UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

Valoraciones reales en cuerpos reales de funciones

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Carlos Andradas Heranz

DIRECTOR:

Tomás Recio Muñiz

Madrid, 2015

Carlos Andradas Heranz

VALORACIONES REALES EN CUERPOS REALES DE FUNCIONES

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1983

Colección Tesis Doctorales. Nº 237/83

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1983
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-37582-1983

U N I V E R S I D A D   C O M P L U T E N S E   DE   M A D R I D

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA Y FUNDAMENTOS

Valoraciones reales en cuerpos reales de funciones

Memoria presentada por Carlos
Andradas Heranz para optar al
Grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas

Madrid, Junio, 1982

A Jonás,

que llegó mientras esta
memoria se concluía, y

A Lina

que me acompañó en toda ella.

"No puede estar claro, si lo estuviera sería falso, sería científicamente verdadero quizá, pero falso como absoluto. La claridad es una exigencia intelectual y nada más. Ojalá pudiéramos saber claro, entender claro al margen de la ciencia y la razón. Probablemente la única áncora de salvación sea la ciencia, el uranio 235, esas cosas. Pero además hay que vivir".

Julio Cortázar: Rayuela

Este trabajo ha sido dirigido por los profesores D.W. Dubois y T. Recio; hacia ellos mi más sincero agradecimiento por el tiempo y la acogida humana dispensados. Quiero agradecer también la ayuda de cuantos, de una manera u otra han contribuido a la realización de esta memoria. A G. Efroymson, V. Espino y cuantos hicieron posible una estancia agradable en Alburquerque. A mis compañeros J.M. Gamboa, J. Ruiz y M.E. Alonso por su incondicional apoyo y sugerencias, así como al resto del Departamento de Algebra y Fundamentos y su director D. Pedro Abellanas. También a Soledad por el esfuerzo realizado en la mecanografía y por último a mis padres, sin cuya ayuda esta disertación no existiría.

INDICE

INTRODUCCION

Aunque los trabajos de Kummer [1847 , 1851] sobre los cuerpos ciclotómicos pueden describirse en lenguaje moderno como el estudio de las valoraciones del cuerpo $\mathbb{Q}[\zeta]$ (siendo ζ una raíz p-ésima de la unidad, p un primo impar), no hay ninguna duda en situar el origen de la teoría de las valoraciones y lugares en la memoria de Dedekind y Weber [1882], en la que dan una descripción algebraica de los resultados de Riemann, en particular de su superficie S de una curva algebraica.

Brevemente, su método es el siguiente: cada punto $z_o \in S$ define una aplicación $\nu_{z_o} : K \to \mathbb{Z} : f \to \nu_{z_o}(f)$ del cuerpo K de funciones racionales de S en $\mathbb{Z}$, donde $\nu_{z_o}(f)$ es el orden de la serie obtenida al desarrollar f en serie de potencias en el parámetro de uniformización de Puiseux de la curva en z_o. La superficie de Riemann queda, pues, descrita como el conjunto de valoraciones discretas del cuerpo K. De este modo, prescindiendo del contexto geométrico, Dedekind y Weber definen la superficie de Riemann de un cuerpo dado K, extensión finita de $\mathbb{C}(X)$, como el conjunto de valoraciones discretas de K. En su teoría utilizan sólamente la propiedad de que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado y de característica cero, pero nunca argumentos topológicos, y dan, entonces, un primer paso hacia la geometría algebraica sobre un cuerpo arbitrario. También, mediante el uso de valoraciones, introducen la noción de divisor, abriendo las puertas a las sucesivas generalizaciones del teorema de Riemann-Roch.

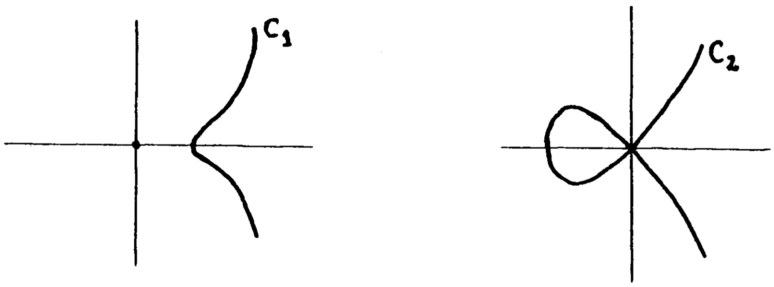
Krull en 1931 estudia las valoraciones generales en un cuerpo arbitrario, introduce la noción de anillo de valoración en el sentido actual y establece la relación entre la dependencia entera y las valoraciones. Pero es Zariski, en sus trabajos sucesivos, quien resalta la importancia geométrica de la normalización y con ella la de las valoraciones.

Citemos simplemente sus trabajos sobre uniformización local [1940] que constituyen la piedra angular de su resolución de singularidades para dimensiones dos y tres ([1942] y [1944] respectivamente) y donde introduce la noción de superficie abstracta de Riemann como el conjunto de todas las valoraciones de un cuerpo, a la que dota de una topología, respecto de la cual es compacta y no T_2, y que da lugar a la topología de Zariski para variedades. Destaca también su teoría de correspondencias birracionales [1940] que da significado preciso a los métodos italianos y que culmina con su Teorema principal (Zariski's Main Theorem): "si T es una correspondencia birracional entre una variedad normal V y una variedad V', a un punto $P \in V$ le corresponde bien un único punto $P' \in V'$, o bien una subvariedad W' de V' cuyas componentes irreducibles son todas de dimensión mayor o igual que uno".

Desde entonces, aunque la resolución general de singularidades por Hironaka [1962] no está basada en las valoraciones, la teoría de lugares es uno de los capítulos clásicos tanto en el álgebra como en la geometría. Nuestra opinión es que en el estudio de la geometría algebraica sobre cuerpos realmente cerrados (lo que se ha dado en llamar geometría real) las valoraciones (reales) desempeñan un papel más importante si cabe que en la geometría sobre cuerpos algebraicamente cerrados, por las razones que iremos exponiendo en esta introducción.

Antes de ello recordemos la estrecha relación existente entre lugares y especializaciones. La noción de especialización fue introducida por Van der Waerden [1925, 1927] como una generalización, a cuerpos carentes de topología, del proceso de paso al límite: "Sea K una extensión de k y sean $(x_i) = (x_1,\dots,x_n)$, $(y_i) = (y_1,\dots,y_n)$ dos puntos del espacio afín K^n. (y_i) es una especialización de (x_i) si para todo polinomio $F(X_1,\dots,X_n) \in k[X_1,\dots,X_n]$ tal que $F(x_1,\dots,x_n) = 0$ se tiene que $F(y_1,\dots,y_n) = 0$". Equivalentemente, una especialización es un homomorfismo no trivial de un anillo R (en el caso anterior $k[x_1,\dots,x_n]$) en un cuerpo K. La conexión entre lugares y especializaciones viene dada por el teorema de extensión de especializaciones probado primero por Van der Waerden usando teoría de eliminación y por Weil y Chevalley en la forma actual: "Si A es un dominio de integridad y K es un cuerpo que contiene a A, toda especialización ϕ de A en un cuerpo L se extiende a un lugar de K en la clausura algebraica de L".

Iniciando nuestras consideraciones sobre geometría real, surge inmediatamente la necesidad de estudiar un tipo particular de anillos de valoración. Consideremos por ejemplo las curvas en $\mathbb{R}^2$: $C_1 \equiv x^2+y^2-x^3 = 0$ y $C_2 \equiv x^2-y^2-x^3 = 0$, y designemos sus cuerpos de funciones por K_1 y K_2 respectivamente.



Ambas poseen una especialización

$$\phi : \mathbb{R}[x,y] \to R,$$

$\phi(x) = \phi(y) = 0$, y en ambas dicha especialización se extiende a dos lugares de los cuerpos K_i con centro el origen. ¿Cómo distinguir algebraicamente la evidencia topológica de que en la primera curva el origen es un punto aislado mientras que en la segunda no? la respuesta está en los cuerpos residuales de los lugares. Mientras que los lugares de K_1 tienen cuerpo residual $\mathbb{C}$, los de K_2 tienen cuerpo residual $\mathbb{R}$. Estos reflejan las dos ramas reales a través de (0,0) y aquellos las ramas imaginarias cuya intersección es el punto real (0,0).

