2(\rho_2) < f_1(\rho_1)$, a menos que F_2 se obtenga a partir de F_1 añadiendo exclusivamente operaciones de aridad uno, en cuyo caso $f_1(\rho_1) = f_2(\rho_2)$ ". [37]

Tal hecho se demuestra fácilmente, a partir de [20] del capítulo 1.

Quedan pues por considerar los casos $c_2 = 0$ y $c_2 = 1$.

En el primer caso, consideraremos $n = \min \{ k / c_k \neq 0 \}$. A

partir de [37] sabemos que $\rho \leq \left(\frac{n-1}{c_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{1}{n(c_n)^{1/n}}$ pues el

miembro derecho de tal desigualdad no es otra cosa que el radio de convergencia de la función generatriz de la familia de árboles n -arios con $c_0 \geq 2$ tipos de hojas y $c_n \geq 1$ tipos de nodos internos. De modo que $\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} - 1 \right) (n-1) \geq 1$ con lo que se concluye [36].

Por último estudiamos el caso $c_2 = 1$. Recordemos de nuevo que

$$f(z) = \sum_{t \in \mathbb{N}} f_t(z), \text{ y por lo tanto } c_0 x + \rho c_0 (c_0 - 1) x^2 < \tau.$$

Entonces $x < \frac{\tau - \rho c_0 (c_0 - 1) x^2}{c_0}$, y para ver que $x < \sqrt{\rho}$

basta comprobar que $\frac{\tau - \rho c_0 (c_0 - 1) x^2}{c_0} \leq \sqrt{\rho}$.

Supongamos para ello que $x \geq \sqrt{\rho}$, de lo que resulta

$$\frac{\tau - \rho c_0 (c_0 - 1) x^2}{c_0} \leq \frac{\tau - \rho^2 c_0 (c_0 - 1)}{c_0} =$$

$$= \frac{\rho (c_0 + \phi^+(\tau)) - \rho^2 c_0 (c_0 - 1)}{c_0}$$

Pero $\frac{\rho (c_0 + \phi^+(\tau)) - \rho^2 c_0 (c_0 - 1)}{c_0} \leq \sqrt{\rho}$ ya que esta

desigualdad se reescribe en la forma

$$\tau^2 + \sum_{n \geq 3} c_n \tau^n \leq \left[\frac{1}{\sqrt{\rho}} + (c_0 - 1) \rho - 1 \right] \tau^2 +$$

$$+ \left[\frac{1}{\sqrt{\rho}} + (c_0 - 1) \rho - 1 \right] \sum_{n \geq 3} (n-1) c_n \tau^n$$

lo que es cierto por ser $c_0 \geq 2$ y $\rho \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$, radio de

convergencia de los árboles binarios con dos tipos de hojas y un único tipo de nodo interno.

Caso b) $c_1 \neq 0$. Tenemos entonces

$$f(z) = z c_0 + z c_1 f(z) + z \sum_{n \geq 2} c_n f^n(z). \text{ Consideraremos}$$

$$f_1(z) = z c_0 + z \sum_{n \geq 2} c_n f_1^n(z), \text{ es decir la función generatriz}$$

asociada a la familia simple \mathcal{F}_1 obtenida a partir de la dada, suprimiendo los operadores de aridad uno. Llamaremos ρ_1 a su radio de convergencia.

Observamos que como el sistema [20] del capítulo 1 ha de verificarse tanto para $f(z)$ como para $f_1(z)$, se tiene

$$\rho = \frac{1}{c_1 + \frac{1}{\rho_1}} \quad [38]$$

y como expusimos en [37], se tiene $f(\rho) = f_1(\rho_1)$.

Definimos ahora para cada $t \in \mathcal{F}$ $\mathcal{F}_{1,t} = \{ T \in \mathcal{F}_1 / \text{SIMP}(T) = t \}$

Naturalmente el conjunto $\{ f_{1,t}(z) \}$ de funciones generatrices asociadas verifica el siguiente sistema, homólogo a [30]:

$$\begin{aligned} f_{1,s}(z) &= z \left(1 + \sum_{n \geq 2} c_n (f_{1,s}(z))^n \right) \quad \forall s \in E \quad v(s) = 0 \\ f_{1,t}(z) &= z \prod_{i=1}^{v(s)} f_{1,t_i}(z) + z \sum_{n \geq 2} c_n f_{1,t}^n(z) \\ \forall s \in E \quad v(s) \geq 2 \quad \forall t = (s, (t_1, \dots, t_{v(s)})) \in \mathcal{F} \end{aligned} \quad [39]$$

Obsérvese que la clase de los árboles irreducibles es la misma para ambas familias, \mathcal{F} y \mathcal{F}_1 , ya que según nuestro criterio los árboles irreducibles no pueden contener operadores de aridad uno. Ahora a partir de [30], [38] y [39], y razonando por inducción sobre el tamaño de $t \in \mathcal{F}$, podemos afirmar que

$$\forall t \in \mathcal{F} \quad f_{1,t}(\rho_1) = f_t(\rho) \quad [40]$$

En efecto:

Para $t \in \mathcal{F}$ $|t| = 1$ tenemos el resultado por [37]. Además

$$\begin{aligned} f_{1,t}(\rho_1) &= \rho_1 + \rho_1 \sum_{n \geq 2} c_n f_{1,t}^n(\rho_1) \\ f_t(\rho) &= \rho + \rho c_1 f_t(\rho) + \rho \sum_{n \geq 2} c_n f_t^n(\rho) \end{aligned} \quad [41]$$

De modo que

$$f_t(\rho) = \frac{\rho + \rho \sum_{n \geq 2} c_n f_t^n(\rho)}{1 - \rho c_1} = \rho_1 + \rho_1 \sum_{n \geq 2} c_n f_t^n(\rho) = f_{1,t}(\rho_1)$$

sín más que aplicar [38] y [41].

Siendo ahora $t \in \mathcal{F}$ $|t| > 1$ supongamos que $\forall t^* \in \mathcal{F}$

$$|t^*| < |t| \implies f_{1,t^*}(\rho_1) = f_{t^*}(\rho). \text{ A partir de [30], tenemos}$$

$$f_t(\rho) = \frac{\rho \prod_{i=1}^{v(t, \text{inf})} f_{t_i}(\rho) + \rho \sum_{n \geq 2} c_n f_t^n(\rho)}{1 - \rho c_1} =$$

$$= \rho_1 \prod_{i=1}^{v(t, \text{inf})} f_{1, t_i}(\rho_1) + \rho_1 \sum_{n \geq 2} c_n f_t^n(\rho) = f_{1, t}(\rho_1)$$

donde hemos aplicado sucesivamente [38], la hipótesis de inducción, y [39].

Ahora como f_1 cae dentro del caso a), y aplicando de nuevo [38], concluimos

$$f_t(\rho) = f_{1, t}(\rho_1) \left(\sqrt{\rho_1} = \sqrt{\frac{\rho}{1 - c_1 \rho}} \right)$$

Nota: En realidad para demostrar el presente lema, bastaba con probar [40] para $t \in \mathcal{S}$ con $|t| = 1$, pero hemos aprovechado para demostrarlo en general, ya que ello nos será útil a la hora de demostrar el siguiente lema.

Lema 1.6

Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall t \in \mathcal{S} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$|z| < \rho + \varepsilon \implies |f_t(z)| < \gamma |t| \quad \text{siendo} \quad \gamma = \sqrt{\frac{\rho}{1 - c_1 \rho}}.$$

Demostración

Comenzaremos probando, por inducción sobre el tamaño de $t \in \mathcal{S}$, que $\forall t \in \mathcal{S} \quad |f_t(\rho)| < \gamma |t|$, y más tarde veremos que podemos efectivamente razonar por continuidad, para obtener la misma acotación para $f_t(\rho + \varepsilon)$ para un ε suficientemente pequeño e independiente de t .

Pues bien, el lema 1.5 nos proporciona el resultado base de la inducción en cuestión.

Abordamos ahora primeramente el caso $c_1 = 0$. Sea $t \in \mathcal{S}$ $|t| > 1$ y supongamos que

$$\forall t^* \in \mathbb{R} \quad |t^*| < |t| \implies f_{t^*}(\rho) < \sqrt{|t^*|}.$$

Por [30] y la hipótesis de inducción

$$f_t(\rho) - \rho \phi^+(f_t(\rho)) = \rho \prod_{i=1}^{v(t, \text{inf})} f_{t_i}(\rho) < \rho \sqrt{|t|}^{-1} = \rho \frac{|t|+1}{2} \quad [42]$$

Consideremos ahora la función a valores reales

$$y(x) = x - \rho \phi^+(x) \quad [43]$$

definida sobre $[0, \tau)$.

Esta función es creciente, pues su derivada $y'(x) = 1 - \rho \phi^{+'}(x)$ es monótona decreciente, y por tanto positiva, en $[0, \tau)$, ya que por [20] en el capítulo 1 sabemos que su cero de menor módulo se encuentra en $x = \tau$.

Por otra parte $f_t(\rho) < \tau$ ya que $\tau = \sum_{t \in \mathbb{R}} f_t(\rho)$.

Veremos además que

$$\sqrt{|t|} - \rho \phi^+(\sqrt{|t|}) \geq \rho \sqrt{|t|}^{-1} \quad [44]$$

lo que unido a [42], al carácter creciente de $y(x)$, y al hecho de que $f_t(\rho) < \tau$ nos permite concluir el resultado

buscado: $f_t(\rho) < \sqrt{|t|}$.

Para probar [44] sustituimos γ por su valor $\sqrt{\rho}$, obteniendo

$$\frac{|t|}{\rho^2} - \rho \phi^+\left(\frac{|t|}{\rho^2}\right) - \frac{|t|}{\rho^2} \sqrt{\rho} \geq 0.$$

Consideraremos una nueva función a valores reales

$$a(x) = x - \rho \phi^+(x) - x \sqrt{\rho} \quad \text{definida sobre } [0, \tau].$$

Evidentemente $\frac{|t|}{\rho^2} < \tau$ pues $\rho < 1$, $\rho < \tau$ y $|t| \geq 3$.

Por otra parte $a'(x) = 1 - \sqrt{\rho} - \rho \phi^{+'}(x)$ es monótona decreciente, y como $a'(0) = 1 - \sqrt{\rho} > 0$, $a'(\tau) = -\sqrt{\rho} < 0$, resulta que la función $a(x)$ tiene una gráfica de uno de los dos

tipos mostrados en la figura 4, según que

$a(\tau) = (c_0 \sqrt{\rho} - \tau) \sqrt{\rho}$ sea mayor o menor que cero.

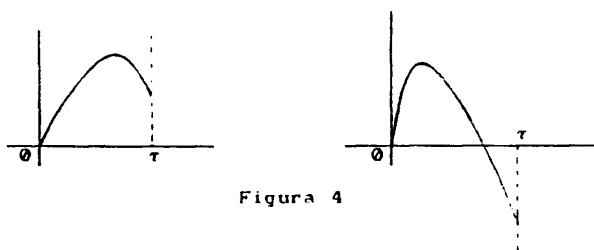


Figura 4

Ahora bien, por la demostración del lema 1.5 sabemos que [35] es cierta, y por lo tanto $a(\tau) \geq 0$ para cualquier familia

simple con $c_2 \neq 1$ y $c_1 = 0$. Y como $\frac{|t|}{\rho^2}(\tau)$ y $a'(x)$ es monótona decreciente, tenemos garantizado [44] para dichas

familias. Por otra parte, si $c_2 = 1$ entonces $\tau = K \frac{|t|}{\rho^2}$ para un cierto $K > \frac{c_0}{\rho} \geq 4\sqrt{2}$, puesto que $c_0 \geq 2$ y $\rho \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Entonces $\rho \phi^{+'}(\frac{|t|}{\rho^2}) < \frac{1}{4\sqrt{2}} \rho \phi^{+'}(\tau) = \frac{1}{4\sqrt{2}}$, ya que

$\phi^{+'}(x)$ es un polinomio o una serie con coeficientes positivos sin término independiente, pues $c_1 = 0$. Con lo que

$a'(\frac{|t|}{\rho^2}) > 0$, y de nuevo haciendo uso de la monotonía de $a'(x)$, volvemos a concluir [44].

Por último, si $c_1 \neq 0$, y utilizando idénticas definiciones y notación que en el lema anterior, tenemos que

$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_t(\rho) = f_{1,t}(\rho_1)$. Pero acabamos de probar que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_{1,t}(\rho_1) < \rho_1 \frac{|t|}{2} = \left[\frac{\rho}{1 - c_1 \rho} \right] \frac{|t|}{2}.$$

Finalmente, el lema 1.4 nos asegura la analiticidad de

$f_t(z) \forall t \in \mathcal{F}$ en un entorno del origen de radio $\rho_0 > \rho$, con lo que por continuidad tenemos garantizada la existencia de un $\varepsilon > 0$ con $f_t(\rho + \varepsilon) < \gamma \forall t \in \mathcal{F} \quad |t| = 1$.

Si ahora aplicamos el mismo esquema de inducción que para

$z = \rho$, llegaríamos a una función $y_\varepsilon(x) = x - (\rho + \varepsilon) \phi^+(x)$ análoga a la $y(x)$ definida en [43], pero cuyo máximo, x_1 , es ligeramente inferior a τ . Sin embargo, como $\forall t \in \mathcal{F}$ $f_t(\rho) < \frac{|t|}{\rho^2}$, resulta que $f_t(\rho)$ se aleja rápidamente de su cota superior τ , al crecer $|t|$, lo que nos garantiza que podemos escoger un ε suficientemente pequeño, de manera que siendo $x_1 \approx \tau$ tengamos $f_t(\rho + \varepsilon) < x_1 \forall t \in \mathcal{F}$, con lo que todo el desarrollo anterior sería válido sustituyendo ρ por $\rho + \varepsilon$.

Y una vez que lo tenemos probado para $z = \rho + \varepsilon$, por tratarse de series con coeficientes positivos concluimos que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < \rho + \varepsilon \implies |f_t(z)| < \gamma |t|.$$

Quedamos así en disposición de terminar la demostración de la proposición 1.8. Siguiendo las observaciones y notación de la demostración del lema 1.5, tenemos que $\forall \varepsilon > 0$

$$\{t \in \mathcal{F} \mid |t| = i\} < \left[\frac{\rho}{1 - c_1 \rho} \right]^{-i} (1 + \varepsilon)^i \quad \text{para casi}$$

todo $i \in \mathbb{N}$, ya que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$, de modo que $i_n \leq f_{1,n} \forall n \in \mathbb{N}$,

donde i_n y $f_{1,n}$ denotan respectivamente el número de árboles

de tamaño n de las familias \mathcal{F} y \mathcal{F}_1 . Ahora bien, es fácil

ver que, por continuidad, podríamos repetir la demostración del

lema 1.6 para $\gamma_1 = \gamma \sqrt{\delta}$ con δ suficientemente próximo a

uno, en lugar de γ . Aseguraríamos así la desigualdad estricta

$$r_1^p < \frac{\rho}{1 - c_1 \rho} \quad \forall p \geq 2, \text{ que nos permitiría tomar } \varepsilon' > 0$$

$$\text{tal que } r_1^p (1 + \varepsilon') < \frac{\rho}{1 - c_1 \rho} \quad \forall p \geq 2.$$

La comprobación de las hipótesis i) y ii) de la proposición 1.2 no conlleva especial dificultad; recordar únicamente que los c_n 's están acotados por exigencia de la definición de las familias simples. Con lo que la proposición 1.8 queda demostrada sin más que aplicar la parte b) de las conclusiones de la proposición 1.2.

Retomando [32], y observando que para toda familia simple con función generatriz $f(z)$ se cumple

$$\frac{1}{1 - z \phi'(f(z))} = \frac{z f'(z)}{f(z)} \quad [45]$$

obtenemos

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{z f'(z)}{f(z)} \left[(1 - c_1 z) f(z) - \alpha(z) \right] \\ T(z) &= \frac{z f'(z)}{f(z)} \left[2 z S(z) (\phi'(f(z)) - c_1) + \right. \\ &\quad \left. + z S^2(z) \phi''(f(z)) - \beta(z) \right] \end{aligned} \quad [46]$$

que son analíticas $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \leq \rho \quad z \neq \rho$.

Teorema 1.8

La media \overline{m}_n y la varianza v_n del tamaño de los árboles simplificados obtenidos a partir de árboles de f de tamaño n , verifican

$$\overline{m}_n = K_1 n; \quad v_n = K_2 n \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty,$$

$$\text{donde } K_1 = 1 - c_1 \rho - \frac{\alpha(\rho)}{\tau}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \left[1 - \frac{\rho g'(\rho)}{g(\rho)} - \frac{g^2(\rho)}{2 \tau^2} \right] K_1^2 + \left[c_1 \rho + \frac{2 \rho \alpha'(\rho)}{\tau} - \right. \\ &\quad \left. - (1 - c_1 \rho) \left(1 - \frac{g^2(\rho)}{\tau^2} \right) \right] K_1 - \frac{g^2(\rho)}{2 \tau^2} (1 - c_1 \rho)^2 - \frac{\beta(\rho)}{\tau} \end{aligned}$$

$$\text{con } \alpha(z) = z \sum_{p \geq 2} \sum_{t \in \mathbb{N}} c_p \left((p-1)|t| + 1 \right) f_t^p(z)$$

$$\beta(z) = z \sum_{p \geq 2} \sum_{t \in \mathbb{N}} c_p (p+1)|t| \left((p-1)|t| + 1 \right) f_t^p(z)$$

ρ radio de convergencia de $f(z) = z \phi(f(z))$

τ raíz de menor módulo de $u \phi'(u) - \phi(u) = 0$ y

$g(z)$ la función asociada a $f(z)$ siguiendo [23] en el capítulo 1.

Demostración

A partir de [23] del capítulo 1, obtenemos el siguiente desarrollo local de $f'(z)$ en un entorno de $z = \rho$:

$$f'(z) = -\frac{g(z)}{2\rho} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{-1/2} + g'(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{-1/2} + h'(z) \quad [47]$$

que sustituido en [46] junto con el desarrollo local en $z = \rho$ de $f(z)$ en [23] del capítulo 1, y los desarrollos de Taylor en $z = \rho$ de z y $\alpha(z)$, nos permite obtener los siguientes desarrollos locales de $S(z)$ y $T(z)$ en un entorno de $z = \rho$:

$$\begin{aligned} S(z) &= A(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{-1/2} + B(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{1/2} + C(z) \\ T(z) &= D(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{-3/2} + E(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{-1/2} + \\ &+ F(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{1/2} + G(z) \end{aligned} \quad [48]$$

que verifican las hipótesis del teorema de Darboux.

Además $A(\rho) = -\frac{g(\rho)}{2} \left(1 - c_1 \rho - \frac{\alpha(\rho)}{\tau}\right)$, con lo que

$$[z^n] S(z) = -\frac{g(\rho)}{2\sqrt{n}} \left(1 - c_1 \rho - \frac{\alpha(\rho)}{\tau}\right) \rho^{-n} n^{-1/2} (1 + o(1/n))$$

sin más que aplicar el susodicho teorema. Y utilizando [24] del capítulo 1, obtenemos el resultado anunciado para la media

$$\bar{m}_n = \left(1 - c_1 \rho - \frac{\alpha(\rho)}{\tau} \right) n \quad n \longrightarrow \infty.$$

En cuanto a v_n , partimos como siempre de la igualdad

$$v_n = \frac{[z^n](T(z) + S(z))}{[z^n]f(z)} - \left[\frac{[z^n]S(z)}{[z^n]f(z)} \right]^2$$

y llegamos al resultado anunciado tras un gran número de cálculos tediosos, a partir de los siguientes equivalentes asintóticos, cuando n tiende a infinito, proporcionados por la aplicación del teorema de Darboux a cada uno de los correspondientes desarrollos locales:

$$\begin{aligned} [z^n](T(z) + S(z)) &= D(\rho) \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} -3/2 \\ n \end{matrix} \right] + \\ &+ (E(\rho) + A(\rho)) \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} -1/2 \\ n \end{matrix} \right] \\ [z^n]S(z) &= A(\rho) \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} -1/2 \\ n \end{matrix} \right] + B(\rho) \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} 1/2 \\ n \end{matrix} \right] \\ [z^n]f(z) &= g(\rho) \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} 1/2 \\ n \end{matrix} \right] - \rho g'(\rho) \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} 3/2 \\ n \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} D(\rho) &= -\frac{g(\rho)}{4} \left(1 - c_1 \rho - \frac{\alpha(\rho)}{\tau} \right)^2 \\ E(\rho) &= -\frac{g(\rho)}{2} \left[\left(1 - c_1 \rho \right) \left[\frac{3\rho h'(\rho)}{\tau} + \frac{2g^2(\rho)}{\tau^2} - 1 \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\rho \alpha'(\rho)}{\tau} - 1 \right] \left(1 - c_1 \rho - \frac{\alpha(\rho)}{\tau} \right) + \\ &+ \frac{g^2(\rho)}{2} \left[\frac{3\rho h'(\rho)}{g(\rho)\tau} + \frac{3g(\rho)}{2\tau^2} - \frac{\rho g'(\rho)}{2g^2(\rho)} - \frac{1}{g(\rho)} \right] \left(1 - c_1 \rho - \frac{\alpha(\rho)}{\tau} \right)^2 \\ &+ \frac{g^3(\rho)}{4\tau^2} \left(1 - c_1 \rho \right)^2 + \frac{g(\rho)}{2\tau} \beta(\rho) \end{aligned}$$

$$B(\rho) = \frac{1}{2} \left[\left(3 \rho g'(\rho) + g(\rho) \right) \left(1 - c_1 \rho - \frac{\alpha(\rho)}{\tau} \right) - \right. \\ \left. - \rho g(\rho) \left(c_1 + \frac{\alpha'(\rho)}{\tau} \right) + \frac{\alpha(\rho)}{\tau} \left[\frac{3 \rho g(\rho) h'(\rho)}{\tau} + \frac{g^3(\rho)}{\tau^2} \right] \right]$$

En el apéndice 1 se da un desarrollo suficientemente detallado de la obtención de los referidos desarrollos locales, y las consecuentes constantes de los equivalentes asintóticos de la media y varianza estudiadas.

Por último señalar que, como puede observarse detalladamente en el apéndice 1, ni los valores de $\alpha(z)$ ni los de $\beta(z)$ influyen en la anulación de términos de orden superior a n ; la única información sobre ellos que ha sido utilizada en el desarrollo anterior, es su analiticidad en un entorno del origen de radio superior a ρ . Todo ello nos permite enunciar el siguiente resultado:

Sea $\mathcal{F} = M(E, \nu)$ una familia simple de árboles cuya serie generatriz $f(z)$ verifica la ecuación $f(z) = z \phi(f(z))$ con ϕ satisfaciendo la condición de m.c.d., y tiene radio de convergencia ρ . Sea \mathcal{f} un criterio de simplificación sobre \mathcal{F} , y llamemos \mathcal{S} a la familia de árboles de \mathcal{F} que no pueden ser reducidos según \mathcal{f} . Consideremos la partición de \mathcal{F} , $\{ \mathcal{F}_t \}_{t \in \mathcal{S}}$ donde $\mathcal{F}_t = \{ T \in \mathcal{F} / \mathcal{f}(T) = t \}$ para cada $t \in \mathcal{S}$; y sus funciones generatrices asociadas $\{ f_t(z) \}_{t \in \mathcal{S}}$.

Teorema 1.9

Si $S(z) = \sum_{t \in \mathcal{S}} |t| f_t(z)$ y $T(z) = \sum_{t \in \mathcal{S}} |t| (|t|-1) f_t(z)$ admiten desarrollos locales en $z = \rho$ de los tipos indicados en [46], con $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ analíticas en un entorno del origen de radio superior a ρ , entonces la media, \overline{m}_n , y la

varianza, v_n , del tamaño de los árboles simplificados obtenidos aplicando \mathcal{F} sobre árboles de \mathcal{F} de tamaño n verifican

$$\overline{m}_n = K_1 n ; \quad v_n = K_2 n \quad n \longrightarrow \infty$$

siendo $K_1 = 1 - c_1 \rho - \frac{\alpha(\rho)}{\tau}$

$$K_2 = \left[1 - \frac{\rho g'(\rho)}{g(\rho)} - \frac{g^2(\rho)}{2\tau^2} \right] K_1^2 + \left[c_1 \rho + \frac{2\rho \alpha'(\rho)}{\tau} - (1 - c_1 \rho) \left(1 - \frac{g^2(\rho)}{\tau^2} \right) \right] K_1 - \frac{g^2(\rho)}{2\tau^2} (1 - c_1 \rho)^2 - \frac{\beta(\rho)}{\tau}$$

con $g(z)$ función asociada a $f(z)$ según [23] del capítulo 1, y τ raíz de menor módulo de la ecuación $u \phi'(u) - \phi(u) = 0$.

En concreto para garantizar la analiticidad de $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ utilizaremos usualmente la siguiente

Proposición 1.9

Si $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ son del tipo

$$R(z) = z \sum_{p \geq 2} c_p \sum_{t \in \mathcal{J}} a(|t|) f_t^p(z), \quad \text{siendo } a(|t|) \text{ un polinomio}$$

en $|t|$ con coeficientes positivos y polinomiales respecto a p ; si además existe $\varepsilon > 0$ y existe $\gamma \in \mathbb{R}^+$ con $\gamma < 1$ y $\gamma^2 < K$ para un cierto $K \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall \varepsilon' > 0$

$$|\{t \in \mathcal{J} / |t| = i\}| < K^{-i} (1 + \varepsilon')^i \quad \text{para casi todo } i \in \mathbb{N},$$

de manera que

$$\forall t \in \mathcal{J} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \leq \rho + \varepsilon \implies |f_t(z)| < \gamma |t|$$

entonces $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ son analíticas en la bola

$$\{z / |z| < \rho + \varepsilon\}.$$

Demostración

Basta aplicar la proposición 1.2.

Nota : Obsérvese que la proposición sigue siendo cierta si lo que se logra es descomponer tales series según una partición de \mathcal{F} , de manera que para cada clase y serie asociada se verifiquen las hipótesis de la misma.

Recordemos una vez más, que la condición de m.c.d. no es vital en absoluto, pues como ya dijimos en la sección 6 del capítulo 1, si dicha condición no se cumple, basta aplicar el mismo razonamiento a cada una de las singularidades dominantes, y aplicar el teorema de Darboux sumando las contribuciones de cada una de ellas, obteniéndose resultados de la misma naturaleza que en el caso en que sí se verifica.

El problema de simplificación estudiado en esta sección es una generalización del tratado en [CS86]. En dicho trabajo se estudiaba el tamaño medio de los árboles simplificados sobre la familia de árboles binarios con un único tipo de nodos internos y dos etiquetas distintas para las hojas. La técnica seguida aquí es la propuesta en dicho artículo en el sentido de traducir el esquema de definición recursivo a un sistema infinito de ecuaciones funcionales, que definen recursivamente la sucesión de funciones generatrices asociadas a los elementos de una determinada partición de la familia de árboles input. Sin embargo, los sistemas de ecuaciones que aparecen en esta sección son bastante más complejos ya que la mayor generalidad del esquema recurrente nos conduce a expresiones que son polinomios de cualquier grado, o incluso series infinitas de funciones, lo que hace que los estudios de analiticidad requieran de nuevas técnicas frente al caso binario, en el que las ecuaciones de segundo grado que aparecen pueden ser resueltas explícitamente.

En [CS86] se aborda también el estudio del tamaño medio de los árboles simplificados a partir de árboles binarios con dos tipos de etiquetas para las hojas, una de ellas distinguida como "elemento neutro", y un único tipo de nodo interno que se interpreta como una operación nilpotente. Este tipo de reducción será nuestro objeto de estudio en la sección 3 de este capítulo.

2. Idempotencia más conmutatividad

En esta sección trataremos con árboles binarios con dos posibles etiquetas, a y b , para sus hojas, y un único tipo de nodo interno que interpretamos como una operación conmutativa e idempotente. A esta familia de árboles la denotaremos por \mathcal{D} , y es trivialmente isomorfa a la familia \mathcal{Q} estudiada previamente, correspondiente al caso $p = q = 2$. Volvemos a considerar como tamaño de un árbol su número de nodos internos, con lo que la función generatriz asociada a \mathcal{D} verifica [1], que se reescribe en la forma

$$D(z) = 2 + z D^2(z) \quad [49]$$

a partir de la cual obtenemos la expresión analítica

$$D(z) = \frac{1 - (1 - 8z)^{1/2}}{2z} \quad [50]$$

De modo que $D(z)$ tiene radio de convergencia $\rho = 1/8$. Y aplicando el teorema de Darboux obtenemos

$$[z^n] D(z) = d_n = \frac{2}{\sqrt{n}} 8^n n^{-3/2} (1 + O(1/n)) \quad n \rightarrow \infty \quad [51]$$

La transformación de árboles que consideramos en esta sección es una implementación de la regla de simplificación

$(x \wedge y) \wedge (y \wedge x) = x \wedge y$, basada en la idempotencia y conmutatividad del operador \wedge . En las figuras 5 y 6 describimos

de forma precisa el proceso de simplificación en cuestión.

```

FUNCTION SICON ( T :  $\mathcal{T}$  ) :  $\mathcal{T}$  ;
  IF T.ar = 0 THEN SICON := T
    ELSE ti := SICON ( T.hi ) ;
        td := SICON ( T.hd ) ;
        IF EQCON ( ti , td )
          THEN SICON := ti
            ELSE SICON := o(ti,td)  FI  FI
END SICON .

```

Figura 5

```

FUNCTION EQCON ( u , v :  $\mathcal{T}$  ) : boolean ;
  IF u.inf  $\neq$  v.inf THEN EQCON := false  ( Uno de los
    árboles es una hoja, y el otro no )
  ELSE IF u.ar = 0 THEN EQCON := true
    ELSE IF EQCON ( u.hi , v.hi )
      THEN EQCON := EQCON ( u.hd , v.hd )
        ELSE IF  $\neg$  EQCON ( u.hi , v.hd )
          THEN EQCON := false
            ELSE EQCON := EQCON ( u.hd , v.hi )
              FI  FI  FI  FI
    END EQCON .

```

Figura 6

Obsérvese que como deseamos tener en cuenta la conmutatividad, para concluir que u no es igual salvo conmutatividad que v , no basta con comprobar que $u.hi$ y $v.hi$ no son equivalentes. Hemos de ver también, que $u.hi$ y $v.hd$ no

lo son ; y caso de que lo fueran, tenemos que u y v serán iguales salvo conmutatividad si y sólo si $u.hd$ y $v.hi$ lo son.

Consideraremos entonces la clase \mathcal{I}_C de árboles irreducibles de \mathcal{T} ; es decir, aquellos árboles de \mathcal{T} que no pueden ser simplificados mediante aplicación de la idempotencia y conmutatividad del operador asociado a sus nodos internos. O equivalentemente $\mathcal{I}_C = \{ t \in \mathcal{T} / \text{SICON}(t) = t \}$. \mathcal{I}_C puede caracterizarse recursivamente mediante

$$\mathcal{I}_C = \textcircled{a} + \textcircled{b} + \{ \circ(t_1, t_2) \in \mathcal{T} \mid t_1, t_2 \in \mathcal{I}_C \\ - \text{EQCON}(t_1, t_2) \} \quad [52]$$

Consideraremos también la relación de equivalencia \approx_{CON} definida sobre \mathcal{I}_C mediante $u \approx_{\text{CON}} v \iff \text{EQCON}(u, v)$, y denotaremos mediante $\text{CON}(t)$ la clase de equivalencia correspondiente a cada $t \in \mathcal{I}_C$. Observamos que $\text{CON}(t)$ admite la siguiente caracterización recursiva :

$$\text{CON}(\textcircled{a}) = \{ \textcircled{a} \} ; \quad \text{CON}(\textcircled{b}) = \{ \textcircled{b} \} ; \\ \text{CON}(t) = \{ \circ(t_1, t_2), \circ(t_2, t_1) \mid t_1 \in \text{CON}(t.hi), \\ t_2 \in \text{CON}(t.hd) \} \quad \forall t \in \mathcal{I}_C \quad |t| > 0 \quad [53]$$

Entonces [52] puede reescribirse en la forma

$$\mathcal{I}_C = \textcircled{a} + \textcircled{b} + \{ \circ(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_C) - \{ \circ(t, t_c) \mid t, t_c \in \mathcal{I}_C \\ t_c \in \text{CON}(t) \} \} \quad [54]$$

Nótese que el algoritmo de reducción no proporciona como salida un representante canónico de cada clase de equivalencia.

Por ejemplo tanto  como  están en \mathcal{I}_C .

Y a partir de [54], $I_C(z) = \sum_{n \geq 0} i_{C,n} z^n$, función

generatriz asociada a \mathfrak{S}_C , puede expresarse entonces por morfismo estándar mediante

$$I_C(z) = 2 + z I_C^2(z) - z I_C(2z^2) \quad [55]$$

puesto que $\forall t \in \mathfrak{S}_C \quad |t| = n \implies |\text{CON}(t)| = 2^n$ lo que puede demostrarse por inducción sobre el tamaño de t , a partir de [53].

En orden a evaluar el tamaño medio de los árboles simplificados obtenidos a partir de SICON, con respecto a su tamaño inicial, hemos de estudiar la serie

$$S(z) = \sum_{T \in \mathfrak{D}} s_n z^n = \sum_{T \in \mathfrak{D}} |\text{SICON}(T)| z^{|T|}$$

Una vez más esta serie no puede definirse directamente de una forma más explícita, por lo que procederemos a particionar \mathfrak{D} en clases de árboles con idéntico simplificado via SICON.

Definimos en concreto $\mathfrak{D}_t = \{ T \in \mathfrak{D} / \text{SICON}(T) = t \}$ para cada $t \in \mathfrak{S}_C$. Evidentemente $\mathfrak{D} = \bigcup_{t \in \mathfrak{S}_C} \mathfrak{D}_t$, siendo la unión disjunta.

Tenemos también una caracterización recursiva de las clases \mathfrak{D}_t mediante el siguiente sistema de series formales de árboles:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_i &= \textcircled{i} + o(\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_i) \quad \forall i \in \{a, b\} \\ \mathfrak{D}_t &= o(\mathfrak{D}_{t_1}, \mathfrak{D}_{t_2}) + (o(\mathfrak{D}_t, \mathfrak{D}_{t'}) / t' \in \text{CON}(t)) \\ &\quad \forall t = o(t_1, t_2) \in \mathfrak{S}_C \end{aligned} \quad [56]$$

Introducimos ahora las funciones generatrices asociadas, definidas para cada $t \in \mathfrak{S}_C$ mediante $D_t(z) = \sum_{T \in \mathfrak{D}_t} z^{|T|}$.

A partir de [56], y via el morfismo estándar tenemos la siguiente caracterización recursiva de las funciones $(D_t)_{t \in \mathfrak{S}_C}$

$$D_i(z) = 1 + z D_i^2(z) = B(z) \quad \forall i \in (a, b) \text{ (Recordemos que}$$

$B(z)$ es la función generatriz de la familia de árboles binarios con un único tipo de nodos internos y hojas)

$$D_t(z) = z D_{t_1}(z) D_{t_2}(z) + z D_t(z) \sum_{t' \in \text{CON}(t)} D_{t'}(z) \\ \forall t = \circ(t_1, t_2) \in \mathcal{S}_c \quad [57]$$

Ahora bien, los $D_{t'}(z)$ están relacionados con $D_t(z)$ gracias al siguiente

Lema 2.1

$$\forall t, t' \in \mathcal{S}_c \quad t \approx_{\text{CON}} t' \implies D_t(z) = D_{t'}(z)$$

Demostración

Para cada $t = \circ(t_1, t_2) \in \mathcal{S}_c$ podemos descomponer \mathcal{D}_t en la siguiente forma :

$$\mathcal{D}_{t,0} = \circ(\mathcal{D}_{t_1}, \mathcal{D}_{t_2}) \\ \mathcal{D}_{t,i+1} = \langle \circ(\mathcal{D}_{t,i}, \mathcal{D}_{t'}) / t' \in \text{CON}(t) \rangle \quad \forall i \geq 0 \quad [58]$$

con lo que $\mathcal{D}_t = \bigcup_i \mathcal{D}_{t,i}$, siendo la unión disjunta.

Demostramos entonces el lema por inducción estructural sobre t :

Si $t = \textcircled{1}$ con $i \in (a, b)$, el resultado es trivial, pues $t' = t$. Sea ahora $t \in \mathcal{S}_c$ $|t| > 0$, y supongamos que

$$\forall t'' \in \mathcal{S}_c \quad |t''| < |t|, \quad t'' \approx_{\text{CON}} t \implies D_{t''}(z) = D_t(z).$$

Consideraremos las descomposiciones respectivas de \mathcal{D}_t y $\mathcal{D}_{t'}$, dadas por [58], de modo que por hipótesis de inducción podemos concluir que $D_{t,0}(z) = D_{t',0}(z)$. Y a continuación, razonando por inducción sobre i , probaremos que también

$$D_{t,i}(z) = D_{t',i}(z) \quad \forall i > 0. \text{ Lo supondremos para } j \leq i,$$

00

y tenemos que

$$D_{t,i+1}(z) = z D_{t,i}(z) \sum_{t' \in \text{CON}(t)} D_{t'}(z) =$$

$$= z D_{t',i}(z) \sum_{t'' \in \text{CON}(t')} D_{t''}(z) = D_{t',i+1}(z)$$

ya que, evidentemente, $\text{CON}(t) = \text{CON}(t')$.

Aplicando este lema en [57], y recordando que $\forall t \in \mathfrak{J}_c$
 $|\text{CON}(t)| = 2^{|t|}$, obtenemos finalmente

$$D_i(z) = B(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} \quad \forall i \in (a, b) \quad [59]$$

$$D_t(z) = z D_{t_1}(z) D_{t_2}(z) + 2^{|t|} z D_t^2(z) \quad \forall t = o(t_1, t_2) \in \mathfrak{J}_c$$

En orden a obtener una expresión conveniente para $S(z)$, consideramos como en los casos anteriores, la serie en dos variables

$$X(y, z) = \sum_{t \in \mathfrak{J}_c} y^{|t|} D_t(z)$$

Claramente $S(z) = X_y'(1, z)$ y $D(z) = X(1, z)$. Además las ecuaciones en [59] se reescriben fácilmente teniendo en cuenta la variable y ; y sumando a continuación las ecuaciones obtenidas, llegamos a que

$$X(y, z) = 2 + y z X^2(y, z) - z \sum_{t \in \mathfrak{J}_c} (y^{2|t|+1} - y^{|t|}) 2^{|t|} D_t^2(z)$$

con lo que

$$S(z) = \frac{z D^2(z) - \alpha(z)}{1 - 2z D(z)} = \frac{z D'(z)}{D(z) - 2} (D(z) - 2 - \alpha(z))$$

siendo $\alpha(z) = z \sum_{t \in \mathfrak{J}_c} (|t|+1) 2^{|t|} D_t^2(z) \quad [60]$

y

$$X_y''(1, z) = \frac{z D'(z)}{D(z)} (4z D(z) S(z) + 2z S^2(z) - \beta(z))$$

siendo
$$\beta(z) = 3z \sum_{t \in \mathfrak{I}_C} |t| (|t|+1) 2^{|t|} D_t^2(z) \quad (61)$$

A partir de consideraciones directas de tipo combinatorio, análogas a las empleadas en apartados anteriores, se demuestra que tanto $S(z)$ como $X_y''(1,z)$ tienen radio de convergencia $\rho = 1/8$. Otros resultados auxiliares que necesitaremos más adelante, se prueban a continuación.

Lema 2.2

$$\forall t \in \mathfrak{I}_C \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < 4/25 \implies |D_t(z)| < \frac{5}{4} \left(\frac{2}{9}\right)^{|t|}$$

Demostración

A partir de [59], razonando por inducción sobre el tamaño de $t \in \mathfrak{I}_C$.

Lema 2.3

$I_C(z)$ tiene radio de convergencia, ρ_{I_C} , estrictamente superior a ρ .

Demostración

Como $\mathfrak{I}_C \subset \mathbb{D}$, e incluso $\forall n \in \mathbb{N} \quad i_{C,n} < d_n$, tenemos que el radio de convergencia, ρ_{I_C} , de $I_C(z)$ es mayor o igual que el de $D(z)$, $\rho = 1/8$, así como que $I_C(1/8) < D(1/8) = 4$.

Ahora utilizaremos el teorema de la función implícita para demostrar que ρ_{I_C} es estrictamente mayor que $1/8$.

Partimos de [55], y consideramos

$$F(z, I_C(z)) = I_C(z) - 2 - z I_C^2(z) + z I_C(2z^2)$$

que es trivialmente analítica como función de $I_C(z)$; mientras que como función de z lo es al menos en la bola cerrada

$(z / |z| \leq 1/8)$, ya que en dicho recinto se tiene

$|2z^2| < |z|$. Por otra parte, derivando $F(z, I_C(z))$ respecto a $I_C(z)$, obtenemos $\frac{d}{d I_C}(z, I_C(z)) = 1 - 2z I_C(z)$ que es decreciente sobre el intervalo real $[0, \rho_{I_C}]$ por ser $I_C(z)$ una serie de potencias con coeficientes positivos. Además

$$\frac{d}{d I_C}(0, I_C(0)) = 1 \quad ; \quad \frac{d}{d I_C}(1/8, I_C(1/8)) > 0 \quad \text{ya que}$$

$I_C(1/8) < 4$; con lo que se tiene que la derivada en cuestión es positiva en el intervalo real $[0, 1/8]$. Y teniendo en cuenta de nuevo que $I_C(z)$ es una serie con coeficientes positivos,

concluimos que $\forall z \in \{z / |z| \leq 1/8\}$ $\left| \frac{d}{d I_C}(z, I_C(z)) \right| \neq 0$ de manera que queda probado que $\rho_{I_C} > 1/8$.

Proposición 2.1

Las series $\sum_{t \in \mathbb{N}_c} (|t|+1) 2^{|t|} D_t^2(z)$ y

$\sum_{t \in \mathbb{N}_c} |t| (|t|+1) 2^{|t|} D_t^2(z)$ son analíticas en la bola

$$A = \{z / |z| < 4/25\}.$$

Demostración

A partir del lema 2.2 sabemos que cada uno de los términos de ambas series es analítico en A , así como que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{t \in \mathbb{N}_c} (|t|+1) 2^{|t|} D_t^2(z) \right| &< \sum_{t \in \mathbb{N}_c} (|t|+1) \frac{25}{16} \left[\frac{8}{81} \right]^{|t|} = \\ &= \frac{25}{16} \left[\frac{8}{81} I'_c\left(-\frac{8}{81}\right) + I_c\left(-\frac{8}{81}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\left| \sum_{t \in \mathbb{N}_c} |t| (|t|+1) 2^{|t|} D_t^2(z) \right| < \frac{25}{81} \left[I'_c\left(-\frac{8}{81}\right) + \frac{4}{81} I''_c\left(-\frac{8}{81}\right) \right]$$

y como sabemos por el lema 2.3 que $\rho_{I_C} > 1/8$, tenemos que

ambas series convergen absoluta y uniformemente sobre A , y por lo tanto aplicando el teorema de Weierstrass podemos concluir que son analíticas en dicho recinto.

Por otra parte [60] y [61] son expresiones de los tipos [12] y [19] respectivamente, con lo que los dos teoremas siguientes resultan como meros corolarios del teorema 1.4.

Teorema 2.1

El tamaño medio, \bar{m}_n , de los árboles simplificados según SICON, obtenidos a partir de árboles de \mathcal{D} de tamaño n , satisface

$$\bar{m}_n = \lambda n (1 + O(1/n)) \quad n \rightarrow \infty$$

siendo $\lambda = 1 - \frac{1}{2} \alpha(1/8)$

con $\alpha(1/8) = \frac{1}{8} \sum_{t \in \mathcal{S}_c} (|t|+1) 2^{|t|} D_t^2(1/8)$

Teorema 2.2

La varianza, v_n , del tamaño de los árboles simplificados según SICON, obtenidos a partir de árboles de \mathcal{D} de tamaño n tiene el siguiente equivalente asintótico

$$v_n = \left[-\frac{1}{4} (2 - \alpha(1/8))^2 + \left(\frac{1}{16} \alpha'(1/8) + \frac{3}{2} \right) (2 - \alpha(1/8)) - \frac{1}{2} \beta(1/8) - 2 \right] n \quad n \rightarrow \infty$$

siendo $\beta(1/8) = \frac{3}{8} \sum_{t \in \mathcal{S}_c} |t| (|t|+1) 2^{|t|} D_t^2(1/8)$

y $\alpha(z) = z \sum_{t \in \mathcal{S}_c} (|t|+1) 2^{|t|} D_t^2(z)$.

3. Nilpotencia

La transformación de árboles que estudiaremos en esta sección es una idealización de la regla de simplificación algebraica $x - x = 0$. En el apartado 3.1 desarrollaremos el estudio cuando este criterio de reducción opera sobre árboles binarios con dos tipos de etiquetas para las hojas. Como se verá, a pesar de encontrarnos en un caso sencillo, en cuanto a que es muy particular, el estudio requiere la incorporación de nuevas técnicas frente a las utilizadas en las secciones anteriores, dada la mayor complejidad de la descripción recursiva de la función generatriz de los árboles que se reducen al árbol que se interpreta como el cero del operador asociado a los nodos internos. A continuación, en el apartado 3.2, y como paso previo al estudio de esta regla de reducción a familias simples arbitrarias, generalizamos el estudio a las familias de árboles m -arios, $m \geq 2$, con un número arbitrario de etiquetas, tanto para sus hojas, como para sus nodos internos. Ello de nuevo incrementa notablemente la dificultad del problema, de manera que es preciso incorporar nuevas técnicas, combinando resultados de tipo combinatorio con otros de análisis complejo.

3.1 Árboles binarios con dos etiquetas para las hojas

La familia de árboles \mathcal{D}^* con la que trabajaremos en este apartado es la constituida por los árboles binarios con un único tipo de nodos internos, y dos posibles etiquetas a y e para sus hojas. Consideramos que los nodos internos representan una operación nilpotente, y el símbolo e puede verse como el elemento cero de dicha operación, mientras que a representa una constante o variable arbitraria.

Evidentemente la familia \mathcal{D}^* es isomorfa a la familia \mathcal{D} previamente estudiada, si bien el papel desempeñado aquí por la etiqueta e , es bien distinto del que tenía el símbolo b al que reemplaza. Por lo tanto la función generatriz asociada a \mathcal{D}^* coincide con la de \mathcal{D} , que quedó definida en la sección 2.

A fin de tener una definición precisa del nuevo concepto de reducción, y consecuentemente de árbol simplificado, damos en la figura 7 una versión en pseudo-PASCAL del algoritmo de reducción.

```

FUNCTION RED ( T :  $\mathcal{D}^*$  ) :  $\mathcal{D}^*$  ;
  IF T.ar = 0 THEN RED := T
    ELSE ti := RED ( t.hi )
      td := RED ( t.hd )
      IF EQUAL (ti,td)
        THEN RED := @
          ELSE RED := o(ti,td)    FI  FI
END RED .

```

EQUAL testea la igualdad de dos árboles en orden prefijo

Figura 7

A pesar de que este algoritmo tiene la misma estructura que el dado en la figura 1 para el caso $p = q = 2$, los árboles resultantes de la aplicación de ambos son bien distintos, como cabría esperar, ya que los criterios de simplificación en que se basan son bien distintos. En particular, según el algoritmo de la figura 7, no solo los árboles con todas las etiquetas iguales a e se simplifican a \textcircled{e} , por contra, el único árbol que se simplifica a \textcircled{e} es el propio árbol \textcircled{e} .

Una vez más, para estudiar la media y la varianza del tamaño de los árboles simplificados, según este nuevo criterio, introducimos la serie en dos variables

$$X(y, z) = \sum_{T \in \mathcal{D}^*} y^{|\text{RED}(T)|} z^{|T|}, \text{ definimos}$$

$$S(z) = \sum_{T \in \mathcal{D}^*} |\text{RED}(T)| z^{|T|}, \text{ y particionamos la familia de}$$

árboles \mathcal{D}^* en clases de árboles con un mismo simplificado.

Naturalmente los árboles irreducibles serán ahora aquellos que permanezcan inalterables al aplicárseles la función RED.

Denotaremos por \mathcal{I}^* a dicha familia de árboles. Curiosamente, \mathcal{I}^* es isomorfa a la familia \mathcal{I} de árboles irreducibles según SIMP que consideramos en la sección 1.1, para el caso $p = q = 2$; ello puede probarse fácilmente por inducción sobre el tamaño de los árboles.

La partición referida más arriba, es en concreto la siguiente: Para cada $t \in \mathcal{I}^*$ definimos

$\mathcal{R}_t = \{ T \in \mathcal{D}^* / \text{RED}(T) = t \}$, de modo que $(\mathcal{R}_t)_{t \in \mathcal{I}^*}$ es una partición de \mathcal{D}^* . Además sus elementos admiten la siguiente caracterización recursiva:

$$\mathcal{R}_{\text{a}} = \{ \text{a} \}$$

$$\mathcal{R}_{\text{e}} = \{ \text{e} \} + \sum_{t \in \mathcal{I}^*} \circ(\mathcal{R}_t, \mathcal{R}_t)$$

$$\mathcal{R}_t = \circ(\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v) \quad \forall t = \circ(u, v) \in \mathcal{I}^* \text{ es decir } u, v \in \mathcal{I}^* \quad u \neq v$$

A partir de lo cual, y por morfismo estándar, obtenemos la siguiente caracterización recursiva de las funciones generatrices

$R_t(z)$ correspondientes a las familias \mathcal{R}_t con $t \in \mathcal{I}^*$:

$$\begin{aligned}
 R_a(z) &= 1 \\
 R_e(z) &= 1 + z \sum_{t \in \mathfrak{S}^n} R_t^2(z) \\
 R_t(z) &= z R_u(z) R_v(z) \quad \forall t = o(u,v) \in \mathfrak{S}^n \quad [62]
 \end{aligned}$$

Ahora a partir de [62] y procediendo de la forma usual, llegamos a

$$X(y,z) = 1 + R_e(z) + y z X^2(y,z) - y z \sum_{t \in \mathfrak{S}^n} y^{2|t|} R_t^2(z) \quad [63]$$

obteniéndose

$$S(z) = X'_y(1,z) = \frac{z D'(z)}{D(z) - 2} (D(z) - 2 - \alpha(z)) \quad [64]$$

$$\text{siendo } \alpha(z) = z \sum_{t \in \mathfrak{S}^n} (2|t| + 1) R_t^2(z) ;$$

$$X''_y(1,z) = \frac{z D'(z)}{D(z) - 2} (4 z D(z) S(z) + 2 z S^2(z) - \beta(z))$$

$$\text{con } \beta(z) = z \sum_{t \in \mathfrak{S}^n} 2|t| (2|t| + 1) R_t^2(z) \quad [65]$$

Como ya es habitual, mediante razonamientos de tipo combinatorio se demuestra que tanto $S(z)$ como $X''_y(1,z)$ tienen radio de convergencia $\rho = 1/8$. Por lo tanto, si demostramos que tanto $\alpha(z)$ como $\beta(z)$ son analíticas en un entorno del origen de radio superior a ρ , podremos concluir la linealidad respecto al tamaño de los árboles de partida, de los parámetros en estudio, ya que [64] y [65] son de los tipos [12] y [19] respectivamente, con lo que quedaríamos en condiciones de aplicar el teorema-1.4.

Proposición 3.1

$$\sum_{t \in \mathfrak{S}^n} (2|t| + 1) R_t^2(z) \quad \text{y} \quad \sum_{t \in \mathfrak{S}^n} 2|t| (2|t| + 1) R_t^2(z)$$

son analíticas en la bola $\{z / |z| \leq 0.155\}$.

Demostración

De nuevo nos limitaremos a comprobar que se dan las condiciones de aplicación de la proposición 1.2 ; de hecho, y por las mismas razones que en otros casos anteriores, únicamente haremos mención de la verificación de la hipótesis iii) . Para ello, comenzaremos estudiando la función generatriz asociada a \mathfrak{B}^* , que coincide con la de \mathfrak{B} , por ser ambas familias de árboles isomorfas. Entonces, y a partir de [5], dicha función generatriz $I(z) = \sum i_n z^n$, donde i_n denota el número de árboles irreducibles de tamaño n , cumple la ecuación

$$I(z) = 2 + z I^2(z) - z I(z^2) \quad [66]$$

Ahora bien, dado que $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}^*$, y que $\forall n > 1 \quad i_n < d_n$, podemos afirmar que el radio de convergencia ρ_I de $I(z)$ es mayor o igual que el de $D(z)$, $\rho = 1/8$, así como que

$$I(1/8) < D(1/8) = 4 \quad [67]$$

Y ahora para comprobar que $\rho_I > 1/8$, razonamos de la misma forma que en la prueba del lema 2.3, utilizando el teorema de la función implícita, y teniendo en cuenta que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \leq 1/8 \implies |z^2| < 1/8.$$

Por otra parte $\forall z \in \mathbb{R}^+$

$$z \leq \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \implies I(z) < \frac{1 - \sqrt{1 - 8z + 8z^2}}{2z} \quad [68]$$

lo que se obtiene a partir de [66] sin más que notar que

$$\forall z \in \mathbb{R}^+ \quad z^2 < \rho_I \implies I(z^2) > 2.$$

Y finalmente [68] nos permite afirmar que

$$\rho_I > \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

puesto que $I(z)$ es una serie con coeficientes positivos.

Y veamos ahora en forma de lema, la verificación de la hipótesis iii) de la proposición 1.2 .

Lema 3.1

$$\exists c, \gamma \in \mathbb{R}^+ \quad \gamma < \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \forall t \in \mathcal{J}^* \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$|z| \leq 0.155 \implies |R_t(z)| < c \gamma^{|t|} .$$

Demostración

Se procederá por inducción sobre el tamaño de t , encontrándose la mayor dificultad en el estudio de $R_e(z)$ debido a la especial configuración del sistema [62] que define implícitamente $R_e(z)$.

Comenzaremos probando que $R_e(z)$ es analítica en la bola $(z / |z| < 0.1680541)$, lo que nos indicará de paso, posibles valores para las constantes c y γ .

Afortunadamente tenemos en este caso una sencilla, y por tanto útil, relación entre $R_t(z)$ y $R_e(z)$ para cada $t \in \mathcal{J}^*$, pues razonando por inducción sobre el tamaño de t , tenemos que

$$\forall t \in \mathcal{J}^* \quad R_t(z) = z^{|t|} (R_e(z))^{|t|_e} \quad [69]$$

donde $|t|_e$ denota el número de hojas de t etiquetadas por e . Y sustituyendo [69] en [62] , obtenemos

$$R_e(z) = 1 + z R_e^2(z) + z \sum_{t \in \mathcal{J}^* - \{e\}} z^{2|t|} (R_e(z))^{2|t|_e} \quad [70]$$

Ahora bien, tenemos claramente que $R_e(z) \geq 1$ dentro de su círculo de convergencia ; también es fácil demostrar por inducción que $\forall t \neq \emptyset \quad |t|_e \leq |t|$; y finalmente recordemos que $\rho_I \geq \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$. Todo ello unido nos permite probar que

$$\forall z \in \mathbb{R}^+ \quad z^2 R_e^2(z) \leq \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \quad \text{se tiene}$$

$$R_e(z) \leq 1 + z R_e^2(z) - z + z I(z^2 R_e^2(z)) \quad [71]$$

que junto a [68] nos permite asegurar que

$$\forall z \in \mathbb{R}^+ \quad z \leq 0.1680541 \quad z^2 R_e^2(z) \leq \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\iff z R_e(z) \leq \frac{1 - \sqrt{(1 - 2z)^2 - 4z^2 I(z^2 R_e^2(z))}}{2} \quad [72]$$

Ahora, fijado $z_0 \in (1/9, 0.1680541]$, consideraremos las funciones $f(y) = z_0 y$ y

$$g(y) = \frac{1 - \sqrt{(1 - 2z_0)^2 - 4z_0^2 I(z_0^2 y^2)}}{2} \quad \text{definidas sobre}$$

el intervalo real $[1, \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2z_0}]$. Ambas son continuas y

crecientes, verificándose además que $g(1) > f(1)$ y

$$g\left[\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2z_0}\right] < f\left[\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2z_0}\right], \text{ de modo que ha de existir}$$

algún $y_1 \in [1, \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2z_0}]$ con $f(y_1) = g(y_1)$,

verificándose que

$$y_1 = 1 + z_0 y_1^2 - z_0 + z_0 I(z_0^2 y_1^2)$$

con lo que resulta

$$y_1 \geq 1 + z_0 y_1^2 + z_0 \int_{t \in \mathbb{R}^+} z_0^2 |t| y_1^2 |t| e^{-t} dt$$

Si consideramos ahora los dos términos de esta desigualdad,

observamos que ambos definen funciones de y_1 continuas sobre el

intervalo real $[1, \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2z_0}]$, pero mientras que el límite

cuando y_1 tiende a 1 de la primera es 1, el de la segunda

es superior a 1, lo que nos permite concluir, teniendo en cuenta [70], que $R_e(z_0) \leq \gamma_1$.

Y como $R_e(z)$ es de coeficientes positivos, podemos extender la acotación a toda la bola, obteniendo

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < 0.1680541 \implies |R_e(z)| \leq 2.2771443 \quad [73]$$

Tomamos entonces $c = 2.28$ y $\gamma \in (0.3534, \frac{1}{2\sqrt{2}})$, de forma que evidentemente $\forall t \in \mathfrak{g}^n \quad |t| = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$|z| \leq 0.155 \implies |R_t(z)| < c \sqrt{|t|}.$$

Sea ahora $t \in \mathfrak{g}^n \quad |t| \geq 1$, y supongamos que $\forall t^m \in \mathfrak{g}^m$
 $\forall z \in \mathbb{C} \quad |t^m| < |t|, \quad |z| \leq 0.155 \implies |R_{t^m}(z)| < c \sqrt{|t^m|}$;
 entonces a partir de [62] es inmediato ver que $\forall z \in \mathbb{C}$

$|z| \leq 0.155 \implies |R_t(z)| < c \sqrt{|t|}$, ya que para tales valores de z se tiene $c|z| < \gamma$.

Con lo que concluye la demostración del lema 3.1.

Quedamos así en condiciones de enunciar los dos teoremas siguientes, que resultan nuevamente como corolarios del teorema 1.4.

Teorema 3.1

El tamaño medio de los árboles simplificados según RED, obtenidos a partir de árboles de \mathfrak{T}^n de tamaño n , satisface

$$\overline{m}_n = \lambda n (1 + O(1/n))$$

siendo $\lambda = 1 - \frac{1}{2} \alpha(1/8)$ donde

$$\alpha(z) = z \sum_{t \in \mathfrak{g}^n} (2|t| + 1) R_t^2(z).$$

Teorema 3.2

La varianza del tamaño de los árboles simplificados según RED, obtenidos a partir de árboles de \mathfrak{B}^* de tamaño n tiene el equivalente asintótico

$$v_n = \left[-\frac{1}{4} (2 - \alpha(1/8))^2 + \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{16} \alpha'(1/8) \right] (2 - \alpha(1/8)) - \frac{1}{2} \beta(1/8) - 2 \right] n \quad n \rightarrow \infty$$

siendo $\beta(1/8) = \frac{1}{8} \sum_{t \in \mathfrak{B}^*} 2|t| (2|t| + 1) R_t^2(1/8)$ y con

$$\alpha(z) = z \sum_{t \in \mathfrak{B}^*} (2|t| + 1) R_t^2(z).$$

3.2 Árboles m-arios

En este apartado nos ocuparemos de la generalización del método de reducción basado en la propiedad de nilpotencia de la operación asociada a los nodos internos de los árboles en estudio, a cada familia \mathfrak{M} de árboles m-arios con c_m tipos de operadores de aridad m , y $c'_0 = c_0 + 1$ operadores de aridad cero. Los operadores de aridad m se interpretarán como operaciones idempotentes con un mismo elemento neutro; mientras que entre las c'_0 etiquetas para las hojas, distinguiremos una e , que representará a dicho elemento neutro común. Las c_0 etiquetas restantes representarán constantes o variables arbitrarias.

Consideraremos como tamaño de un árbol su número total de nodos, de manera que la función generatriz, $M(z)$, de cada familia \mathfrak{M} verifica la ecuación funcional

$$M(z) = c'_0 z + c_m z M^m(z) \quad [74]$$

Entonces, a partir de los resultados de la sección 6 del capítulo anterior, sabemos que :

a) El radio de convergencia ρ de $M(z)$ es solución del

$$\text{sistema} \quad \tau \phi'(\tau) = \phi(\tau) \quad [75]$$

$$\rho = \frac{\rho}{\phi(\rho)} = \frac{1}{\phi'(\rho)}$$

donde τ es la menor raíz real positiva de la ecuación

$u \phi'(u) = \phi(u)$, siendo $\phi(u) = c_0' + c_m u^m$ el descriptor asociado a la familia \mathbb{M} .

b) La ecuación $u \phi'(u) = \phi(u)$ tiene m raíces de módulo

τ , siendo sus argumentos los de las raíces m -ésimas de la unidad; es decir $\tau_k = \tau e^{\frac{2k\pi i}{m}}$, con $0 \leq k < m$. Cada una de ellas provoca una singularidad dominante de módulo ρ de la función $M(z)$. En concreto las mismas se tienen para

$$z = \rho_k \text{ con } \rho_k = \rho e^{\frac{2k\pi i}{m}}, \quad 0 \leq k < m.$$

c) En cada una de sus singularidades dominantes, $M(z)$ admite un desarrollo local del tipo [23] del capítulo 1.

$$d) [z^n] M(z) = \begin{cases} m \beta \rho^{-n} n^{-3/2} \left[1 + O(1/n) \right] & \text{si } n \bmod m = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\text{donde } \beta = \sqrt{\frac{\phi(\tau)}{2 \pi \phi''(\tau)}} \quad [76]$$

Por otra parte, a partir de [74] y [75], podemos obtener las siguientes expresiones explícitas de ρ y τ :

$$\rho = \frac{m-1}{m c_0'} \sqrt{\frac{c_0'}{(m-1) c_m}}; \quad \tau = \sqrt{\frac{c_0'}{(m-1) c_m}} \quad [77]$$

Llamaremos \mathcal{S} a la familia de árboles irreducibles, es decir que no pueden ser simplificados vía nilpotencia, de \mathbb{M} ; y consideraremos como ya es usual, la partición $(\mathbb{M}_t)_{t \in \mathcal{S}}$ de \mathbb{M} , en clases de árboles con idéntico simplificado según RED, es decir $\mathbb{M}_t = \{ T \in \mathbb{M} / \text{RED}(T) = t \}$ para cada $t \in \mathcal{S}$. Entonces

el conjunto $(M_t)_{t \in \mathcal{J}}$ de las funciones generatrices asociadas a los elementos de dicha partición, puede caracterizarse recursivamente, a partir del criterio de simplificación RED, como sigue :

$$\begin{aligned} M_e(z) &= z + c_m z \sum_{t \in \mathcal{J}} M_t^m(z) \\ M_a(z) &= z \quad \forall a, v(a) = \emptyset, a \neq e \\ M_{\otimes(t_1, \dots, t_m)}(z) &= z \prod_{i=1}^m M_{t_i}(z) \\ &\quad \forall s, v(s) = m, \otimes(t_1, \dots, t_m) \in \mathcal{J} \end{aligned} \quad [78]$$

De nuevo, para abordar el estudio del comportamiento asintótico de la media y la varianza del tamaño de los árboles reducidos, obtenidos por aplicación del algoritmo RED a árboles de \mathcal{M} de un determinado tamaño, estudiaremos las series

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{T \in \mathcal{M}} |\text{RED}(T)| z^{|T|} = \sum_{t \in \mathcal{J}} |t| M_t(z) \\ T(z) &= \sum_{T \in \mathcal{M}} |\text{RED}(T)| (|\text{RED}(T)| - 1) z^{|T|} = \sum_{t \in \mathcal{J}} |t| (|t| - 1) M_t(z) \end{aligned}$$

que tienen igual radio de convergencia que la serie $M(z)$ asociada a la familia \mathcal{M} , como puede comprobarse fácilmente por medio de razonamientos combinatorios estándar.

Como en casos anteriores, introducimos la serie en dos variables

$$X(y, z) = \sum_{T \in \mathcal{M}} y^{|\text{RED}(T)|} z^{|T|} = \sum_{t \in \mathcal{J}} y^{|t|} M_t(z)$$

de modo que $M(z) = X(1, z)$, $S(z) = X'_y(1, z)$, $T(z) = X''_{yy}(1, z)$.

Ahora, a partir de [78], y dada la siguiente caracterización recursiva de \mathcal{J} :

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{a, v(a)=0 \\ a \neq e}} \textcircled{a} + \textcircled{e} + \sum_{s, v(s)=m} \left(\textcircled{s} (t_1, \dots, t_m) / t_1, \dots, t_m \in \mathcal{S}, \right. \\ \left. \exists i, j \in \{1, \dots, m\} \text{ con } t_i \neq t_j \right)$$

llegamos, tras algunos cálculos, a

$$S(z) = \frac{zM'(z)}{H(z)} \left[M(z) - \alpha(z) \right]$$

$$T(z) = \frac{zM'(z)}{H(z)} \left[2z S(z) \phi'(M(z)) + z S^2(z) \phi''(M(z)) - \beta(z) \right]$$

siendo

$$\alpha(z) = c_m z \sum_{t \in \mathcal{S}} (m|t| + 1) M_t^m(z)$$

$$\beta(z) = c_m z \sum_{t \in \mathcal{S}} m|t| (m|t| + 1) M_t^m(z) \quad [79]$$

Pasemos ahora al estudio de la analiticidad de $\alpha(z)$ y $\beta(z)$. Veremos que tales series convergen en un entorno del origen de radio estrictamente superior a ρ .

Proposición 3.2

$\exists \varepsilon > 0$ tal que las series $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ son analíticas en la bola $\{z / |z| \leq \rho + \varepsilon\}$.

Para demostrar esta proposición vamos a necesitar una serie de resultados previos que daremos en forma de lemas.

Como $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ son de coeficientes positivos, basta demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(\rho + \varepsilon)$ y $\beta(\rho + \varepsilon)$ convergen. Comenzaremos demostrando tal resultado para $\varepsilon = 0$, y luego indicaremos finalmente como extenderlo a $\varepsilon > 0$.

La idea inicial para sumar tales series numéricas, $\alpha(\rho)$ y $\beta(\rho)$, consiste en clasificar los $t \in \mathcal{S}$ por tamaños. Para ello definimos $\mathcal{S}_n = \{t \in \mathcal{S} / |t| = n\}$, $i_n = |\mathcal{S}_n|$. Sabemos que si $I(z) = \sum i_n z^n$, función generatriz asociada a la familia de árboles irreducibles \mathcal{S} , tiene radio de convergencia $\rho_{\mathcal{S}}$,

podemos estimar $i_n \approx \rho_3^{-n}$ $n \rightarrow \infty$, de modo que lo que necesitaríamos es una acotación del tipo

$$M_t(\rho) \leq \rho_3^{\frac{|t|}{2}} \quad \text{para casi todo } t \in \mathcal{J} \quad [80]$$

Ahora bien, a partir de [78], puede demostrarse fácilmente por inducción estructural que

$$\forall t \in \mathcal{J} \quad M_t(z) = z^{|t|-|t|_e} \left[M_e(z) \right]^{|t|_e} \quad [81]$$

donde $|t|_e$ es el número de hojas de t etiquetadas por e .

Apoyándonos en este hecho buscaremos que

$$\rho^{|t|-|t|_e} \left[M_e(\rho) \right]^{|t|_e} \leq \rho_3^{\frac{|t|}{2}} \quad \text{lo que reduce el problema a}$$

acotar superiormente $M_e(\rho)$.

Para ello probaremos utilizando técnicas combinatorias que "hay muchos árboles que no se simplifican a \textcircled{e} ".

En concreto se tiene el siguiente

Lema 3.2

Sea \mathcal{M}_1 la familia de árboles idéntica a \mathcal{M} , pero excluyendo la etiqueta e ; y sea $M_1(z)$ su función generatriz asociada. Se verifica que $M_e(\rho) < M(\rho) - M_1(\rho)$.

Demostración

Veamos que podemos definir una aplicación \mathcal{V} inyectiva, pero no siempre sobre, entre el conjunto de árboles de tamaño n de \mathcal{M}_1 y el de árboles de \mathcal{M} de tamaño n que no se simplifican a \textcircled{e} .

Definimos \mathcal{V} por casos:

$$\text{Si RED}(T) \neq \textcircled{e} \implies \mathcal{V}(T) = T$$

Si $\text{RED}(T) = \textcircled{e}$, sucede una de estas dos cosas

- a) T contiene un nodo interno a profundidad máxima con todos sus hijos etiquetados por la misma etiqueta e' .
- b) T contiene un nodo interno con m hijos que son nodos internos a profundidad máxima de los que depende una misma sucesión de etiquetas.

En el primer caso definimos $\Psi(T)$ reetiquetando con e el primer hijo del nodo en cuestión ; mientras que en el caso b) reetiquetamos de la misma forma el segundo hijo de uno cualquiera de los nodos hijos del que hace que nos encontremos en este caso.

$\Psi(T)$ nunca se podrá simplificar a \textcircled{e} , ya que si $\text{RED}(T) = \textcircled{e}$, al introducir una etiqueta e a máxima profundidad en un árbol que carece de tales etiquetas, resulta imposible que ninguno de los subárboles del árbol que incluyen dicha etiqueta se simplifique en absoluto.

Ψ es inyectiva pues por la forma en que definimos $\Psi(T)$ resulta posible reconstruir T a partir de $\Psi(T)$, ya que

$$|\Psi(T)|_e = 0 \Rightarrow T = \Psi(T) .$$

Si $|\Psi(T)|_e = 1$ y la e está en el primer hijo de un nodo, entonces T se obtiene reetiquetando dicha e con la etiqueta de uno cualquiera de sus hermanos.

Si $|\Psi(T)|_e = 1$ y la e está en el segundo hijo de un nodo interno \textcircled{i} , T se obtendrá reetiquetando dicha e con la etiqueta del segundo hijo de otro cualquiera de los hermanos del nodo \textcircled{i} .

Ψ no es sobre para casi ningún tamaño n , ya que siendo n suficientemente grande, tendremos árboles de \mathbb{M} que no se simplifican a \textcircled{e} , pero incluyen dos o más e , y tales árboles nunca se obtienen como imágenes a través de Ψ .

El lema es pues consecuencia de la existencia de esta función Ψ .

Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned} M(\rho) &= (c_0 + 1) \rho + \rho c_m M^m(\rho) = \tau \\ M_1(\rho) &= c_0 \rho + \rho c_m M_1^m(\rho) \end{aligned} \quad [82]$$

con lo que si ahora pretendemos probar que $M_e(\rho) < x$, para una cierta expresión $x < \tau$, gracias al lema anterior basta con ver que $\tau - x < c_0 \rho + c_m \rho (\tau - x)^m$ [83] pues en tal caso $M_1(\rho) > \tau - x$, ya que si consideramos la función $g(y) = c_0 \rho + c_m \rho y^m - y$, tenemos $g(0) > 0$, y $g'(y) = m c_m \rho y^{m-1} - 1$, que verifica $g'(0) < 0$ y $g'(\tau) = 0$ pues por [75] sabemos que τ es la menor raíz real positiva de la ecuación $g'(y) = 0$. Luego $g'(y) < 0 \quad \forall y \in [0, \tau)$. Por tanto si $g(\tau - x) > 0$, entonces $M_1(\rho) > \tau - x$, ya que $g'(y)$ no puede anularse en $[0, \tau - x]$.

Nótese que si la expresión x propuesta como cota de $M_e(\rho)$ es superior o igual a τ , la comprobación de que es cota superior es absolutamente trivial pues dado que

$\tau = M(\rho) = \sum_{t \in \mathbb{N}} M_t(\rho)$, es inmediato que $M_e(\rho) < \tau \leq x$. De manera que en adelante sólo necesitaremos verificar la desigualdad [83] o sus equivalentes posteriores en aquellos casos en que la x que nos interese como cota de $M_e(\rho)$ sea estrictamente inferior a τ .

Transponiendo términos a partir de [82], podemos reescribir [83] en la forma

$$1 + c_m (\tau^m - (\tau - x)^m) - \frac{x}{\rho} < 0 \quad [84]$$

Tomemos $d = c_m (\tau^m - (\tau - x)^m) = c_m \tau^m (1 - (1 - \frac{x}{\tau})^m)$ y recordemos que por [75] $c_0' = (m - 1) c_m \tau^m$, con $c_0' = c_0 + 1$ con lo que llegamos finalmente a

$$d = \frac{c'_0}{m-1} \left[1 - \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^m \right] \quad [85]$$

$$\text{teniéndose que probar } 1 + d < \frac{x}{\rho} \quad [86.a]$$

Por otra parte la cota superior x buscada para $M_e(\rho)$, nos interesa que sea suficientemente pequeña, de manera que

$$\frac{|t| - |t|_e}{\rho} \leq \frac{|t|_e}{\rho} \leq \rho_g \frac{|t|}{2} \quad [86.b]$$

Ahora bien $\rho \leq \rho_g$ pues $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$. Entonces si utilizamos esta cota para ρ , tenemos que para conseguir [86.b] sería suficiente con probar

$$x \frac{|t|_e}{\rho} \leq \rho_g \frac{|t|_e}{2} \iff x \leq \rho_g \frac{1 - \frac{|t|}{2|t|_e}}{1}$$

Evidentemente el caso peor se da con $|t|_e$ máximo, pero como estamos trabajando con árboles m -arios podemos relacionar $|t|_e$ con $|t|$ mediante el siguiente

Lema 3.3

$$\forall t \in \mathcal{I} - \{e\} \quad |t|_e \leq \frac{m-1}{m} |t|$$

Demostración

Basta observar que para cada nodo interno de t , al menos uno de sus hijos no puede estar etiquetado con e , ya que $t \in \mathcal{I}$.

Ello nos lleva a la acotación $x \leq \rho_g \frac{m-2}{2(m-1)}$, que en particular se tiene tomando $x < \sqrt{\rho_g}$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Pues bien, tomando $x = \rho \frac{m-2}{2(m-1)}$ e incluso $x = \sqrt{\rho}$, podemos concluir además $M_e(\rho) < x$ en algunos casos que veremos a continuación.