Profundizando un poco más en la situación anterior se aprecia que si k representa cualquiera de los cuerpos $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, y V una variedad algebraica sobre k, la contrapartida algebraica al paso al límite en $P = (a_1,\ldots,a_n)$, o que P sea un punto límite, no es tanto la noción de especialización,

$$\phi : k[V] \to k, \qquad \phi(x_i) = a_i$$

como la de lugar $\phi : k(V) \to k$ centrado en P en V. Ahora bien, ambos conceptos son básicamente análogos si $k = \mathbb{C}$, por el teorema de extensión de especializaciones ya citado, mientras que son radicalmente distintos si $k = \mathbb{R}$. Yendo un poco más lejos, la diferencia esencial estriba en la buena relación existente entre la topología de Zariski y la usual en $\mathbb{C}$, relación que desaparece en $\mathbb{R}$:

"Sea X una variedad algebraica irreducible de dimensión r en $\mathbb{C}^n$ y sea X_o un abierto de Zariski de X. Entonces, X_o es denso en X con la topología usual de $\mathbb{C}^n$".

Obsérvese que en el ejemplo anterior, $X_o = C_1 \setminus \{(0,0)\}$ es un abierto de Zariski de C_1, pero $\overline{X}_o \neq C_1$, donde $\overline{X}_o$ representa la clausura en la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

Nuestro objeto de estudio en esta memoria son los lugares o anillos de valoración cuyo cuerpo residual es $\mathbb{R}$, o más generalmente, cuyo cuerpo residual es un cuerpo real, i.e. ordenable. Tales lugares (respect. valoraciones, anillos de valoración) reciben el nombre de *reales*.

Así, corroborando lo expuesto en el párrafo anterior acerca de la idoneidad de los lugares para la explicación del paso al límite, probamos que si ϕ es un lugar real del cuerpo de funciones de una variedad algebraica V que está centrado en un punto $P \in V$, el ideal de dicho punto es localmente real (ver la definición que sigue), lo que equivale a decir que P es un punto límite de puntos regulares de V. Más generalmente, consideramos la

<u>Definición (2.1)</u> (*).- *Sean* A *un subanillo de un cuerpo real* K *y* p *un ideal de* A. *Decimos que* p *es localmente real en* A *con respecto a* K *si* p *es radical y para cada* $h,g \in A$, $h = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $g = \sum_{j=1}^{m} y_j^2$, $x_i, y_j \in K$ *tales que* $h+g \in p$, *se tiene* $h,g \in p$. *Diremos, simplemente que* p *es localmente real si* K *es el cuerpo de fracciones de* A.

Demostramos los teoremas siguientes:

<u>Teorema (3.13)</u>.- *Sea* A *un subanillo de un cuerpo real* K *y sea* p *un ideal primo de* A. p *es centro en* A *de un lugar real de* K *si y sólo si* p *es localmente real en* A *con respecto a* A.

<u>Teorema (2.11)</u>.- *Sea* V *una variedad algebraica real irreducible de* R^n *(*R *un cuerpo realmente cerrado arbitrario). Sea* W *una subvariedad de* V *y* $q = J(W)$ *su ideal en* $R[V]$. *Entonces* q *es localmente real si y sólo si* $W \cap V_c$ *es Zariski-denso en* W.

(Recordamos que V_c representa el conjunto de puntos centrales de V, i.e. la clausura en la topología del orden del conjunto de puntos simples de V).

Queda así de manifiesto, cómo la existencia de un lugar real centrado en una subvariedad implica la realidad local de di-

---

(*) Las definiciones, teoremas, etc. que aparecen en la introducción llevan la numeración que les corresponde en la memoria.

cha subvariedad, es decir su contacto con la parte central de la variedad.

A partir del teorema 3.13, los ideales localmente reales aparecen como la clase de ideales adecuados para describir los anillos de valoración reales, y toma cuerpo la posibilidad de elaborar una teoría general de valoraciones reales a partir de ellos. Esto ha sido la columna vertebral del presente trabajo a nivel general en el primer capítulo y centrándonos en cuerpos de funciones en los dos siguientes.

El capítulo primero forma la teoría básica para el desarrollo de los restantes. Para ello se organizan, en la línea general que acabamos de mencionar, contribuciones nuevas junto a algunos resultados ya conocidos, aunque las demostraciones que se incluyen son originales.

Por ejemplo, el enunciado de 2.11 aparece en $[Br_1]$, pero nuestra demostración, basada en el principio de Tarski, resuelve el problema planteado en $[Br_2]$ sobre la posibilidad de obtener una demostración directa del resultado. (Indiquemos que la única demostración conocida del mismo es extraordinariamente larga y usa a su vez anillos de valoración. En la nuestra el principio de Tarski (cf. 2.7) es utilizado para demostrar una desigualdad de Hörmander-Łojasievicz para un cuerpo realmente cerrado arbitrario (cf. 2.9).

El teorema de caracterización de los anillos de valoración reales de K, (3.10), como los elementos maximales, respecto de la relación de dominación, del conjunto $\mathcal{F}$ de subanillos locales de K cuyo ideal maximal es localmente real, es nuevo en esta forma y pone claramente de manifiesto la similitud con la teoría general de valoraciones, donde el mismo resultado, suprimiendo la condición de la realidad local, caracteriza los anillos de valoración de K.

Siguiendo el camino clásico caracterizamos en el §4 la intersección de los anillos de valoración reales que contienen a un subanillo A dado. Dicha intersección recibe el nombre de *clausura semientera* de A en K, término introducido en $[Br_1]$. Señalamos que algunos de los resultados sobre la clausura semientera expuestos en este epígrafe han sido obtenidos también, independientemente por Robson en $[Ro]$, trabajo del que tuvimos conocimiento en octubre de 1981, cuando este primer capítulo estaba concluido. En particular, si A es el anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros, la clausura semientera de $\mathbb{Z}$ es la intersección de todos los anillos de valoración reales del cuerpo K. Es inmediato comprobar que dicha clausura coincide con la intersección $H(K)$ de los anillos de valoración de los lugares $\phi : K \to \mathbb{R},\infty$ que toman valores en $\mathbb{R}$, y donde ϕ no tiene por qué ser sobreyectivo. Este anillo, que ha sido estudiado de forma exhaustiva recientemente, recibe el nombre de anillo de holomorfía de K por las razones que expondremos a continuación y tiene interesantes aplicaciones a la geometría y al álgebra (cf. $[S_1]$, $[S_2]$, $[Be_1]$ y $[Be_2]$).

Si consideramos el conjunto $\mathcal{M}$ de lugares de $\phi : K \to \mathbb{R},\infty$ como la transcripción real de la superficie de Riemann de K, cada elemento $a \in K$ puede considerarse como una función de $\mathcal{M}$ en

$\mathbb{R}$,

$$a : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, \infty \quad : \lambda \to \lambda(a).$$

Diremos que la función a tiene un polo en el punto $\lambda \in \mathcal{M}$ si $a(\lambda) = \infty$, y diremos que a es holomorfa en $\mathcal{M}$ si carece de polos. Con esta notación, resulta evidente que $H(K)$ es el conjunto de funciones de K que son holomorfas en $\mathcal{M}$, lo que justifica el nombre de anillo de holomorfía. Más aún, podemos considerar en $\mathcal{M}$ la topología inicial para la familia de funciones: $\{a \in K\}$. No es difícil demostrar, que dicha topología coincide con la topología inicial para las funciones $\{a \in H(K)\}$. Este es el origen de la buena relación existente entre K y $H(K)$, que hace del anillo de holomorfía un instrumento eficaz para el estudio de propiedades algebraicas de K (ver [Be_2]) o geométricas, en el caso particular de tratarse de un cuerpo de funciones (ver [Sch_1] y [Sch_2]), aplicaciones que no explicaremos aquí, y para las que referimos a las obras mencionadas.