Recordemos que [86.a] sólo lo hemos de comprobar para aquellos casos de familias m -arias en los que la x propuesta

sea estrictamente menor que τ , pues para el resto la acotación $M_e(\rho) < x$ es inmediata.

Ahora bien si $x < \tau$, entonces $d < \frac{c_0^i}{m-1}$, lo que será suficiente para demostrar [86.a] en los siguientes casos:

Caso $c_0^i = 2$

Tenemos $d < \frac{2}{m-1}$. Si tomamos $x = \sqrt{\rho}$, obtenemos $\frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$; y como por [77] $\rho < 1/2$, obtenemos $\frac{x}{\rho} > \sqrt{2}$. Así si $m \geq 6$, $d \leq 2/5$ y $1 + d < x/\rho$.

En los subcasos correspondientes a $m \in \{2, \dots, 5\}$, hemos de afinar más, tomando $x = \rho^{\frac{m-2}{2(m-1)}}$.

Enumerémoslos a continuación haciendo uso reiterado de [77]:

$m = 2$; $x = 1$; $\tau = \sqrt{2/c_m}$. Con lo que $\tau < x \forall c_m > 1$, y la comprobación de [86.a] hemos de hacerla entonces solamente para el caso $c_m = 1$. En tal caso $d = 2[1 - (1 - 1/\sqrt{2})^2]$ y $\rho = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, con lo que $1 + d < x/\rho$.

$m = 3$; $x = \rho^{1/4}$; $\rho < 1/3$; $\frac{x}{\rho} > 3$; $d < 1$; $1 + d < \frac{x}{\rho}$

$m = 4$; $x = \rho^{1/3}$; $\rho < 3/8$; $\frac{x}{\rho} > \left(\frac{8}{3}\right)^{2/3}$; $d < 2/3$;
 $1 + d < \frac{x}{\rho}$

$m = 5$; $x = \rho^{3/8}$; $\rho < 2/5$; $\frac{x}{\rho} > \left(\frac{5}{2}\right)^{5/8}$; $d < 1/2$;
 $1 + d < \frac{x}{\rho}$

Otros casos con $c_0^i < m - 2$

Estos casos son también sencillos ya que tenemos $d < 1$.

a) $c_0^i \geq 5 \Rightarrow \rho < 1/5$, luego tomando $x = \sqrt{\rho}$, $1 + d < \frac{x}{\rho}$

b) $c_0^i = 4 \Rightarrow \rho < 1/4$, $d < 4/5$, y tomando $x = \sqrt{\rho}$, obtenemos $1 + d < \frac{x}{\rho}$

$$c) c'_0 = 3 \Rightarrow \rho < 1/3, \quad d < 3/5 \quad \text{y nuevamente para } x = \sqrt{\rho}, \\ 1 + d < \frac{x}{\rho}.$$

En los dos últimos casos hemos utilizado además el hecho de que si $c'_0 \geq 3$ y $c'_0 < m - 2$, entonces $m \geq 6$.

Lamentablemente para los casos restantes se tiene $d > 1$, lo que nos impide proceder como hasta ahora. Pero ello no quiere decir que el resultado buscado sea falso, sino más bien que se ha pecado de exceso de "generosidad" en las acotaciones realizadas, que habrá que afinar con más cuidado. Ello ha de hacerse en dos direcciones: una más conceptual y otra más bien técnica. La técnica y más sencilla consiste en, a la hora de acotar d , no sólo evaluar $\frac{c'_0}{m-1}$, sino tener también en cuenta el factor "disminuyente" $\left[1 - (1 - x/\tau)^m\right]$ que como ya hemos razonado es siempre menor que 1, para los casos no triviales de examinar $(\tau(x))$. Y conseguiremos tener en cuenta dicho factor gracias al siguiente

Lema 3.4

Sean $m \geq 1$, $x \in (0,1)$. Para todo j par, $j \in (0, \dots, m)$

$$\sum_{i=j}^m \binom{m}{i} (-1)^i x^i \quad \text{es positivo.}$$

Demostración

Consideremos el binomio $(1-x)^m$. Sabemos que

$$(1-x)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i x^i = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{m}{i} (-1)^i x^i + \sum_{i=j}^m \binom{m}{i} (-1)^i x^i \quad [87]$$

Supongamos que j es el menor número par que hace falso el resultado a probar; $j > 0$ pues $(1-x)^m > 0$. Como para $j-2$ la suma era positiva, los dos sumandos eliminados han de tener suma positiva:

$$\left[\begin{matrix} m \\ j-2 \end{matrix} \right] (-1)^{j-2} x^{j-2} + \left[\begin{matrix} m \\ j-1 \end{matrix} \right] (-1)^{j-1} x^{j-1} > 0 \implies \\ \implies 1 - \frac{m-j+2}{j-1} x > 0 .$$

Pero si agrupamos los términos del sumando en estudio, de dos en dos, obtenemos pares de la forma :

$$\left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right] (-1)^k x^k + \left[\begin{matrix} m \\ k+1 \end{matrix} \right] (-1)^{k+1} x^{k+1} , \text{ con } k \text{ par} , k \geq j ,$$

sobrando quizás un último sumando positivo.

Pero tenemos que

$$\left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right] (-1)^k x^k + \left[\begin{matrix} m \\ k+1 \end{matrix} \right] (-1)^{k+1} x^{k+1} > 0 \iff 1 - \frac{m-k}{k+1} x > 0$$

lo que es cierto, ya que $k \geq j \implies \frac{m-k}{k+1} < \frac{m-j+2}{j-1}$.

Luego sumando todos los pares, y en su caso el sumando sobrante, obtendríamos una suma positiva, contradiciendo la existencia de j haciendo falso el resultado a probar.

Entonces a partir de [87] y del lema anterior

$$1 - \left(1 - \frac{x}{\tau}\right)^m = 1 - 1 + \frac{m x}{\tau} - \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{x}{\tau}\right)^2 + \\ + \left[\begin{matrix} m \\ 3 \end{matrix} \right] \left(\frac{x}{\tau}\right)^3 - p , \text{ con } p > 0 .$$

Con lo que

$$d = c_m \tau^{m-1} x \frac{\tau}{x} m \frac{x}{\tau} \left[1 - \frac{m-1}{2} \frac{x}{\tau} + \right. \\ \left. + \frac{(m-1)(m-2)}{6} \left(\frac{x}{\tau}\right)^2 - p' \right] ,$$

con $p' > 0$.

Y recordando que $\rho = \frac{1}{m c_m \tau^{m-1}}$, llegamos a

$$d = \frac{x}{\rho} \left[1 - \frac{m-1}{2} \frac{x}{\tau} + \frac{(m-1)(m-2)}{6} \left(\frac{x}{\tau}\right)^2 - p' \right] \quad [88]$$

Con lo que [86.a] se reduce a

$$1 \leq \frac{x}{\rho} \frac{m-1}{2} \frac{x}{\tau} \left[1 - \frac{m-2}{3} \frac{x}{\tau} \right] \quad [89]$$

Pero por sí solo, este proceso de afinamiento no nos

permite probar el resultado buscado para todos los casos en los que no lo hemos hecho todavía. Básicamente ello se debe a que para hacerlo, [89] nos impone que x sea mayor que lo que nos permite la acotación que obtuvimos a partir del lema 3.3. En efecto, lo que hicimos entonces fue ponernos en "el caso peor", en el que todos los árboles $t \in \mathcal{S} - \textcircled{e}$ de cada tamaño tienen $|t|_e$ máximo; pero ello dista mucho de la realidad. Veremos por ejemplo que hay "muy pocos" árboles simplificados con

$|t|_e > \frac{|t|}{2}$. Entonces a la hora de evaluar $\alpha(\rho)$ y $\beta(\rho)$, tomaremos $\mathcal{S} = \mathcal{S}^- \cup \mathcal{S}^+$ donde $\mathcal{S}^- = \{ t \in \mathcal{S} / |t|_e \leq \frac{|t|}{2} \}$ e $\mathcal{S}^+ = \mathcal{S} - \mathcal{S}^-$; y descompondremos $\alpha(\rho)$ y $\beta(\rho)$ según esta partición. Llamaremos $\alpha^-(\rho) = \alpha(\rho)|_{t \in \mathcal{S}^-}$, $\alpha^+(\rho) = \alpha(\rho)|_{t \in \mathcal{S}^+}$ y análogamente para $\beta(\rho)$. De modo que $\alpha(\rho) = \alpha^-(\rho) + \alpha^+(\rho)$, $\beta(\rho) = \beta^-(\rho) + \beta^+(\rho)$, y para demostrar su convergencia probaremos la de sus sumandos respectivos. Para ello bastará demostrar [80] para $t \in \mathcal{S}^-$ sustituyendo \mathcal{S} por \mathcal{S}^- ; y para $t \in \mathcal{S}^+$ sustituyendo \mathcal{S} por \mathcal{S}^+ . En esto consiste el "afinamiento conceptual" al que hacíamos mención previamente.

Evidentemente para \mathcal{S}^- estamos en las condiciones que antes se daban para $m = 2$, por lo que bastaría con probar que para $x = 1$, se tiene [86.a].

Para estudiar \mathcal{S}^+ , veremos un lema que nos permitirá acotar $\rho_{\mathcal{S}^+}$ muy por encima de ρ .

Lema 3.5

La subfamilia \mathcal{M}^+ de \mathcal{M} formada por los árboles t , con $|t|_e > \frac{|t|}{2}$ tiene una función generatriz con radio de convergencia mayor que $\rho_2 / \sqrt{c_0}$, siendo ρ_2 el radio de convergencia de la función generatriz de la familia \mathcal{M}_2 idéntica

a \mathbb{M} pero con sólo dos etiquetas para sus hojas, una de las cuales es e .

Demostración

Podemos obtener todos los árboles de \mathbb{M}^+ tomando cada árbol de \mathbb{M}_2 con $|t|_e > \frac{|t|}{2}$, y repartiendo etiquetas distintas de e , de manera arbitraria, entre las hojas de dicho árbol no etiquetadas con e .

Así cada árbol de \mathbb{M}_2 en las condiciones indicadas nos produce $c_0^{|t| - |t|_e - |t|_i}$ árboles de \mathbb{M}^+ , donde $|t|_i$ es el número de nodos internos de t . De modo que si m_n^+ y $m_{2,n}$ denotan respectivamente el número de árboles de \mathbb{M}^+ y \mathbb{M}_2 de tamaño n , tenemos $m_n^+ < c_0^{n/2} m_{2,n} \quad \forall n > 1$, y como el radio de convergencia de una serie de potencias coincide con el inverso del límite superior de la raíz n -ésima del valor absoluto de su coeficiente n -ésimo cuando $n \rightarrow \infty$, concluimos la demostración del lema.

Observación: Naturalmente el lema será útil cuando $c_0 > 1$, pues en otro caso no nos dice nada en absoluto. Ahora bien para el caso $c_0 = 1$, no necesitamos de estos últimos afinamientos en las acotaciones, pues habíamos conseguido demostrar [80]

$$\forall t \in \mathcal{I} - \textcircled{e}.$$

Aplicando el lema 3.5 vemos que necesitaríamos que x verificase [86.b] con $\rho_2/\sqrt{c_0}$ en el lugar de ρ_1 , a fin de concluir la finitud de los sumandos $\alpha^+(\rho)$ y $\beta^+(\rho)$.

Retomamos entonces [89], en busca del x adecuado. Para lograr [89] buscaremos que se verifiquen las condiciones

- a) $\frac{m-2}{3} \frac{x}{r} \leq \frac{1}{2}$
 b) $\frac{x}{\rho} \frac{m-1}{2} \frac{x}{r} \geq 2$

excepto en el caso $m = 2$, en el que el sustraendo del paréntesis en [89] se anula, por lo que basta con conseguir

$$b') \frac{x}{\rho} \frac{m-1}{2} \frac{x}{\tau} \geq 1 \quad (\text{o sea } \frac{x}{\rho} \frac{x}{\tau} \geq 1)$$

Tomaremos k en el lugar de los miembros derechos de b) y b') para unificarlos; con lo que recordando [77] tenemos

$$\frac{x}{\rho} \frac{m-1}{2} \frac{x}{\tau} \geq \left[\frac{x}{\rho} \right]^2 \frac{(m-1)^2}{m c_0^1} \geq k \iff x \geq \rho \frac{\sqrt{k m c_0^1}}{m-1}$$

Para $m > 2$, tomamos $x = \rho \frac{\sqrt{k m c_0^1}}{m-1}$, y vamos a ver bajo qué condiciones se cumple a).

$$\frac{m-2}{3} \frac{x}{\tau} = \frac{m-2}{3} \sqrt{\frac{k}{m c_0^1}} \quad \text{recordando nuevamente que}$$

$$\tau = \rho \frac{m c_0^1}{m-1} \quad \text{Entonces a) se cumple con tal que } c_0^1 \geq m-2.$$

¡ Pero tal restricción no es molesta en absoluto, ya que justamente los casos $c_0^1 < m-2$ ya fueron resueltos previamente !

Así pues $x = \rho \frac{\sqrt{k m c_0^1}}{m-1}$ parece el candidato adecuado para tratar el caso correspondiente a \mathcal{J}^+ .

Por otra parte acabamos de probar que para este valor de x se tiene $M_1(\rho) > \tau - x$, y curiosamente también tenemos $x < 1$, con lo que de rebote nos ha quedado concluida la prueba correspondiente a \mathcal{J}^- .

En cuanto a \mathcal{J}^+ , una vez que aplicamos el lema 3.3 a la versión correspondiente de [86.b] es decir a

$$\rho \frac{|t| - |t|_e}{x} \frac{|t|_e}{\tau} \leq \left[\frac{\rho_2}{\sqrt{c_0^1}} \right]^2 \frac{|t|}{\tau}, \quad \text{obtenemos}$$

$$\rho^{1/m} x^{(m-1)/m} \leq \sqrt{\frac{\rho_2}{\sqrt{c_0^1}}} \quad [90]$$

Ahora bien, recordando [77] tenemos

$$\begin{aligned} \rho^{1/m} x^{(m-1)/m} c_0^{1/4} &= \rho \left[\frac{\sqrt{k m c_0'}}{m-1} \right]^{(m-1)/m} c_0^{1/4} = \\ &= \frac{c_0^{1/4}}{m c_m^{1/m}} \left[\frac{k m}{c_0'} \right]^{\frac{m-1}{2m}} \quad y \\ \rho_2^{1/2} &= \sqrt{\frac{m-1}{2m}} \left[\frac{2}{c_m(m-1)} \right]^{\frac{1}{2m}} \end{aligned}$$

Y de nuevo reordenando tenemos que [90] es equivalente a

$$\frac{c_0^{1/4}}{(m c_m)^{1/2m}} \left[\frac{2 k}{(m-1) c_0'} \right]^{\frac{m-1}{2m}} \leq 1, \text{ lo que claramente es}$$

cierto para $m \geq 5$.

Para $m \in \{2, 3, 4\}$ basta hacer los cálculos concretos para ver que tal acotación es cierta, teniendo en cuenta que $c_0 < c_0'$, y que en el caso $m = 2$, $k = 1$.

¡ Con lo que concluye la prueba !.

En particular hemos demostrado el siguiente

Lema 3.6

- a) $M_e(\rho) < 1$
 b) Si $c_0' = 2$ o $c_0' < m - 2$ $M_t(\rho) < \rho^{|t|/2} \quad \forall t \in \mathcal{S} - \textcircled{e}$
 c) Si $c_0' \geq m - 2$ y $c_0' \neq 2$ $M_t(\rho) < \rho^{|t|/2} \quad \forall t \in \mathcal{S}^+ - \textcircled{e}$
 y $M_t(\rho) < \rho^{|t|/2} \quad \forall t \in \mathcal{S}^-$

Veamos ahora que existe un $\varepsilon > 0$ de modo que el lema anterior también es cierto para $M_t(\rho + \varepsilon)$. Para ello comenzaremos demostrando el siguiente

Lema 3.7

Existe $\varepsilon > 0$, tal que $\forall t \in \mathcal{S}$ $M_t(z)$ es convergente en la bola $\{z \in \mathbb{C} / |z| \leq \rho + \varepsilon\}$.

Demostración

Comenzaremos viendo que el radio de convergencia de $M_e(z)$ es estrictamente superior a ρ .

En efecto, recordemos que por [78]

$$M_e(z) = z + c_m z \sum_{t \in \mathcal{J}} M_t^m(z)$$

Y aplicando [81]

$$M_e(z) = z + c_m z \sum_{t \in \mathcal{J}} \left[z^{|t|} - |t|_e (M_e(z))^{|t|_e} \right]^m$$

Consideremos ahora

$$F(z, M_e(z)) = M_e(z) - z - c_m z \sum_{t \in \mathcal{J}} \left[z^{|t|} - |t|_e (M_e(z))^{|t|_e} \right]^m$$

Para todo $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq \rho$, esta función es analítica como función de z y como función de $M_e(z)$. En efecto, a partir del apartado a) del lema 3.6 tenemos que en dicha bola cerrada

$$|M_e(z)| \leq M_e(\rho) < 1, \text{ y por lo tanto}$$

$$\left| \sum_{t \in \mathcal{J}} \left[z^{|t|} - |t|_e (M_e(z))^{|t|_e} \right]^m \right| < \sum_{t \in \mathcal{J}} \rho^{|t|} (|t|_e)^m < I(\rho)$$

habiéndose deducido la última desigualdad a partir del lema 3.3.

Consideremos ahora

$$\frac{dF}{dM_e}(z, M_e(z)) = 1 - z m c_m \sum_{t \in \mathcal{J}} |t|_e M_t^m(z) M_e^{-1}(z) \quad [91]$$

donde hemos utilizado [81], expresión ésta que unida a las acotaciones previas al lema 3.6, nos permite demostrar, tras un detallado estudio por casos, que $\forall t \in \mathcal{J} \quad |t|_e M_t(\rho) M_e(\rho) \leq 1$;

con lo que $\sum_{t \in \mathcal{J}} |t|_e M_t^m(z) M_e^{-1}(z) \leq \sum_{t \in \mathcal{J}} M_t^{m-1}(\rho) < \tau^{m-1}$, luego

[91] es positivo en $(\rho, M_e(\rho))$. Además como τ es la menor raíz real positiva de la ecuación $1 - \rho m c_m u^{m-1}$, y [91] es decreciente sobre el eje real, pues la serie que aparece en tal

expresión es de coeficientes positivos, tenemos que no se anula sobre $[0, \rho]$, lo que unido nuevamente al hecho de que la serie que aparece en [91] es de coeficientes positivos, nos permite afirmar que $\left| \frac{dF}{dM_e}(z, M_e(z)) \right| \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq \rho$.

Y finalmente, por el teorema de la función implícita, el radio de convergencia de $M_e(z)$ es estrictamente superior a ρ , y por lo tanto también lo es el de $M_t(z) \quad \forall t \in \mathfrak{J} - \ominus$, por [81].

Lema 3.8

Existe $\varepsilon > 0$ tal que

- a) Si $c'_0 = 2$ o $c'_0 < m - 2$ $M_t(\rho + \varepsilon) < \rho_3^{|t|/2} \quad \forall t \in \mathfrak{J} - \ominus$
- b) Si $c'_0 \geq m - 2$ y $c'_0 \neq 2$ $M_t(\rho + \varepsilon) < \rho_3^{|t|/2} \quad \forall t \in \mathfrak{J}^+ - \ominus$
- y $M_t(\rho + \varepsilon) < \rho_3^{|t|/2} \quad \forall t \in \mathfrak{J}^-$

Demostración

Caso a)

Por el desarrollo anterior sabemos que $M_e(\rho) < \kappa$, para un cierto κ tal que $\frac{|t|_e}{\kappa} \leq \rho_3^{|t|_e - |t|/2}$; y como por el lema 3.7 sabemos que $M_e(z)$ es analítica en un entorno del origen de radio estrictamente superior a ρ , tenemos garantizada la existencia de un $\varepsilon > 0$ tal que $M_e(\rho + \varepsilon) < \kappa$. Además por la caracterización de $M_e(z)$ dada en [78], sabemos que $\rho + \varepsilon < \kappa$.

Por [81]

$$M_t(\rho + \varepsilon) = (\rho + \varepsilon)^{|t| - |t|_e} \left[M_e(\rho + \varepsilon) \right]^{|t|_e} \quad \forall t \in \mathfrak{J}$$

Ahora si $|t|_e \geq 1$,

$$M_t(\rho + \varepsilon) < \kappa \frac{|t| - |t|_e}{\kappa} |t|_e \leq \rho_3 \frac{|t| (2|t|_e - 1)}{2|t|_e} \leq \rho_3^{|t|/2}$$

Si $|t|_e = 0$, $M_t(\rho + \varepsilon) = (\rho + \varepsilon)^{|t|}$ lo que impone una

condición adicional sobre el ε : debe verificarse que $\rho + \varepsilon < \rho_g$ lo que es factible ya que $\rho_g > \rho$.

Para comprobar esta última afirmación observemos que \mathcal{S} puede caracterizarse recursivamente en la forma :

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{a, v(a)=0 \\ a \neq e}} \mathcal{A} + \mathcal{E} + \sum_{s, v(s)=m} (\mathcal{S}(t_1, \dots, t_m) / t_1, \dots, t_m \in \mathcal{S}, \\ \exists i, j \in \{1, \dots, m\} \text{ tales que } t_i \neq t_j)$$

Entonces su función generatriz asociada $I(z)$ verifica

$$I(z) = (c_0 + 1)z + c_m z I^m(z) - c_m z I(z^m).$$

Pero como para todo $n > 1$ $i_n < m_n$, donde i_n y m_n designan el número de árboles de tamaño n en \mathcal{S} y \mathcal{M} respectivamente, se tiene $I(\rho) < M(\rho)$, y por tanto

$1 - m c_m \rho^{m-1} I^{m-1}(\rho) > 0$, lo que junto con el teorema de la función implícita, y razonando como en los casos anteriores, nos permite concluir que $\rho_g > \rho$, teniendo en cuenta que el radio de convergencia de $I(z^m)$ es mayor o igual que el de $I(z)$ en la medida en que $|z| < 1$.

Caso b)

Análogo al precedente para las versiones correspondientes de [86.b].

Y finalmente estamos en condiciones de aplicar la proposición 1.2 bien sea directamente a $\alpha(z)$ y $\beta(z)$, bien sea a $\alpha^+(z)$, $\alpha^-(z)$, $\beta^+(z)$, $\beta^-(z)$, pues evidentemente sigue siendo cierta, cuando la condición iii) se verifica salvo para un número finito de casos (aquí, salvo para $M_e(z)$).

Con lo que la proposición 3.2 queda demostrada.

Para finalizar el estudio analítico de $S(z)$ y $T(z)$

retomemos [79]. Tenemos que $\frac{zM'(z)}{M(z)} = \frac{1}{1 - zmc_m M^{m-1}(z)}$

con lo que $S(z)$ y $T(z)$ tienen las mismas m singularidades dominantes que $M(z)$.

Además [79] es exactamente de los tipos [46] por lo que tenemos el siguiente teorema como corolario del teorema 1.9 para el caso de varias singularidades dominantes.

Teorema 3.3

La media \overline{M}_{mn+1} y varianza V_{mn+1} del tamaño de los árboles simplificados obtenidos a partir de árboles de m de tamaño $mn + 1$, verifican

$$\overline{M}_{mn+1} \approx K_1 n \quad , \quad V_{mn+1} \approx K_2 n \quad n \rightarrow \infty$$

donde

$$K_1 = 1 - \frac{a(\rho)}{\tau}$$

$$K_2 = \left[1 - \frac{\rho g'(\rho)}{\tau} - \frac{g^2(\rho)}{2\tau^2} \right] K_1^2 - \frac{g^2(\rho)}{2\tau^2} - \frac{\beta(\rho)}{\tau} + \left[\frac{2\rho a'(\rho)}{\tau} + \frac{g^2(\rho)}{\tau^2} - 1 \right] K_1$$

con

$$g(\rho) = - \sqrt{\frac{2(c_0' + c_m \tau^m)}{m(m-1)c_m \tau^{m-2}}}$$

$$g'(\rho) = \rho^{1/2} \frac{4s_2 s_4 - 5s_3^2}{8s_2^3 \sqrt{-s_2}} \quad \text{donde} \quad s_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n z}{d u^n}(\tau)$$

$$\text{con} \quad z = \frac{u}{c_0' + c_m u^m}$$

$$\alpha(z) = c_m z \sum_{t \in \mathcal{J}} (m|t| + 1) N_t^m(z) \quad \text{y} \quad \beta(\rho) = c_m \rho \sum_{t \in \mathcal{J}} m|t|(m|t| + 1) N_t^m(\rho)$$

Para terminar esta sección comentaremos que el hecho de haber escogido como medida del tamaño de un árbol su número total de nodos, frente a la elección de número de nodos internos, que nos hubiese permitido manipular funciones con una única singularidad dominante, se debe al convencimiento de que las técnicas aquí

desarrolladas pueden aplicarse al estudio de la aplicación de este criterio de reducción a una familia simple arbitraria de árboles, en cuyo caso no hay opción posible en la definición del tamaño de un árbol : en general ha de considerarse como tal el número total de nodos. No obstante, en el desarrollo anterior hemos sacado ventaja del conocimiento explícito de los valores ρ y τ asociados a M , información que se pierde al intentar razonar sobre una familia simple arbitraria, lo que hace esperar que sean necesarios aún nuevos refinamientos en las técnicas expuestas en esta sección ; lo que trataremos de hacer en un futuro próximo.

Capítulo 3

Comportamiento medio de algoritmos bottom-up sobre árboles

En este capítulo abordaremos el estudio de la complejidad en media de los algoritmos de reducción de árboles presentados en el capítulo anterior. Para ello seguiremos la misma filosofía que la desarrollada por ejemplo en (FS83) o (St84 . Cap 3 y 4) , es decir partiendo de la idea de que la serie generatriz de coste describe la complejidad de un programa o de una de sus partes, se trata de trabajar directamente con la misma, para lo cual se comienza construyéndola a partir de series asociadas a las distintas operaciones del algoritmo consideradas como básicas. En primer lugar se traducen los esquemas de cálculo en términos de sistemas de ecuaciones sobre series formales de árboles, en las que cada árbol, o n-tupla de árboles, es ponderado por el coste de la ejecución de la sucesión de instrucciones de la que es argumento. A continuación se transforman estas ecuaciones mediante el llamado morfismo estándar, para obtener su imagen en términos de descriptores de complejidad.

Comenzaremos introduciendo una serie de conceptos que afinan la noción de serie de coste dada en el capítulo 1 . Recordemos al respecto que para los distintos algoritmos que pretendemos estudiar, el conjunto de datos posibles es siempre una familia simple, que denotaremos por F .

Notaremos por \bar{F} al producto cartesiano $\bar{F} = F_1 \times \dots \times F_m$, donde cada F_i es una familia simple de árboles incluida en F , y utilizaremos la notación abreviada \bar{X} para referirnos a la tupla $(X_i)_{i=1}^m$ con $X_i \in F_i$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

A cada procedimiento o sucesión de instrucciones, A , que depende de los argumentos $\bar{X} \in \bar{F}$, le asociamos la serie formal

$$\tau \hat{\Omega} = \sum_{\bar{X} \in \bar{\mathcal{F}}} \tau \hat{\Omega}(\bar{X}) \bar{X}$$

donde $\tau \hat{\Omega}(\bar{X})$ es el coste de la ejecución de A sobre el dato \bar{X} .

El morfismo que utilizaremos a lo largo de este capítulo, es el que asocia a cada árbol T de cada familia \mathcal{F}_i el monomio $x_i^{|T|}$.

Así, siendo $U \subset \mathcal{F}^m$ un conjunto de m -uplas de árboles de \mathcal{F} , definimos la serie generatriz o función característica de U como la serie en m variables

$$\kappa U(x_1, \dots, x_m) = \sum_{n_1, \dots, n_m} u_{n_1, \dots, n_m} x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}$$

donde

$$u_{n_1, \dots, n_m} = |\{ (X_1, \dots, X_m) \in U \mid |X_1| = n_1, \dots, |X_m| = n_m \}|$$

Y si P es un predicado sobre \mathcal{F}^m , definimos la función característica condicional de U bajo la condición P mediante

$$\kappa U(x_1, \dots, x_m / P) = \kappa (U \wedge P)(x_1, \dots, x_m)$$

donde $U \wedge P$ denota la intersección de U y P .

Aunque ya definimos en el capítulo 1 la noción de serie de coste de un algoritmo $\hat{\Omega}$, ahora lo haremos de una forma más general. Así, siendo A un procedimiento (o lo que es igual, una sucesión de instrucciones) que dependa de ciertos argumentos

$X_i \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$, $1 \leq i \leq m$; dada una medida de complejidad τ , y una sucesión de valores concretos e_i , $1 \leq i \leq m$ para los argumentos X_i , denotamos por $\tau \hat{A}(e_1, \dots, e_m)$ el coste de ejecución de A para los valores e_i de sus argumentos. Y

siendo $P \subset \prod_{i=1}^m \mathcal{F}_i$ un predicado impuesto sobre los datos e_i ,

llamaremos serie de coste o descriptor de complejidad de A condicionado por P a la serie

$$ra(x_1, \dots, x_m / P) = \sum_{P(\bar{e})} \tau A(e_1, \dots, e_m) x_1^{|e_1|} \dots x_m^{|e_m|} \quad [1]$$

De esta forma el coeficiente $[x_1^{n_1}, \dots, x_m^{n_m}] ra(\bar{x} / P)$ es la suma de los costes de la ejecución de A sobre todas las tuplas de datos que verifican $P(\bar{e})$ con $|e_i| = n_i$, $1 \leq i \leq m$. Usualmente, si $P = \prod F_i$ lo omitiremos en la notación, escribiendo $ra(\bar{x})$ en lugar de $ra(\bar{x} / P)$.

En [St84] se dan una serie de propiedades elementales que se derivan de manera inmediata de las definiciones anteriores, para cualquier tipo de complejidad τ escogida. Entre ellas, recordar que dado un procedimiento $A(\bar{X} : \bar{F})$ y su descriptor de complejidad $ra(\bar{x})$, la serie $ra(x, \dots, x)$ que se escribirá $ra(x)$ representa los costes acumulados respecto al tamaño total de la m -upla de datos.

En cuanto a la medida de complejidad τ que manejaremos a lo largo de este capítulo, decir que será aditiva respecto a la composición de instrucciones, considerándose que :

- Toda combinación booleana de tests elementales sobre raíces de árboles tiene coste unitario.
- El coste del control de las iteraciones (es decir de las variables ligadas a cada bucle) es nulo, así como el de las llamadas a procedimientos, paso de parámetros y asignación del resultado a las funciones de tipo booleano.
- El coste de asignación de un valor a una variable de tipo puntero es unitario.

Por otra parte es claro que una elección más realista de las constantes de tiempo anteriores, no alteraría en absoluto la naturaleza del comportamiento asintótico de un algoritmo. Por último τ queda descrita en detalle en la figura 8, para todas

aquellas construcciones que aparecen en los algoritmos que pretendemos estudiar.

Construcción	Coste de ejecución
$A(\bar{X}) \equiv B(\bar{X}) ; C(\bar{X})$	$\tau A(\bar{e}) = \tau B(\bar{e}) + \tau C(\bar{e})$
$A(X) \equiv B(X.h(i))$	$\tau A(e) = \tau B(e.h(i))$
$A(X) \equiv Y := B(X.h(i))$	$\tau A(e) = 1 + \tau B(e.h(i))$
$A(\bar{X}) \equiv$ IF $P(\bar{X})$ THEN $B(\bar{X})$ ELSE $C(\bar{X})$	$\tau A(\bar{e}) = \begin{cases} \tau P(\bar{e}) + \tau B(\bar{e}) & \text{si } P(\bar{e}) \\ \tau P(\bar{e}) + \tau C(\bar{e}) & \text{si } \neg P(\bar{e}) \end{cases}$
$A(X) \equiv$ FOR $i := 1$ TO $X.ar$ DO $B(X.h(i))$	$\tau A(e) = \sum_{i=1}^{e.ar} \tau B(e.h(i))$
$A(X) \equiv$ WHILE $P(\bar{X})$ DO $B(\bar{X})$	$\tau A(\bar{e}) =$ Suma de los costes de evaluación del predicado $P(\bar{e})$ mientras sea cierto, y de los costes $\tau B(\bar{e})$ correspondientes, más el coste de evaluación de $P(\bar{e})$ la primera vez que se haga falso.
$P(\bar{X}) \equiv$ Combinación booleana de predicados elementales sobre las etiquetas o aridades.	$\tau P(\bar{e}) = 1$

Para cada construcción se indica su coste de ejecución en función de los de sus componentes ; \bar{e} , o en su caso e , denotan el valor fijado como argumento.

Figura 8

Ahora siguiendo [St84] podemos enunciar las tres reglas de complejidad siguientes, que definen respectivamente el descriptor de complejidad asociado a la composición secuencial de instrucciones, a la instrucción condicional simple (if), y a la iteración incondicional en los subárboles (for), en función de los descriptores de complejidad y funciones características, cuando proceda, de sus componentes; así como de las funciones características de sus tipos de datos.

Regla 1 (Composición secuencial)

Siendo $A(\bar{X}) \equiv B(\bar{X}) ; C(\bar{X})$, donde \bar{X} es de tipo \bar{F} ; para todo predicado $P \subset \bar{F}$ se tiene

$$\tau_a(\bar{x} / P) = \tau_b(\bar{x} / P) + \tau_c(\bar{x} / P)$$

Regla 2 (Condicional)

Siendo $A(\bar{X}) \equiv \text{IF } P(\bar{X}) \text{ THEN } B(\bar{X}) \text{ ELSE } C(\bar{X})$, y $\bar{X} \subset \bar{F}$, se tiene

$$\tau_a(\bar{x}) = \tau_p(\bar{x}) + \tau_b(\bar{x} / P) + \tau_c(\bar{x} / \neg P)$$

Estas dos reglas se derivan directamente de la aditividad de la medida de complejidad.

Regla 3 (Iteración incondicional en los subárboles)

Siendo $A(X) \equiv \text{FOR } i := 1 \text{ TO } X.\text{ar} \text{ DO } B(X.h(i))$, y $X \subset \mathcal{F}$, se tiene

$$\tau_a(x) = x \tau_b(x) \phi'(f(z))$$

donde $f(z)$ es la función generatriz asociada a los árboles de

la familia $\mathcal{F} = \mathcal{M}(E, \nu)$ y $\phi(f(z)) = \sum_{n \geq 1} c_n f^n(z)$ con

$$c_n = |\{s \in E / \nu(s) = n\}|.$$

Demostración

Sea $\tau A = \sum_{X \in F} \tau A(X) X$ la serie formal de coste asociada a A , donde $\tau A(X)$ es el coste de ejecución de A sobre X . Por definición tal serie verifica

$$\begin{aligned} \tau A &= \sum_{s \in E} \sum_{i=1}^{v(s)} \sum_{X_1, \dots, X_{v(s)} \in F} \tau B(X_i) \circledast (X_1, \dots, X_i, \dots, X_{v(s)}) \\ &= \sum_{s \in E} \sum_{i=1}^{v(s)} \sum_{X_1, \dots, X_{v(s)} \in F} \tau B(X_i) \circledast (X_1, \omega_i(X_2, \dots, X_{v(s)})) \end{aligned}$$

donde ω_i designa la operación de intercalamiento de X_1 entre $X_2, \dots, X_{v(s)}$ en el lugar i . Generalizando este operador a series de árboles multivariadas se obtiene

$$\tau A = \sum_{s \in E} \sum_{i=1}^{v(s)} (\tau B \omega_i F^{v(s)-1}) = \sum_{s \in E} \tau B \bar{\omega} F^{v(s)-1}$$

Y ahora, mediante el morfismo estándar obtenemos

$$\tau a(x) = \kappa \tau b(x) \phi'(f(z)) \quad \text{c.q.d.}$$

Y ya sin más prerrequisitos, podemos pasar al estudio de la complejidad media de los algoritmos de reducción considerados en el capítulo anterior. Por razones de simplicidad presentaremos dicho estudio para árboles binarios con un único tipo de nodo interno y dos posibles etiquetas para las hojas.

Completamos el estudio con la comparación de los resultados obtenidos (linealidad respecto del tamaño del input) con el comportamiento de dichos algoritmos en el peor de los casos.

1. Idempotencia

1.1 Complejidad media

Como ya hemos anunciado, vamos a estudiar el comportamiento medio del algoritmo SIMP presentado en la figura 1, para el caso $p = q = 2$. Como vimos en la sección 2 del capítulo anterior, la familia \mathcal{Q} para este caso es isomorfa a la familia \mathcal{D} utilizada en dicha sección, radicando la única "diferencia" entre tales familias en la interpretación dada a los nodos internos, que en el caso SIMP se asocian con una operación meramente idempotente, mientras que en el caso SICON se supone además conmutativa. Por ello a lo largo de esta sección denotaremos por \mathcal{D} a la familia \mathcal{Q} con $p = q = 2$. Por otra parte consideraremos como tamaño de un árbol su número de nodos internos, de modo que podremos utilizar las expresiones [49], [50] y [51] de la sección 2 del capítulo 2.