La noción de compatibilidad local de órdenes introducida en el epígrafe 5 es, también, original y surge de modo natural al estudiar el comportamiento de las sumas de cuadrados por paso al cociente. Señalemos, en este sentido, el siguiente problema planteado por Gondard ([Go], [G-R]) y Recio ([Re_3]): Sea V una variedad algebraica real irreducible de R^n y sea W una subvariedad de V, $p = J(W)$ el ideal de W en $R[V]$. Supongamos que $f \in R[V]$ es una función tal que $f+p$ es suma de cuadrados en $R(W)$. ¿En qué condiciones, existe $g \in R[V]$ que es suma de cuadrados en $R(V)$ y de forma que $f+p = g+p$?. Demostramos el siguiente resultado:

Proposición (5.3).- *Con la notación anterior, si*

$$\overline{\{f < 0\}} \cap W \cap V_c = \emptyset$$

entonces existe $g \in R[V]$, *suma de cuadrados en* $R(V)$ *tal que* $f+p = g+p$.

Un resultado similar, pero con la hipótesis adicional de que $\{f < 0\}$ es acotado aparece en [G-R] (teorema 2, pág. 43). Sin embargo, un adecuado uso del principio de Tarski permite suprimir dicha condición. Por último, el capítulo primero termina con algunos resultados de ascenso de ideales localmente reales a extensiones semienteras, enunciados en términos de la compatibilidad local de órdenes, y que son utilizados, de manera esencial, repetidas veces en la memoria.

Permítaseme, rompiendo la ordenación de epígrafes del trabajo, hablar del problema del cono tangente real, para enfatizar al máximo la idea expuesta anteriormente acerca del paso al límite. Si definimos el cono tangente: $C_K(V,p)$ a una variedad V de K^n (donde $K = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$) en el punto $p = (0,\dots,0)$ como el conjunto de puntos que yacen en rectas límites de rectas del haz de vértice p y secantes a V, dicho conjunto admite, en el caso complejo, una traducción algebraica inmediata: $C_{\mathbb{C}}(F,p)$ es la variedad definida por el ideal de las formas iniciales de los elementos de $J(V)$. O, siguiendo a Samuel [Sa], $C_{\mathbb{C}}(V,p)$ es el conjunto de puntos $(y_i) = (y_1,\dots,y_n)$ tales que $(0,\dots,0;0;y_1,\dots$ $\dots,y_n)$ es una especialización de $(x_1,\dots,x_n;u;y_1,\dots,y_n)$ donde $(x_1,\ldots,x_n)$ es un punto genérico de V y $x_i = u.y_i$ $(i=1,\ldots,n)$.

Ahora bien, si $K = \mathbb{R}$, ya hemos observado, que la noción de especialización no es correcta para la descripción del paso al límite, debiendo ser sustituida por la de lugar real. Esta inadaptación queda sobradamente manifiesta en el cono tangente real. En §11 definimos tres conos diferentes, asociados a la variedad V en p en $\mathbb{R}^n$, estudiamos la relación entre ellos y damos ejemplos que muestran la nula información -ni siquiera en cuanto a la dimensión- que el ideal de las formas iniciales arroja sobre $C_{\mathbb{R}}(V,p)$. Así por ejemplo, las superficies en $\mathbb{R}^3$ definidas por las ecuaciones

$$Z(X^2+Y^2) - X^3 = 0 \qquad \text{y} \qquad Z(X^2+Y^2)-X^3+Z^5 = 0$$

tienen la misma forma inicial, pero sus conos tangentes en el origen (en $\mathbb{R}^3$) son diferentes (cf. 11.8). Por otra parte, al usar lugares reales, nos vemos siempre situados -a la vista del teorema 2.11- en la parte central de la variedad. Esto obliga a construir el cono tangente real como una unión finita de sus piezas procedentes de las variedades V, Sing (V), Sing $(\mathrm{Sing}\,(V)),\ldots,$ proceso que prueba, simultáneamente, que $C_{\mathbb{R}}(V,p)$ *es un conjunto semialgebraico cerrado,* en general no algebraico, como muestran los ejemplos 11.8.

El capítulo II comienza con el problema de extensión de lugares reales (§6), para pasar inmediatamente después al de su existencia en cuerpos de funciones, objetivo principal de esta disertación. Ambos problemas tienen su origen en el célebre trabajo de Lang en 1953 [L]. Ya hemos comentado anteriormente, que el teorema de extensión de especializaciones es falso en el caso real, es decir, en general, dados un dominio de integridad A, un cuerpo K que contiene a A y una especialización ϕ de A en un cuerpo real L, no podemos asegurar que ϕ se extienda a un lugar de K en la clausura real de L. Lang demuestra (op. cit.) que si se toma como punto de partida, no una especialización de un subanillo de K, sino un lugar de un subcuerpo k de K, la extensión sí es posible, aunque en un sentido muy restrictivo. De modo preciso:

<u>Teorema de extensión de lugares de Lang</u>: *Sea* K *un cuerpo real y sea* ϕ *un lugar real de* K *con valores en un cuerpo realmente cerrado* L. *Entonces* Φ *se extiende a un lugar real, con valores en* L, *de una clausura real de* K.

La demostración de Lang está basada en la teoría de órdenes, en concreto, en la consideración del conjunto de elementos de K que son finitos con respecto a un cierto subcuerpo k de K y un cierto orden β de K:

$$A(K,k) = \{x \in K : \quad a \in k \quad \text{con} \quad a \pm x \in \beta\}$$

Sin embargo, el teorema anterior resulta extremadamente vago en el siguiente sentido: ¿Cuál es la clausura real de K a la que se extiende ϕ? ¿Puede fijarse dicha clausura de antemano, es decir, puede enunciarse el anterior teorema en un sentido estricto: dados

K y $\overline{K}$ clausura real de K, ϕ se extiende a un lugar de $\overline{K}$...? ¿De cuantas maneras puede extenderse ϕ?.

Es Knebusch en [K] quien da una respuesta precisa a las preguntas anteriores: la condición que relaciona el lugar ϕ con un orden β de K que determina una clausura real a la que ϕ se extiende es que β y ϕ son compatibles de la manera siguiente: "si $x \in K$ es positivo en β entonces $\phi(x) \geqslant 0$ en L o $\phi(x) = \infty$ (obsérvese que en L hay un único orden por ser realmente cerrado)". Esta compatibilidad es, de hecho, una condición necesaria para que la extensión sea posible, como puede comprobarse fácilmente: supongamos que $\overline{\phi} : \overline{K} \to L$ es una extensión de $\phi : K \to L$. Puesto que en $\overline{K}$ y L hay un único orden, la condición de compatibilidad se verifica automáticamente, y por tanto ϕ es, a su vez, compatible, con la restricción β del orden de $\overline{K}$ a K. Knebusch demuestra que dicha condición es también suficiente, y que además, la extensión de ϕ a $\overline{K}$ es única.

Es también Knebusch (op. cit.) quien se ocupa del siguiente problema: Sea $\phi : K \to L,\infty$ un lugar real con valores en el cuerpo realmente cerrado L, y sea F una extensión finita de K. ¿Cuántas extensiones existen de ϕ a lugares de F en L?. Para ello, denotemos por $W(K)$ el anillo de Witt de K, es decir el anillo de clases de formas bilineales no degeneradas de K. Puesto que L es realmente cerrado, la aplicación signatura $\rho : W(L) \to \mathbb{Z} : (a) \in W(L) \to$ signatura (a) está bien definida, y el lugar ϕ define un homomorfismo aditivo $\phi_* : W(K) \to \mathbb{Z}$, del siguiente modo: dado $a \in K$, si la clase aK^{*2} contiene un ele mento $a' = ab^2$ tal que $\phi(a') \neq 0$ y $\phi(a') \neq \infty$ entonces $\phi_*(a) = \rho(\phi(a'))$. En otro caso $\phi_*(a) = 0$.

Por otra parte, puesto que $F|K$ es una extensión finita, la traza $T_{F|K}$ define un homomorfismo aditivo $T^* : W(F) \to W(K)$: a la clase de la aplicación bilineal B de L le hace corresponder la clase de la aplicación bilineal $T_{F|K} \circ (B|_K)$ de K. Con esta notación, Knebusch demuestra la siguiente *fórmula de la traza:*

$$\phi_*(T^*(x)) = \sum_{\psi|\phi} \psi_*(x),$$

donde el sumatorio se toma sobre todas las extensiones ψ de ϕ a F con valores en L, y se supone cero si no existe ninguna extensión. En particular, la fórmula anterior aplicada al elemento $(1) \in W(F)$, indica que

$$\phi_*(T^*(1)) = \sum_{\psi|\phi} 1 = n$$

donde n es el número de extensiones de ϕ a F.