En concreto podemos ver en la figura 9 la versión del algoritmo SIMP correspondiente a la familia \mathcal{D} .

```

FUNCTION SIMP ( T :  $\mathcal{D}$  ) :  $\mathcal{D}$  ;
  IF T.ar = 0 THEN SIMP := T
    ELSE ti := SIMP (T.hi) ;
      td := SIMP (T.hd) ;
      IF EQUAL (ti,td)
        THEN SIMP := ti
        ELSE SIMP := o(ti,td)
  END SIMP.
EQUAL testea la igualdad de dos árboles en orden prefiijo

```

Figura 9

Consideremos el descriptor de complejidad de SIMP :

$$\tau\text{SIMP}(z) = \sum_{T \in \mathfrak{D}} \tau\text{SIMP}(T) z^{|T|}$$

A partir de la regla de complejidad 2 (condicional) se tiene

$$\begin{aligned} \tau\text{SIMP}(z) &= D(z) + \tau\text{THEN}_1(z / T.\text{ar} = \emptyset) + \\ &+ \tau\text{ELSE}_1(z / T.\text{ar} \neq \emptyset) \end{aligned} \quad [2]$$

Por otra parte

$$\tau\text{THEN}_1(z / T.\text{ar} = \emptyset) = \aleph(T \in \mathfrak{D} / T.\text{ar} = \emptyset)(z) = 2 \quad [3]$$

Y en cuanto a $\tau\text{ELSE}_1(z / T.\text{ar} \neq \emptyset)$, aplicando de nuevo la regla 2, junto a las reglas 1 (composición) y 3 (iteración incondicional en los subárboles), así como la definición de descriptor de complejidad de una sucesión de instrucciones condicionada por un predicado, [1], obtenemos

$$\begin{aligned} \tau\text{ELSE}_1(z / T.\text{ar} \neq \emptyset) &= 2 z D^2(z) + 2 z D(z) \tau\text{SIMP}(z) + M(z) + \\ &+ \tau\text{THEN}_2(z / |T| > 0, \text{SIMP}(T.\text{hi}) = \text{SIMP}(T.\text{hd})) + \\ &+ \tau\text{ELSE}_2(z / |T| > 0, \text{SIMP}(T.\text{hi}) \neq \text{SIMP}(T.\text{hd})) \end{aligned} \quad [4]$$

donde

$$M(z) = \sum_{\substack{T \in \mathfrak{D} \\ |T| > 0}} \tau\text{EQUAL}(\text{SIMP}(T.\text{hi}), \text{SIMP}(T.\text{hd})) z^{|T|}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} &\tau\text{THEN}_2(z / |T| > 0, \text{SIMP}(T.\text{hi}) = \text{SIMP}(T.\text{hd})) \\ &= \sum_{\substack{T \in \mathfrak{D} \\ |T| > 0 \\ \text{SIMP}(T.\text{hi}) = \text{SIMP}(T.\text{hd})}} z^{|T|} \end{aligned} \quad [5]$$

Retomando las definiciones de la sección 1 del capítulo 2, consideramos la partición de \mathfrak{D} en clases de árboles con un mismo simplificado $t \in \mathfrak{S}$, que ahora denotaremos por \mathfrak{D}_t , en

lugar de Q_t . Recordemos que

$$D_t(z) = \sum_{\substack{T \in \mathfrak{D} \\ \text{SIMP}(T)=t}} z^{|T|} \quad \forall t \in \mathfrak{S} ; D(z) = \sum_{t \in \mathfrak{S}} D_t(z) \quad [6]$$

Pues bien, a partir de [7] y [8] en la mencionada sección, y tomando los símbolos a y b como representación de las posibles etiquetas para las hojas de los árboles de \mathfrak{D} , tenemos

$$D_a(z) = D_b(z) = 1 + z D_b^2(z) = B(z)$$

$$D_t(z) = z D_{t_1}(z) D_{t_2}(z) + z D_t^2(z) \quad \forall t = \circ(t_1, t_2) \in \mathfrak{S} \quad [7]$$

donde $B(z)$ es la función generatriz de los árboles binarios, cuya expresión

$$B(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} \quad [8]$$

es bien conocida.

Reescribimos [5] haciendo uso de la partición de \mathfrak{D} en clases de árboles con idéntico simplificado, obteniendo

$$\begin{aligned} \tau\text{THEN}_2(z / |T| > 0, \text{SIMP}(T.\text{hi}) = \text{SIMP}(T.\text{hd})) &= \\ = \sum_{t \in \mathfrak{S}} \sum_{\substack{T_1, T_2 \in \mathfrak{D} \\ \text{SIMP}(T_1)=t=\text{SIMP}(T_2)}} z^{|T_1|+|T_2|+1} &= z \sum_{t \in \mathfrak{S}} D_t^2(z) \quad [9] \end{aligned}$$

Procediendo de manera análoga, se tiene

$$\begin{aligned} \tau\text{ELSE}_2(z / |T| > 0, \text{SIMP}(T.\text{hi}) \neq \text{SIMP}(T.\text{hd})) &= \\ = \sum_{\substack{T \in \mathfrak{D} \\ \text{SIMP}(T.\text{hi}) \neq \text{SIMP}(T.\text{hd})}} 3 z^{|T|} &= 3 \sum_{\substack{t_1, t_2 \in \mathfrak{S} \\ t_1 \neq t_2}} \sum_{\substack{T_1 \in \mathfrak{D}_{t_1} \\ T_2 \in \mathfrak{D}_{t_2}}} z^{|T_1|+|T_2|+1} = \\ = 3 z \sum_{t_1, t_2 \in \mathfrak{S}} D_{t_1}(z) D_{t_2}(z) - 3 z \sum_{t \in \mathfrak{S}} D_t^2(z) &= \\ = 3 z D^2(z) - 3 z \sum_{t \in \mathfrak{S}} D_t^2(z) & \quad [10] \end{aligned}$$

En esta fórmula el valor 3 es el coste de la instrucción asociada al ELSE_2 ($\text{SIMP} := \circ(T_1, T_2)$), ya que su ejecución implica la asignación de un valor a tres variables de tipo puntero, y según hemos definido la medida de complejidad τ , cada una de ellas tiene un coste unitario.

Ahora sustituyendo [3], [9] y [10] en [2], y resolviendo la ecuación lineal que resulta, llegamos a

$$\tau\text{SIMP}(z) = \frac{D(z) + 2 + 5z D^2(z) + M(z) - 2z \sum_{t \in \mathfrak{g}} D_t^2(z)}{1 - 2z D(z)}$$

que utilizando las igualdades [49] y [50] del capítulo 2 se reduce a

$$\tau\text{SIMP}(z) = \frac{6D(z) - 8 + M(z) - 2z \sum_{t \in \mathfrak{g}} D_t^2(z)}{1 - 2z D(z)}$$

verificándose que $1 - 2z D(z) = (1 - 8z)^{1/2}$.

Tenemos ahora la siguiente

Proposición 1.1

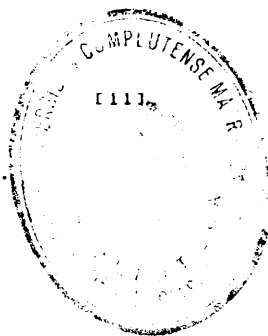
$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\forall p \geq 2$ la función

$R(z) = \sum_{t \in \mathfrak{g}} (c_1 |t| + c_2) D_t^p(z)$ es analítica en la bola

$(z / |z| < \frac{\sqrt{2}}{9})$.

Demostración

Aplicando la proposición 1.2 del capítulo 2. Nótese que la clave para demostrar la hipótesis iii) de dicha proposición, radica en el lema 1.2 de dicho capítulo; mientras que la comprobación de las restantes hipótesis no ofrece especial



dificultad, bastando con seguir análogos razonamientos que los utilizados en situaciones similares a lo largo del capítulo anterior.

Por lo tanto ya conocemos el comportamiento analítico de todos los términos que aparecen en [11], exceptuando $M(z)$. Al respecto tenemos de nuevo a partir de [6], que

$$\begin{aligned} M(z) &= \sum_{\substack{T \in \mathfrak{T} \\ |T| > 0}} \tau \text{EQUAL}(\text{SIMP}(T.\text{hi}), \text{SIMP}(T.\text{hd})) z^{|T|} \\ &= \sum_{\substack{t_1 \in \mathfrak{t} \\ t_2 \in \mathfrak{t}}} \sum_{\substack{T_1 \in \mathfrak{T}_{t_1} \\ T_2 \in \mathfrak{T}_{t_2}}} \tau \text{EQUAL}(\text{SIMP}(T_1), \text{SIMP}(T_2)) z^{|T_1| + |T_2| + 1} \\ &= z \sum_{t_1, t_2 \in \mathfrak{t}} \tau \text{EQUAL}(t_1, t_2) D_{t_1}(z) D_{t_2}(z) \end{aligned}$$

Por otra parte, como EQUAL testea la igualdad de dos árboles en preorden, su coste puede definirse como sigue:

$$\tau \text{EQUAL}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } |u| = 0 \text{ o } |v| = 0 \\ 1 + \tau \text{EQUAL}(u.\text{hi}, v.\text{hi}) + \\ & + \tau \text{EQUAL}(u.\text{hd}, v.\text{hd}) \chi(u.\text{hi} = v.\text{hi}) \\ & \text{si } |u|, |v| > 0 \end{cases} \quad [12]$$

donde χ denota la función característica usual de un conjunto.

Ahora introducimos la función

$$N(z) = \sum_{t_1, t_2 \in \mathfrak{t}} \tau \text{EQUAL}(t_1, t_2) D_{t_1}(z) D_{t_2}(z), \text{ de modo que}$$

$M(z) = z N(z)$. Si ahora descomponemos el sumatorio, según la siguiente partición de $\mathfrak{t} \times \mathfrak{t}$

$$\mathfrak{t} \times \mathfrak{t} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \times \mathfrak{t} + \mathfrak{t} \times (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})^2 + \mathfrak{s}_{\emptyset}^2 \quad [13]$$

donde $\mathfrak{s}_{\emptyset} = \{t \in \mathfrak{t} / |t| > 0\}$, y aplicamos [6], [7] y [12],

obtenemos

$$N(z) = 4 B(z) D(z) - 4 B^2(z) + z^2 \sum_{u,v \in \mathfrak{S}, \emptyset} \tau \text{EQUAL}(u,v) \left[D_{u,hi}(z) D_{u,hd}(z) + D_u^2(z) \right] \left[D_{v,hi}(z) D_{v,hd}(z) + D_v^2(z) \right]$$

y como evidentemente $\tau \text{EQUAL}(v,u) = \tau \text{EQUAL}(u,v)$, tenemos

$$N(z) = 4 B(z) D(z) - 4 B^2(z) + z^2 (P_1(z) + P_2(z) + P_3(z))$$

siendo

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \sum_{u,v \in \mathfrak{S}, \emptyset} \tau \text{EQUAL}(u,v) D_u^2(z) D_v^2(z) \\ P_2(z) &= \sum_{u,v \in \mathfrak{S}, \emptyset} \tau \text{EQUAL}(u,v) D_{u,hi}(z) D_{u,hd}(z) D_{v,hi}(z) D_{v,hd}(z) \\ P_3(z) &= \sum_{u,v \in \mathfrak{S}, \emptyset} \tau \text{EQUAL}(u,v) D_u^2(z) D_{v,hi}(z) D_{v,hd}(z) \end{aligned} \quad [14]$$

Aplicando [7], [12] y [13] en esta última expresión, tenemos

$$\begin{aligned} P_3(z) &= \sum_{u,v \in \mathfrak{S}, \emptyset} \tau \text{EQUAL}(u,v) D_u^2(z) \left[\frac{1}{z} D_v(z) - D_v^2(z) \right] = \\ &= \frac{1}{z} \sum_{u,v \in \mathfrak{S}} \tau \text{EQUAL}(u,v) D_u^2(z) D_v(z) - \frac{2}{z} B(z) \sum_{t \in \mathfrak{S}} D_t^2(z) - \\ &- \frac{2}{z} B^2(z) D(z) + \frac{4}{z} B^3(z) - P_1(z) \end{aligned} \quad [15]$$

Y en cuanto a $P_2(z)$, teniendo en cuenta [5] del capítulo 2, obtenemos

$$\begin{aligned} P_2(z) &= \sum_{\substack{u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathfrak{S} \\ u_1 \neq u_2, v_1 \neq v_2}} \tau \text{EQUAL}(\circ(u_1, u_2), \circ(v_1, v_2)) D_{u_1}(z) D_{u_2}(z) D_{v_1}(z) D_{v_2}(z) = \\ &= Q_1(z) + Q_2(z) + Q_3(z) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
Q_1(z) &= \sum_{\substack{u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathfrak{g} \\ u_1 \neq u_2, v_1 \neq v_2}} D_{u_1}(z) D_{u_2}(z) D_{v_1}(z) D_{v_2}(z) \\
Q_2(z) &= \sum_{\substack{u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathfrak{g} \\ u_1 \neq u_2, v_1 \neq v_2}} \tau \text{EQUAL}(u_1, v_1) D_{u_1}(z) D_{u_2}(z) D_{v_1}(z) D_{v_2}(z) \\
Q_3(z) &= \sum_{\substack{t, u, v \in \mathfrak{g} \\ t \neq u, t \neq v}} \tau \text{EQUAL}(u, v) D_t^2(z) D_u(z) D_v(z) \quad [16]
\end{aligned}$$

que podemos reescribir en la forma

$$\begin{aligned}
Q_1(z) &= \left[D^2(z) - \sum_{t \in \mathfrak{g}} D_t^2(z) \right]^2 \\
Q_2(z) &= D^2(z) N(z) - 2 D(z) N_2(z) + P_1(z) + \\
&\quad + 4 B^2(z) \sum_{t \in \mathfrak{g}} D_t^2(z) - 4 B^4(z) \\
Q_3(z) &= N(z) \sum_{t \in \mathfrak{g}} D_t^2(z) - 2 N_3(z) + \sum_{t \in \mathfrak{g}} \tau \text{EQUAL}(t, t) D_t^4(z) \quad [17]
\end{aligned}$$

donde $N_i(z) = \sum_{u, v \in \mathfrak{g}} \tau \text{EQUAL}(u, v) D_u^i(z) D_v(z)$, para $i = 2, 3$.

Hemos de estudiar el comportamiento analítico de cada una de las funciones de las que todavía no se conozca, que hayan ido apareciendo en el desarrollo de $N(z)$. Así, como

$\tau \text{EQUAL}(t, t) = 2|t| + 1$, tenemos que

$$\sum_{t \in \mathfrak{g}} \tau \text{EQUAL}(t, t) D_t^4(z) = \sum_{t \in \mathfrak{g}} (2|t| + 1) D_t^4(z), \text{ cuyo radio de}$$

convergencia es superior a $1/8$ según la proposición 1.1.

Estudiamos a continuación las funciones $N_2(z)$ y $N_3(z)$.

Proposición 1.2

Las series $N_i(z) = \sum_{u, v \in \mathfrak{g}} \tau \text{EQUAL}(u, v) D_u^i(z) D_v(z)$, con

$i = 2, 3$ tienen radio de convergencia igual a $1/8$.

Demostración

Observamos que

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \quad 1 \leq \tau \text{EQUAL}(u, v) \leq 2|u| + 1 \quad [18]$$

de modo que $D(z) \sum_{t \in \mathbb{N}} D_t^i(z) \leq N_i(z) \leq D(z) \sum_{t \in \mathbb{N}} (2|t| + 1) D_t^i(z)$

para todo valor positivo de z para el que tengan sentido las expresiones en juego. Ahora bien, aplicando la proposición 1.1 sabemos que tanto $\sum_{t \in \mathbb{N}} D_t^i(z)$ como $\sum_{t \in \mathbb{N}} (2|t| + 1) D_t^i(z)$ tienen radio de convergencia superior a $1/8$; por lo que por ser $N_i(z)$ de coeficientes positivos, podemos concluir que su radio de convergencia es el de $D(z)$, es decir $1/8$.

Ahora, a partir de [7], [14]-[17], reagrupando en $H(z)$ los términos cuyo radio de convergencia es superior a $1/8$, y haciendo uso de [49] del capítulo 2, obtenemos $N(z) =$

$$= \frac{H(z) + D(z) \left[\frac{1}{z} - 2z \sum_{t \in \mathbb{N}} D_t^2(z) \right] + 2z(1-zD(z))N_2(z) - 2z^2N_3(z)}{1 - z^2 \left(D^2(z) + \sum_{t \in \mathbb{N}} D_t^2(z) \right)} \quad [19]$$

con

$$H(z) = z^2 \left(\sum_{t \in \mathbb{N}} D_t^2(z) \right)^2 + z^2 \sum_{t \in \mathbb{N}} (2|t| + 1) D_t^4(z) - \frac{2}{z}$$

Pero $\forall z \in \mathbb{R}^+ \quad |z| \leq 1/8 \implies 1 - z^2 \left(D^2(z) + \sum_{t \in \mathbb{N}} D_t^2(z) \right) > 0$

puesto que $D(z)$ y $\sum_{t \in \mathbb{N}} D_t^2(z)$ son crecientes sobre el eje real

positivo, y $1 - \frac{1}{64} \left(D^2(1/8) + \sum_{t \in \mathbb{N}} D_t^2(1/8) \right) > 0$, lo que se

obtiene a partir del lema 1.2 del capítulo 2, junto con las expresiones [50] y [67] del mismo capítulo.

Por lo tanto las posibles nuevas singularidades de $N(z)$ provendrán del numerador de la expresión [19]. Veremos que la singularidad dominante se tiene para $\rho = 1/8$, y es única, y que

alrededor de dicho punto se tiene una descomposición apta para aplicar el teorema de Darboux . Para probarlo basta ver que las funciones $N_i(z)$, $i = 2 , 3$ tienen dichas propiedades

Proposición 1.3

Las series $N_i(z) = \sum_{u,v \in \mathfrak{g}} \tau_{\text{EQUAL}(u,v)} D_u^i(z) D_v(z)$,
con $i = 2 , 3$ son analíticas en el conjunto
($z / |z| \leq 1/\theta$, $z \neq 1/\theta$) .

Demostración

Para cada $u \in \mathfrak{g}$ definimos $\mu_u(z) = \sum_{v \in \mathfrak{g}} \tau_{\text{EQUAL}(u,v)} D_v(z)$
de modo que se tienen las igualdades

$$\begin{aligned} N(z) &= \sum_{u \in \mathfrak{g}} \mu_u(z) D_u(z) \\ N_i(z) &= \sum_{u \in \mathfrak{g}} \mu_u(z) D_u^i(z) \quad \text{para } i = 2 , 3 \end{aligned} \quad [20]$$

Veremos a continuación a través de un par de lemas otras tantas propiedades importantes de las funciones $\mu_u(z)$.

Lema 1.1

$\forall t \in \mathfrak{g}$ $\mu_t(z)$ es analítica en el conjunto
($z / |z| \leq 1/\theta$, $z \neq 1/\theta$) .

Demostración

Utilizando [12] se obtiene la siguiente caracterización recursiva de las funciones $\mu_t(z)$:

$$\begin{aligned} \mu_a(z) &= \mu_b(z) = D(z) \\ \mu_t(z) &= D(z) + z \mu_u(z) D(z) + z \mu_v(z) D_u(z) + \phi_{u,v}(z) \end{aligned} \quad [21]$$

$$\forall t = o(u,v) \in \mathfrak{g}$$

siendo

$$\begin{aligned} \phi_{u,v}(z) = & \sum_{t \in \mathfrak{S}, \emptyset} \tau \text{EQUAL}(u, t, h_i) D_t^2(z) + \\ & + z \sum_{t \in \mathfrak{S} - \{u\}} \tau \text{EQUAL}(v, t) D_{\sigma(u,t)}^2(z) - \\ & - z \sum_{t \in \mathfrak{S}} \tau \text{EQUAL}(u, t) D_t^2(z) - z \tau \text{EQUAL}(v, u) D_u^2(z) \end{aligned}$$

Ahora bien, a partir de [18], de la proposición 1.1, y de la observación que sigue al lema 1.2 del capítulo anterior, que nos garantiza que $\forall u \in \mathfrak{S}$ $D_u(z)$ tiene radio de convergencia igual a $1/4$, se tiene que

$\forall u, v \in \mathfrak{S}$ $\phi_{u,v}(z)$ es analítica en $\{z / |z| < \frac{\sqrt{2}}{9}\}$ [22]
con lo que podemos concluir el resultado buscado, a través de una sencilla prueba por inducción siguiendo [21].

Lema 1.2

$$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \forall u \in \mathfrak{S} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$|z| \leq 1/8 \implies |\mu_u(z)| \leq k_1 + k_2|u|.$$

Demostración

Comenzaremos probando que $\forall u, v \in \mathfrak{S} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$|z| \leq 1/8 \implies |\phi_{u,v}(z)| \leq (3\sqrt{2} - 2) \left[2|u| + 1 + \frac{2|v| + 1}{2} \right] \quad [23]$$

En efecto, a partir de [18] y [21], teniendo en cuenta que cada uno de los sumandos que aparece en la definición de $\phi_{u,v}(z)$ es una serie de potencias con coeficientes positivos, y recordando que

$$\forall t \in \mathfrak{S}, \emptyset \quad D_t(1/8) < B(1/8) \quad [24]$$

lo que se deduce del lema 1.2 en el capítulo 2; se obtiene

$$\forall u, v \in \mathfrak{S} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \leq 1/8 \implies$$

$$|\phi_{u,v}(z)| \leq \frac{4 B(1/8) - B^2(1/8)}{8} (2(2|u| + 1) + (2|v| + 1))$$

Finalmente observamos que de [8] se sigue $B(\frac{1}{8}) = 4 - 2\sqrt{2}$;

y por otra parte, de [68] en el capítulo 2 se deriva

$$I(\frac{1}{8}) < 4 - \sqrt{2} \quad , \text{ con lo que podemos concluir [23] .}$$

Tomamos entonces $k_1 = 4$ y $k_2 = 4(3\sqrt{2} - 2)$, y razonando a partir de [21] por inducción sobre el tamaño de $t \in \mathcal{S}$, teniendo en cuenta [23] y [24] , se concluye fácilmente el resultado del lema 1.2 .

Retomamos ahora la demostración de la proposición 1.3 .

Aplicando este último lema, tenemos que

$$\begin{aligned} \exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \forall u \in \mathcal{S} \quad \forall z \in \mathbb{C} \\ |z| \leq \frac{1}{8} \implies |\mu_u(z) D_u^i(z)| \leq (k_1 + k_2|u|) |D_u^i(z)| \quad [25] \end{aligned}$$

Por otra parte, en virtud del lema 1.2 del capítulo 2 se tiene

$$\begin{aligned} \exists \nu \in \mathbb{R}^+ \quad \nu^2 < \frac{1}{8} \quad \forall u \in \mathcal{S} \quad \forall z \in \mathbb{C} \\ |z| \leq \frac{1}{8} \implies |D_u^i(z)| < 2^i \nu^i |u| \quad [26] \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\sum_{u \in \mathcal{S}} (k_1 + k_2|u|) 2^i \nu^i |u| < 2^i \left[k_1 I(\frac{1}{8}) + \frac{1}{8} k_2 I'(\frac{1}{8}) \right] .$$

Luego $N_i(z) = \sum_{u \in \mathcal{S}} \mu_u(z) D_u^i(z)$ converge absoluta y

uniformemente sobre la bola cerrada $(z / |z| \leq \frac{1}{8})$, por el criterio de convergencia de Weierstrass . Con técnicas estándar de prolongación analítica podemos asegurar la convergencia uniforme sobre todo compacto incluido en un cierto abierto que contiene a $(z / |z| \leq \frac{1}{8}, z \neq \frac{1}{8})$. Por otra parte, aplicando el lema 1.1 , y teniendo en cuenta que

$\forall u \in \mathcal{S}$ $D_u(z)$ tiene radio de convergencia $\frac{1}{4}$, concluimos que $\forall u \in \mathcal{S}$ $\mu_u(z) D_u^i(z)$ es analítica en $(z / |z| \leq \frac{1}{8}, z \neq \frac{1}{8})$. De modo que se verifican las hipótesis del teorema de Weierstrass , aplicando el cual concluimos que $N_i(z)$ es

analítica en $(z / |z| \leq 1/8, z \neq 1/8)$ para $i = 2, 3$.

Si ahora demostramos que $N_i(z)$ con $i = 2, 3$, tienen sendos desarrollos locales alrededor de $z = 1/8$ del tipo

$N_i(z) = h_i(z) + g_i(z) (1 - 8z)^{1/2}$ con $h_i(z)$ y $g_i(z)$ analíticas en un entorno de $z = 1/8$, quedaremos en disposición de aplicar el teorema de Darboux a la función $\tau\text{SIMP}(z)$.

Para ello comenzaremos probando el siguiente

Lema 1.3

$\forall u \in \mathfrak{S} \quad \forall z \in (z / 0 < |z| \leq 1/8, z \neq 1/8)$

$\mu_u(z) = h_u(z) + g_u(z) (1 - 8z)^{1/2}$ donde $h_u(z)$ y $g_u(z)$

verifican :

a) $\forall u \in \mathfrak{S}$ $h_u(z)$ y $g_u(z)$ son analíticas en el conjunto

$$A = (z / 0 < |z| < \frac{\sqrt{2}}{9}) .$$

b) $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \exists V(1/8) \subset A$ entorno de $z = 1/8$, tal que $\forall u \in \mathfrak{S} \quad \forall z \in V(1/8) \quad |h_u(z)| < k_1 + k_2|u|$,

$$|g_u(z)| < k_1 + k_2|u| .$$

Demostración

Recordando que $\forall z \in \mathbb{C} \quad 0 < |z| \leq 1/8$,

$D(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 8z}}{2z}$, y razonando a partir de [21] por inducción sobre el tamaño de $u \in \mathfrak{S}$, obtenemos las siguientes definiciones recursivas de $h_u(z)$ y $g_u(z)$:

$$h_a(z) = h_b(z) = \frac{1}{2z}$$

$$h_t(z) = \frac{1}{2z} + \frac{h_u(z)}{2} - \frac{(1 - 8z)g_u(z)}{2} + z D_u(z) h_v(z) +$$

$$+ \phi_{u,v}(z) \quad \forall t = o(u,v) \in \mathfrak{S} \quad [27]$$

$$\begin{aligned}
 g_a(z) &= g_b(z) = -\frac{1}{2z} \\
 g_t(z) &= -\frac{1}{2z} - \frac{h_u(z)}{2} + \frac{g_u(z)}{2} + z D_u(z) g_v(z) \\
 \forall t = o(u, v) \in \mathfrak{J} & \qquad \qquad \qquad [28]
 \end{aligned}$$

Ahora, para ver que tales funciones verifican a), basta razonar nuevamente por inducción sobre el tamaño de $u \in \mathfrak{J}$, a partir de [27] y [28], teniendo en cuenta [22], así como que $\forall t \in \mathfrak{J}$ $D_t(z)$ tiene radio de convergencia $1/4$, y que la función $\frac{i}{2z}$ es analítica $\forall z \neq 0$.

Y para comprobar b) tomaremos $k_1 = 5$, $k_2 = 4(3\sqrt{2} - 2)$, y de nuevo partiendo de [27] y [28], y por inducción sobre el tamaño de $u \in \mathfrak{J}$, teniendo en cuenta ahora [23] y [24] probamos que

$$\forall u \in \mathfrak{J} \quad |h_u(1/8)| < k_1 + k_2|u|, \quad |g_u(1/8)| < k_1 + k_2|u|,$$

y es fácil ver que gracias a la propiedad a), podemos extender las acotaciones a un entorno $V(1/8) \subset A$ independiente de u .

Estamos ahora en condiciones de probar la

Proposición 1.4

Las funciones $N_i(z) = \sum_{u \in \mathfrak{J}} \mu_u(z) D_u^i(z)$, $i = 2, 3$, admiten un desarrollo local en un entorno de $z = 1/8$ de la forma $N_i(z) = h_i(z) + g_i(z) (1 - 8z)^{1/2}$, con $h_i(z)$ y $g_i(z)$ analíticas sobre el mismo.

Demostración

Basándonos en el lema anterior, definimos

$$h_i(z) = \sum_{u \in \mathfrak{J}} h_u(z) D_u^i(z) \quad \text{y} \quad g_i(z) = \sum_{u \in \mathfrak{J}} g_u(z) D_u^i(z).$$

Aplicando el lema 1.2 del capítulo 2, tenemos que

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}^+ \quad \gamma^2 < 1/8 \quad \forall u \in \mathcal{S} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$|z| < \frac{\sqrt{2}}{9} \implies |D_u^i(z)| < 2^i \gamma^i |u|$$

lo que combinado con el resultado del apartado b) del lema 1.3

nos permite afirmar que $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \exists V(1/8) \quad \forall u \in \mathcal{S}$

$$\forall z \in V(1/8) \quad |h_u(z) D_u^i(z)| < (k_1 + k_2 |u|) 2^i \gamma^i |u|,$$

$$|g_u(z) D_u^i(z)| < (k_1 + k_2 |u|) 2^i \gamma^i |u| \quad \text{para un cierto } \gamma \in \mathbb{R}^+$$

independiente de u y de z , con $\gamma^2 < 1/8$.

Por otra parte

$$\sum_{u \in \mathcal{S}} 2^i (k_1 + k_2 |u|) \gamma^i |u| < 2^i \left[k_1 I(1/8) + \frac{1}{8} k_2 I'(1/8) \right]$$

de modo que por el criterio de Weierstrass $g_i(z)$ y $h_i(z)$

convergen absoluta y uniformemente sobre $V(1/8)$; como además

para todo $u \in \mathcal{S}$ las funciones $h_u(z) D_u^i(z)$ y $g_u(z) D_u^i(z)$ son

analíticas en $V(1/8)$, concluimos por el teorema de Weierstrass

que $h_i(z)$ y $g_i(z)$ también lo son, en el mismo entorno.

Finalmente, a partir de [11], [19], de los lemas previos, y de la expresión [50] del capítulo 2, tenemos un desarrollo local para $\tau\text{SIMP}(z)$ en $z = 1/8$, al que podemos aplicar el teorema de Darboux - Polya:

$$\tau\text{SIMP}(z) = a_1(z) (1 - 8z)^{-1/2} + a_2(z) (1 - 8z)^{1/2} + a_3(z)$$

donde las funciones $a_i(z)$ con $i = 1, 2, 3$ son analíticas en un entorno de $z = 1/8$, y siendo

$$a_1(1/8) = 16 - \frac{1}{4} r(1/8) + \frac{1}{48 - r(1/8)} \left[\frac{1}{8} r^2(1/8) + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \sum_{t \in \mathcal{G}} (2|t| + 1) D_t^4(1/8) + 128 - 8 r(1/8) - \right. \\ \left. - h_2(1/8) - \frac{1}{4} h_3(1/8) \right]$$

donde $r(z) = \sum_{t \in \mathcal{G}} D_t^2(z)$ y $h_i(z) = \sum_{t \in \mathcal{G}} h_t(z) D_t^i(z)$;

Y aplicando el citado teorema, obtenemos

$$[z^n] \tau \text{SIMP}(z) = \frac{a_1(1/8) 8^n n^{-1/2}}{\sqrt{n}} \left(1 + O(1/n) \right) \quad [29]$$

Teorema 1.1

El coste medio de ejecución del algoritmo SIMP es asintóticamente lineal respecto al tamaño del input :

$$\overline{\tau \text{SIMP}}_n = K n \left[1 + O(1/n) \right] \quad n \rightarrow \infty$$

con $K = \frac{1}{2} a_1(1/8)$ y $a_1(1/8)$ como se indica más arriba.

Demostración

Recordando que $\overline{\tau \text{SIMP}}_n = \frac{[z^n] \tau \text{SIMP}(z)}{[z^n] D(z)}$ y haciendo uso

de las expresiones [51] del capítulo anterior, y [29] del presente, obtenemos el resultado buscado.

1.2 Complejidad en el peor de los casos

Comenzaremos este apartado mostrando una cota superior del tipo $O(n \ln n)$ para cualquier criterio de simplificación que opere sobre árboles binarios, siguiendo una filosofía bottom-up, sin aumentar nunca el tamaño de los árboles, y basado en el testeo de la identidad en preorden, para tomar sus decisiones. Más formalmente, f será un criterio de simplificación tal que

para calcular $f(A)$, se comienza obteniendo $f(A.hi)$ y $f(A.hd)$, y tras estudiar si son idénticos, se da un valor a $f(A)$ en función del valor de verdad obtenido, de manera que $|f(A)| \leq |A|$. Supondremos constante el tiempo de construcción de $f(A)$, una vez que sabemos en que caso nos encontramos. Entonces, si denotamos por $C_f(A)$ el tiempo necesario para computar $f(A)$, se tiene

$$C_f(A) = c + C_f(A.hi) + C_f(A.hd) + \text{COMP}(f(A.hi), f(A.hd)),$$

donde $\text{COMP}(u,v)$ denota el coste de la comparación en preorden de los árboles u y v , es decir el número de comparaciones entre nodos de ambos árboles que se precisan para decidir si son idénticos o no. Para mayor comodidad y claridad vamos a considerar como tamaño de un árbol u , $|u|$, su número total de nodos, bien entendido que ello no afecta en absoluto a la naturaleza de los resultados obtenidos, ya que por tratarse de árboles binarios, el número total de nodos de un árbol con n nodos internos es $2n + 1$.

Probaremos que

$$C_f(A) \leq \lambda (|A| \ln |A| + 1) \quad [30]$$

siendo λ una constante suficientemente grande e independiente de $|A|$.

En efecto, tenemos que $\text{COMP}(u,v) \leq \min\{|u|, |v|\}$, de modo que $C_f(A) \leq c + C_f(A.hi) + C_f(A.hd) + \min\{|A.hi|, |A.hd|\}$

utilizando el hecho de que f no aumenta nunca el tamaño del árbol que se le pasa como argumento. Y ahora para probar [30] procederemos por inducción respecto del tamaño de A :

Para $|A| = 1$ el resultado es trivial, sin más que tomar

$\lambda \geq c$ (de hecho ésta será la única condición impuesta a λ).

Supongámoslo ahora cierto para todo árbol de tamaño inferior a n , y comprobémoslo para A con $|A| = n$. Denotaremos $s = n - 1$, $m = |A.hi|$, de manera que $|A.hd| = s - m$; con lo que [30] se reduce a probar que

$$c + \lambda m \ln m + \lambda (s - m) \ln (s - m) + \lambda + \min(m, s - m) \\ (\lambda (s + 1) \ln (s + 1))$$

Dada la simetría de ambos miembros respecto a m y $s - m$, basta demostrar la desigualdad para $m \leq s/2$. Para ello consideraremos el miembro izquierdo de la misma como una función de m , $y(m)$, definida sobre $[1, s/2]$. Es fácil comprobar que la desigualdad en cuestión es cierta para los casos extremos $m = 1$, $m = s/2$. Y derivando $y(m)$ vemos que la función tiene un único punto crítico, que es un mínimo, en el intervalo $[1, s/2]$, concretamente en $m_0 = \frac{s}{1 + e^{1/\lambda}}$. Luego el máximo

absoluto de $y(m)$ se alcanza en uno de los extremos del intervalo, con lo que la desigualdad queda probada

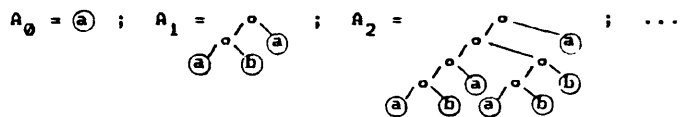
$\forall m \in [1, s/2]$, concluyéndose [30].

Finalmente es sencillo ver que el resultado anterior puede extenderse al caso en el que la construcción de $f(A)$, una vez decidida la igualdad entre $f(A.hi)$ y $f(A.hd)$, conlleve un tiempo lineal. Bastaría para ello, tomar λ suficientemente grande respecto a la constante de proporcionalidad que nos sirve para acotar la complejidad de dicha construcción, y razonar como anteriormente.

Veremos a continuación que en el caso concreto de nuestro algoritmo de simplificación SIMP, se alcanza de hecho la cota superior de complejidad probada.

Consideraremos la siguiente sucesión de árboles binarios :

$A_0 = (a)$; $A_{i+1} = o(o(A_i, A'_i), (a))$ donde A'_i se obtiene a partir de A_i , sustituyendo su etiqueta a más a la derecha, por una etiqueta b . Tenemos así :



Es evidente que todos los árboles de esta familia son irreducibles, así como que el coste de la comparación en preorden de A_i y A'_i es $|A_i|$.

Por otra parte, si tomamos $T_i = |A_i|$, tenemos que

$$T_i = 4 \cdot 2^i - 3 \quad \text{ya que } T_0 = 1, T_{i+1} = 2 T_i + 3.$$

Y siguiendo la notación presentada previamente, en el caso que nos ocupa, tenemos

$$C_{\text{SIMP}}(A_0) = 2$$

$$C_{\text{SIMP}}(A_{i+1}) = 1 + C_{\text{SIMP}}(o(A_i, A'_i)) + 2 + 6$$

Por otra parte, siguiendo la definición de la sucesión de árboles (A_i) es inmediato probar que

$\forall i \in \mathbb{N} \quad C_{\text{SIMP}}(A_i) = C_{\text{SIMP}}(A'_i)$, de modo que si para simplificar denotamos $c_i = C_{\text{SIMP}}(A_i)$, tenemos el sistema recurrente

$$c_0 = 2$$

$$c_{i+1} = 2 c_i + T_i + 6 + 9 = 2 c_i + 2 \cdot 2^{i+1} + 12$$

y con una sencilla inducción concluimos que $c_i \geq (i+1) 2^{i+1}$

Finalmente, tomando logaritmos en la definición de T_i resulta

$$(i+1) 2^{i+1} = \frac{T_i + 3}{2} \log_2 \left\{ \frac{T_i + 3}{2} \right\} \leq c_i$$

lo que unido a [30] nos permite concluir que

$$c_i = O(T_i \ln T_i).$$

2. Idempotencia más conmutatividad

2.1 Complejidad media

Retomamos la notación y resultados de la sección 2 del capítulo anterior.

Sea $\tau\text{SICON}(z) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \tau\text{SICON}(T) z^{|T|}$ el descriptor de

complejidad del algoritmo SICON.

A partir de la definición del mismo dada en la figura 5, de las reglas de complejidad 1, 2, y 3 previamente enunciadas, y de la definición [1] del descriptor de complejidad de una sucesión de instrucciones condicionado por un predicado, se obtiene

$$\begin{aligned} \tau\text{SICON}(z) = & D(z) + 2 + 2z D^2(z) + 2z D(z) \tau\text{SICON}(z) + M(z) + \\ & + \tau\text{THEN}_2(z / |T|) \theta, \text{SICON}(T.\text{hi}) \approx_{\text{CON}} \text{SICON}(T.\text{hd}) + \\ & + \tau\text{ELSE}_2(z / |T|) \theta, \neg(\text{SICON}(T.\text{hi}) \approx_{\text{CON}} \text{SICON}(T.\text{hd})) \end{aligned}$$

donde

[31]

$$\begin{aligned} M(z) = & \sum_{\substack{T \in \mathcal{T} \\ |T| \geq 0}} \tau\text{EQCON}(\text{SICON}(T.\text{hi}), \text{SICON}(T.\text{hd})) z^{|T|} = \\ = & z \sum_{u, v \in \mathcal{T}_0} \tau\text{EQCON}(u, v) D_u(z) D_v(z) \end{aligned}$$

Este resultado era de esperar, puesto que los algoritmos SIMP y SICON tienen idéntica estructura, diferenciándose exclusivamente en el test que decide la igualdad de dos árboles.

En el presente caso tenemos

$$\begin{aligned}
 & \tau\text{THEN}_2(z / |T|) \in \emptyset, \text{SICON}(T.\text{hi}) \approx_{\text{CON}} \text{SICON}(T.\text{hd}) = \\
 & = \sum_{T \in \mathfrak{D}, |T| > 0} z^{|T|} = \sum_{\substack{t, t' \in \mathfrak{S}_c \\ t \approx_{\text{CON}} t'}} \sum_{\substack{T_1 \in \mathfrak{D}_t \\ T_2 \in \mathfrak{D}_{t'}}} z^{|T_1| + |T_2| + 1} = \\
 & = z \sum_{t \in \mathfrak{S}_c} 2^{|t|} D_t^2(z) \quad [32]
 \end{aligned}$$

sin más que recordar, para obtener la última igualdad, el lema 2.1 de la sección 2 del capítulo 2, y el hecho de que $\forall t \in \mathfrak{S}_c \quad |(\text{CON}(t))| = 2^{|t|}$, resultados ambos que se aplicarán exhaustivamente a lo largo del resto de esta sección.

Razonando de forma análoga, obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \tau\text{ELSE}_2(z / |T|) \in \emptyset, \neg(\text{SICON}(T.\text{hi}) \approx_{\text{CON}} \text{SICON}(T.\text{hd})) = \\
 & = 3z D^2(z) - 3z \sum_{t \in \mathfrak{S}_c} 2^{|t|} D_t^2(z) \quad [33]
 \end{aligned}$$

Y substituyendo [32] y [33] en [31], resolviendo la ecuación lineal resultante, y utilizando las expresiones [49] y [50] del capítulo 2, llegamos a

$$\tau\text{SICON}(z) = \frac{6D(z) - 8 + M(z) - 2z \sum_{t \in \mathfrak{S}_c} 2^{|t|} D_t^2(z)}{1 - 2z D(z)} \quad [34]$$

con $1 - 2z D(z) = (1 - 8z)^{1/2}$ en $(z / \emptyset \mid |z| \leq 1/8)$.

Si vemos ahora que $\sum_{t \in \mathfrak{S}_c} 2^{|t|} D_t^2(z)$ tiene radio de convergencia superior a $1/8$; que el de $M(z)$ es $1/8$, siendo además $z = 1/8$ la única singularidad dominante de $M(z)$, y admitiendo, $M(z)$, un desarrollo local en dicho punto de la forma $M(z) = f_1(z) + f_2(z) (1 - 8z)^{1/2}$ con $f_1(z)$ analítica

en un entorno de $z = 1/8$; entonces estaremos en condiciones de aplicar el método de Darboux - Polya para aproximar asintóticamente los coeficientes de $\tau\text{SICON}(z)$.

Proposición 2.1

$\forall p \geq 2 \quad \forall r < p \quad \sum_{t \in \mathfrak{I}_c} p(|t|) 2^{r|t|} |D_t^p(z)|$ es analítica en la bola $\{z / |z| < \frac{4}{25}\}$ para todo $p(|t|)$ polinomio en $|t|$ con coeficientes reales positivos. Además, si $p \geq 3$ el resultado es también cierto para $r = p$.

Demostración

Análoga a la de la proposición 2.1 del capítulo 2.

De modo que $\sum_{t \in \mathfrak{I}_c} 2^{|t|} |D_t^2(z)|$ tiene radio de convergencia superior a $1/8$.

Pasemos entonces a estudiar la función $M(z)$. Comenzaremos definiendo para cada $u \in \mathfrak{I}_c$

$$\begin{aligned} \mu_u(z) &= \sum_{v \in \mathfrak{I}_c} \tau\text{EQCON}(u,v) D_v(z) \\ \eta_u(z) &= \sum_{v \in \mathfrak{I}_c} \tau\text{EQCON}(v,u) D_v(z) \end{aligned} \quad [35]$$

Obsérvese la diferencia entre ambas funciones, ya que ahora en general tendremos $\tau\text{EQCON}(u,v) \neq \tau\text{EQCON}(v,u)$.

En concreto tomamos como $\tau\text{EQCON}(u,v)$ el número de comparaciones entre nodos necesarias para decidir la igualdad de u y v , que para abreviar se denotará en lo sucesivo por $c(u,v)$. Tenemos entonces que

$$c(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } |u| = 0 \text{ o } |v| = 0 \\ 1 + c(u.\text{hi}, v.\text{hi}) + c(u.\text{hd}, v.\text{hd}) \chi(u.\text{hi} \approx_{\text{CON}} v.\text{hi}) + \\ & + c(u.\text{hi}, v.\text{hd}) + \\ & + c(u.\text{hd}, v.\text{hi}) \chi(u.\text{hi} \approx_{\text{CON}} v.\text{hd}) \chi(\neg(u.\text{hi} \approx_{\text{CON}} v.\text{hi})) \end{cases} \quad [36]$$

A partir de esta expresión, podemos demostrar por inducción sobre $|u| + |v|$ que

$$c(u,v) \leq (2|u| + 1)(2|v| + 1) \quad [37]$$

Consideremos ahora la ya clásica partición de $\mathfrak{S}_c \times \mathfrak{S}_c$

$$\mathfrak{S}_c \times \mathfrak{S}_c = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \times \mathfrak{S}_c + \mathfrak{S}_c \times (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})^2 + \mathfrak{S}_c^2_{\emptyset} \quad [38]$$

donde $\mathfrak{S}_c^2_{\emptyset} = \{t \in \mathfrak{S}_c / |t| = \emptyset\}$.

Descomponiendo $M(z)$ según esta partición, y a partir de [36] y del sistema [59] del capítulo 2, llegamos a

$$M(z) = z \left[4 B(z) D(z) - 4 B^2(z) + z^2 P_0(z) + z N_2(z) - 4 z B(z) \sum_{t \in \mathfrak{S}_c} 2^{|t|} D_t^2(z) - 4 z B^2(z) D(z) + 8 z B^3(z) - z^2 P_1(z) + z M_2(z) \right] \quad [39]$$

donde

$$P_0(z) = \sum_{u,v \in \mathfrak{S}_c, \emptyset} c(u,v) D_{u,hi}(z) D_{u,hd}(z) D_{v,hi}(z) D_{v,hd}(z)$$

$$P_1(z) = \sum_{u,v \in \mathfrak{S}_c, \emptyset} c(u,v) 2^{|u|+|v|} D_u^2(z) D_v^2(z)$$

$$N_2(z) = \sum_{t \in \mathfrak{S}_c} \eta_t(z) 2^{|t|} D_t^2(z) \quad y$$

$$M_2(z) = \sum_{t \in \mathfrak{S}_c} \mu_t(z) 2^{|t|} D_t^2(z)$$

Ahora bien, por [36] se tiene $P_0(z) = \sum_{i=0}^4 Q_i(z)$ con

$$Q_0(z) = \sum_{\substack{u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathfrak{S}_c \\ -(u_1 \approx_{\text{CON}} u_2), -(v_1 \approx_{\text{CON}} v_2)}} D_{u_1}(z) D_{u_2}(z) D_{v_1}(z) D_{v_2}(z) = \\ = \left[D^2(z) - \sum_{t \in \mathfrak{S}_c} 2^{|t|} D_t^2(z) \right]^2$$

$$\begin{aligned}
Q_1(z) &= \sum_{\substack{u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathfrak{S}_c \\ \neg(u_1 \approx_{\text{CON}} u_2), \neg(v_1 \approx_{\text{CON}} v_2)}} c(u_1, v_1) D_{u_1}(z) D_{u_2}(z) D_{v_1}(z) D_{v_2}(z) = \\
&= \frac{1}{z} D^2(z) M(z) - D(z) (M_2(z) + N_2(z)) + P_1(z) + \\
&\quad + 4 B^2(z) \sum_{t \in \mathfrak{S}_c} 2^{|t|} D_t^2(z) - 4 B^4(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2(z) &= \sum_{\substack{u, u_2, v_2 \in \mathfrak{S}_c \\ \neg(u \approx_{\text{CON}} u_2), \neg(u \approx_{\text{CON}} v_2)}} c(u, v_2) 2^{|u|} D_u^2(z) D_{u_2}(z) D_{v_2}(z) = \\
&= \frac{1}{z} M(z) \sum_{t \in \mathfrak{S}_c} 2^{|t|} D_t^2(z) - M_3(z) - N_3(z) + \\
&\quad + \sum_{\substack{u, u' \in \mathfrak{S}_c \\ u \approx_{\text{CON}} u'}} c(u, u') 2^{|u|} D_u^4(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_3(z) &= \sum_{\substack{u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathfrak{S}_c \\ \neg(u_1 \approx_{\text{CON}} u_2), \neg(u_1 \approx_{\text{CON}} v_2), \\ \neg(v_1 \approx_{\text{CON}} v_2)}} c(u_1, v_2) D_{u_1}(z) D_{u_2}(z) D_{v_1}(z) D_{v_2}(z) = \\
&= Q_1(z) - D(z) M_2(z) + M_3(z) + D(z) \sum_{u \approx_{\text{CON}} u'} c(u, u') 2^{|u|} D_u^3(z) - \\
&\quad - \sum_{u \approx_{\text{CON}} u'} c(u, u') 2^{|u|} D_u^4(z)
\end{aligned}$$

$$Q_4(z) = Q_2(z)$$

$$M_3(z) = \sum_{u \in \mathfrak{S}_c} \mu_u(z) 2^{|u|} D_u^3(z) \quad y$$

$$N_3(z) = \sum_{u \in \mathfrak{S}_c} \eta_u(z) 2^{|u|} D_u^3(z) .$$

La expresión así obtenida para $P_0(z)$ se sustituye en [39], llegándose a una ecuación lineal cuya resolución nos

proporciona, tras múltiples simplificaciones, la siguiente expresión para $M(z)$:

$$\begin{aligned}
 M(z) = & \frac{1}{1 - 2z^2 \left[D^2(z) + \sum_{t \in \mathfrak{g}_c} 2^{|t|} D_t^2(z) \right]} \left\{ D(z) \left[1 - \right. \right. \\
 & - 2z^2 \sum_{t \in \mathfrak{g}_c} 2^{|t|} D_t^2(z) + z^3 \sum_{\substack{u, u' \in \mathfrak{g}_c \\ u \approx_{\text{CON}} u'}} c(u, u') 2^{2|u|} D_u^3(z) \left. \right] + \\
 & + z^2 M_2(z) (1 - zD(z)) + z^2 N_2(z) (1 - 2zD(z)) - \\
 & \left. - z^3 (M_3(z) + 2N_3(z)) + H(z) \right\} \quad [40]
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 H(z) = & z^3 \sum_{u, v \in \mathfrak{g}_c} c(u, v) 2^{|u|+|v|} D_u^2(z) D_v^2(z) - 2 + \\
 & + z^3 \left[\sum_{t \in \mathfrak{g}_c} 2^{|t|} D_t^2(z) \right]^2 + z^3 \sum_{\substack{u, u' \in \mathfrak{g}_c \\ u \approx_{\text{CON}} u'}} c(u, u') 2^{3|u|} D_u^4(z)
 \end{aligned}$$

Comenzamos el estudio sobre la analiticidad de $M(z)$ demostrando una serie de proposiciones.

Proposición 2.2

Las series $\sum_{u, v \in \mathfrak{g}_c} c(u, v) 2^{|u|+|v|} D_u^2(z) D_v^2(z)$ y $\sum_{\substack{u, u' \in \mathfrak{g}_c \\ u \approx_{\text{CON}} u'}} c(u, u') 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z)$, $i \geq 3$ son analíticas en

la bola $A = \{ z \mid |z| < \frac{4}{25} \}$.

Demostración

En cuanto a la primera de las series, a partir de [37]

tenemos $\forall z \in \mathbb{R}^+$

$$\sum_{u, v \in \mathfrak{J}_c} c(u, v) 2^{|u|+|v|} D_u^2(z) D_v^2(z) \leq$$

$$\leq \left[\sum_{u \in \mathfrak{J}_c} (2|u| + 1) 2^{|u|} D_u^2(z) \right]^2.$$

Pero por la proposición 2.1 sabemos que el miembro derecho de la desigualdad es analítico en A , de modo que el miembro izquierdo también lo es, por tratarse de una serie con coeficientes positivos.

Análogamente, para la segunda serie tenemos que

$$\forall i \geq 2 \quad \forall z \in \mathbb{R}^+ \quad \sum_{\substack{u, u' \in \mathfrak{J}_c \\ u \neq \text{CON } u'}} c(u, u') 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z) \leq$$

$$\leq \sum_{u \in \mathfrak{J}_c} (2|u| + 1) 2^i |u| D_u^i(z),$$

concluyéndose como en el caso precedente.

Proposición 2.3

Las series $M_i(z) = \sum_{u \in \mathfrak{J}_c} \mu_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z)$ y $N_i(z) = \sum_{u \in \mathfrak{J}_c} \eta_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z)$, $i = 2, 3$ tienen radio de convergencia $1/8$.

Demostración

Aplicando [37], tenemos $\forall i = 2, 3 \quad \forall z \in \mathbb{R}^+$

$$D(z) \sum_{u \in \mathfrak{J}_c} 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z) \leq M_i(z)$$

$$M_i(z) \leq \sum_{u \in \mathfrak{J}_c} (2|u| + 1) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z) \sum_{v \in \mathfrak{J}_c} (2|v| + 1) D_v(z)$$

teniéndose idénticas acotaciones para $N_i(z)$.

Ahora bien, $\sum_{v \in \mathfrak{J}_c} (2|v| + 1) D_v(z) = 2S(z) + D(z)$ donde $S(z)$ es

la función generatriz del tamaño de los árboles irreducibles, que estudiamos en el capítulo anterior, y cuyo radio de convergencia vimos que es $1/8$. Además, en virtud de la proposición 2.1 tanto $\sum_{u \in \mathcal{J}_c} 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z)$ como $\sum_{u \in \mathcal{J}_c} (2|u| + 1) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z)$ tienen radio de convergencia superior a $1/8$; y como tanto $M_i(z)$ como $N_i(z)$ son de coeficientes positivos, concluimos que su radio de convergencia es $1/8$.

Para concluir que $M(z)$ tiene radio de convergencia $1/8$, veremos que el denominador de [40] no se anula en $[0, 1/8]$; esto es, que

$$\forall z \in \mathbb{R}^+ \quad z \leq 1/8 \implies 1 - 2z^2 \left[D^2(z) + \sum_{t \in \mathcal{J}_c} 2^{|t|} D_t^2(z) \right] > 0$$

En efecto, por el lema 2.2 del capítulo anterior tenemos

$$\sum_{t \in \mathcal{J}_c} 2^{|t|} D_t^2(z) < \frac{25}{16} I_c(1/8) \quad ; \text{ por otra parte sabemos que}$$

$$I_c(1/8) < D(1/8) = 4 \quad , \text{ y compaginando ambos resultados tenemos}$$

que para $z = 1/8$ el denominador en cuestión es positivo. Y como tanto $D(z)$ como $\sum_{t \in \mathcal{J}_c} 2^{|t|} D_t^2(z)$ son funciones crecientes sobre el eje real positivo, la positividad se tiene en todo el intervalo $[0, 1/8]$.

Así pues las singularidades dominantes de $M(z)$ provienen del numerador de [40]; y probaremos de hecho que la única singularidad dominante se tiene en $z = 1/8$. Para ello precisaremos una serie de lemas sobre $\mu_u(z)$ y $\eta_u(z)$.

Lema 2.1

$\forall u \in \mathcal{J}_c$ $\mu_u(z)$ y $\eta_u(z)$ son analíticas en la bola $(z / |z| \leq 1/8, z \neq 1/8)$.

Demostración

A partir de [36] obtenemos las siguientes caracterizaciones recursivas :

$$\begin{aligned} \mu_a(z) &= \mu_b(z) = D(z) \\ \mu_{o(u,v)}(z) &= D(z) + z (2 D(z) - 2^{|u|} D_u(z)) \mu_u(z) + \\ &+ 2z 2^{|u|} D_u(z) \mu_v(z) + \phi_{u,v}(z) \end{aligned} \quad [41]$$

siendo

$$\begin{aligned} \phi_{u,v}(z) &= z \sum_{t \in \mathfrak{g}_{c,\emptyset}} c(u,t,hi) 2^{|t|} D_t^2(z) + \\ &+ z \sum_{\substack{t \in \mathfrak{g}_{c,\emptyset} \\ t,hi \approx_{CON} u}} c(v,t,hd) 2^{|t|} D_t^2(z) + z \sum_{\substack{t \in \mathfrak{g}_{c,\emptyset} \\ t,hi \approx_{CON} u}} c(u,t,hd) 2^{|t|} D_t^2(z) + \\ &+ z \sum_{\substack{t \in \mathfrak{g}_{c,\emptyset} \\ t,hd \approx_{CON} u}} c(v,t,hi) 2^{|t|} D_t^2(z) + z \sum_{\substack{t \in \mathfrak{g}_c \\ t \approx_{CON} u}} c(u,t) 2^{|u|} D_u^2(z) - \\ &- 2z \sum_{t \in \mathfrak{g}_c} c(u,t) 2^{|t|} D_t^2(z) - 2z \sum_{\substack{t \in \mathfrak{g}_c \\ t \approx_{CON} u}} c(v,t) 2^{|u|} D_u^2(z) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \eta_a(z) &= \eta_b(z) = D(z) \\ \eta_{o(u,v)}(z) &= D(z) (1 - z \sum_{\substack{t \in \mathfrak{g}_c \\ t \approx_{CON} u}} c(t,v) D_u(z)) + z \eta_u(z) (D(z) + \\ &+ 2^{|v|} D_v(z)) + z \eta_v(z) (D(z) + 2^{|u|} D_u(z)) + \kappa_{u,v}(z) \end{aligned} \quad [42]$$

siendo

$$\begin{aligned}
\kappa_{u,v}(z) &= z \sum_{t \in \mathfrak{S}_{c,0}} c(t,hi,u) 2^{|t|} D_t^2(z) + \\
&+ z \sum_{t \in \mathfrak{S}_{c,0}} c(t,hd,v) 2^{|t|} D_t^2(z) + z \sum_{t \in \mathfrak{S}_{c,0}} c(t,hi,v) 2^{|t|} D_t^2(z) + \\
&\quad t,hi \approx_{CON} u \qquad \qquad \qquad -(t,hi \approx_{CON} u) \\
&+ z \sum_{t \in \mathfrak{S}_{c,0}} c(t,hd,u) 2^{|t|} D_t^2(z) - z \sum_{t \in \mathfrak{S}_{c,0}} c(t,u) 2^{|t|} D_t^2(z) - \\
&\quad t,hi \approx_{CON} v \\
&- z \sum_{t \in \mathfrak{S}_c} c(t,v) 2^{|t|} D_t^2(z) - z \sum_{\substack{t \in \mathfrak{S}_c \\ t \approx_{CON} v}} c(t,u) 2^{|v|} D_v^2(z)
\end{aligned}$$

Ahora bien, $\forall u,v \in \mathfrak{S}_c$

$$\phi_{u,v}(z) \text{ y } \kappa_{u,v}(z) \text{ son analíticas en } (z \in \mathbb{C} / |z| < \frac{4}{25}), \quad [43]$$

lo que puede demostrarse fácilmente a partir de [37], la proposición 2.1 de esta sección, y el lema 2.2 de la sección 2 del capítulo anterior.

Con lo que basta razonar por inducción en [41] y [42] para obtener el resultado enunciado en este lema.

Lema 2.2 :

$$\forall u \in \mathfrak{S}_c \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq \frac{1}{8} \quad |\mu_u(z)| \leq 2^{|u|} (|u| + 2)^2$$

y $|\eta_u(z)| \leq 2^{|u|} (|u| + 4)$

Demostración

Siguiendo el mismo proceder del lema 2.2 del capítulo 2, podemos demostrar que $\forall u \in \mathfrak{S}_c \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$|z| \leq \frac{1}{8} \implies |D_u(z)| < \frac{5}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^{|u|} \quad [44]$$

lo que unido a [37] nos permite obtener las siguientes acotaciones :

$$\begin{aligned}
& \forall u, v \in \mathfrak{I}_C, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \leq \frac{1}{8} \\
\phi_{u,v}\left(\frac{1}{8}\right) & \left(\frac{100}{128} (|u| + |v| + 1) \left[\frac{1}{9} I'_C\left(\frac{1}{18}\right) - I_C\left(\frac{1}{18}\right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{25}{128} (2|u| + 1)^2 - \frac{3}{2} B^2\left(\frac{1}{8}\right) \right) \\
\kappa_{u,v}\left(\frac{1}{8}\right) & \left(\frac{100}{128} (|u| + |v| + 1) \left[\frac{1}{9} I'_C\left(\frac{1}{18}\right) - I_C\left(\frac{1}{18}\right) \right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{5}{4} B^2\left(\frac{1}{8}\right) \right) \quad [45]
\end{aligned}$$

Ahora bien, derivando en [55] en el capítulo 2, tenemos

$$I'_C(z) = \frac{I_C^2(z) - I_C(2z^2) - 4z^2 I'_C(2z^2)}{1 - 2z I_C(z)}$$

con lo que $\forall z \in \mathbb{R}^+$, $0 < |z| \leq \rho_{I_C}$

$$I'_C(z) \left(\frac{I_C(z) - 2 - 32z^3}{z(1 - 2z I_C(z))} \right) \quad [46]$$

puesto que tenemos $I'_C(2z^2) \geq 8z$.

Además, tanto $\mu_u(z)$ como $\eta_u(z)$ son series de potencias con coeficientes positivos, por lo que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \leq \frac{1}{8} \implies |\mu_u(z)| \leq \mu_u\left(\frac{1}{8}\right), \quad |\eta_u(z)| \leq \eta_u\left(\frac{1}{8}\right)$$

Entonces utilizando [45] y [46] y procediendo por inducción, obtenemos las cotas uniformes anunciadas.

Proposición 2.4

Las series $M_i(z) = \sum_{u \in \mathfrak{I}_C} \mu_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z)$ y

$N_i(z) = \sum_{u \in \mathfrak{I}_C} \eta_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z)$ $i = 2, 3$, son analíticas

en el conjunto $\{z / |z| \leq 1/8, z \neq 1/8\}$.

Demostración

Tomemos $i \geq 2$. A partir de [44] y del lema 2.2 tenemos que $\forall u \in \mathfrak{I}_C, \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \leq 1/8 \implies$

$$|\mu_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z)| \leq (|u| + 2)^2 \left[\frac{5}{4} \right]^i \left[\frac{1}{3} \right]^i |u| \quad y$$

$$|\eta_u(z) 2^{(i-1)|u}| D_u^i(z) | \leq (|u| + 4) \left[\frac{5}{4} \right]^i \left[\frac{1}{3} \right]^i |u|.$$

Además

$$\sum_{u \in \mathcal{S}_c} (|u| + 2)^2 \left[\frac{5}{4} \right]^i \left[\frac{1}{3} \right]^i |u| < \left[\frac{5}{4} \right]^i \left[\frac{5}{9} I_c'(1/9) + \frac{1}{81} I_c''(1/9) + 4 I_c(1/9) \right]$$

$$\sum_{u \in \mathcal{S}_c} (|u| + 4) \left[\frac{5}{4} \right]^i \left[\frac{1}{3} \right]^i |u| < \left[\frac{5}{4} \right]^i \left[\frac{1}{9} I_c'(1/9) + 4 I_c(1/9) \right]$$

Luego $M_i(z)$ y $N_i(z)$ convergen absoluta y uniformemente en la bola $(z / |z| \leq 1/8)$ en virtud del criterio de convergencia de Weierstrass. Nuevamente por técnicas estándar de prolongación analítica podemos asegurar la convergencia uniforme sobre todo compacto incluido en un cierto abierto que contiene a $(z / |z| \leq 1/8, z \neq 1/8)$. Además $\forall u \in \mathcal{S}_c$ $\mu_u(z) 2^{(i-1)|u}| D_u^i(z)$ y $\eta_u(z) 2^{(i-1)|u}| D_u^i(z)$ son analíticas en el conjunto $(z / |z| \leq 1/8, z \neq 1/8)$ por el lema 2.1 de esta sección, y el lema 2.2 del capítulo anterior. Por lo tanto estamos en las hipótesis del teorema de Weierstrass, pudiéndose concluir que tanto $M_i(z)$ como $N_i(z)$ son analíticas en el conjunto $(z / |z| \leq 1/8, z \neq 1/8)$.

Veamos ahora que $\forall i \geq 2$ tanto $M_i(z)$ como $N_i(z)$ admiten desarrollos locales alrededor de $z = 1/8$ del tipo $a(z) + b(z)(1 - 8z)^{1/2}$ con $a(z)$ y $b(z)$ analíticas en un entorno de $z = 1/8$, último requisito para poder disponer de un desarrollo local de $rSICON(z)$ alrededor de $z = 1/8$ al que poder aplicar el teorema de Darboux.

Lema 2.3

$$\forall u \in \mathcal{S}_c \quad \forall z \in (z / \emptyset < |z| \leq 1/8, z \neq 1/8)$$

$$\mu_u(z) = h_u(z) + g_u(z)(1 - 8z)^{1/2} \quad y$$

$$\eta_u(z) = H_u(z) + G_u(z)(1 - 8z)^{1/2}, \quad \text{de manera que se cumplen}$$

a) $\forall u \in \mathcal{S}_c$ $h_u(z), g_u(z), H_u(z)$ y $G_u(z)$ son analíticas en la

bola perforada $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{4}{25} \}$.

b) Existe un entorno de $z = 1/8$, $V(1/8) \subset A$, tal que

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathfrak{g}_0 \quad \forall z \in V(1/8) \quad |h_u(z)| &\leq 2^{|u|} (|u| + 3)^2 ; \\ |g_u(z)| &\leq 2^{|u|-1} \left(\frac{5}{2}|u| + 3\right)^2 ; \quad |H_u(z)| \leq 2^{|u|} (|u| + 5) ; \\ |G_u(z)| &\leq 2^{|u|} (\sqrt{2}|u| + 3)^2 . \end{aligned}$$

Demostración

Razonando por inducción sobre el tamaño de $u \in \mathfrak{g}_c$ a partir de [41] y [42], y recordando que $D(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 8z}}{2z}$ con $z \in \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1/8 \}$, definimos

$$h_a(z) = h_b(z) = \frac{1}{2z}$$

$$\begin{aligned} h_{o(u,v)}(z) &= \frac{1}{2z} + (1 - z 2^{|u|} D_u(z)) h_u(z) - g_u(z)(1 - 8z) + \\ &\quad + 2z 2^{|u|} D_u(z) h_v(z) + \phi_{u,v}(z) \end{aligned}$$

$$g_a(z) = g_b(z) = -\frac{1}{2z}$$

$$\begin{aligned} g_{o(u,v)}(z) &= -\frac{1}{2z} + (1 - z 2^{|u|} D_u(z)) g_u(z) - h_u(z) + \\ &\quad + 2z 2^{|u|} D_u(z) g_v(z) \end{aligned}$$

$$H_a(z) = H_b(z) = \frac{1}{2z}$$

$$H_{o(u,v)}(z) = \frac{1}{2z} \left[1 - z \sum_{\substack{t \in \mathfrak{g}_c \\ t \approx_{\text{CON}} u}} c(t,v) D_t(z) \right] +$$

$$\begin{aligned} &+ H_u(z) \left[\frac{1}{2} + z 2^{|v|} D_v(z) \right] + H_v(z) \left[\frac{1}{2} + z 2^{|u|} D_u(z) \right] - \\ &- \frac{G_u(z) + G_v(z)}{2} (1 - 8z) + \kappa_{u,v}(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_a(z) = G_b(z) &= -\frac{1}{2z} \\
G_{\alpha(u,v)}(z) &= -\frac{1}{2z} \left[1 - z \sum_{\substack{t \in \mathcal{I}_c \\ t \approx_{\text{CON}} u}} c(t,v) D_u(z) \right] + \\
&+ G_u(z) \left[\frac{1}{2} + z 2^{|v|} D_v(z) \right] + G_v(z) \left[\frac{1}{2} + z 2^{|u|} D_u(z) \right] - \\
&- \frac{H_u(z) + H_v(z)}{2}
\end{aligned}$$

Y ahora ambos apartados del presente lema, se demuestran por inducción sobre el tamaño de $u \in \mathcal{I}_c$, teniendo presentes los lemas precedentes que garantizan la analiticidad de cada sumando en la región conveniente. En particular, en lo que concierne al segundo apartado, lo que se demuestra en concreto por inducción son las cotas indicadas para $z = 1/8$, para lo cual se echa mano también de [45]; después, como a) nos garantiza la analiticidad de cada una de las funciones en estudio, en un entorno perforado del origen de radio estrictamente superior a $1/8$, podemos concluir la existencia de un entorno $V(1/8) \subset A$ independiente de u , en el que las susodichas cotas siguen siendo válidas.

Y por último tenemos la

Proposición 2.5

$$\forall i \geq 2 \quad M_i(z) = h_i(z) + g_i(z)(1 - 8z)^{1/2} \quad \text{y}$$

$$N_i(z) = H_i(z) + G_i(z)(1 - 8z)^{1/2} \quad \text{con } h_i(z), H_i(z), g_i(z) \text{ y } G_i(z) \text{ analíticas en un entorno de } z = 1/8.$$

Demostración

Para cada $i \geq 2$ a partir del lema anterior, definimos

$$h_i(z) = \sum_{u \in \mathcal{I}_c} h_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z); \quad g_i(z) = \sum_{u \in \mathcal{I}_c} g_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z)$$

$$H_i(z) = \sum_{u \in \mathfrak{f}_c} H_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z); \quad G_i(z) = \sum_{u \in \mathfrak{f}_c} G_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z)$$

A partir de [44], y dado que para todo $u \in \mathfrak{f}_c$, $D_u(z)$ es analítica al menos para z , $|z| < \frac{4}{25}$, lo que se deduce del lema 2.2 del capítulo anterior; razonando por continuidad existe $V_1(\frac{1}{8})$ entorno de $z = \frac{1}{8}$ en el que la acotación dada en [44] sigue siendo cierta.

Sea $V(\frac{1}{8}) = V_1(\frac{1}{8}) \cap V(\frac{1}{8})$, donde $V(\frac{1}{8})$ es el entorno proporcionado por el apartado b) del lema anterior.

Entonces

$$\forall u \in \mathfrak{f}_c \quad \forall z \in V(\frac{1}{8})$$

$$|h_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z)| < (|u| + 3)^2 \left(\frac{5}{4}\right)^i \left[\frac{1}{3}\right]^i |u|$$

$$|g_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z)| < \left(\frac{5}{2}|u| + 3\right)^2 \left(\frac{5}{4}\right)^i \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}\right]^i |u|$$

$$|H_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z)| < (|u| + 5) \left(\frac{5}{4}\right)^i \left[\frac{1}{3}\right]^i |u|$$

$$|G_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z)| < (\sqrt{2}|u| + 3)^2 \left(\frac{5}{4}\right)^i \left[\frac{1}{3}\right]^i |u|$$

Además

$$\sum_{u \in \mathfrak{f}_c} (|u| + 3)^2 \left(\frac{5}{4}\right)^i \left[\frac{1}{3}\right]^i |u| < \left(\frac{5}{4}\right)^i \left[\frac{7}{9} I_c'(\frac{1}{9}) + \frac{1}{81} I_c''(\frac{1}{9}) + 9 I_c(\frac{1}{9}) \right]$$

$$\sum_{u \in \mathfrak{f}_c} \left(\frac{5}{2}|u| + 3\right)^2 \left(\frac{5}{4}\right)^i \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}\right]^i |u| < \left(\frac{5}{4}\right)^i \left[\frac{85}{72} I_c'(\frac{1}{9}) + \frac{25}{648} I_c''(\frac{1}{9}) + \frac{9}{2} I_c(\frac{1}{9}) \right]$$

$$\sum_{u \in \mathfrak{f}_c} (|u| + 5) \left(\frac{5}{4}\right)^i \left[\frac{1}{3}\right]^i |u| < \left(\frac{5}{4}\right)^i \left[\frac{1}{9} I_c'(\frac{1}{9}) + 5 I_c(\frac{1}{9}) \right]$$

$$\sum_{u \in \mathfrak{f}_c} (\sqrt{2}|u| + 3)^2 \left(\frac{5}{4}\right)^i \left[\frac{1}{3}\right]^i |u| < \left(\frac{5}{4}\right)^i \left[\frac{6\sqrt{2} + 2}{9} I_c'(\frac{1}{9}) + \frac{2}{81} I_c''(\frac{1}{9}) + 9 I_c(\frac{1}{9}) \right]$$

Luego por el criterio de convergencia de Weierstrass

$h_i(z)$, $g_i(z)$, $H_i(z)$ y $G_i(z)$ convergen absoluta y uniformemente sobre $V'(1/8)$. Como además cada uno de los sumandos que aparece en la definición correspondiente de dichas cuatro funciones, es analítico en $V'(1/8)$, tenemos por el teorema de Weierstrass que $h_i(z)$, $g_i(z)$, $H_i(z)$ y $G_i(z)$ también lo son en tal entorno.

Finalmente aplicando los resultados anteriores junto a [50] del capítulo 2, en [34] y [40], obtenemos para $\tau\text{SICON}(z)$ el desarrollo local en $z = 1/8$ deseado, al que podemos aplicar el teorema de Darboux.

$$\tau\text{SICON}(z) = a_1(z)(1-8z)^{-1/2} + a_2(z)(1-8z)^{1/2} + a_3(z)$$

donde $a_i(z)$ $i = 1, 2, 3$ son analíticas en un entorno de $z = 1/8$, y

$$a_1(1/8) = 16 - \frac{1}{4} r_1(1/8) + \frac{1}{32 - 2r_1(1/8)} \left[128 - 8r_1(1/8) + r_2(1/8) + \frac{1}{2} h_2(1/8) - \frac{1}{8} (h_3(1/8) + 2H_3(1/8)) + \frac{1}{8} r_1^2(1/8) \right]$$

donde

$$\begin{aligned} r_1(1/8) &= \sum_{t \in \mathcal{S}_c} 2^{|t|} D_t^2(1/8); \\ r_2(1/8) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{t, t' \in \mathcal{S}_c \\ t \approx_{\text{CON}} t'}} c(t, t') 2^{2|t|} D_t^3(1/8) + \\ &+ \frac{1}{8} \sum_{u, v \in \mathcal{S}_c} c(u, v) 2^{|u|+|v|} D_u^2(1/8) D_v^2(1/8) + \\ &+ \frac{1}{8} \sum_{\substack{t, t' \in \mathcal{S}_c \\ t \approx_{\text{CON}} t'}} c(t, t') 2^{3|t|} D_t^4(1/8); \end{aligned}$$

$$h_i(z) = \sum_{u \in \mathcal{G}_c} h_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z), \quad \gamma$$

$$H_i(z) = \sum_{u \in \mathcal{G}_c} H_u(z) 2^{(i-1)|u|} D_u^i(z) \quad i = 2, 3.$$

Y aplicando el teorema de Darboux obtenemos

$$[z^n] \tau\text{SICON}(z) = \frac{a_1(1/g) 8^n n^{-1/2}}{\sqrt{n}} \left[1 + O(1/n) \right] \quad [47]$$

Teorema 2.1

El coste medio de ejecución del algoritmo SICON es asintóticamente lineal en el tamaño del input :

$$\overline{\tau\text{SICON}}_n = c n \left[1 + O(1/n) \right] \quad n \rightarrow \infty$$

siendo $c = \frac{1}{2} a_1(1/g)$ y $a_1(1/g)$ como se indica en la página anterior.