Sin embargo, ningún estudio había sido realizado sobre extensión de lugares a extensiones puramente transcendentes o a extensiones arbitrarias (*). En cuanto a estas últimas, probamos en

(*) Esta situación contrasta fuertemente con la situación general, donde es bien conocido el siguiente teorema (cf. [Z-S], pág. 26, teor. 11): "Sea F una extensión de K. Entonces, para cada lugar ϕ de K, existen extensiones ϕ^* de ϕ a F con $\dim_K \phi^*$ (= grado de transcendencia de $\phi^*(F)$ sobre $\phi(K)$) igual a cualquier número entero entre 0 y el grado de transcendencia de F sobre K".

§6, el siguiente resultado, mediante la técnica de los ideales localmente reales desarrollada en el capítulo I:

Proposición (6.7).- *Sean* K *y* L *dos cuerpos ordenados,* E *una extensión ordenada de* K *y sea* $\phi : K \to L,\infty$ *un lugar real de* K, *sobreyectivo y compatible con el orden de* K. *Entonces* ϕ *se extiende a un lugar real compatible con el orden de* E, $\phi^* : E \to L^*,\infty$, *donde* L^* *es una extensión ordenada de* L.

Obsérvese que no se hace ninguna precisión sobre la dimensión de ϕ^*, i.e. el grado de transcendencia del cuerpo residual de ϕ^* sobre L. Para extensiones puramente transcendentes la situación es más satisfactoria en este aspecto.

Demostramos la siguiente:

Proposición (6.8).- *Sea* K *un cuerpo y* ϕ *un lugar real de* K. *Sea* $E = K(T_1,\dots,T_r)$ *una extensión puramente transcendente de* K. *Entonces, para cada* d, $0 \leqslant d \leqslant r$, *existe un lugar real* ψ_d *de* E, *que extiende a* ϕ *y tiene dimensión* d *sobre él.*

Podría pensarse que con los resultados de extensión 6.8 para las extensiones puramente transcendentes y el teorema de Knebusch para extensiones algebraicas, el problema de extensiones arbitrarias en el sentido antes citado queda resuelto. Sin embargo esto no es cierto por la necesidad de exigir la compatibilidad entre órdenes y lugares y para que la extensión en el caso algebraico sea posible.

Así, es fácil dar ejemplos de extensiones $F|K$ con grado de transcendencia >1 y lugares reales ϕ de K que no admiten extensiones a F con dimensión relativa 1 sobre ϕ.

Centrándonos de ahora en adelante en cuerpos de funciones de variedades algebraicas reales, es también Lang (op. cit.) quien abre el estudio de la existencia de lugares reales sobre los mismos. En efecto, motivado por un problema de especializaciones reales, Lang demuestra el:

> Teorema de existencia de lugares reales racionales (Lang).- *Sea* K *un cuerpo real o de funciones sobre un cuerpo realmente cerrado* R. *Entonces existe un lugar racional sobre* R, $\phi : K \to R,\infty$.

A partir de este teorema, se demuestra el famoso teorema de inmersión de Lang:

> Teorema (Lang's Embedding theorem).- *Sea* K *un cuerpo real de funciones de grado de transcendencia* n *sobre un cuerpo realmente cerrado* R. *Sea* E *un cuerpo realmente cerrado, extensión de* R *y con grado de transcendencia* n. *Entonces existe un monomorfismo de* K *en* E *que es la identidad sobre* R.

No obstante, ambos resultados parecen caer en el olvido general en que el artículo de Lang se ve sumido hasta que de nuevo Knebusch en 1972 [K_1] redescubre el problema y unifica ambos resul tados en el siguiente:

Teorema (Knebusch $[K_1]$).- *Sea* K *un cuerpo real de funciones sobre un cuerpo realmente cerrado* R *y sea* $\xi_1,\ldots,\xi_n$ *una base de transcendencia de* K *sobre* R, $n > 1$. *Sea* E *un cuerpo realmente cerrado que contiene a* R. *Entonces, existen* $a_i, b_i \in R$, $a_i < b_i$ $(i=1,\ldots,n)$ *tales que para cada n-tupla* $(e_1,\ldots,e_n)$ *de elementos en* E *con* $a_i < e_i < b_i$, *existe un lugar sobre* R, $\phi : K \to E,\infty$ *con* $\phi(\xi_i) = e_i$ $i=1,\ldots,n$.

Resaltemos un aspecto muy interesante de este teorema. Para mayor claridad, supongamos $E = R$. Consideremos un modelo V de la variedad con cuerpo de funciones K, supongamos que el anillo de coordenadas de V sea una extensión algebraica de $R[\xi_1,\ldots,\xi_n]$, y sea π la proyección de V sobre el espacio afín R^n de coordenadas $\xi_1,\ldots,\xi_n$. Entonces el teorema anterior puede ser interpretado como sigue: existe un abierto U en R^n de modo que para todo punto $\underline{e} = (e_1,\ldots,e_i) \in U$, existe un punto $P \in V$ que se proyecta sobre $\underline{e}$, y un lugar $\phi : K \to R,\infty$ centrado en P en V. De este modo, aunque ni en el trabajo de Lang, ni en el del propio Knebusch se especifica nada acerca de los centros de los lugares encontrados, surge por primera vez la idea de que hay un abierto de puntos de la variedad V en los que se puede centrar un lugar racional.

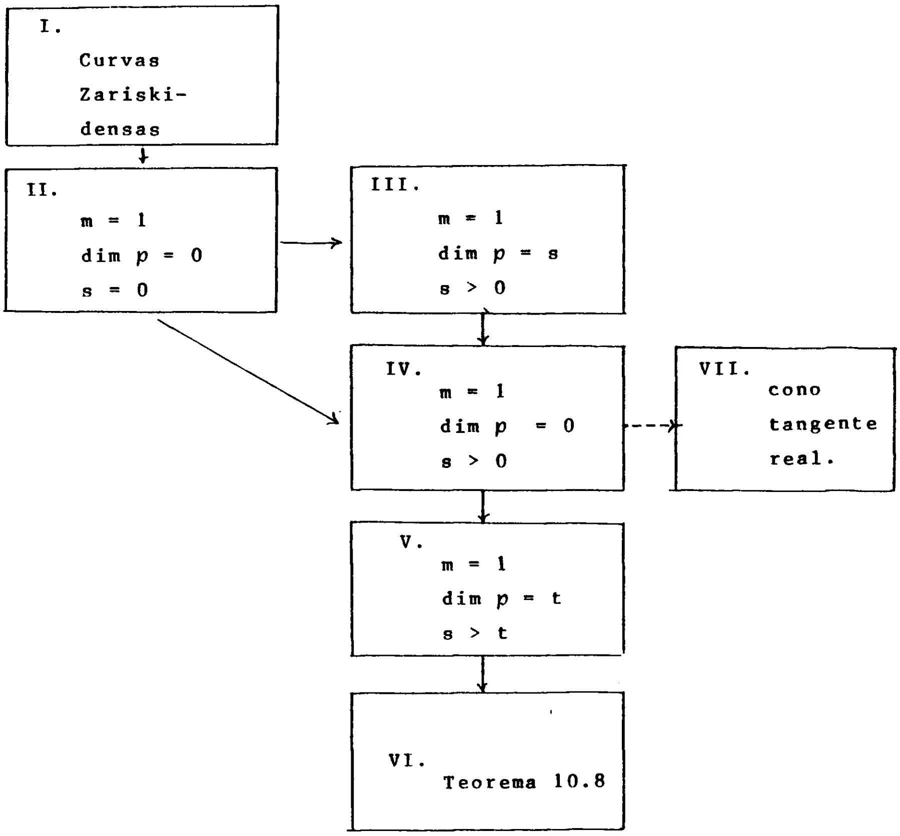
Esta idea había sido demostrada ya parcialmente po Dubois en 1970, $[Du_1]$ (aunque este trabajo era desconocido por Knebusch pues el resultado de Dubois no es publicado hsta 1979 [Du_2]) quien prueba que un punto $P \in V$ es centro de un lugar real de $R(V)$ si y sólo si es un punto central. Sin embargo nada se dice acerca del cuerpo residual de dicho lugar, salvo para el caso $R = \mathbb{R}$. Por fin, Brumfiel [Br_1] en los teoremas ya mencionados, detalla la situación demostrando que para todo punto central $P \in V$ (resp. para todo ideal primo localmente real p de $R[V]$) existe un lugar real racional (resp. de dimensión igual a la dimensión de Krull de p) centrado en P (resp. en p). En este sentido, el teorema de Knebusch puede ser considerado como un caso particular del teorema de Brumfiel, donde el caso $E \neq R$ se obtiene considerando la variedad algebraica sobre el cuerpo E, el lugar de sobre R.