Demostración

A partir de [51] del capítulo 2, y de [47] obtenemos

$$\overline{\tau\text{SICON}}_n = \frac{[z^n] \tau\text{SICON}(z)}{[z^n] D(z)} = \frac{a_1(1/g)}{2} n \left[1 + O(1/n) \right] \quad n \rightarrow \infty$$

2.2 Complejidad en el peor de los casos

El estudio de la complejidad en el peor de los casos cuando el criterio de simplificación tiene en cuenta el carácter conmutativo de la operación idempotente resultó mucho más complicado que en el caso no conmutativo. En ambos casos se trata de encontrar una familia de árboles tal que la simplificación de sus elementos siguiendo el correspondiente algoritmo resulte costosa cuando los tamaños tienden a infinito. Para ello hemos de "alargar" cuanto sea posible, las comparaciones inmersas en el algoritmo, que nos señalan en cada caso si hemos de proceder o no

a una nueva simplificación. Además si el árbol que se da como entrada es simplificado según el criterio escogido, entonces el coste de la aplicación del correspondiente algoritmo de simplificación sobre dicho árbol se reduce básicamente a la suma de los costes de las sucesivas comparaciones recursivas que realiza el algoritmo a fin de concluir que tal árbol ya está simplificado. Ello nos lleva a la primera conclusión a la hora de escoger los árboles de la familia : estos han de ser simplificados.

Esta primera conclusión es común a cualquier criterio de simplificación que no aumente el tamaño del input, y que decida simplificar o no, en función del resultado de un determinado test de igualdad entre los simplificados obtenidos previamente para ciertos subárboles del árbol original. Ahora bien, una vez reducido el problema al dilatamiento de las comparaciones, hemos de fijarnos en como son éstas. En el caso no conmutativo procedíamos en preorden limitándonos a comparar por separado los subárboles izquierdos y derechos, ejecutando la segunda comparación sólo si la primera resultaba ser positiva. Entonces para lograr nuestro objetivo de alargar al máximo la operación de comparación, conviene que los subárboles a comparar tengan subárboles izquierdos idénticos, y que sus subárboles derechos difieran en la etiqueta de su hoja más a la derecha, con lo que se consigue hacer la comparación tan larga como es posible en función del tamaño de los subárboles.

Lamentablemente esta técnica, relativamente sencilla, no es aplicable en absoluto al caso conmutativo. La razón estriba en la mayor "uniformidad" que se precisa en este caso a la hora de alargar una comparación, ya que si pretendemos agotar las tres

etapas posibles de una comparación entre dos árboles A_1 y A_2 , y ello es vital que suceda suficientemente a menudo si pretendemos concluir una complejidad superior a n^α con $\alpha > 1$, necesitamos que :

- i) Los subárboles izquierdos sean distintos, pero levemente, a fin de que su comparación sea costosa.
- ii) $A_1.h_i = A_2.h_d$.
- iii) $A_1.h_d$ y $A_2.h_i$ han de ser iguales o muy parecidos ; más bien lo segundo ya que de suceder repetidamente lo primero, peligraría el carácter de simplificados de los árboles buscados.

Un difícil cóctel que no se ha sido capaz de combinar con exactitud. Como comentaremos más adelante, tal combinado nos llevaría a concluir una complejidad del algoritmo de simplificación del orden de $n^{\log_2 3}$. Aquí no se ha podido llegar tan lejos, ¿será ello posible? . Sin embargo, y bajo la filosofía expuesta más arriba, lo que sí se ha conseguido probar es que la complejidad es superior a $n^{\log_2 2.59}$; he aquí cómo :

La uniformidad que se precisa la obtendremos considerando árboles completos. Sin embargo es fácil comprobar que no existen árboles binarios completos con dos etiquetas para las hojas, que sean simplificados. No obstante, sí que existen con tres etiquetas, y además con una regularidad sorprendente, que hará posible nuestro estudio. Así pues tomaremos como número de etiquetas para las hojas $q = 3$, de forma que el resultado obtenido valdría directamente para $q \geq 3$, y si bien no directamente, si ligeramente manipulado para $q = 2$, como veremos posteriormente.

La regularidad anunciada anteriormente se concreta en el siguiente

Lema 2.4

Para cualquier profundidad k , y módulo conmutatividad, hay exactamente tres clases de árboles binarios completos simplificados de profundidad k , con tres posibles etiquetas para sus hojas.

Demostración

Por inducción sobre k :

Para $k = 0$ es trivial. En efecto, siendo

$Et = \{ a, b, c \}$ el conjunto de posibles etiquetas para las hojas, \textcircled{a} , \textcircled{b} y \textcircled{c} son los únicos árboles de profundidad cero con etiquetas en Et . Además, son completos, simplificados y distintos módulo la conmutatividad de sus constructores.

Supongámoslo cierto para k' , y comprobémoslo para $k = k' + 1$. Dado un árbol A de profundidad k , de la familia en cuestión, es decir completo y simplificado, tenemos que $A = \circ(A.hi, A.hd)$ con $A.hi$ y $A.hd$ de profundidad k' , completos, simplificados y distintos módulo conmutatividad. Pero por hipótesis de inducción $A.hi$ y $A.hd$ se mueven en tres clases, de las que hemos de escoger dos sin importar el orden, lo que podemos hacer de $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ formas distintas.

De cada una de las clases mencionadas escogemos sendos representantes canónico y conjugado de la manera siguiente:

Definiciones

- a) Las tres clases C_1^k , C_2^k , C_3^k de árboles binarios completos simplificados de profundidad k , módulo la conmutatividad del constructor vienen definidas por:

$$C_1^0 = \{ \textcircled{A} \}; \quad C_2^0 = \{ \textcircled{B} \}; \quad C_3^0 = \{ \textcircled{C} \}.$$

$$C_1^{k'+1} = \{ A / A.hi \in C_1^{k'}, A.hd \in C_2^{k'} \text{ o viceversa } \}$$

$$C_2^{k'+1} = \{ A / A.hi \in C_1^{k'}, A.hd \in C_3^{k'} \text{ o viceversa } \}$$

$$C_3^{k'+1} = \{ A / A.hi \in C_2^{k'}, A.hd \in C_3^{k'} \text{ o viceversa } \}$$

b) El representante canónico A_i^k de la clase C_i^k viene dado por :

$$A_1^0 = \textcircled{A}; \quad A_2^0 = \textcircled{B}; \quad A_3^0 = \textcircled{C}.$$

$$A_1^{k'+1} = \circ(A_1^{k'}, A_2^{k'}) ; \quad A_2^{k'+1} = \circ(A_1^{k'}, A_3^{k'}) ;$$

$$A_3^{k'+1} = \circ(A_2^{k'}, A_3^{k'}) .$$

c) El conjugado \bar{A} de un árbol A se define mediante :

$$A = \textcircled{i} \implies \bar{A} = \textcircled{i} \quad i \in Et$$

$$A = \circ(A.hi, A.hd) \implies \bar{A} = \circ(\overline{A.hd}, \overline{A.hi})$$

d) El representante conjugado de C_i^k es el conjugado de su representante canónico.

Observacion : El conjugado de un árbol A se ha definido de manera que A y \bar{A} son equivalentes módulo la conmutatividad, pero la conclusión de que tal cosa sucede, aplicando el test de igualdad en estudio, es particularmente costosa. En concreto, en opinión de quien escribe \bar{A} es el árbol de la clase de A que exige mayor tiempo a la hora de compararlo con él, lo que no obstante no va a ser demostrado formalmente por no precisarse tal hecho en el estudio que sigue, y entender que dicha demostración no añadiría gran cosa en este trabajo.

Entonces la idea es simplificar un árbol de la forma

$A^k = \circ(A_i^k, \bar{A}_i^k)$ que si bien no es simplificado, si que lo son sus subárboles radicales, de modo que

$$CSICON(A^k) = COMP(A_i^k, \bar{A}_i^k) + CSICON(A_i^k) + CSICON(\bar{A}_i^k)$$

donde $CSICON(A)$ denota el coste del algoritmo sobre A , y $COMP(A,A')$ el coste del test de igualdad entre A y A' empleado por el algoritmo; es decir el número de comparaciones necesarias para decidir acerca de su igualdad.

Estudieemos en primer lugar $COMP(A_i^k, \bar{A}_i^k)$, que a la postre resultará ser el término principal. Se observa que al desarrollar la definición recurrente [36] de $COMP$, nos encontramos con términos de la forma $COMP(A_h^{k'}, \bar{A}_j^{k'})$ de forma que una evaluación por inducción precisará de todos estos términos, no siendo suficientes los a primera vista más sencillos de manejar $COMP(A_h^{k'}, \bar{A}_h^{k'})$.

Pues bien, denotando $COMP(A_h^k, \bar{A}_j^k)$ mediante $c_k(h,j)$ para abreviar, y según la definición de A_h^k, \bar{A}_j^k y $COMP$, se tienen para cada $k \geq 1$ las siguientes igualdades:

$$c_k(1, \bar{1}) = c_{k-1}(1, \bar{2}) + c_{k-1}(1, \bar{1}) + c_{k-1}(2, \bar{2})$$

$$c_k(1, \bar{2}) = c_{k-1}(1, \bar{3}) + c_{k-1}(1, \bar{1}) + c_{k-1}(2, \bar{3})$$

$$c_k(1, \bar{3}) = c_{k-1}(1, \bar{3}) + c_{k-1}(1, \bar{2})$$

$$c_k(2, \bar{1}) = c_{k-1}(1, \bar{2}) + c_{k-1}(1, \bar{1}) + c_{k-1}(3, \bar{2})$$

$$c_k(2, \bar{2}) = c_{k-1}(1, \bar{3}) + c_{k-1}(1, \bar{1}) + c_{k-1}(3, \bar{3})$$

$$c_k(2, \bar{3}) = c_{k-1}(1, \bar{3}) + c_{k-1}(1, \bar{2})$$

$$c_k(3, \bar{1}) = c_{k-1}(2, \bar{2}) + c_{k-1}(3, \bar{2})$$

$$c_k(3, \bar{2}) = c_{k-1}(2, \bar{3}) + c_{k-1}(2, \bar{1})$$

$$c_k(3, \bar{3}) = c_{k-1}(2, \bar{3}) + c_{k-1}(2, \bar{2}) + c_{k-1}(3, \bar{3})$$

Como puede apreciarse, no todos los términos requieren de tres comparaciones entre sus subárboles radicales para ser evaluados; lo que directamente sólo nos capacita para establecer un crecimiento exponencial de $COMP(A_h^k, \bar{A}_j^k)$ con base 2. Sin embargo, y a pesar de la aparente arbitrariedad de las

expresiones que definen los términos $c_k(h, \bar{j})$, lo que hace imposible dar una fórmula general manejable, al haber siempre en juego tan sólo tres árboles, y sus conjugados, y estar todos ellos definidos de manera uniforme, podemos expresar con facilidad los c_k en función de los c_{k-2} , y en general de los $c_{k-k'}$, para $k' \leq k$ arbitrario. Para ello basta representar el sistema que define los c_k en función de los c_{k-1} , a través de una matriz 9×9 , M , en la que cada fila y cada columna corresponden a un par (h, \bar{j}) , de manera que $M_{(h, \bar{j})(h', \bar{j}')} = 1$ si $c_{k-1}(h', \bar{j}')$ aparece en la expresión que define $c_k(h, \bar{j})$; en otro caso $M_{(h, \bar{j})(h', \bar{j}')} = 0$.

Ahora, pensando en la manera de componer dos aplicaciones lineales, es inmediato concluir que M^2 define la descomposición de los c_k en función de los c_{k-2} ; y en general $M^{k'}$ define la descomposición en función de los términos $c_{k-k'}$.

Pues bien, la suma de los términos de cada fila de M^2 es siempre mayor o igual que 5, lo que garantiza un crecimiento exponencial de $\text{COMP}(A_h^k, \bar{A}_j^k)$ con base $\sqrt{5} > 2$. Iterando el proceso, tenemos que para M^{64} dicha suma está acotada, aproximadamente por $287.789 \cdot 10^{24}$, lo que nos da un crecimiento exponencial con base 2.590735. Por último, observando la tasa de crecimiento de dichas cantidades, podríamos estimar el límite de la base garantizada por M^n , cuando n tiende a infinito, en 2.607, aproximadamente.

Observación: La forma en que se escogen las clases C_i^k , así como sus representantes canónicos, no es indiferente; así, si por ejemplo tomamos

$$\begin{aligned}
 C_1^{k'+1} &= \{ A / A.hi \in C_2^{k'}, A.hd \in C_3^{k'} \text{ o viceversa } \} \\
 C_2^{k'+1} &= \{ A / A.hi \in C_3^{k'}, A.hd \in C_1^{k'} \text{ o viceversa } \} \\
 C_3^{k'+1} &= \{ A / A.hi \in C_1^{k'}, A.hd \in C_2^{k'} \text{ o viceversa } \}
 \end{aligned}$$

y no cambiamos la forma de escoger los representantes canónicos, entonces sólo los términos $c_k(h, \bar{h})$ requieren tres comparaciones entre sus subárboles radicales, lo que hace que el crecimiento de la base que regula la acotación exponencial de $c_k(h, \bar{j})$ sea mucho más lento, sin alcanzar nunca el valor especificado anteriormente. En fin, se ha tratado con diversas formas de definir las clases C_i^k , obteniéndose los mejores resultados con la elección detallada más arriba. No obstante no se ha realizado una búsqueda exhaustiva, lo que podría hacerse con ayuda del ordenador, y pudiera ser que existiese alguna otra elección más acertada. Pero tal esfuerzo no parece que fuese a valer mucho la pena, pues se tiene el convencimiento de que por este método en ningún caso se alcanzaría la base límite 3.

Tenemos por tanto una acotación asintótica de

$COMP(A_h^k, \bar{A}_j^k)$ en función de k , profundidad de los árboles de C_i^k , de la forma $COMP(A_h^k, \bar{A}_j^k) \geq 2.5907^k \quad k \rightarrow \infty$.

Ahora bien, para expresar este resultado en función del tamaño n de los árboles en estudio, es decir de su número de nodos internos, basta recordar que dicho tamaño es igual a $2^k - 1$, por tratarse de árboles completos. De forma que obtenemos

$$COMP(A_h^k, \bar{A}_j^k) \geq n^{\log_2 2.5907} \quad n \rightarrow \infty$$

de modo que

$$CSICON(A^k) \geq n^{\log_2 2.5907} + CSICON(A_1^k) + CSICON(\bar{A}_1^k)$$

y es inmediato comprobar que al ser $2.5907 > 2$, no podemos

sacar ningún rendimiento nuevo positivo de los dos últimos sumandos, de manera que el resultado final al que llegamos es

$$\text{CSICON} (A^k) \geq n^{\frac{\log_2 2.5907}{2.5907}}, \quad n = |A_1^k|, \quad k \rightarrow \infty.$$

Nota : Cuando $q = 2$, basta "representar" la etiqueta c mediante el árbol $\circ(a,b)$. Es evidente que con tal representación, el coste $\text{COMP} (A_h^k, A_j^k)$ no disminuye; en cambio el tamaño del árbol A^k crece, pero a lo sumo sólo se multiplica por 2, con lo que se tendría

$$\text{CSICON} (A^k) \geq \frac{n^{\log_2 2.5907}}{2.5907}, \quad n \rightarrow \infty$$

con lo que el orden de crecimiento sigue siendo el mismo.

Hemos obtenido así una cota inferior de la complejidad en el peor de los casos del algoritmo de simplificación bajo conmutatividad, que nos permite constatar que en este caso el comportamiento medio del algoritmo es todavía mejor, en comparación, que en el caso no conmutativo. En aquel caso probamos una reducción del orden $\ln n$, mientras que en el caso conmutativo hemos visto que la complejidad se reduce al menos en un factor n^α con $\alpha = 0.3733421$.

Con ánimo de completar en lo posible este estudio, tratamos de encontrar una cota superior lo más fina posible de la complejidad en el peor de los casos del presente algoritmo de simplificación. En nuestra opinión ésta debe ser del orden de $n^{\log_2 3}$. Al respecto se ha observado que si tratamos con árboles que a lo largo de la aplicación del algoritmo vayan dando lugar a comparaciones entre árboles A_1 y A_2 verificando

$$\text{COMP} (A_1, A_2) \leq \lambda (1 + \min (|A_1|, |A_2|))^b$$

para ciertas constantes λ y b , podemos demostrar por inducción que $CSICON(A) \leq \lambda (1 + |A|)^b$, tomando como tamaño de un árbol, para mayor comodidad, su número total de nodos. En efecto, si tenemos $A = o(A.hi, A.hd)$, y tomamos $n = |A|$; $n_i = |A.hi|$; $n_d = |A.hd|$, y suponemos $n_i \geq n_d$; recordando que

$$CSICON(A) = CSICON(A.hi) + CSICON(A.hd) + COMP(A.hi, A.hd)$$

hemos de probar $\lambda n^b \geq \lambda n_i^b + 2 \lambda n_d^b$. Pero teniendo en cuenta que $n_i \in [\frac{n-1}{2}, n-1]$, y $n_d = n - n_i - 1$, si consideramos el miembro derecho de la desigualdad como función de n_i , derivando vemos que su único punto crítico en el intervalo $[\frac{n-1}{2}, n-1]$ se encuentra en el punto $\frac{2}{3}(n-1)$, siendo un mínimo, de manera que el máximo absoluto de la función se alcanza para $n_i = n-1$, valor para el que se verifica trivialmente la desigualdad, teniéndose ésta por tanto en todo el intervalo.

Ahora bien, la hipótesis impuesta

$$COMP(A_1, A_2) \leq \lambda (1 + \min(|A_1|, |A_2|))^b$$

se tiene con $b = \log_2 3$ para árboles completos, y podría probarse también para árboles "suficientemente balanceados", pero no parece posible probarlo en general, al menos utilizando una prueba directa por inducción.

El resultado general más fuerte que se ha podido probar, es el ya mencionado en [37]:

$$COMP(A_1, A_2) \leq |A_1| |A_2|$$

que como ya dijimos, se prueba fácilmente por inducción.

Para demostrar, utilizando esta acotación, que

CSICON $(A) \leq \lambda (1 + |A|)^b$, tendríamos que probar que

$$n_i^b + n_d^b + n_i n_d ((n_i + n_d + 1)^b)$$

Ello es claramente cierto para $b = 2$; pero tal resultado es inmejorable, ya que si $b < 2$, tomando $n_i = n_d = \frac{n-1}{2}$, la desigualdad a probar se convierte en la siguiente:

$2 \left[\frac{n-1}{2} \right]^b + \left[\frac{n-1}{2} \right]^2 (n^b)$, que es falsa sin más que hacer tender n a infinito.

Por último intentamos mejorar la acotación [37], buscando un $b < 1$ que verificase

$$\text{COMP}(A_1, A_2) \leq (|A_1| |A_2|)^b$$

Pero de nuevo no es posible probar un resultado tal, utilizando una demostración directa por inducción, pues si tomamos

$$A_1 \cdot hi = A_2 \cdot hd, \text{ y denotamos } n_{11} = |A_1 \cdot hi|; n_{12} = |A_1 \cdot hd|;$$

$$n_{21} = |A_2 \cdot hi|, \text{ habríamos de probar que}$$

$$(n_{11} n_{21})^b + n_{11}^{2b} + (n_{12} n_{21})^b \leq ((n_{11} + n_{12} + 1)(n_{11} + n_{21} + 1))^b$$

En particular necesitaríamos que

$$n_{21}^b (n_{11}^b + n_{12}^b) \leq (n_{11} + n_{12} + 1)^b (n_{11} + n_{21} + 1)^b$$

Pero si $b < 1$, $(n_{11}^b + n_{12}^b) > (n_{11} + n_{12} + 1)^b$, con tal de tomar n_{11} y n_{12} suficientemente grandes; y en tal caso, al hacer tender n_{21} a infinito, se haría falsa la desigualdad perseguida.

En resumen, se ha demostrado que la complejidad en el peor de los casos del algoritmo de simplificación de árboles binarios, con un constructor conmutativo, se encuentra entre $n^{\log_2 2.5907}$ y n^2 , adjuntando una serie de razonamientos que nos hacen conjeturar que la complejidad exacta se encuentra aproximadamente

en el centro de ambas cotas, siendo en concreto del orden de $\frac{\log_2 3}{n}$.

3. Nilpotencia

3.1 Complejidad media

Analizaremos en esta sección el comportamiento medio del algoritmo RED presentado en la figura 7, para lo cual retomaremos la notación y definiciones de la sección 3.1 del capítulo 2.

Sea $\tau_{\text{RED}}(z) = \sum_{T \in \mathcal{D}^*} \tau_{\text{RED}}(T) z^{|T|}$ el descriptor de complejidad de RED.

Dada la igualdad estructural de este algoritmo con los analizados en las secciones precedentes, a partir de las reglas de complejidad 1, 2 y 3 llegamos a una primera expresión de $\tau_{\text{RED}}(z)$ en función de los descriptors de complejidad asociados a los distintos constructores que aparecen en el texto de RED, análoga a las obtenidas en las citadas secciones. A saber,

$$\tau_{\text{RED}}(z) = D(z) + 2 + 2z D(z) \tau_{\text{RED}}(z) + 5z D^2(z) + M(z) - 2z \sum_{t \in \mathcal{S}^*} R_t^2(z)$$

siendo $M(z) = z \sum_{u,v \in \mathcal{S}^*} \tau_{\text{EQUAL}}(u,v) D_u(z) D_v(z)$; lo que unido a las expresiones [49] y [50] del capítulo 2, nos conduce a

$$\tau_{\text{RED}}(z) = \frac{6D(z) - 8 + M(z) - 2z \sum_{t \in \mathcal{S}^*} R_t^2(z)}{1 - 2z D(z)} \quad [48]$$

con $1 - 2z D(z) = (1 - 8z)^{1/2}$ para $z \in (z / 0 \leq |z| \leq 1/8)$

Comenzaremos el estudio analítico de $\tau_{\text{RED}}(z)$ demostrando la siguiente

Proposición 3.1

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad \forall p \geq 2 \quad \sum_{t \in \mathcal{S}^*} (c_1 |t| + c_2) R_t^p(z)$
 es analítica en la bola $(z / |z| \leq 0.155)$.

Demostración

A partir del lema 3.1 y de la proposición 1.2 del capítulo 2.

Esta proposición nos garantiza la analiticidad de

$\sum_{t \in \mathcal{S}^*} R_t^2(z)$ en un entorno del origen de radio superior a $1/8$,

lo que por otra parte también podíamos haber deducido a partir del lema 3.1 del capítulo 2, junto con la definición implícita de $R_e(z)$ dada en el sistema [62] de dicho capítulo. Por tanto sólo nos resta ocuparnos del estudio analítico de $M(z)$. Para ello, comenzaremos descomponiendo el sumatorio que define la función, siguiendo la partición de $\mathcal{S}^* \times \mathcal{S}^*$ que se fija en si alguno de los subárboles radicales del árbol a clasificar es una hoja, y en caso de que así sea, en si se trata de e . Entonces, utilizando la definición [12] del coste del test que decide la igualdad de dos árboles, procediendo en preorden, y apoyándonos en la caracterización recursiva de las funciones $R_t(z)$ dada en [62] del capítulo 2, obtenemos la igualdad

$$M(z) = 2z D(z) + 2z R_e(z) D(z) - z - z R_e^2(z) - \\ - 2z R_e(z) + z \sum_{u, v \in \mathcal{S}_{\neq \emptyset}^*} \tau_{\text{EQUAL}}(u, v) R_u(z) R_v(z)$$

donde $\mathcal{S}_{\neq \emptyset}^* = \{t \in \mathcal{S}^* / |t| > 0\}$.

Nos apoyaremos ahora en la siguiente descomposición :

$$\begin{aligned} \sum_{u,v \in \mathfrak{S}^*} \tau \text{EQUAL}(u,v) R_u(z) R_v(z) &= \\ &= z^2 \sum_{\substack{u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathfrak{S}^* \\ u_1 \neq u_2, v_1 \neq v_2}} (1 + \tau \text{EQUAL}(u_1, v_1) + \\ &+ \tau \text{EQUAL}(u_2, v_2) \kappa(u_1 = v_1)) R_{u_1}(z) R_{u_2}(z) R_{v_1}(z) R_{v_2}(z) \end{aligned}$$

Desarrollando la misma siguiendo la misma filosofía que en los apartados anteriores, y sustituyendo el resultado obtenido en la expresión previa definiendo $M(z)$, llegamos a una ecuación lineal cuya resolución nos proporciona, tras un gran número de simplificaciones utilizando [49] y [62] del capítulo anterior, la siguiente expresión para $M(z)$:

$$M(z) = \frac{D(z) - 2z^3 (D(z)M_2(z) + M_3(z)) + H(z)}{1 - z^2 (D^2(z) + \sum_{t \in \mathfrak{S}^*} R_t^2(z))} \quad [49]$$

siendo

$$\begin{aligned} H(z) &= z^3 \sum_{u,v \in \mathfrak{S}^*} \tau \text{EQUAL}(u,v) R_u^2(z) R_v^2(z) + \\ &+ z^3 \sum_{u \in \mathfrak{S}^*} (2|u| + 1) R_u^4(z) - 2 \quad y \end{aligned}$$

$$M_i(z) = \sum_{u,v \in \mathfrak{S}^*} \tau \text{EQUAL}(u,v) R_u^i(z) R_v(z) \quad i = 2, 3.$$

Ahora bien, $\sum_{u \in \mathfrak{S}^*} (2|u| + 1) R_u^4(z)$ tiene radio de convergencia superior a $1/8$ en virtud de la proposición 3.1. Por otra parte, a partir de [18] tenemos que $\forall z \in \mathbb{R}^+$

$$\sum_{u,v \in \mathfrak{S}^*} \tau \text{EQUAL}(u,v) R_u^2(z) R_v^2(z) \leq \sum_{u \in \mathfrak{S}^*} (2|u| + 1) R_u^2(z) \cdot \sum_{v \in \mathfrak{S}^*} R_v^2(z)$$

y nuevamente por la proposición 3.1, cada uno de los sumatorios que conforman el miembro derecho de la desigualdad tiene radio de convergencia mayor que $1/8$, lo que también cumple el miembro izquierdo, por tratarse de una serie de potencias con

coeficientes positivos. Concluimos así que $H(z)$ es analítica en un entorno del origen de radio superior a $1/8$.

En cuanto al denominador de [49], se trata de una función decreciente sobre el eje real positivo, ya que tanto $D(z)$ como $\sum_{t \in \mathbb{N}^*} R_t^2(z)$ son series con coeficientes positivos. Además, a partir de [62] en el capítulo 2, tenemos que

$$\sum_{t \in \mathbb{N}^*} R_t^2(1/8) = 8 (R_e(1/8) - 1), \text{ y como ya es bien sabido}$$

$$D(1/8) = 4; \text{ de modo que } D^2(1/8) + \sum_{t \in \mathbb{N}^*} R_t^2(1/8) = 8 + 8 R_e(1/8).$$

Pero por el lema 3.1 del capítulo 2 sabemos que $R_e(1/8) < 2.28$, de modo que $1 - \frac{1}{64} \left[D^2(1/8) + \sum_{t \in \mathbb{N}^*} R_t^2(1/8) \right] > 0$. Así pues el denominador en estudio no tiene ninguna singularidad en la bola $\{z / |z| \leq 1/8, z \neq 1/8\}$.

Así pues las únicas singularidades de $M(z)$ en dicha bola provendrán de las que puedan tener las funciones $M_i(z)$. Por ello pasamos a continuación a estudiar la analiticidad de dichas funciones, a través de las dos proposiciones que siguen.

Proposición 3.2

Las series $M_i(z) = \sum_{u,v \in \mathbb{N}^*} \tau_{\text{EQUAL}(u,v)} R_u^i(z) R_v^i(z)$ con $i = 2, 3$ tienen radio de convergencia $1/8$.

Demostración

A partir de [18] tenemos que $\forall z \in \mathbb{R}^+$

$$D(z) \sum_{t \in \mathbb{N}^*} R_t^i(z) \leq M_i(z) \leq D(z) \sum_{t \in \mathbb{N}^*} (2|t| + 1) R_t^i(z)$$

y como se trata de series con coeficientes positivos, y tanto

$\sum_{t \in \mathbb{N}^*} R_t^i(z)$ como $\sum_{t \in \mathbb{N}^*} (2|t| + 1) R_t^i(z)$ tienen radio de convergencia superior a $1/8$ según la proposición 3.1, tenemos

que el radio de convergencia de las $M_1(z)$ es el de $D(z)$, es decir $1/8$.

Ahora para demostrar la unicidad de la singularidad dominante de $M_1(z)$, definimos $\mu_u(z) = \sum_{v \in \mathcal{G}^*} \tau_{\text{EQUAL}(u,v)} D_v(z)$ para cada $u \in \mathcal{G}^*$, y demostramos una serie de lemas previos que nos indican como se comportan las funciones $\mu_u(z)$.

Lema 3.1

$\forall u \in \mathcal{G}^*$ $\mu_u(z)$ es analítica en la bola $(z / |z| \leq 1/8, z \neq 1/8)$.

Demostración

A partir de [12] y razonando por inducción estructural, obtenemos la siguiente caracterización recursiva de las funciones $\mu_u(z)$, con $u \in \mathcal{G}^*$:

$$\mu_a(z) = \mu_e(z) = D(z) \quad [50]$$

$$\mu_{\circ(u,v)}(z) = D(z) + z D(z) \mu_u(z) + z R_u(z) \mu_v(z) + \phi_{u,v}(z) \\ \forall \circ(u,v) \in \mathcal{G}^*$$

donde

$$\phi_{u,v}(z) = -z \sum_{t \in \mathcal{G}^*} \tau_{\text{EQUAL}(u,t)} R_t^2(z) - z \tau_{\text{EQUAL}(u,v)} R_u^2(z)$$

Ahora bien, $\forall u,v \in \mathcal{G}^*$

$$\phi_{u,v}(z) \text{ es analítica en la bola } (z / |z| \leq 0.155) \quad [51]$$

ya que cada uno de los sumandos que aparecen en su definición lo es, como puede comprobarse fácilmente a partir del lema 3.1 del capítulo 2, de la expresión [18], y de la proposición 3.1.

Con lo que concluimos el lema sin más que razonar por inducción sobre $u \in \mathcal{G}^*$, a partir de [50].

Lema 3.2

$$\forall u \in \mathcal{S}^* \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \leq 1/8 \implies |\mu_u(z)| \leq 5|u| + 4$$

Demostración

Como $\forall u \in \mathcal{S}^* \quad \mu_u(z)$ es una serie de potencias de coeficientes positivos, basta demostrar la acotación para $z = 1/8$, lo cual se hace fácilmente por inducción estructural a partir de [50].

Proposición 3.3

Las series $M_i(z) = \sum_{u \in \mathcal{S}^*} \mu_u(z) R_u^i(z)$, $i = 2, 3$ son analíticas en el conjunto $A = \{z / |z| \leq 1/8, z \neq 1/8\}$.

Demostración

Análoga a la demostración de la proposición 1.3, apoyándose en los lemas anteriores, así como en el lema 3.1 del capítulo 2.

Demostremos ahora que $M_i(z)$ tiene un desarrollo local en $z = 1/8$, del tipo $M_i(z) = g_i(z)(1 - 8z)^{1/2} + h_i(z)$, con $h_i(z)$ y $g_i(z)$ analíticas en un entorno de $z = 1/8$, lo que nos permitirá obtener finalmente un desarrollo local de $\tau_{RED}(z)$ entorno a su única singularidad dominante, $z = 1/8$, al que se puede aplicar el teorema de Darboux.

Veamos previamente el siguiente

Lema 3.3

$$\forall u \in \mathcal{S}^* \quad \forall z \in \{z / 0 < |z| \leq 1/8, z \neq 1/8\}$$

$$\mu_u(z) = h_u(z) + g_u(z) (1 - 8z)^{1/2} \quad \text{donde}$$

a) $h_u(z)$ y $g_u(z)$ son analíticas en la bola perforada

$$A = \{z / 0 < |z| \leq 0.155\}$$

b) Existe un entorno de $z = 1/8$, $V(1/8) \subset A$, tal que

$$\forall u \in \mathfrak{J}^* \quad \forall z \in V(1/8)$$

$$|h_u(z)| \leq 5|u| + 5 \quad ; \quad |g_u(z)| \leq 6|u| + 5 .$$

Demostración

De nuevo por inducción sobre el tamaño de $u \in \mathfrak{J}^*$, a partir de [50], obtenemos sendas caracterizaciones recursivas de las funciones $h_u(z)$ y $g_u(z)$, homólogas a las obtenidas para el caso idempotente de la sección 1, salvo en la definición del término $\phi_{u,v}(z)$. Lo mismo ocurrió con la caracterización recurrente de $\mu_u(z)$ dada en [50]. Nada de esto es de extrañar dado que los algoritmos en estudio tienen idéntica estructura y utilizan un mismo test de decisión de igualdad entre árboles, diferenciándose únicamente en el árbol reducido que construyen; siendo no obstante isomorfos los conjuntos de árboles irreducibles bajo ambos criterios. La diferencia entre las definiciones de ambas funciones $\phi_{u,v}(z)$ es por otra parte absolutamente natural, pues viene provocada por las diferentes caracterizaciones recurrentes de los elementos de las correspondientes particiones en clases de árboles con idéntico simplificado para cada criterio; caracterizaciones que reflejan fielmente el método de reducción escogido.

En concreto,

$$h_a(z) = h_e(z) = \frac{1}{2z}$$

$$h_t(z) = \frac{1}{2z} + \frac{h_u(z)}{2} - \frac{(1-8z)g_u(z)}{2} + z R_u(z) h_v(z) + \phi_{u,v}(z) \quad \forall t = \sigma(u,v) \in \mathfrak{J}^*$$

siendo $\phi_{u,v}(z)$ la función definida en [50].

$$g_a(z) = g_e(z) = -\frac{1}{2z}$$

$$g_t(z) = -\frac{1}{2z} - \frac{h_u(z)}{2} + \frac{g_u(z)}{2} + z R_u(z) g_v(z)$$

$$\forall t = o(u,v) \in \mathfrak{J}^n$$

Y ahora basta proceder análogamente a como se hizo en la demostración del lema 1.3, basándose en [51] y en el lema 3.1 del capítulo 2.

Con lo que nos encontramos en condiciones de demostrar la siguiente

Proposición 3.4

$\forall i \geq 2$ $M_i(z) = \sum_{u \in \mathfrak{J}^n} \mu_u(z) R_u^i(z)$, tiene un desarrollo local en un entorno de $z = 1/8$ de la forma

$$M_i(z) = h_i(z) + g_i(z) (1 - 8z)^{1/2},$$

con $h_i(z)$ y $g_i(z)$ analíticas sobre el mismo.

Demostración

Definimos $h_i(z) = \sum_{u \in \mathfrak{J}^n} h_u(z) R_u^i(z)$ y

$$g_i(z) = \sum_{u \in \mathfrak{J}^n} g_u(z) D_u^i(z),$$

y procedemos como en la demostración de la proposición 1.4, a partir del lema anterior, y del lema 3.1 del capítulo 2.

De manera que los lemas anteriores nos permiten afirmar la unicidad de la singularidad dominante de $\tau \text{RED}(z)$, así como que entorno a ella tiene un desarrollo local al que puede aplicarse el teorema de Darboux. Para la obtención de este desarrollo basta sustituir en [49], $M_i(z)$ por sus desarrollos locales dados en la proposición anterior, y posteriormente sustituir en [48] la ecuación así obtenida para $M(z)$, lo que unido a [50]

y [62] del capítulo 2, nos proporciona el desarrollo

$$\tau\text{RED}(z) = a_1(z) (1 - 8z)^{-1/2} + a_2(z) (1 - 8z)^{1/2} + a_3(z)$$

donde las funciones $a_i(z)$ con $i = 1, 2, 3$ son analíticas en un entorno de $z = 1/8$, y siendo

$$a_1(1/8) = 18 - 2 R_e(1/8) + \frac{1}{7 - R_e(1/8)} \left[16 - \frac{1}{8} (h_2(1/8) + \frac{1}{4} h_3(1/8)) + \frac{1}{64} \left[\sum_{t \in \mathcal{G}^*} (2|t| + 1) R_t^4(1/8) + \sum_{u, v \in \mathcal{G}^*} \tau\text{EQUAL}(u, v) R_u^2(1/8) R_v^2(1/8) \right] \right]$$

$$\text{con } h_1(z) = \sum_{t \in \mathcal{G}^*} h_t(z) R_t^i(z).$$

Y aplicando el citado teorema de Darboux, obtenemos

$$[z^n] \tau\text{RED}(z) = \frac{a_1(1/8) 8^n n^{-1/2}}{\sqrt{n}} \left[1 + O(1/n) \right] \quad [52]$$

Teorema 3.1

El coste medio de ejecución del algoritmo RED es asintóticamente lineal respecto al tamaño del input :

$$\overline{\tau\text{RED}}_n = c n \left[1 + O(1/n) \right] \quad n \rightarrow \infty$$

siendo $c = \frac{1}{2} a_1(1/8)$ y $a_1(1/8)$ como se indica más arriba.

Demostración

A partir de [51] del capítulo 2, y de [52], tenemos

$$\overline{\tau\text{RED}}_n = \frac{[z^n] \tau\text{RED}(z)}{[z^n] D(z)} = \frac{a_1(1/8)}{2} n \left(1 + O(1/n) \right)$$

3.2 Complejidad en el peor de los casos

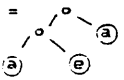

Evidentemente el método de reducción estudiado en esta sección no aumenta nunca el tamaño de los árboles a los que se aplica, y procede según una filosofía estrictamente bottom-up,

que basa cada decisión de reducción en la comprobación de la igualdad estructural de los simplificados previamente obtenidos según idéntico proceder para los subárboles radicales correspondientes ; comprobando la igualdad entre dos árboles mediante un test que opera en preorden. Por lo tanto [30] nos da una cota superior de la complejidad en el peor de los casos para RED , del tipo $O(n \ln n)$.

Además podemos comprobar que dicha cota superior se alcanza a partir de la familia de árboles binarios que daremos a continuación, siguiendo el mismo razonamiento que el desarrollado en el apartado 1.2 para el caso de idempotencia simple.

He aquí la familia anunciada :

$A_0 = \textcircled{a}$; $A_{i+1} = o(o(A_i, A_i'), \textcircled{a})$, donde A_i' se obtiene a partir de A_i por sustitución de su etiqueta a más a la derecha por una etiqueta e .

Así, $A_0 = \textcircled{a}$; $A_1 =$

; $A_2 =$

; ...

Los árboles de esta familia son irreducibles, y el coste de aplicación del algoritmo RED sobre ellos es $O(T_i \ln T_i)$ cuando T_i , tamaño del árbol i -ésimo de la familia, tiende a infinito.

4. Algunas posibles vías de generalización

En esta sección vamos a exponer una serie de reflexiones acerca de las características cualitativas que debe poseer un criterio de reducción de árboles para que podamos aplicarle el desarrollo anterior, y obtener idénticos resultados. Como en el

resto de este capítulo nos restringimos al caso en el que los árboles sobre los que se opera son binarios.

Respecto a la primera cuestión parece claro que el método va a ser aplicable a toda regla de simplificación estrictamente bottom-up y que base su fase de decisión en un test de igualdad sobre subárboles. Partiendo de la noción de árbol irreducible inducida por un criterio de estas características vamos a poder particionar el conjunto de árboles input \mathcal{T} , en clases de árboles no idéntico simplificado de manera que todas estas clases puedan caracterizarse recursivamente mediante un sistema de ecuaciones que traduce la regla de reducción de manera directa. Como comentaremos más adelante, esta situación no tiene por qué darse si el algoritmo no es estrictamente bottom-up ; y el hecho de no disponer de un sistema que traduzca directamente el criterio de reducción, provoca el que podamos llegar a situaciones en las que aparezcan perturbaciones que impidan aplicar la metodología desarrollada en este trabajo, al menos tal y como ha sido expuesta y sin modificaciones adicionales. Al final de esta sección ilustraremos estas ideas por medio de un caso en el que el proceso de reducción no es estrictamente bottom-up , apareciendo las perturbaciones anunciadas ; con lo que se espera además que quede suficientemente claro lo que queremos expresar con la frase "traducir directamente el algoritmo de reducción" .

Como primer paso hacia posibles conclusiones vamos a considerar un algoritmo cuya estructura es similar a la de los algoritmos de reducción que hemos estudiado en las secciones anteriores, pero que a la postre no realiza ninguna modificación sobre la entrada que recibe. En suma, una regla de

"simplificación" estrictamente bottom-up que nunca simplifica, sea cual sea el resultado del test de igualdad sobre los subárboles resultantes de la aplicación de la regla a los subárboles radicales, que (claro está) coincidirán con los subárboles radicales originales. Denotaremos por NSIM tal criterio, que puede implementarse fácilmente sustituyendo en la figura 9 las acciones asociadas a las dos ramas del segundo if por la misma instrucción NSIM := T. La razón de este estudio estriba en que parece "razonable" que si las comparaciones provocan un coste lineal sobre el árbol sin simplificar, provoquen un coste menor en tiempo, si vamos simplificando a árboles de menor tamaño respecto al árbol original.

Procediendo análogamente que en los casos anteriores obtenemos la siguiente expresión para el descriptor de complejidad asociado a NSIM :

$$\tau_{NSIM}(z) = \frac{4D(z) - 4 + M(z)}{1 - 2zD(z)}$$

siendo

$$M(z) = \sum_{\substack{T \in \mathcal{T} \\ |T| > 0}} \tau_{EQUAL}(T.hi, T.hd) z^{|T|}$$

Supongamos en principio que τ_{EQUAL} decide en preorden sobre la igualdad estructural de dos árboles. Entonces a partir de [12] llegamos a que

$$M(z) = \frac{D(z) - 2}{1 - z^2 D^2(z) - z^2 D(z^2)}$$

Ahora bien, el radio de convergencia de $D(z^2)$ es $1/\sqrt{8}$, y el denominador de la expresión anterior es estrictamente positivo en $z = 1/8$. Entonces razonando como es habitual obtenemos para $\tau_{NSIM}(z)$ un desarrollo local en su única

singularidad dominante, $z = 1/8$, de la forma

$$\tau\text{NSIM}(z) = g_1(z)(1 - 8z)^{-1/2} + g_2(z)(1 - 8z)^{1/2} + g_3(z)$$

con $g_i(z)$ analíticas en un entorno de $z = 1/8$, lo que nos lleva a concluir la linealidad respecto al tamaño del input, del coste medio de la ejecución de NSIM sobre árboles de \mathbb{D} , procediendo a partir del teorema de Darboux de la forma habitual.

Este resultado puede extenderse fácilmente al caso más general en el que a la hora de decidir como ha de ser el "simplificado" se precisan los valores de verdad de las comparaciones entre todos los subárboles del árbol a simplificar que quedan k niveles por debajo de la raíz. Entonces, fijada una cierta profundidad k , el problema en realidad se reduce a estudiar la complejidad de ir calculando, sin ningún tipo de modificaciones sobre el input, para cada nodo del árbol los valores de verdad de las comparaciones entre cada par de subárboles que penden del nodo, k niveles más abajo de la raíz del árbol de entrada.

El problema pues se reducirá básicamente a calcular la suma

$$\sum_{T \in \mathbb{D}} \text{CDD}_k(T) = |T| \quad (53)$$

donde $\text{CDD}_k(T)$ designa el coste de la comparación de todos los pares de subárboles de T que se encuentran a nivel k bajo la raíz; entendiéndose que si un cierto subárbol no existe, lo denotamos por NIL, (en concreto, para cada hoja que tenga el árbol original a profundidad $1 < k$, consideraremos 2^{k-1} árboles ficticios NIL); y suponiendo que se tarda una unidad de tiempo en comparar cada subárbol NIL con otro cualquiera. Para desarrollar (53) habremos de considerar todas las formas posibles de T fijado el valor k .

Como necesitamos comparar conjuntamente dos a dos los descendientes a un cierto nivel de varios subárboles, tendremos que definir CDD_k sobre conjuntos de árboles (T_1, \dots, T_m) , de manera que $CDD_k(T_1, \dots, T_m)$ denotará la suma de los costes de comparar dos a dos no sólo los subárboles de cada T_i , que se encuentren a profundidad k , sino también los subárboles de T_i y T_j , que estén a dicha profundidad.

Entonces

$$\sum_{T \in \mathfrak{D}} CDD_k(T) z^{|T|} = 2 \binom{2^k}{2} + z \sum_{T_1, T_2 \in \mathfrak{D}} CDD_{k-1}(T_1, T_2) z^{|T_1| + |T_2|}$$

El primer 2 es el número de etiquetas posibles para las hojas; y el número combinatorio corresponde al número de árboles NIL a profundidad k que penden de una hoja.

En general tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{T_1, \dots, T_m \in \mathfrak{D}} CDD_0(T_1, \dots, T_m) z^{|T_1| + \dots + |T_m|} &= \\ &= \binom{m}{2} D^{m-2}(z) \sum_{T_1, T_2 \in \mathfrak{D}} \tau_{EQUAL}(T_1, T_2) z^{|T_1| + |T_2|} = \\ &= \binom{m}{2} D^{m-2}(z) \frac{M(z)}{z} \end{aligned}$$

El número combinatorio nos dice cuantas formas hay de seleccionar dos argumentos, para ser comparados. Los argumentos no escogidos dan lugar a un factor $D(z)$.

Ahora, dado $k > 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{T_1, \dots, T_m \in \mathfrak{D}} CDD_k(T_1, \dots, T_m) z^{|T_1| + \dots + |T_m|} &= \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} 2^i \sum_{T_1, \dots, T_{2^{(m-i)}} \in \mathfrak{D}} \left[\left[\binom{m \cdot 2^k}{2} - \binom{(m-i) \cdot 2^k}{2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + CDD_{k-1}(T_1, \dots, T_{2^{(m-i)}}) \right] z^{|T_1| + \dots + |T_{2^{(m-i)}}| + m} \end{aligned}$$

Con la i escogemos cuantos argumentos van a ser hojas. El resto tendrá cada uno dos subárboles radicando obteniéndose un total de $2(m-i)$ subárboles. El primer número combinatorio indica de cuantas formas pueden fijarse i argumentos hojas ; el factor 2^i reparte las dos etiquetas entre ellas. La expresión entre paréntesis con los dos números combinatorios, nos indica cuantos pares en los que uno de los elementos es NIL , van a aparecer a profundidad k a causa de las i hojas, en el proceso de comparación dos a dos de los subárboles a dicha profundidad a lo largo de los m argumentos. Por último han de compararse dos a dos los subárboles que se encuentren a nivel $k - 1$ por debajo de la raíz de los $2(m - i)$ nuevos argumentos.

De manera que dado $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{T \in \mathcal{T}} CDD_k(T) z^{|T|}$ puede reducirse a un polinomio en $D(z)$ y $M(z)$ cuyo comportamiento analítico conocemos perfectamente, y nos determina el descriptor de complejidad de este algoritmo, concluyéndose, sin más problemas, la linealidad del comportamiento medio del algoritmo, aplicando el mismo tratamiento que en casos anteriores a los desarrollos analíticos obtenidos.

Todo lo anterior podría generalizarse al caso en el que el criterio de simplificación utiliza los subárboles de los árboles a comparar a profundidad menor o igual que k , haciendo innecesaria la consideración de subárboles ficticios NIL .

Por otra parte si el test sobre igualdad de dos árboles toma en consideración la conmutatividad de la operación asociada al nodo interno, y opera según dijimos en las secciones 2 de este y el anterior capítulo, obtenemos las mismas conclusiones. En efecto, bajo estas hipótesis el descriptor de complejidad del

algoritmo de "simplificación que no simplifica", y opera recursivamente de las hojas a la raíz, basando sus decisiones "simplificadoras" en la comparación de los "simplificados" obtenidos para sus subárboles radicales, verifica la siguiente ecuación :

$$\tau\text{NSIMC}(z) = \frac{4D(z) - 4 + M_c(z)}{1 - 2zD(z)}$$

siendo

$$M_c(z) = z \sum_{\substack{T \in \mathfrak{D} \\ |T| \geq 0}} \tau\text{EQCON}(T.\text{hi}, T.\text{hd}) z^{|T.\text{hi}| + |T.\text{hd}|}$$

Entonces, a partir de [36]

$$M_c(z) = \frac{D(z) - 2 - z^3 D(z) M_2(z) - z^3 M_3(z)}{1 - 2z^2 D^2(z) - 2z^2 D(z^2)}$$

Nuevamente es fácil comprobar que el denominador es estrictamente positivo en $z = 1/8$, y que por su carácter decreciente no se anula en $[0, 1/8]$. En cuanto al numerador, puede demostrarse que

$M_i(z)$, $i = 2, 3$, tiene radio de convergencia $1/8$, y una única singularidad dominante, $z = 1/8$; en torno a la cual admite

un desarrollo local del tipo $M_i(z) = a_i(z)(1 - 8z)^{-1/2} + b_i(z)$

que verifica las hipótesis del teorema de Darboux. Para

demostrarlo basta observar que ahora la familia de árboles

irreducibles coincide con \mathfrak{D} ; definir $\forall u \in \mathfrak{D}$

$$\mu_u(z) = \sum_{v \in \mathfrak{D}} \tau\text{EQCON}(u, v) z^{|v|} \quad \text{y} \quad \eta_u(z) = \sum_{v \in \mathfrak{D}} \tau\text{EQCON}(v, u) z^{|v|};$$

y proceder análogamente que en las secciones anteriores.

De nuevo, para concluir la linealidad de la complejidad en media del algoritmo se sigue el mismo desarrollo que en casos anteriores.

Por último si las comparaciones han de efectuarse entre los subárboles que se encuentran k niveles por debajo de la raíz, habremos de estudiar la expresión $\sum_{T \in \mathfrak{D}} CCDD_k(T) z^{|T|}$, donde $CCDD_k(T)$ es la función homóloga a $CDD_k(T)$ cuando tenemos conmutatividad. Como en el caso no conmutativo reduciremos tal sumatorio a un polinomio en $D(z)$ y $M_G(z)$. En realidad nos sirve la misma descomposición encontrada para el caso no conmutativo, ya que al obtenerla no se utilizó para nada la definición del test de igualdad. Es decir lo que se ha probado en definitiva es que podemos reducir el problema de comparar dos a dos los subárboles a profundidad k de un árbol, a un proceso en el que se comparan dos árboles cualesquiera, de manera que en la medida en que las comparaciones entre dos árboles cualesquiera sean eficientes también lo serán las comparaciones entre todos los subárboles a profundidad k ; y en la medida que el descriptor del coste de comparación de dos árboles cualesquiera admite un desarrollo local verificando las hipótesis del teorema de Darboux, también tenemos un desarrollo de dichas características para el descriptor del coste de la comparación dos a dos entre todos los subárboles a profundidad k . Y aplicando siempre las mismas técnicas llegamos a concluir el comportamiento medio lineal del algoritmo.

Los resultados obtenidos para el algoritmo "sin simplificaciones" parecen indicar que para todo criterio de simplificación, con una estructura similar, que sea "uniforme" y que no incremente el tamaño del output respecto al del input, la complejidad en media va a ser lineal. Por "uniforme" queremos expresar intuitivamente el hecho de que no demasiados árboles de

un mismo tamaño se simplifiquen a un mismo árbol irreducible.

A continuación señalamos un par de formas en que podríamos concretar la noción de "uniformidad".

Partimos del hecho cierto de que para todo algoritmo de simplificación estrictamente bottom-up, que base su fase de decisión en el valor de verdad de la comparación entre los simplificados de los subárboles radicales, se tiene una expresión para su descriptor de complejidad asociado en forma de cociente, con denominador $1 - 2z D(z)$, y numerador polinomial en $D(z)$ y $\sum_{u,v \in \mathbb{N}} \tau \text{COMP}(f(u), f(v)) z^{|u|+|v|}$, donde $\tau \text{COMP}(t_1, t_2)$ es el coste de la comparación de los árboles t_1 y t_2 bajo el criterio escogido.

Denotemos por $\tau f(z)$ el descriptor de complejidad del algoritmo, entonces

$$\tau f(z) = \frac{g(z)(1 - 8z)^{1/2} + h(z) + zM(z)}{(1 - 8z)^{1/2}} \quad [55]$$

donde

$$M(z) = \sum_{u,v \in \mathbb{N}} \tau \text{COMP}(f(u), f(v)) z^{|u|+|v|}, \text{ y } g(z) \text{ y } h(z)$$

son analíticas en un entorno de $z = 1/8$; sin más que recordar [50] en el capítulo 2.

Definimos

$$C(z) = \frac{M(z)}{(1 - 8z)^{1/2}}$$

que es de coeficientes positivos por serlo $M(z)$ y $\frac{1}{\sqrt{1 - 8z}}$. De manera que dada $MP(z) = M(z) + R(z)$ con $R(z)$ de coeficientes positivos, los coeficientes de $\frac{MP(z)}{(1 - 8z)^{1/2}}$ serán cotas superiores de los de $C(z)$.

Así estamos en condiciones de demostrar el siguiente

Teorema 4.1

Si el tiempo medio que se tarda en comparar los simplificados de dos árboles cuya suma de tamaños es n , escogidos aleatoriamente, es constante asintóticamente, para $n \rightarrow \infty$; entonces la complejidad media del algoritmo de simplificación es asintóticamente lineal respecto al tamaño del input.

Demostración

Reordenemos $M(z)$ agrupando los sumandos correspondientes a pares de árboles de \mathfrak{D} con tamaño conjunto igual a n , y sea c una constante tal que

$$\begin{aligned} [z^n] M(z) &= \sum_{\substack{u, v \in \mathfrak{D} \\ |u| + |v| = n}} \tau \text{COMP}(f(u), f(v)) z^{|u|+|v|} \leq \\ &\leq \sum_{\substack{u, v \in \mathfrak{D} \\ |u| + |v| = n}} c z^{|u|+|v|} \end{aligned}$$

Tal constante existe puesto que por hipótesis el tiempo medio necesario para decidir acerca de la igualdad de los pares de árboles simplificados de cada par de la muestra $(u, v) \in \mathfrak{D}^2 / |u| + |v| = n$ es asintóticamente constante cuando $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Entonces } M(z) \leq \sum_n \sum_{\substack{u, v \in \mathfrak{D} \\ |u| + |v| = n}} c z^{|u|+|v|} = c D^2(z).$$

Con lo que hemos acotado $M(z)$ por una función

$MP(z) = M(z) + R(z)$ para una cierta $R(z)$ de coeficientes positivos. Por lo tanto los coeficientes de $\frac{MP(z)}{(1 - 8z)^{1/2}}$, son cota superior de los de $C(z)$.

Finalmente aplicando el teorema de Darboux se prueba que

$$\frac{[z^n] MP(z)/(1-8z)^{1/2}}{[z^n] D(z)} = \alpha n \quad n \rightarrow \infty$$

y por tanto aplicando también el teorema de Darboux para la obtención de los coeficientes del otro sumando de [55], concluimos finalmente la linealidad de la complejidad media del algoritmo de simplificación.

Antes de continuar queremos reseñar que puede observarse mediante simulaciones por ordenador que en media el número de comparaciones necesarias para decidir la igualdad entre dos árboles arbitrarios es similar al necesario para tomar tal decisión referida a sus respectivos simplificados, con lo que la hipótesis impuesta sobre la complejidad en media de la fase de comparación del algoritmo, resulta entonces bastante natural ya que se sabe cierta [St84] para la familia de árboles input.

Por otra parte, si sólo sabemos que lo que emplea tiempo medio constante es el proceso de comparar dos simplificados cuyo tamaño conjunto es n , entonces necesitaríamos que las funciones generatrices, $D_t(z)$, asociadas a las clases de árboles con idéntico simplificado $t \in \mathcal{S}$, donde \mathcal{S} es el conjunto de árboles irreducibles inducido por el correspondiente criterio de simplificación, verificasen que los productos $D_u(z) D_v(z)$ con $|u| + |v| = n$, para n fijo, fuesen "parecidos" en el sentido

$$\text{de que } \forall u', v' \in \mathcal{S} \quad |u'| + |v'| = n \quad \frac{D_u(z) D_v(z)}{D_{u'}(z) D_{v'}(z)} \leq k \quad \text{para}$$

una cierta constante k independiente de n . Entonces, dado que

$$M(z) = \sum_{u, v \in \mathcal{S}} \tau \text{COMP}(u, v) D_u(z) D_v(z), \text{ agrupando los sumandos}$$

correspondientes a pares de simplificados con tamaño conjunto igual a n , obtendríamos la acotación

$$M(z) \leq \sum_n c \sum_{\substack{u, v \in \mathfrak{D} \\ |u| + |v| = n}} k D_{u'}(z) D_{v'}(z) \quad \text{donde } (u', v') \in \mathfrak{S}^2 \text{ es}$$

un par cualquiera con $|u'| + |v'| = n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Entonces } M(z) \leq c k^2 \sum_n \sum_{\substack{u, v \in \mathfrak{S} \\ |u| + |v| = n}} D_u(z) D_v(z) = c k^2 D^2(z)$$

Y se concluye análogamente que en el caso precedente. Obsérvese que se precisa la existencia de k , ya que si se hace la hipótesis de uniformidad para la distribución sobre los pares de simplificados con cada tamaño global constante, resulta que en $M(z)$ no todos los pares tienen porqué aparecer el mismo número de veces; entonces si disponemos de k , podemos acotar superiormente considerando que cada par aparece tantas veces como el que más. Sin embargo, esta hipótesis de uniformidad de los productos de funciones $D_t(z)$ no se cumple por ejemplo para el caso de la reducción por idempotencia, lo que puede observarse nuevamente mediante simulaciones por ordenador.

Una posible solución parece que podría ser exigir complejidad media constante para el algoritmo de comparación respecto a la distribución que aparece en $M(z)$. Es decir, ha de pedirse complejidad media constante para la comparación de dos simplificados de tamaño conjunto igual a n , contando cada par tantas veces como pares de árboles con simplificado igual a cada uno de los dados, y tamaño global igual a m ; siendo la constante independiente de n y m . En tal caso podemos acotar como en el caso en el que se supuso complejidad media constante para inputs arbitrarios de tamaño n .

Así pues podemos probar la linealidad de la complejidad media del algoritmo, tanto si la complejidad media de comparar

los simplificados de dos árboles, es constante, como cuando lo es la de comparar dos simplificados cualesquiera aunque en este caso han de añadirse hipótesis adicionales.

Terminamos esta sección exponiendo mediante un ejemplo una serie de problemas adicionales que pueden surgir al intentar aplicar nuestra metodología, tal y como ha sido expuesta, a reglas de reducción que no sean estrictamente bottom-up .

Consideremos una regla de reducción basada en la propiedad distributiva de una operación respecto a otra. Para concretar, supongamos que operamos sobre árboles binarios que representan expresiones aritméticas en las que sólo pueden aparecer las operaciones $+$ y \times , y que la regla de reducción que aplicamos es la distributividad por la derecha de \times respecto a $+$:

$(a \times b) + (a \times c) \longrightarrow a \times (b + c)$. Entonces el algoritmo de reducción correspondiente operaría como sigue

a) Fase bottom-up : Aplicación del algoritmo a los subárboles radicales.

b) Aplicación de la regla de reducción en la raíz del árbol, tomando como argumentos de la operación asociada al nodo raíz, los simplificados de los subárboles radicales obtenidos en la etapa a) .

c) Fase top-down : Aplicación iterada de la regla de simplificación al subárbol derecho resultante del apartado b) caso de que dicha etapa se comenzase con una operación $+$ asociada al nodo raíz. La iteración parará evidentemente en el momento justo en que no se produzcan nuevas simplificaciones.

Por supuesto resulta claro que no ha de hacerse nada para simplificar una hoja.

Nótese que la última fase del algoritmo es necesaria, así como que es la causante de que el algoritmo no sea estrictamente bottom-up .

Tras reflexionar bastante sobre el asunto, se obtuvo la siguiente caracterización recursiva para la familia de funciones generatrices asociadas a la partición de la familia de árboles binarios inputs, en clases de árboles con idéntico simplificado, según el criterio actual. Llamamos \mathcal{I} a la familia de árboles irreducibles, y $\{S_t(z)\}_{t \in \mathcal{I}}$ a la familia de funciones generatrices a caracterizar. La caracterización anunciada es la siguiente

$$S_t(z) = 1 \quad \forall t \in \mathcal{I}, |t| = 0$$

$$S_{\oplus} \begin{array}{c} \oplus \\ / \quad \backslash \\ u \quad v \end{array} (z) = z S_u(z) S_v(z) \quad \forall t = \oplus(u,v) \in \mathcal{I}$$

$$S_{\otimes} \begin{array}{c} \otimes \\ / \quad \backslash \\ u_1 \quad \dots \quad \otimes \\ \vdots \quad \vdots \quad / \quad \backslash \\ u_n \quad \oplus \quad v \quad w \end{array} (z) = z S_{u_1}(z) S_{\otimes} \begin{array}{c} \otimes \\ / \quad \backslash \\ u_2 \quad \dots \quad \otimes \\ \vdots \quad \vdots \quad / \quad \backslash \\ u_n \quad \oplus \quad v \quad w \end{array} (z) + z S_{\otimes} \begin{array}{c} \otimes \\ / \quad \backslash \\ u_1 \quad \dots \quad \otimes \\ \vdots \quad \vdots \quad / \quad \backslash \\ u_n \quad \oplus \quad v \quad w \end{array} (z) S_{\otimes} \begin{array}{c} \otimes \\ / \quad \backslash \\ u_1 \quad \dots \quad \otimes \\ \vdots \quad \vdots \quad / \quad \backslash \\ u_n \quad \oplus \quad v \quad w \end{array} (z)$$

$$\forall \begin{array}{c} \otimes \\ / \quad \backslash \\ u_1 \quad \dots \quad \otimes \\ \vdots \quad \vdots \quad / \quad \backslash \\ u_n \quad \oplus \quad v \quad w \end{array} \in \mathcal{I} \quad \text{con } n \geq 1$$

$$S_{\otimes} \begin{array}{c} \otimes \\ / \quad \backslash \\ u \quad v \end{array} (z) = z S_u(z) S_v(z) \quad \forall t = \otimes(u,v) \in \mathcal{I} \quad \text{tal que } v$$

no posee ningún símbolo \oplus en su rama más a la derecha.

Los "puntos suspensivos" que aparecen en la tercera de estas expresiones, es decir el n genérico que se precisa para escribir el sistema anterior hace imposible una manipulación

algebraica de los elementos en juego, por carecerse de una expresión algebraica explícita concreta ("sin puntos suspensivos"). Por otra parte, es evidente que el sistema no se corresponde directamente con el algoritmo en estudio, pues éste no hace (sintácticamente se entiende), ninguna disquisición sobre el caso en el que nos encontramos en lo referente a la cadena $\textcircled{A} \dots \textcircled{X}$ que aparece en el sistema recursivo.

Con lo que parece claro que para este tipo de situaciones la metodología propuesta no es suficiente, y o bien habría que introducir modificaciones adicionales, o bien habría que proponer una filosofía diferente para el estudio sistemático de este tipo de reglas que operan bajo las dos filosofías: bottom-up y top-down. De momento, y en lo que nosotros conocemos, el problema sigue abierto.

Finalmente, como última reflexión sobre nuestro trabajo nos aventuramos a conjeturar lo siguiente

Conjetura : Dado un criterio de simplificación f que verifique:

- Ser estrictamente bottom-up
- El simplificado $f(A)$ de un árbol A se construye combinando ciertos subárboles, a profundidad k , del árbol A' obtenido a partir de A tras simplificar sus hijos; combinación que se realiza de una forma escogida según el resultado de una serie de tests de igualdad (con o sin conmutatividad) entre pares de tales subárboles.

- Todo árbol hoja es simplificado.

- $|f(A)| \leq |A|$

Entonces el algoritmo de simplificación natural asociado tendrá complejidad media lineal respecto al tamaño del input.

Ejemplos : Todos los casos particulares estudiados en el presente trabajo.

Apéndice 1

A continuación detallamos los cálculos utilizados en la demostración del teorema 1.8 del capítulo 2, para la obtención de equivalentes asintóticos de la media y varianza del tamaño de los árboles simplificados, según SIMP, a partir de árboles de tamaño n de una familia simple dada cualquiera.

Partimos de las expresiones dadas en [46] capítulo 2

$$S(z) = \frac{z f'(z)}{f(z)} \left[(1 - c_1 z) f(z) - \alpha(z) \right]$$

$$T(z) = \frac{z f'(z)}{f(z)} \left[2 z S(z) (\phi'(f(z)) - c_1) + z S^2(z) \phi''(f(z)) - \beta(z) \right] \quad [1]$$

Reescribimos la última así :

$$T(z) = \frac{z f'(z)}{f(z)} \left[2 \frac{z (1 - c_1 z) f'(z) - f(z)}{z f'(z)} S(z) + \frac{z f(z) f''(z) - 2 f'(z) [z f'(z) - f(z)]}{z^2 f'^3(z)} S^2(z) - \beta(z) \right] \quad [2]$$

sin más que notar que para cualquier familia simple

$$\frac{1}{1 - z \phi'(f(z))} = \frac{z f'(z)}{f(z)}$$

$$z \phi''(f(z)) = \frac{z f(z) f''(z) - 2 z f'^2(z) + 2 f(z) f'(z)}{z^2 f'^3(z)}$$

Consideremos los desarrollos locales en $z = \rho$ de $f(z)$ y $f'(z)$ dados por [23] en el capítulo 1 y [47] en el capítulo 2, respectivamente

$$f(z) = g(z) (1 - z/\rho)^{1/2} + h(z)$$

$$f'(z) = -\frac{1}{2\rho} g(z) (1 - z/\rho)^{-1/2} + g'(z) (1 - z/\rho)^{1/2} + h'(z)$$

donde $g(z)$ y $h(z)$ son analíticas en $z = \rho$, y quedaron definidas en la citada expresión del capítulo 1.

Sustituyendo estos desarrollos locales en [1] y [2] llegamos a los desarrollos locales anunciados en [48] del capítulo 2 para $S(z)$ y $T(z)$, a los que puede aplicarse el teorema de Darboux. No obstante para la determinación de las constantes K_1 y K_2 resulta más cómodo considerar los desarrollos de Taylor en $z = \rho$ de $g(z)$, $h(z)$, z y $\alpha(z)$:

$$g(z) = g(\rho) - \rho g'(\rho) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) + O\left(\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^2\right)$$

$$h(z) = \tau - \rho h'(\rho) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) + O\left(\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^2\right)$$

$$z = \rho - \rho \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)$$

$$\alpha(z) = \alpha(\rho) - \rho \alpha'(\rho) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) + O\left(\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^2\right)$$

a partir de los cuales obtenemos los siguientes desarrollos locales en términos de $\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{1/2}$, donde para abreviar denotaremos $\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)$ por Δ .

$$f(z) = \tau + g(\rho) \Delta^{1/2} - \rho h'(\rho) \Delta - \rho g'(\rho) \Delta^{3/2} + O(\Delta^2) \quad [3.1]$$

$$f'(z) = -\frac{1}{2\rho} g(\rho) \Delta^{-1/2} + h'(\rho) + \frac{3}{2} g'(\rho) \Delta^{1/2} + O(\Delta)$$

$$z f'(z) = -\frac{1}{2} g(\rho) \Delta^{-1/2} + \rho h'(\rho) + \frac{1}{2} [g(\rho) + 3 g'(\rho)] \Delta^{1/2} - \rho h'(\rho) \Delta - \frac{3}{2} \rho g'(\rho) \Delta^{3/2} + O(\Delta^2)$$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\tau} - \frac{g^2(\rho)}{\tau^2} \Delta^{1/2} + \frac{1}{\tau^2} \left[\frac{g^2(\rho)}{\tau} + \rho h'(\rho) \right] \Delta + O(\Delta^{3/2})$$

$$\frac{z f'(z)}{f(z)} = -\frac{g(\rho)}{2\tau} \Delta^{-1/2} + \frac{1}{\tau} \left[\frac{g^2(\rho)}{\tau} + \rho h'(\rho) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\tau} \left[g(\rho) + 3\rho g'(\rho) - \frac{g^3(\rho)}{\tau} - \frac{3g(\rho)\rho h'(\rho)}{\tau} \right] \Delta^{1/2} + O(\Delta) \quad [3]$$

que sustituidos en [1] nos proporcionan

$$S(z) = A(\rho) \Delta^{-1/2} + B(\rho) \Delta^{1/2} + C(\rho) + O(\Delta) \quad [4]$$

siendo

$$A(\rho) = -\frac{g(\rho)}{2} \left[1 - \rho c_1 - \frac{\alpha(\rho)'}{\tau} \right]$$

$$\begin{aligned}
B(\rho) &= \frac{1}{2} \left[(3\rho g'(\rho) + g(\rho)) \left[1 - \rho c_1 - \frac{\alpha(\rho)}{\tau} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \rho g(\rho) \left[c_1 + \frac{\alpha'(\rho)}{\tau} \right] + \frac{\alpha(\rho)}{\tau} \left[\frac{3g(\rho)ph'(\rho)}{\tau} + \frac{g^3(\rho)}{\tau^2} \right] \right] \\
C(\rho) &= \rho h'(\rho) \left[1 - \rho c_1 - \frac{\alpha(\rho)}{\tau} \right] - \frac{g^2(\rho)}{2\tau^2} \alpha(\rho)
\end{aligned}$$

Y ahora aplicando Darboux a [4] y [3.1] concluimos

$$\frac{v_n}{n} = \frac{[z^n] S(z)}{[z^n] f(z)} = \left[1 - \rho c_1 - \frac{\alpha(\rho)}{\tau} \right] n \quad n \rightarrow \infty$$

Por último, para la obtención del equivalente asintótico de v_n con $n \rightarrow \infty$, consideraremos los desarrollos locales

$$\begin{aligned}
f''(z) &= \frac{-g(\rho)}{4\rho^2} \Delta^{-3/2} - \frac{g'(\rho)}{4\rho} \Delta^{-1/2} + h''(\rho) + O(\Delta^{1/2}) \\
\beta(z) &= \beta(\rho) + O(\Delta)
\end{aligned}$$

que junto a los anteriores nos conducen a

$$\begin{aligned}
T(z) + S(z) &= D(\rho) \Delta^{-3/2} + D_0(\rho) \Delta^{-1} + [E(\rho) + A(\rho)] \Delta^{-1/2} + \\
&\quad + [G(\rho) + C(\rho)] + O(\Delta^{1/2})
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
D(\rho) &= \frac{-A^2(\rho)}{g(\rho)} = -\frac{g(\rho)}{4} \left[1 - \rho c_1 - \frac{\alpha(\rho)}{\tau} \right]^2 \\
D_0(\rho) &= \frac{g(\rho)}{\tau} (1 - c_1 \rho) A(\rho) - \frac{g(\rho)}{\tau} \frac{\alpha(\rho)}{\tau} A(\rho) - \frac{2A^2(\rho)}{\tau} = 0 \\
E(\rho) &= A(\rho) \left[(1 - c_1 \rho) \left[\frac{3ph'(\rho)}{\tau} + \frac{2g^2(\rho)}{\tau^2} - 1 \right] + \frac{\rho \alpha'(\rho)}{\tau} - 1 \right] + \\
&\quad + 2A^2(\rho) \left[\frac{3\rho h'(\rho)}{\tau g(\rho)} + \frac{3g(\rho)}{2\tau^2} - \frac{\rho g'(\rho)}{2g^2(\rho)} - \frac{1}{g(\rho)} \right] + \\
&\quad + \frac{g^3(\rho)}{4\tau^2} (1 - c_1 \rho)^2 + \frac{g(\rho)}{2\tau} \beta(\rho)
\end{aligned}$$

Y de nuevo, aplicando el teorema de Darboux obtenemos para $n \rightarrow \infty$ los siguientes equivalentes asintóticos :

$$\begin{aligned}
[z^n] (T(z) + S(z)) &= D(\rho) \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} -3/2 \\ n \end{matrix} \right] + \\
&\quad + [E(\rho) + A(\rho)] \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} -1/2 \\ n \end{matrix} \right]
\end{aligned}$$

$$[z^n] f(z) = g(\rho) \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} 1/2 \\ n \end{matrix} \right] - \rho g'(\rho) \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} 3/2 \\ n \end{matrix} \right]$$

$$[z^n] S(z) = A(\rho) \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} -1/2 \\ n \end{matrix} \right] + B(\rho) \rho^{-n} (-1)^n \left[\begin{matrix} 1/2 \\ n \end{matrix} \right]$$

Y ahora haciendo uso de las siguientes igualdades

$$\left[\begin{matrix} -3/2 \\ n \end{matrix} \right] = (2n+1) \left[\begin{matrix} -1/2 \\ n \end{matrix} \right] ; \left[\begin{matrix} 1/2 \\ n \end{matrix} \right] = -\frac{2n-3}{3} \left[\begin{matrix} 3/2 \\ n \end{matrix} \right]$$

$$\left[\begin{matrix} -1/2 \\ n \end{matrix} \right] = -(2n-1) \left[\begin{matrix} 1/2 \\ n \end{matrix} \right] ; \left[\begin{matrix} -1/2 \\ n \end{matrix} \right] = \frac{2n-3}{3} (2n-1) \left[\begin{matrix} 3/2 \\ n \end{matrix} \right]$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{[z^n] (T(z) + S(z))}{[z^n] f(z)} &= \frac{4 A^2(\rho)}{g^2(\rho)} n^2 - \frac{2}{g(\rho)} \left[A^2(\rho) \left(\frac{6\rho h'(\rho)}{\tau g(\rho)} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{3 g(\rho)}{\tau^2} + \frac{2\rho g'(\rho)}{g^2(\rho)} - \frac{2}{g(\rho)} \right] + A(\rho) \left[(1 - c_1 \rho) \left(\frac{3\rho h'(\rho)}{\tau} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{2 g^2(\rho)}{\tau^2} - 1 \right) + \frac{\rho \alpha'(\rho)}{\tau} \left. \right] + \frac{g^3(\rho)}{4 \tau^2} (1 - c_1 \rho)^2 + \\ &+ \left. \frac{g(\rho)}{2\tau} \beta(\rho) \right] n \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{[z^n] S(z)}{[z^n] f(z)} \right]^2 &= \frac{4 A^2(\rho)}{g^2(\rho)} n^2 - \frac{4 A(\rho)}{g^2(\rho)} \left[B(\rho) + A(\rho) \left[1 + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{3\rho g'(\rho)}{g(\rho)} \right] \right] n \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Y por fin concluimos

$$\begin{aligned} v_n &= \left[\left[1 - \frac{\rho g'(\rho)}{g(\rho)} - \frac{g^2(\rho)}{2 \tau^2} \right] \left[1 - c_1 \rho - \frac{\alpha(\rho)}{\tau} \right]^2 - \right. \\ &- \frac{g^2(\rho)}{2 \tau^2} (1 - c_1 \rho)^2 - \frac{\beta(\rho)}{\tau} + \left[c_1 \rho + \frac{2\rho \alpha'(\rho)}{\tau} - \right. \\ &- \left. \left. (1 - c_1 \rho) \left[1 - \frac{g^2(\rho)}{\tau^2} \right] \right] \left[1 - c_1 \rho - \frac{\alpha(\rho)}{\tau} \right] \right] n \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Apéndice 2

Queremos dejar constancia en este apéndice de la gran proximidad existente entre los resultados teóricos obtenidos en el capítulo 2 de este trabajo, y los observados experimentalmente. Para ello presentamos, para diversas familias de árboles p -arios, las aproximaciones obtenidas con la ayuda del ordenador, de las constantes teóricas de proporcionalidad asintóticas correspondientes a los parámetros en estudio; así como los resultados proporcionados por simulaciones en ordenador de los procesos estudiados.