Sin embargo nada había sido dicho hasta el presente acerca de la posibilidad de encontrar lugares con diferentes rangos y dimensiones y centrados en un ideal dado. Este es el objetivo fundamental del capítulo II: siguiendo la idea general expuesto al inicio de esta introducción, debería ser posible establecer un teorema general sobre existencia de lugares reales con centro, rango y dimensión dados de antemano, análogo al que existe en caso general (cf. [Z-S] pág. 106). Tal teorema es, en efecto, posible y es el resultado principal del capítulo:

<u>Teorema (10.8)</u>.- *Sea* K *un cuerpo real de funciones de grado de transcendencia* r *sobre un cuerpo realmente cerrado* R. *Sea* A *un dominio cuyo cuerpo de fracciones es* K. *Enton*

ces para cada ideal primo localmente real p *de* A, *para cada par de enteros* m *y* s *tales que* $s > \dim p$ *y* $s+m < r$, *existe un lugar real de* K *sobre* R, *finito sobre* A, *discreto, de rango* m, *dimensión* s *y centro* p *en* A.

La demostración del teorema se realiza en varias etapas que constituyen las diversas secciones del capítulo y que resumimos en el siguiente esquema:


I.
Curvas
Zariski-
densas
II.
m = 1
dim p = 0
s = 0
III.
m = 1
dim p = s
s > 0
IV.
m = 1
dim p = 0
s > 0
VII.
cono
tangente
real.
V.
m = 1
dim p = t
s > t
VI.
Teorema 10.8

Los pasos II → III y IV → V son fáciles por un proceso de extensión del cuerpo base que permite reducir el caso de dim p arbitraria al de dim $p = 0$. Citemos que es este proceso, por otra parte clásico, el que obliga a trabajar sobre cuerpos base realmente cerrados arbitrarios. La etapa V → VI se realiza mediante la composición de lugares de rango 1 para la producción de lugares de rango arbitrario.

Para la demostración de II, planteamos el problema en términos geométricos: encontrar un lugar racional, de rango 1, discreto con centro en un ideal maximal p de A, equivale a encontrar una curva formal contenida en la variedad real V correspondiente a A, que pasa por el punto central P del ideal maximal p, y que es Zariski-densa en V, es decir si un polinomio se anula sobre ella es cero sobre toda la variedad. La existencia de tales curvas constituye la etapa I en el anterior croquis y es estudiada en el §8. Para ello son necesarios los teoremas de estructura de los conjuntos semialgebraicos de Lojasiewicz y Delzell ([Lo], [De]), así como la introducción de un tipo especial de cuerpo, los llamados cuerpos de Cantor, que aparecen por vez primera en [Du_1], y que son, hablando "grosso modo", aquellos cuerpos donde tiene sentido la noción de convergencia de series de potencias.

La demostración de IV (§10) refleja de modo íntimo la geometría de las variedades reales. Así, en el caso de lugares arbitrarios, IV es una consecuencia directa del proceso de explosión de la variedad con centro en un punto dado, pues, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado en la transformada por dicha explosión, se obtiene una hipersuperficie que yace sobre el punto. Sin embargo, esto no es cierto en geometría real: al estallar una variedad real con centro un punto P, no siempre se obtiene una hipersuperficie real sobre P, y menos aún, tal que su ideal sea localmente real. Por ejemplo, si se explota la superficie de $R^3 : X^3+Y^2-Z^4 = 0$ con centro el origen $\underline{0}$, se obtiene un punto real en la transformada que yace sobre $\underline{0}$, pero no una subvariedad real de codimensión 1 (cf. §11). Por otra parte, la anomalía desaparece si P es un punto simple de V. El camino para probar IV aparece, entonces, claro: consideramos un lugar discreto de rango 1 y dimensión cero con centro en P (esto es la etapa II). Por una versión elemental del teorema de uniformización local de Zariski encontramos una variedad real V', birracionalmente equivalente a V, con $R[V'] \supset R[V]$ y tal que ϕ tiene centro un punto simple P' en V. La explosión de V con centro en P' permite obtener una variedad de dimensión s (s = dimensión del lugar buscado) que yace sobre P' y por tanto sobre P. Ahora estamos en la situación de III con lo que IV queda concluido. Citemos, por último que IV incluye, en particular, la existencia de divisores primos reales sobre ideales dados, proporcionando una demostración nueva y autocontenida de este hecho, cuya única prueba conocida (cf. $[Br_2]$) se basa en el teorema de desingularización de Hironaka. Al mismo tiempo demostramos que tal divisor primo puede ser obtenido siempre mediante un número finito de explosiones, resolviendo afirmativamente la conjetura planteada por Brumfiel en $[Br_2]$.

El análisis de las explosiones de variedades reales conduce al estudio del cono tangente real que ya comentamos anteriormente.

El teorema 10.8 muestra que las opciones para encontrar lugares reales con centro, rango y dimensión dados son óptimas, y corrobora la idea de que es posible desarrollar una teoría de valoraciones reales similar a la teoría general cuando se usan los elementos característicos del lenguaje real: los ideales localmente reales.

Abundando más en esta línea, el siguiente paso hacia la elaboración de un estudio general de existencia de valoraciones reales, es el análisis de las cadenas de especializaciones de lugares reales. Recordemos que una familia de lugares $\phi_o,\dots,\phi_{m-1}$ es una cadena de especializaciones si cada ϕ_i se obtiene por composición de Σ_{i+1} con un lugar θ_i del cuerpo residual Σ_{i+1} de ϕ_{i+1}. Tenemos así una composición de lugares:

$$K \xrightarrow{\theta_{m-1}} \Sigma_{m-1},\infty \xrightarrow{\theta_{m-2}} \Sigma_{m-2},\infty \to \dots \xrightarrow{\theta_1} \Sigma_1,\infty \xrightarrow{\theta_o} \Sigma_o,\infty$$

de forma que $\phi_i = \theta_i \circ\dots\circ\theta_{m-1}$.

Si denotamos por B_i al anillo de valoración de ϕ_i y por p_i su centro en un dominio A K, se tienen las siguientes relaciones bien conocidas:

$$B_o \subset B_1 \subset \dots \subset B_{m-1} \quad \text{y} \quad p_o \supset p_1 \supset \dots \supset p_{m-1}$$

donde las inclusiones entre los ideales pueden ser igualdades. Por otra parte es sabido que un lugar ϕ de rango m se factoriza co mo composición de m lugares de rango 1 produciendo una cadena de especializaciones $\phi_{m-1},\ldots,\phi_1,\phi_o = \phi$ donde ϕ_i tiene rango i. El teorema 10.8 asegura la existencia de un lugar real ϕ de rango m con centro en un ideal p. Ahora bien, es evidente que la factorización de ϕ en lugares de rango 1 proporciona importante información geométrica: ϕ puede factorizarse dando lugar a una cadena estricta de ideales $p_o = p \supsetneq p_1 \supsetneq \cdots \supsetneq p_{m-1}$, que en suma da lugar a una cadena de subvariedades sobre $W = V(p)$, o puede factorizarse -yéndonos al otro extremo- de forma que todos los centros p_i coincidan con p_o. En este caso ϕ proporciona un modelo birracional de la variedad V en el que W se corresponde a variedades W_i de distintas dimensiones, determinadas por las dimensiones de los lugares ϕ_i.

Puede plantearse, entonces, el siguiente refinamiento de 10.8 dado un ideal primo p localmente real y dados enteros m y s adecuados, ¿puede encontrarse un lugar real ϕ con centro en p, rango m y dimensión s de forma que factorice en m lugares de rango 1,2,...,m y cuyos centros y dimensiones sean fijados de antemano?. Enunciándolo de un modo preciso, sea A un dominio real con cuerpo de fracciones K finitamente generado sobre un cuerpo realmente cerrado R y de grado de transcendencia r sobre R. Sea $p_o \supset p_1 \supset \ldots \supset p_{m-1}$ (donde los contenidos pueden ser igualdades) una cadena de ideales primos localmente reales y sea $0 \leqslant s_o < s_1 < \ldots < s_{m-1} < r$ una cadena de enteros de forma que $s_i \geqslant \dim p_i$. Planteamos el problema siguiente, que constituye el objetivo del capítulo III de la memoria:

(ESP) *¿Existe una cadena de especializaciones de lugares reales,* $\phi_{m-1},\ldots,\phi_1,\phi_o$ *tales que* ϕ_i *tiene rango* m-i, *dimensión* i *y centro* p_i *en* A?.

Señalemos que el problema análogo para lugares arbitrarios (también los ideales primos son arbitrarios) tiene respuesta afirmativa en un precioso teorema de Zariski (cf. [Z-S] pág. 106).

Antes de seguir adelante con las respuestas obtenidas a la cuestión anterior comentaremos algunas aplicaciones más de las cadenas de especializaciones de lugares. Coste y Roy introducen en [C-R] la noción de espectro primo real de un anillo: dado un dominio real A, un punto del espectro primo real de A ($\mathrm{Spec}_R A$) es un par (p,β_p) formado por un ideal primo real p de A y un orden β_p del anillo cociente A/p. En el mismo trabajo demuestran que el conjunto $\mathrm{Spec}_R A$ así definido y con una topología adecuada es en efecto isomorfo al espectro primo de un cierto anillo, y prueban que $\mathrm{Spec}_R A$ es una poderosa herramienta para el estudio de la geometría real. En este contexto, debido a la íntima relación entre órdenes y lugares reales, las cadenas de especialización pueden ser usadas para definir el concepto de dimensión. Supongamos para mayor simplicidad, que A es un dominio finitamente generado de grado de transcendencia r sobre un cuerpo realmente cerrado R y que A es el anillo de coordenadas de una variedad no singular V. Entonces la dimensión de un punto $(p,\beta_p) \in \mathrm{Spec}_R A$ se define como la longitud máxima de una cadena de especializaciones de lugares reales del cuerpo de fracciones

K de A, $\phi_{m-1},\ldots,\phi_1,\phi_o$, tal que ϕ_o tiene centro p en A. Con esta definición, es evidente que el teorema de Brumfiel ya mencionado que prueba la existencia de un lugar de rango r centrado en un punto central puede enunciarse de la forma "un punto es central si y sólo si tiene dimensión máxima". Por último las cadenas de especialización han sido usadas por Brumfiel en [Br_1] para la descripción de los órdenes de R(X,Y) centrados en un punto dado. Un proceso similar conduciría a lo análogo para R(X,Y,Z), o variedades algebraicas de dimensiones 2 y 3.

Hay dos dificultades principales para el estudio de las cadenas de especializaciones de lugares reales. Por una parte el siguiente resultado, básico para la solución del problema en el caso de lugares arbitrarios, falla en la situación real: "si $p_o \subset p_1$ son dos ideales primos de A y ϕ_1 es un lugar de K con centro p_1 en A, entonces existe un lugar ϕ_o de K, especialización de ϕ_1, con centro p_o en A". Un contraejemplo de este resultado en la situación real es dado en §13. Citemos, simplemente aquí, el motivo de esta deficiencia: supongamos que el lugar dado ϕ_1 tiene por cuerpo residual Σ_1 es decir

$$\phi_1 : K \to \Sigma_1,\infty.$$

Entonces A/p_1 se sumerge en Σ_1, y p_o/p_1 es un ideal primo del subanillo A/p_1 de Σ_1. Encontrar ϕ_o es equivalente a encontrar un lugar real θ_o de Σ_1 centrado en p_o/p_1 en A/p_1. Ahora bien, sabemos que entonces el ideal p_o/p_1 debe ser localmente real en A/p_1 con respecto a Σ_1. Esto obliga a ejercer un control sobre los órdenes que existen en Σ_1, relacionándolos con los órdenes de A/p_1 heredados de A. Este control es realizado en la memoria en el lema 13.6, que muestra que en las condiciones anteriores el lugar ϕ_1 puede ser modificado de forma que p_0/p_1, sea localmente real en A/p_1 con respecto a Σ_1.

La segunda dificultad básica estriba en que, en general, los cuerpos residuales de lugares arbitrarios no son cuerpos de funciones, con lo que nos vemos privados de los resultados desarrollados en el capítulo II. Esta dificultad impide que obtengamos una respuesta completa para (ESP).

Básicamente el capítulo III se organiza como sigue: en §12 damos una demostración original de un teorema de Brumfiel (teorema 12.6) del que se obtienen como corolario geométrico las buenas propiedades de los ideales localmente reales respecto de la dimensión de Krull. Este teorema es el siguiente:

<u>Teorema (12.6)</u>.- *Sea* $p_{i_t} \subset p_{i_{t-1}} \subset \cdots \subset p_{i_1} \subset p_{i_o}$, $i_o < i_1, \ldots, < i_{t-1} < i_t$ *una cadena fuerte de ideales localmente reales tales que* $i_j = \dim p_{i_j}$, $j = 0, \ldots, t$. *Entonces existe una cadena de especializaciones de lugares reales de* K *sobre* R, $\phi_o, \phi_1, \ldots, \phi_{r-1}$, *tales que para cada* $j = 0, \ldots, r-1$, *el lugar* $\phi_j : K \to \Sigma_j, \infty$ *es finito en* A, *tiene rango* $r-j$, *dimensión* j *y los lugares* ϕ_{i_j} *tienen centro* p_{i_j} *en* A. *Más aún, los ideales* ϕ_j *forman una cadena fuerte y estricta de idea* »

les localmente reales de A,

$$p_{r-1} \subsetneq \cdots \subsetneq p_{i_t} \subsetneq p_{i_t-1} \subsetneq \cdots \subsetneq p_{i_1} \subsetneq p_{i_1-1} \subsetneq \cdots \subsetneq \subsetneq \cdots \subsetneq p_{i_0} .$$

En los epígrafes 13 y 14 se demuestran dos respuestas parciales de (ESP). En el primero, teorema 13.9, son necesarias algunas condiciones restrictivas sobre las dimensiones s_i de los lugares obtenidos, mientras que los centros son arbitrarios. Concretamente:

Teorema (13.9).- *Con la notación de (ESP), si* $s_i = r - m + i$ $1 \leqslant i \leqslant m$, *(*$s_o$ *arbitrario) entonces (ESP) tiene respuesta afirmativa.*

En el segundo, teorema 14.4, las restricciones aparecen en la cadena de ideales, que debe ser estricta, y la relación entre ellos y las dimensiones s_i:

Teorema (14.4).- *Si* $\dim p_i = s_i$, $0 \leqslant i \leqslant m$, *entonces (ESP) tiene respuesta afirmativa.*

Obsérvese que 12.6 es un caso particular de 14.4. Por último, en el §15 se dan algunas aplicaciones de los resultados anteriores. En particular demostramos (proposiciones 15.4 y 15.5) que para variedades algebraicas de dimensiones 2 y 3 (ESP) tiene respuesta afirmativa sin ningún tipo de cortapisas.

Como comentario general al capítulo III diré que las demostraciones (por lo común engorrosas y complicadas) se hacen por inducción y utilizan los resultados sobre la clausura semientera y extensión de lugares desarrollados en §4 y §6.

Para finalizar digamos que aunque nuestra respuesta a (ESP) es sólo parcial, creemos que efectivamente, el problema tiene una respuesta afirmativa con toda generalidad. Esta es la conjetura con la que acabamos la memoria y esta introducción.

CAPITULO I: ANILLOS DE VALORACION REALES.