Incluimos además los listados de los programas escritos en PASCAL, correspondientes al caso de simplificación bajo idempotencia. Los de los restantes casos son análogos con las consecuentes modificaciones derivadas del criterio de reducción correspondiente.

AFIXACIONES
Criterio de simplificación : SIMP

Aplicado a arboles p-arios con 4 posibles etiquetas para las hojas y un unico tipo de nodo interno

P = 2, A = 2

1 alfa= 0.35053172805 beta= 0.04615793286 alfapri= 4.36711338855
 2 alfa= 0.36952440882 beta= 0.05811401748 alfapri= 4.46877541477
 3 alfa= 0.3676736055 beta= 0.04930058304 alfapri= 4.48598185787
 4 alfa= 0.36079890488 beta= 0.06688991497 alfapri= 4.48879028361
 5 alfa= 0.36080413533 beta= 0.06075401170 alfapri= 4.40927193312
 6 alfa= 0.36080472669 beta= 0.06070551634 alfapri= 4.489734815441

coefmedia = 8.195976365299E-01 coefvarianza = 2.166022579656E-01

P = 2, A = 3

1 alfa= 0.31344221265 beta= 0.03114200821 alfapri= 4.88856025401
 2 alfa= 0.31422993589 beta= 0.03586334738 alfapri= 4.94260978925
 3 alfa= 0.31459047857 beta= 0.03641323155 alfapri= 4.94038366921
 4 alfa= 0.31459543688 beta= 0.03647273123 alfapri= 4.94989737173
 5 alfa= 0.31459594949 beta= 0.03647927036 alfapri= 4.94905083350
 6 alfa= 0.31459588444 beta= 0.03647954957 alfapri= 4.94905697634

coefmedia = 8.952347051858E-01 coefvarianza = 1.182417307306E-01

P = 2, A = 4

1 alfa= 0.29490942454 beta= 0.02340703694 alfapri= 5.72142566268
 2 alfa= 0.29540981585 beta= 0.02592938490 alfapri= 5.75032369918
 3 alfa= 0.29543342637 beta= 0.02614187943 alfapri= 5.76121103516
 4 alfa= 0.29543482751 beta= 0.02615869317 alfapri= 5.7614307857
 5 alfa= 0.29543491243 beta= 0.02615976691 alfapri= 5.76144702957
 6 alfa= 0.29543491766 beta= 0.02616006117 alfapri= 5.76144821268

coefmedia = 9.22614127050408E-01 coefvarianza = 8.0093406134177E-02

DE
COMPLUTENSE
DE
LIVRENSIDAD

MADRID

P = 3, A = 2
 1 alfa= 0.08382714321 beta= 0.00019404486 alfapri= 2.5781002902
 2 alfa= 0.08382720491 beta= 0.00019455448 alfapri= 2.57811414943
 3 alfa= 0.08382720700 beta= 0.00019455533 alfapri= 2.57811417536
 4 alfa= 0.08382720700 beta= 0.00019455533 alfapri= 2.57811417541
 5 alfa= 0.08382720700 beta= 0.00019455533 alfapri= 2.57811417541
 6 alfa= 0.08382720700 beta= 0.00019455533 alfapri= 2.57811417541
 coefmedia = 9.1617279299874E-01 coefvarianza = 8.7425556765052E-02

DE
 P = 3, A = 3
 1 alfa= 0.05200130660 beta= 0.00002468181 alfapri= 3.33039925386
 2 alfa= 0.05200130798 beta= 0.00002469280 alfapri= 3.33039986019
 3 alfa= 0.05200130798 beta= 0.00002469280 alfapri= 3.33039986040
 4 alfa= 0.05200130798 beta= 0.00002469280 alfapri= 3.33039986040
 5 alfa= 0.05200130798 beta= 0.00002469280 alfapri= 3.33039986040
 6 alfa= 0.05200130798 beta= 0.00002469280 alfapri= 3.33039986040
 coefmedia = 9.6533246134701E-01 coefvarianza = 3.5272245674609E-02

COMPLETENC
 P = 3, A = 4
 1 alfa= 0.03810708366 beta= 0.00000576443 alfapri= 4.23594516116
 2 alfa= 0.03810708375 beta= 0.00000576443 alfapri= 4.23594523591
 3 alfa= 0.03810708375 beta= 0.00000576443 alfapri= 4.23594523592
 4 alfa= 0.03810708375 beta= 0.00000576443 alfapri= 4.23594523592
 5 alfa= 0.03810708375 beta= 0.00000576443 alfapri= 4.23594523592
 6 alfa= 0.03810708375 beta= 0.00000576443 alfapri= 4.23594523592
 coefmedia = 8.8094245012004E-01 coefvarianza = 1.9234489731693E-02

UNIVERSIDAD
 P = 3, A = 4

F = 4, A = 2

1	alfa=	0.02786780723	beta=	0.00000013915	alfapri=	2.13678052463
2	alfa=	0.02786780723	beta=	0.00000013915	alfapri=	2.13678052467
3	alfa=	0.02786780723	beta=	0.00000013915	alfapri=	2.13678052467
4	alfa=	0.02786780723	beta=	0.00000013915	alfapri=	2.13678052467
5	alfa=	0.02786780723	beta=	0.00000013915	alfapri=	2.13678052467
6	alfa=	0.02786780723	beta=	0.00000013915	alfapri=	2.13678052467

coefmedia = 9.581988915073E-01 coefvarianza = 4.2304292376791E-02

F = 4, A = 3

1	alfa=	0.01190589019	beta=	0.00000000151	alfapri=	3.09487527227
2	alfa=	0.01190589019	beta=	0.00000000151	alfapri=	3.09487527227
3	alfa=	0.01190589019	beta=	0.00000000151	alfapri=	3.09487527227
4	alfa=	0.01190589019	beta=	0.00000000151	alfapri=	3.09487527227
5	alfa=	0.01190589019	beta=	0.00000000151	alfapri=	3.09487527227
6	alfa=	0.01190589019	beta=	0.00000000151	alfapri=	3.09487527227

coefmedia = 9.8809410981197E-01 coefvarianza = 1.1953141159021E-02

F = 4, A = 4

1	alfa=	0.00663544669	beta=	0.00000000006	alfapri=	4.05346153771
2	alfa=	0.00663544669	beta=	0.00000000006	alfapri=	4.05346153771
3	alfa=	0.00663544669	beta=	0.00000000006	alfapri=	4.05346153771
4	alfa=	0.00663544669	beta=	0.00000000006	alfapri=	4.05346153770
5	alfa=	0.00663544669	beta=	0.00000000006	alfapri=	4.05346153770
6	alfa=	0.00663544669	beta=	0.00000000006	alfapri=	4.05346153770

coefmedia = 9.750332849833E-01 coefvarianza = 4.7049710064291E-03

En cada caso los valores de la primera columna indican hasta que tamaño de árbol irreducible se ha tenido en cuenta en las aproximaciones de los valores alfa(n), beta(n) y alfa(n) y alfa(n) que intervienen en la expresión de los constantes teóricas de proporcionalidad asintótica de la media y varianza del tamaño de los árboles irreducibles según este criterio.
 n es el radio de convergencia de la función generatriz asociada a la familia de árboles input y alfa(n) es el valor de la derivada de la función alfa(z) en z = n.

Aplicado a árboles p-árboles con 4 posibles orientaciones para las ramas, un árbol tiene 24 posibilidades

Tamaño muestral : 300

p = 2 q = 2

Tamaño inicial
 de los árboles
 100
 200
 300

Confianza
 3.153333333333333E-01
 3.177000000000000E-01
 3.193333333333333E-01

Covarianza
 2.492333333333333E-01
 2.163333333333333E-01
 2.175333333333333E-01

p = 2 q = 3

Tamaño inicial
 de los árboles
 100
 200
 300

Confianza
 8.742333333333333E-01
 8.769166666666667E-01
 8.743333333333333E-01

Covarianza
 1.518333333333333E-01
 1.570816666666667E-01
 1.572333333333333E-01

p = 2 q = 4

Tamaño inicial
 de los árboles
 100
 200
 300

Confianza
 9.422333333333333E-01
 9.436333333333333E-01
 9.431777777777778E-01

Covarianza
 3.705444444444444E-01
 3.822333333333333E-01
 3.743333333333333E-01

p = 2 q = 5

Tamaño inicial
 de los árboles
 100
 200
 300

Confianza
 9.842333333333333E-01
 9.847777777777778E-01
 9.847000000000000E-01

Covarianza
 1.002400000000000E-01
 1.004400000000000E-01
 9.782333333333333E-01

p = 3 q = 3

Tamaño inicial
 de los árboles
 100
 200
 300

Confianza
 9.832333333333333E-01
 9.831333333333333E-01
 9.855333333333333E-01

Covarianza
 3.915333333333333E-01
 3.725333333333333E-01
 3.749333333333333E-01

p= 3 t= 4

Tamaño inicial
de los árboles

100
200
300

Coefmedia

9.812666666667E-01
9.814006666667E-01
9.815346666667E-01

Coefvarianza

2.1906222222222E-02
2.1803111111111E-02
1.9222155555556E-02

p= 4 t= 2

Tamaño inicial
de los árboles

100
200
300

Coefmedia

9.5710000000000E-01
9.5633333333333E-01
9.5765555555556E-01

Coefvarianza

4.7125666666667E-02
5.0731111111114E-02
4.4295510518579E-02

p= 4 t= 3

Tamaño inicial
de los árboles

100
200
300

Coefmedia

9.8753333333333E-01
9.8733333333333E-01
9.8745555555556E-01

Coefvarianza

1.1058222222222E-02
1.2637777777778E-02
1.2179962962990E-02

p= 4 t= 4

Tamaño inicial
de los árboles

100
200
300

Coefmedia

9.9563333333333E-01
9.9485000000000E-01
9.9534444444444E-01

Coefvarianza

5.2332222222273E-03
5.5788333333333E-03
4.7977407407439E-03

Aplicado a arboles p-arios con 4 posibles etiquetas para las hojas y un unico tipo de nodo interno

P = 2 .A = 2

1	alfa =	0.3724164804967433	beta =	0.09431218992673690	alfaPr =	4.9320266960478222
2	alfa =	0.3839476043223242	beta =	0.1479989229209145	alfaPr =	5.3814336515195080
3	alfa =	0.385914604180452	beta =	0.1627019697103139	alfaPr =	5.5236411074923502
4	alfa =	0.386452421818529	beta =	0.1721357306125245	alfaPr =	5.5731557275266960
5	alfa =	0.3865870466834709	beta =	0.1741751035861472	alfaPr =	5.580190307166367
6	alfa =	0.38665249708598634	beta =	0.174357739942111	alfaPr =	5.5931700692599792

coefmedia = 8.0648751456507E-01 varcoef = 2.458822842067E-01

DE MADRID

P = 2 .A = 3

1	alfa =	0.3241894036334510	beta =	0.063330209975550	alfaPr =	5.340654337863055
2	alfa =	0.3274113040322490	beta =	0.0827147433971430	alfaPr =	5.7719106809801794
3	alfa =	0.3278924241023724	beta =	0.0870718240477337	alfaPr =	5.8184489724331336
4	alfa =	0.327974823309164	beta =	0.088035212540460	alfaPr =	5.822784489716833
5	alfa =	0.3279884487252401	beta =	0.0882599169988724	alfaPr =	5.8302592072813320
6	alfa =	0.32799898966684751	beta =	0.0882703979410647	alfaPr =	5.8386672114984937

coefmedia = 8.906697030404E-01 varcoef = 1.2790783137378E-01

COMPLUTENSE

P = 2 .A = 4

1	alfa =	0.3029333681116442	beta =	0.047244847410978	alfaPr =	6.14973522319317417
2	alfa =	0.3046331082115958	beta =	0.0574457239006877	alfaPr =	6.2992679724657167
3	alfa =	0.304824529375930	beta =	0.0591433523446624	alfaPr =	6.320257210373211
4	alfa =	0.3048466689702354	beta =	0.059413675234373	alfaPr =	6.32680221024094
5	alfa =	0.3048493841533590	beta =	0.059454433129253	alfaPr =	6.326899696308795
6	alfa =	0.3048497225238748	beta =	0.05946404884485688	alfaPr =	6.3269559335748748

coefmedia = 9.2370754735920E-01 varcoef = 8.5763252659012E-02

En cada caso los valores de la primera columna indican hasta que tamaño de árbol irreducible se ha tenido en cuenta en las aproximaciones de los valores alfa(0), beta(0) y alfaPr(0) que intervienen en la derivación de las constantes teóricas de proporcionalidad asintótica de la media y varianza del tamaño de los árboles irreducibles según este criterio. El radio de convergencia de la función generatriz asociada a la familia de arboles input y alfaPr(0) es el valor de la derivada de la función alfa(z) en z = 0

SIMULACIONES
 Criterio de similitud: SICC

Aplicado a arboles p-arios con 1 posibles etiquetas para las hojas y un unico tipo de nodo interno

Tamaño muestral : 300

p= 2 q= 2

Tamaño inicial
 de los arboles

100
 200
 300

Cof. media
 8.03066666666667E-01
 9.05300000000000E-01
 8.05711111111111E-01

Cof. varianza
 2.859283888890E-01
 2.472133333334E-01
 2.391927407407E-01

p= 2 q= 3

Tamaño inicial
 de los arboles

100
 200
 300

Cof. media
 9.88706666666667E-01
 9.723333333333E-01
 8.876555555555E-01

Cof. varianza
 1.706212222222E-01
 1.180631111111E-01
 1.364088185185E-01

p= 2 q= 4

Tamaño inicial
 de los arboles

100
 200
 300

Cof. media
 9.20986666666667E-01
 9.224333333333E-01
 9.233444444444E-01

Cof. varianza
 1.022052525252E-01
 7.402911111111E-02
 8.249940740743E-02

APROXIMACIONES
Criterio de simplificación : RED

Aplicado a arboles P-arboles con 3 posibles etiquetas para las hojas y un unico tipo de nodo interno

P = 2, n = 2

1 alfa = 0.36936455103 beta = 0.06249550206 alfapri = 4.30961641490
 2 alfa = 0.36633169115 beta = 0.06633406254 alfapri = 4.85397765308
 3 alfa = 0.36733633173 beta = 0.06237192404 alfapri = 4.90273119438
 4 alfa = 0.36751230147 beta = 0.06379965194 alfapri = 5.01153446925

MADRID

coefmedia = 8.1624384926445E-01 coefvarianza = 2.4670597060088E-01

P = 2, n = 3

1 alfa = 0.32473394135 beta = 0.04397881604 alfapri = 5.07430488130
 2 alfa = 0.32710924268 beta = 0.05348002135 alfapri = 5.33496260479
 3 alfa = 0.32735016385 beta = 0.05492584332 alfapri = 5.37168354832
 4 alfa = 0.327373546294 beta = 0.05512794105 alfapri = 5.376660947252

DE

coefmedia = 8.9087484568833E-01 coefvarianza = 1.2669515329370E-01

COMPLUTENSE

P = 2, n = 4

1 alfa = 0.30567081789 beta = 0.03222407577 alfapri = 5.90079821954
 2 alfa = 0.30685944938 beta = 0.03690131174 alfapri = 6.09541253535
 3 alfa = 0.3069447947 beta = 0.03749010258 alfapri = 6.07081235102
 4 alfa = 0.30695095579 beta = 0.03754031282 alfapri = 6.0726187695

coefmedia = 9.2326226105354E-01 coefvarianza = 3.3185195076137E-02

UNIVERSIDAD

En cada caso los valores de la primera columna indican hasta que tamaño de árbol creyó que se ha tenido en cuenta en las aproximaciones de los valores alfa, beta, gamma y delta. Hemos que intervienen en la expresión de las constantes teóricas de proporcionalidad asimétrica de la media y varianza del tamaño de los árboles irreducibles según este criterio. No es el radio de convergencia de la función generatriz asociada a la familia de arboles n-árit. alfapri, beta, gamma, delta, el valor de la derivada de la función alfa(x) en x=1.

SIMULACIONES
Criterio de simplificación RED

Aplicado a árboles p-arios con t posibles estuetas para las hojas y un unico tipo de nodo interno

Tamaño muestral : 300

p= 2 t= 2

Tamaño inicial
de los arboles
100
200
300

Coefmedia
8.02566666666667E-01
8.07750000000000E-01
8.01455555555556E-01

Coefvarianza
3.30166222222222E-01
2.70375000000000E-01
2.3389167407410E-01

p= 2 t= 3

Tamaño inicial
de los arboles
100
200
300

Coefmedia
8.80266666666667E-01
8.92100000000000E-01
8.91388888888889E-01

Coefvarianza
1.87323088888889E-01
1.37818000000000E-01
1.3521018518520E-01

p= 2 t= 4

Tamaño inicial
de los arboles
100
200
300

Coefmedia
9.21100000000000E-01
9.25366666666667E-01
9.22011111111111E-01

Coefvarianza
1.04579000000000E-01
8.15731111111111E-02
8.7053740740774E-02

```

program aprox (output);
(* Este programa calcula aproximaciones para las constantes teoricas
de proporcionalidad asintotica de la media y varianza del tamaño *)
(* de los arboles irreducibles segun SIMP.
Utiliza un array b de listas, cuya componente i-esima contiene la *)
(* informacion relevante acerca de los arboles irreducibles de
tamaño i. Cada nodo de dicha lista corresponde a un tipo (estructura *)
(* tipo) distinto de tales arboles y guarda el numero de arboles
irreducibles de tamaño i con tal estructura, asi como los valores *)
(* en z = ro de la funcion generatriz de los arboles de la familia
input que se reducen a un simplificado de esta estructura, y de *)
(* la derivada de dicha funcion. Se utilizan algunos tecnicismos
en los calculos para no perder precision. *)
(* Se utiliza una lista ll de nodos liberados para aprovechamiento
de la memoria dinamica. *)
const cp = 4; cq = 4; tmax = 6; eps:=1e-10;
type lista =@nodo;
nodo = record num : integer;
          a1,td : real;
          sig: lista;
end;
tamhijos = array(1..cp.) of integer;
base = array(0..tmax.) of lista;
tipos = array(1..cp.) of lista;
var ro,alfa,beta,omega,alfapri,coef,alfat,omegat,proq: real;
    fac,cc,ble,b1,s1,s2,s3,varcoef,sumtpd,prodq,telp: real;
    menos,prod,aux,jj,i,ult,p1,suma,facalfa,facbeta,t,tpult: integer;
    hi,p,q: integer;
    plizos,fin: boolean; b: base; tp: tipos; tm: tamhijos; act: lista;
    ll: vec: lista;
function exponen (x,y: real): real;
begin exponen := exp(y*ln(x)) end;
function f1 (x,ic: real) real; (* Ecuaciones funcionales sobre las
funciones generatrices asociadas a los
elementos de la particion de la familia
input en clases de arboles con idealico
simplificado. *)
begin f1:=exponen(x,p) * z/ro + ic end;
function newton(function f (x,ic: real): real; fi: real): real;
var cnf,fcn,ca: real;
begin cnf:=0;
      fcn:=fi;
      repeat
        cnf := cn;
        cn := cnro/fcn;
        fcn := f(cn,ti);
      until abs(cnf-cn)<=eps;
      newton := cn
end;
procedure nuevonodo; (* Calcula la informacion relevante acerca de
arboles irreducibles de la estructura fijada. Se
basa en la caracterizacion recursiva de los
arboles irreducibles y en el sistema recursivo
que caracteriza la funcion generatriz asociada
al conjunto de arboles input que se reducen a un

```

```

arbol irreducible de la estructura actualmente
en consideracion.
var k,j:integer;
begin if ll = nil then new(act@.sig)
      else begin act@.sig := ll,
                ll:=ll@.sig,
                act@.sig@.sig := nil
            end;
act := act@.sig;
prod := 1; proq := 1; sumqpd:=0;
for k := 1 to p do
begin prod := prod*tp(k.k.)@.num;
      proq := proq*tp(k.k.)@.q1;
      proq := tp(k.k.)@.q2;
      sumqpd := sumqpd+proq/tp(k.k.)@.q1
end;
(* Se va a proceder al ajuste del cardinal de arboles con la
estructura actual, en el caso de que los hijos de la raíz
sean plizos *)
plizos := true; j := 1;
while plizos and (j<=p) do
begin plizos := ((tm(j.)=tm(j+1.))and(tp(j.)=tp(j+1.)));
      j := j+1
end;
if plizos then begin mends:=tp(1.1.)@.num;
                  act@.num := prod - mends
            end
            else act@.num := prod;
act@.q1 := newton (f1,p,q1);
qelp:=act@.q1/co- proq;
act@.qd:=act@.q1/((act@.q1-co)*qelp)*sumqpd/(1-p*co*qelp/act@.q1);
alfat := alfat+qelp*act@.num;
omegat := omeqat+qelp*act@.qd/act@.q1*act@.num
end;
procedure generar; (* genera la lista asociada a los arboles
irreducibles de tamaño t.
En el array tp se fija el tipo (estructura) de los
subarboles del nuevo tipo de arbol irreducible de
tamaño t a considerar . Para ello se recorren las
listas que correspondan, de arboles irreducibles
de tamaño menor o igual que t-1, que ya se encuen
tran almacenadas en las primeras t-1 componentes
de b.
El tamaño de los subarboles radicales viene dado
en cada caso en el array tm .
*)
var i,j:integer;
begin for i:= 1 to p do tp(i.) := b(tm(i.))@.sig;
      fin:=false;
      repeat
      nuevonodo;
      tpult := p;
      while (tpult>1)and(tp(tpult.)@.sig=nil) do tpult:=tpult-1;
      if (tpult=1) and(tp(1.)@.sig=nil)
      then fin:=true
      else begin tp(tpult.) := tp(tpult.)@.sig;

```



```

                                tw(p.) := aux
                                end
until ull = 1 ;
alfa := alfa*alfa*facalfa,
beta := beta*alfa*facbeta,
omega := omega*omega*facalfa,
write ('t:=',alfa,' roxalfa:15:11),
write (' beta:= ',rox(p1))xbeta:15:11);
writeln (' alfapri = ',alfa+p*roxomega:15:11)
end;
(*recogida listas*)
for hi:=0 to tmax do
begin rec:=b(hi.);
while rec@.sig()nil do rec:=rec@.sig,
rec@.sig := ll,
ll:=b(hi.)
end;
(*fin recogida listas*)
alfapri := alfa;
alfa := roxalfa;
beta := roxbeta*(p1);
omega := roxomega*p;
alfapri := alfapri + omega;
cc := (p - 1)/q;
coef := 1 - cc*alfa;
fac := q/(p-1)-alfa;
s1 :=-cc/q*sqrt(fac);
s2 := ((p-1)/q + 2*sqrt(cc))xroxalfapri)xfac,
s3 := p/(p-1) + cc*beta;
varcoef := s1*s2-s3;
writeln;writeln;
write (' coefmedia = ',coef,' coefvarianza = ',varcoef);
writeln;writeln;writeln;
end;
write (' En cada caso los valores de la primera columna indican');
writeln(' hasta que tamaño de árbol irreducible se ha tenido en');
write (' cuenta en las aproximaciones de los valores alfa(ro), ');
writeln (' beta(ro) y alfapri(ro) que intervienen en la expresión');
write (' de las constantes teoricas de proporcionalidad asintótica');
writeln (' de la media y varianza del tamaño de los árboles');
writeln (' irreducibles según este criterio. ');
write (' ro es el radio de convergencia de la función generatriz');
writeln (' asociada a la familia de árboles input x alfapri(ro)');
write (' el valor de la derivada de la función alfa(z) en z = ro');
writeln
end.

```

```

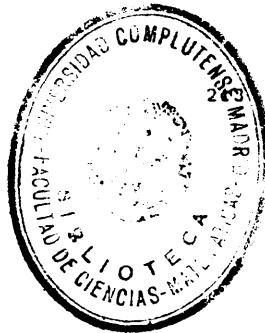
program ssimp (output);
(* Este programa construye arboles p-arios aleatorios, con p etiquetas
para las hojas, siguiendo el principio de Raney : se fabrica una *)
(* palabra con n simbolos asociados a nodos internos y
(p-1)n+1 asociados a hojas ; se toma el conjugado adecuado y se *)
(* genera el arbol .
A los arboles asi creados se les aplica el criterio de *)
(* simplificacion SIMP (idempotencia) .
El programa da las constantes de proporcionalidad asociadas a la *)
(* media y varianza del tamaño de los arboles irreducibles asi
obtenidos . Por tamaño de un arbol se entiende su numero de *)
(* nodos internos . *)
const cp= 4 ; cq= 4 ; no = 0 ; tam=300;nm =300;
type arbol = @nodo;
nodo = record hoja : integer ;
h : array(1..cp.) of arbol end;
lista =@nodolista;
nodolista=record info:integer;sig:lista end;
var aux,a: arbol; i,ts,part,dhijo : integer ;
st,stn,stsc,varianza,coef: real ; p,q:integer;
procedure unif ( var s : integer ; var vun : real ) ;
const fact = 25173 ; inc = 13849 ; modulo = 65536 ;
begin s := (fact *s + inc) mod modulo ;
vun := s/65535
end ;
function hojaaleat (rango : integer ; var sem : integer) : integer;
var v : real ;
begin
unif (sem,v);
hojaaleat := trunc(v*rango) + 1
end ;
procedure construir (var a: arbol;t:integer);
var tp,num,den,i,j,dir,mindir:integer;vu:real;
ran,fin,mnt,flp:lista;
procedure fabricar (var aa:arbol);
var l,k:integer;
begin aa@.hoja := flp@.info;
if flp@.info < no
then begin for k := 1 to p do aa@.h(.k.):=nil;
flp:=flp@.sig
end
else begin flp := flp@.sig;
for l := 1 to p do
begin
new(aa@.h(.l.));
fabricar (aa@.h(.l.))
end
end;
end;
begin
new(ran);
fin:=ran;dir:=0,num:=t,tp:= p*t+1;
den:=tp;i:=0;mnt:=nil;mindir:=0;
repeat unif(dhijo,vu);
if vu < (num/den)

```

```

        then begin num := num-1;
                den := den-1;
                dir := dir*tp-1;
                fin@.info := no
        end
    else begin den := den-1;
                dir := dir-1;
                fin@.info := hojaaleat(1,part);
                if dir < windir
                then begin windir := dir;
                        ant := fin
                end
            end;
        fip := fin;
        new(fin@.sig);
        fin := fin@.sig;
        fin@.sig:=nil;
        i := i+1
    until num = 0;
    for j := i to tp-1 do
        begin
            fin@.info := hojaaleat(1,part);
            dir:=dir-1;
            if dir < windir
            then begin windir := dir;
                    ant:=fin
            end;
            fip := fin;
            new(fin@.sig);
            fin := fin@.sig;
            fin@.sig := nil
        end;
        fip@.sig := ran;
        ran := ant@.sig;
        ant@.sig := nil;
        new(a);
        a@.h(i.):= nil ;
        fip := ran;
        fabricar(a);
        ran:=nil
    end;
function dosigu (a1,a2 : arbol ) : boolean ;
var igu : boolean ; i : integer ;
begin igu := true ;
    if a1@.hoja < a2@.hoja
    then igu := false
    else if a1@.hoja = no
        then begin i := 1 ;
                while (l (= p) and igu do
                    begin
                        igu:=dosigu(a1@.h(i.),a2@.h(i.));
                        i := i + 1
                    end
                end ;
            dosigu := igu
        end
    end;

```

```
end;
function iguales (ar:arbol) : boolean ;
var equ : boolean ; j : integer ;
begin if ar@.hoja () no
then iguales := true
else begin equ := true ; j := 1 ;
while (j <= (p-1)) and equ do
begin equ := dosigu (ar@.h(j.),ar@.h(j+1.));
j := j+1
end ;
iguales := equ
end
end;
procedure simplificar (var a : arbol) ;
var ig : boolean ; j : integer ;
begin
if a@.hoja = no
then begin for j := 1 to p do simplificar (a@.h(j.)) ;
ig := iguales(a) ;
if ig then a := a@.h(1.)
end;
end;
function tamaño (a:arbol) : integer ;
var i,tw : integer ;
begin if a@.hoja () no
then tamaño := 0
else begin tw := 1 ;
for i := 1 to p do
tw := tw + tamaño (a@.h(i.));
tamaño := tw
end
end;
(* programa principal *)
begin writeln(' Tamaño inicial de los arboles : ',tam:6);
for p := 2 to cp do
for q := 2 to cq do
begin writeln(' p=',p:4,' q=',q:4); writeln; writeln;
part := 9426; dhijo := 60659;
st := 0 ; stsc := 0;
for i := 1 to nm do
begin mark(aux);
construir (a,tam);
simplificar (a) ;
ts := tamaño (a) ;
release(aux);
stsc := stsc + ts*ts ;
st := st + ts;
end;
stn:=sqr(st)/nm;
varianza :=(stsc - stn)/nm;
coef := varianza/tam;
write (' coefmedia = ',st/(nm*tam));
writeln (' coefvarianza = ',coef)
end
end.
end.
```

CC-DRS

COMPLUTENSE

UNIVERSIDAD

CC-DRS

Bibliografía

- [AHU74] A.V. Aho, J.E. Hopcroft, J.D. Ullman.
The Design and Analysis of Computer Algorithms.
Addison-Wesley, Reading (1974) .
- [BE70] E.R. Berlekamp
Factoring Polynomials Over Large Finite Fields
Math. Comp. 24 (1970) págs 713-135
- [Be71] C. Berge
Principles of Combinatorics
Mathematics in Science and Engineering, Vol 72 ,
Academic Press, New-York (1971)
- [BR82] J. Berstel, C. Reutenauer
Recognizable Formal Power Series on Trees.
Theoretical Computer Science 18 (1982) págs 118-145
- [Ca61] H. Cartan
Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une
ou plusieurs variables complexes.
Hermann, Paris (1961)
- [CO74] L. Comtet
Advanced Combinatorics
Reidel, Boston (1974)
- [CS86] R. Casas, J.M. Steyaert
Bottom-up Recursion in Trees.
Proceedings of CAAP'86, 11th Colloquium, Niza, (1986)
Springer Verlag.
- [Ch75] L. Chottin
Une démonstration combinatoire de la formule de
Lagrange à deux variables
Discrete Math. 13 (1975) págs 215-224
- [Da1878] G. Darboux
Mémoire sur l'approximation des fonctions de très
grands nombres, et sur une classe étendue de
développements en série.
Journal de Mathématiques Pures et appliquées.
Serie 3 , tomo VI (Enero 1878) págs 1-56

- [Di68] J. Dieudonné
Calcul Infinitésimal
Herman, Paris (1968)
- [Di82] J. Diaz
Complejidad concreta y complejidad abstracta : un
panorama actual.
R.T. 82/02 Fac. Informática Univ. Politécnica de
Cataluña (1982)
- [FC87] M.I. Fernández-Camacho
Tamaño medio de árboles simplificados.
Pendiente de publicación en Qüestió.
- [F179] P. Flajolet
Analyse d'Algorithmes de Manipulations d'Arbres et
Fichiers
Tesis (1979) publicada en Cahiers du B.U.R.O.
no 34-35, Paris (1981)
- [F185] P. Flajolet
Mathematical Analysis of Algorithms and Data
Structures
En A Graduated Course in Computation Theory,
Computer Science Press (1985)
- [F082] P. Flajolet, A. Odlyzko
The Average Height of Binary Trees and Other Simple
Trees
Journal C.S.S., vol 25, no 2 , (Oct. 1982)
págs 171-213
- [FS82] P.Flajolet, J.M. Steyaert
A Branching Process Arising in Dynamic Hashing, Trie,
Searching and Polynomial Factorization.
En Proceedings of the 9th ICALP Colloquium ,
Lectures Notes in Computer Science no 140 ,
Springer Verlag (1982) págs 239-251
- [FS83] P. Flajolet, J.M. Steyaert
A Complexity Calculus for Recursive Trees Algorithms
R.R. no 239 , INRIA (Oct. 1983) publicado en
Mathematical Systems Theory, 19 (1987) págs 301-331

- [Go60] I.J. Good.
Generalizations to Several Variables of Lagrange's
Expansion, with Applications to Stochastic Processes
Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 56
(1960) págs 367-380
- [Go65] I.J. Good.
The Generalization of Lagrange's Expansion and the
Enumeration of Trees
Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 61
(1965) págs 499-517
- [He74] P. Henrici
Applied and Computational Complex Analysis vol 2 ,
J. Wiley, New-York (1974)
- [Ho79] J. Hofbauer
A Short Proof of the Lagrange-Good Formula
Discrete Math. 25 (1979) págs 135-139
- [HRS75] F. Harary, R.W. Robinson, A.J. Schwenk
Twenty-step Algorithms for Determining the Asymptotic
Number of Trees of Various Species
Journal Australian Mathematical Society 20 (1975)
págs 483-503
- [HS65] J. Hartmanis, R.E. Stearns
On the Computational Complexity of Algorithms
Transactions of the American Mathematical Society 117
(1965) págs 285-306
- [HS76] E. Horowitz, S. Sahni
Fundamentals of Data Structures
Pitman (1976)
- [Ka76] R.M. Karp
The Probabilistic Analysis of Some Combinatorial
Search Algorithms
En Algorithms and Complexity. News Directions and
Recent Results, Ed. J.F. Traub. Academic Press,
(1976) , págs 1-19

- [KM70] V. Klee, G.J. Minty
How Good is the Simplex Algorithm ?
Mathematical Note no 643 , Boeing Scientific Research
Laboratories (1970)
- [Kn68] D.E. Knuth
The Art of Computer Programming : Fundamental
Algorithms
Addison Wesley, Reading (1968)
- [Kn69] D.E. Knuth
The Art of Computer Programming : Semi-numerical
Algorithms
Addison Wesley, Reading (1969)
- [Kn73] D.E. Knuth
The Art of Computer Programming : Sorting and
Searching
Addison Wesley, Reading (1973)
- [La81] D. Lazard
Factorisation de Polynômes
en IV Journées Algorithmiques, Poitiers (1981)
- [Ma73] J.E. Marsden
Basic Complex Analysis
Freeman and Company, San Francisco, (1973)
- [MM78] A. Meir, J.W. Moon
On the Altitude of Nodes in Random Trees
Canadian Journal of Mathematics Vol XXX , no 5 (1978)
págs 997-1015
- [Ni75] M. Nivat
On the Interpretation of Recursive Polyadic Program
Schemes
Symposia Mathematica 15, Bologna (1975) págs 225-281
- [Od82] A. Odlyzko
Periodic Oscillations of Coefficients of Power Series
that Satisfy Functional Equations
Advances in Mathematics 44 (1982) págs 180-205

- [Ra60] G.N. Raney
Functional Composition Patterns and Power Series
Reversion
Transactions of the American Mathematical Society 94
(1960), págs 441-451
- [Ra76] M.O. Rabin
Probabilistic Algorithms
En Algorithms and Complexity. News Directions and
Recent Results, Ed. J.F. Traub. Academic Press,
(1976) , págs 21-39
- [Re80] J.L. Rémy
Un procédé itératif du dénombrement d'arbres binaires
et son application à leur génération aléatoire
R.R. no 80-P-053, CRIN. Nancy
- [SF83] J.M. Steyaert, P. Flajolet
Patterns and Pattern Matching in Trees : an Analysis
Information and Control 58, (1983), págs 19-58
- [St84] J.M. Steyaert
Structure et Complexité des Algorithmes
Tesis, Paris (1984)
- [Th73] J.W. Thatcher
Tree Automata : an Informal Survey
En Currents in the Theory of Computing (Ed. A.V. Aho)
Prentice Hall (1975) págs 143-178
- [Tu75] W.T. Tutte
On Elementary Calculus and the Good Formula
Journal of Combinatorial Theory (B) 18, (1975)
págs 97-137