En este capítulo se estudian los anillos de valoración reales en cuerpos arbitrarios, introduciendo las nociones y resultados generales que usaremos en los capítulos II y III, como los ideales localmente reales y la dependencia semientera.

§1. Cuerpos y anillos ordenados: terminología y notaciones.

Fijamos en este primer epígrafe las notaciones y definiciones básicas que usaremos en la memoria.

1.1. Dado un cuerpo K, un orden en K es un subconjunto $\beta \subset K$ tal que:

(i) $\beta + \beta \subset \beta$

(ii) $\beta \cdot \beta \subset \beta$

(iii) $\beta \cap (-\beta) = \{0\}$

(iv) $\beta \cup (-\beta) = K$.

Un cuerpo ordenado es un par (K,β) donde K es un cuerpo y β es un orden de K. Diremos que K es ordenable si admite un orden β. Después de los trabajos de Artin y Schreier [A-S], es bien sabido que un cuerpo K es ordenable si y sólo si verifica la siguiente condición algebraica:

"si $x_i \in K$, $1 \leq i \leq n$, y $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$, entonces $x_1 = \ldots = x_n = 0$".

Usaremos indistintamente los términos "K es un cuerpo real", "K es formalmente real", y "K es ordenable".

1.2. Un subconjunto α de K que verifica sólamente las condiciones (i), (ii) y (iii) recibe el nombre de orden parcial de K. Como en el caso anterior, un cuerpo parcialmente ordenado es un par (K,α) formado por un cuerpo K y un orden parcial α de K. En particular todo orden de K es un orden parcial de K. Fijado un orden parcial de α de K, escribiremos $a \underset{\alpha}{<} b$ si $b-a \in \alpha$.

1.3. Todos los anillos considerados en esta memoria son dominios de integridad, conmutativos y con elemento unidad, pues son siempre subanillos de algún cuerpo. Un anillo A diremos que es ordenable o real si verifica la condición:

"si $a_1^2 +\ldots+ a_n^2 = 0$, $a_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces $a_1 =\ldots= a_n = 0$".

Análogamente al caso de cuerpos, un orden en A es un subconjunto $\beta \subset A$ que satisface (i), (ii), (iii) y la condición

(iv)' $\beta \cup (-\beta) = A$,

y un orden parcial de A es un subconjunto α de A que cumple (i), (ii) y (iii). Evidentemente, A es real si y sólo si su cuerpo de fracciones lo es.

1.4. Sea (A,α) un anillo parcialmente ordenado. Un subconjunto $M \subset A$ se dice que es convexo con respecto a α, o α-convexo. si para cada $a,b \in \alpha$ tales que $a+b \in M$, se tiene que $a \in M$ y $b \in M$. De modo equivalente, si cuando $0 \underset{\alpha}{\leqslant} a \underset{\alpha}{\leqslant} b$ y $b \in M$, entonces $a \in M$.

1.5. Un ideal q de A es real si el anillo cociente A/q es real, i.e. "si $a_1^2 +\ldots+ a_n^2 \in q$, $a_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces

$a_i \in q, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$".

En otras palabras, q es real si es convexo con respecto al orden parcial de las sumas de cuadrados de A.

1.6. Dados dos cuerpos ordenados (L_1, β_1) y (L_2, β_2), diremos que (L_2, β_2) es una extensión ordenada de (L_1, β_1) si $L_1 \subset L_2$ y $\beta_2 \cap L_1 = \beta_1$. La condición $\beta_2 \cap L_1 = \beta_1$ equivale a $\beta_1 \subset \beta_2$. Diremos que la extensión es arquimediana, o que (L_2, β_2) es arquimediano sobre (L_1, β_1) (o simplemente que L_2 es arquimediano sobre L_1 si no hay ambigüedad en cuanto a los órdenes considerados), si para todo $x \in L_2$, existe $a \in L_1$ de modo que $-a \leqslant_{\beta_2} x \leqslant_{\beta_2} a$.

1.7. Sea R un cuerpo realmente cerrado. Por una variedad algebraica real irreducible, V, de R^n entenderemos una variedad algebraica irreducible de R^n, cuyo cuerpo de funciones, $R(x_1, \ldots, x_n)$, es real. Además de la topología de Zariski en V, consideraremos la topología inducida por la topología producto en R^n, de la topología del orden en R. Esta topología será llamada la topología fuerte o euclídea de V.

1.8. Una función $f : R^n \to R$ se dice que es semialgebraica si es continua para la topología fuerte y su grafo es un conjunto semialgebraico de R^{n+1}.

§2. Ideales localmente reales. Caracterización de los ideales localmente reales en cuerpos de funciones

Introducimos, a continuación, la clase de ideales que van a jugar el papel central en la teoría de valoraciones reales, como se demostrará en §3. Después, damos una caracterización geométrica de dichos ideales en cuerpos de funciones, que muestra, en particular, que para variedades algebraicas reales no singulares estos ideales coinciden con las ideales reales.

2.1. <u>Definición</u>.- *Sean* A *un subanillo de un cuerpo real* K *y* p *un ideal de* A. *Decimos que* p *es localmente real en* A *con respecto a* K, *si es radical, y para cada* $h,g \in A$,

$$h = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad g = \sum_{j=1}^{m} y_j^2, \quad x_i, y_j \in K, \quad \textit{tales que} \quad h+g \in p,$$

se tiene $h,g \in p$.

2.2. <u>Notas</u>. (a) Diremos que p es localmente real en A cuando sea localmente real con respecto al cuerpo de fracciones de A.

(b) Sea Σ_K el orden parcial en K de sumas de cuadrados de elementos de K. $\Sigma_K \cap A$ es un orden parcial en A, formado por los elementos de A que son totalmente positivos. Entonces p es localmente real en A con respecto a K, si y sólo si p es radical y $(\Sigma_K \cap A)$-convexo.

(c) Si un ideal p es localmente real entonces es real, pero el recíproco no es cierto, (ver, por ejemplo, teorema 2.2).

Dado un ideal p de A, le asociamos el mínimo ideal localmente real que contiene a p de la forma siguiente:

2.3. <u>Definición</u>.- *Sea* A *un subanillo de un cuerpo real* K, *y* p *un ideal de* A. *Definimos el radical local real de* p *en* A

con respecto a K *como el conjunto:*

$$\ell\sqrt{p}^{K} = \{x \in A : \text{ existen } y_1,\ldots,y_n \in K,\ r \in \mathbb{N},\ \text{con } x^{2r} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \in p\}$$

Obsérvese que la diferencia entre la definición anterior y la del radical real estriba, en que en éste, los elementos y_i pertenecen al anillo A, mientras que en el radical local real, son elementos del cuerpo K. En este sentido, resaltamos que $\ell\sqrt{p}^{K}$ depende de K. Escribiremos $\ell\sqrt{p}$ siempre que nos refiramos al cuerpo de fracciones de A. La siguiente proposición se prueba de forma totalmente análoga al caso del radical real (c.f. por ejemplo [Re_2]).

2.4. Proposición.- *(a)* $\ell\sqrt{p}^{K}$ *es un ideal de* A.

(b) p *es localmente real con respecto a* K *si y sólo si* $\ell\sqrt{p}^{K} = p$.

(c) $\ell\sqrt{p}^{K}$ *es el mínimo ideal localmente real con respecto a* K *que contiene a* p.

(d) $\ell\sqrt{p}^{K}$ *es la intersección de todos los ideales primos localmente reales de* A *con respecto a* K *que contienen a* p.

(e) Si p *es radical,* p *es localmente real con respecto a* K *si y sólo si sus asociados primos son localmente reales con respecto a* K.

Para la caracterización de los ideales localmente reales en cuerpos de funciones, necesitamos introducir algunas nociones adicio nales. Sea V una variedad algebraica real irreducible de R^n, sea $A = R[X_1,\ldots,X_n]/p = R[x_1,\ldots,x_n]$ su anillo de coordenadas, donde $p = J(V)$ y $x_i = X_i+p$, y sea $K = R(x_1,\ldots,x_n)$ el cuerpo de funciones de V. Representamos por $Reg(V)$ el conjunto de puntos regulares de V.

2.5. Definición [Du_1].- *Un punto* $p \in V$ *se dice que es central si* $p \in \overline{Reg(V)}$, *donde la adherencia se toma en la topología fuerte de* R^n. *Denotamos por* V_c *el conjunto de puntos centrales de* V.

Existe una íntima relación entre el conjunto V_c de puntos centrales de V y las funciones regulares de V que son totalmente positivas en K. En efecto, la siguiente proposición es bien conocida (ver [D-R], [Sch], [R]):

2.6. Proposición.- *Una función* $f \in A$ *es suma de cuadrados en* K *si y sólo si* $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in V_c$.

Finalmente, la demostración de los resultados 2.8 y 2.11 se apoya en el principio de Tarski ([Ta]). Una frase polinomial elemental $A(X_1,\ldots,X_n)$ es una relación en la que intervienen un número finito de polinomios con coeficientes enteros, igualdades, desigualdades, los cuantificadores "existe" y "para todo", y las conectivas "y", "o", "no" e "implica". Una frase polinomial elemental se dice que es cerrada si no tiene variables libres, i.e., todas las variables X_i aparecen cuantificadas por "existe" o "para todo". El enunciado del principio de Tarski que usaremos es el siguiente:

2.7. Principio de Tarski.- *Sea* $A(X_1,\ldots,X_n)$ *una frase cerrada elemental. Entonces* $A(X_1,\ldots,X_n)$ *se verifica en un cuerpo realmente cerrado* R *si y sólo si se verifica en todo cuerpo realmente cerrado.*

Existe una amplia polémica sobre el uso del principio de Tarski en Geometría Algebraica Real. Nosotros nos regiremos, en este sentido, por un punto de vista práctico: si el principio de Tarski permite simplificar y acortar una demostración, ¿por qué evitarlo?, ¿por qué repetir paso a paso lo hecho sobre $\mathbb{R}$, comprobando que es cierto en nuestro cuerpo particular, si ello no es estrictamente necesario?.

Volviendo a nuestro problema inicial, empezamos con la caracterización de los puntos cuyo ideal maximal es localmente real.

2.8. Proposición.- *Sea* P *un punto de una variedad algebraica real irreducible* $V \subset R^n$, *y sea* $\tilde{m}_P$ *el ideal de* P *en* A, *el anillo de coordenadas de* V. *Entonces* $\tilde{m}_P$ *es localmente real si y sólo si* P *es un punto central de* V.

Demostración.- Sea $A = R[X_1,\ldots,X_n]/p$, $p = J(V)$. Supongamos que P es un punto central de V y que $h_1,h_2 \in A$ son dos funciones regulares totalmente positivas en R(V) tales que $h_1+h_2 \in \tilde{m}_P = m_P/p$, $m_P = \{f \in R[X_1,\ldots,X_n] : f(P) = 0\}$. Se tiene:

$$h_i = \frac{1}{b_i^2}\left(\sum_{k=1}^{t_i} a_{ik}^2\right) \quad i=1,2, \quad b_i, a_{ik} \in A, \quad b_i \neq 0 \text{ en } A.$$

Sean $A_{i,k}$, B_i y H_i polinomios en $R[X_1,\ldots,X_n]$ tales que

$$A_{i,k}+p = a_{i,k}, \quad B_i+p = b_i \quad \text{y} \quad H_i+p = h_i, \quad i=1,2.$$

Tenemos $B_i \notin p$ y la condición $h_1+h_2 \in m_p/p$ implica que existe $M \in m_p$ tal que

$$H_1 + H_2 - M = G \in p.$$

Supongamos que $H_i(P) < 0$. Entonces, existe un entorno Ω de P en R^n tal que $H_i(Q) < 0$ para todo $Q \in \Omega$. Por la forma de h_i, se sigue que para todo $Q \in \Omega \cap V_c$, $B_i(Q) = 0$, es decir B_i se anula en un entorno de un punto central de V. Entonces, ([Du$_1$]), $B_i \in p$, contradicción. Por tanto $H_1(P) \geqslant 0$ y $H_2(P) \geqslant 0$. Sustituyendo en la ecuación de arriba obtenemos

$$H_1(P) + H_2(P) = 0,$$

de donde $H_1(P) = H_2(P) = 0$. Pero esto significa que $h_1, h_2 \in \tilde{m}_P$, lo que prueba que $\tilde{m}_P$ es localmente real.

Recíprocamente, supongamos que $P \notin V_c$. Entonces existe una bola abierta $B_\varepsilon(P) = \{\underline{x} \in R^n : (x_1-p_1)^2 +\ldots+ (x_n-p_n)^2 - \varepsilon < 0\}$ tal que $B_\varepsilon(P) \cap V_c = \emptyset$. Así pues, la función $h(x_1-p_1)^2 +\ldots+ (x_n-p_n)^2-\varepsilon$ es no negativa sobre V_c y en consecuencia suma de cuadrados en $R(V)$, Ahora,

$$\varepsilon+h = (x_1-p_1)^2 +\ldots+ (x_n-p_n)^2 \in \tilde{m}_P$$

y ambas funciones ε y h son totalmente positivas. Como $\varepsilon \in \tilde{m}_P$, se sigue que $\tilde{m}_P$ no es localmente real, lo que concluye la proposición.

Para la demostración del caso general probamos primero un lema que en los números reales es un caso particular de la desigualdad de Hörmander-Łojasiewicz.

2.9. Lema.- *Sea* S *un conjunto semialgebraico, cerrado y acotado de* R^n. *Sean* F *y* G *dos polinomios no negativos sobre* S *y tales que:*

$$Z_S(F) = \{\underline{x} \in S : F(\underline{x}) = 0\} \subset Z_S(G) = \{\underline{x} \in S : G(\underline{x}) = 0\}.$$

Entonces existen una constante positiva $\lambda \in R$ *y un número natural* N *tal que* $[G(x)]^N \leqslant \lambda F(x)$ *para todo* $x \in S$.

Demostración.- Para cada elemento positivo $r \in R$ consideramos

$$S_r = G^{-1}(r) = \{x \in S : G(x) = r\}.$$

Por ser S semialgebraico, cerrado y acotado el polinomio $G(x)$ alcanza un máximo en S. En efecto, la frase:

"existe $y \in S$ tal que $\forall x \in S$, $G(x) \leqslant G(y)$"

es elemental y es cierta en los números reales. Por tanto, también lo es sobre cualquier cuerpo realmente cerrado R en virtud del principio de Tarski.

Sea $b = \text{máx}\,\{G(x) : x \in S\}$. Entonces $S = \bigcup_{r \in [0,b]} S_r$. Análogamente, para cada $S_r \neq \emptyset$, $F(X)$ alcanza un mínimo en S_r. Definimos la función:

$$h : [0,b] \to R, \quad h(r) = \min\,\{F(x) : x \in S_r\}$$

De nuevo por el principio de Tarski, la función h es semialgebraica, i.e., h es continua y su grafo es un conjunto semialgebraico de R^2. Por otra parte, la hipótesis $Z_s(F) \subset Z_s(G)$ implica que $\forall r \in [0,b]$, $h(r) > 0$ y, por tanto, la función $g(r) = \frac{1}{h(r)}$ es semialgebraica.

Sea

$$U(T,Z) = a_o(T)Z^m + z_1(T)Z^{m-1} +\ldots+ a_m(T) \in R[T,Z]$$

un polinomio irreducible tal que $U(r,g(r)) = 0$ $\forall r \in [0,b]$. Multiplicando $U(T,Z)$ por $a_o(T)^{m-1}$, tenemos

$$(a_o(r)g(r))^m + a_1(r)(a_o(r)g(r))^{m-1} +\ldots+ a_m(r).(a_o(r))^{m-1} = 0,$$

y $a_o(r)g(r)$ es raíz del polinomio mónico $Z^m + \Sigma\, b_i(r)Z^{m-i}$, con $b_i(r) = a_i(r)(a_o(r))^{i-1}$. Por tanto, para cada $r \in [0,b]$,

$$|a_o(r).g(r)| \leqslant 1 + \Sigma\,(b_i(r))^2,$$

de donde, $g(r) \leqslant \dfrac{1 + \Sigma(b_i(r))^2}{|a_o(r)|}$.

Si $a_o(X) = T^N a_o(T)$, $b_o(0) \neq 0$, se sigue:

$$h(r) \geqslant \frac{|a_o(r)|}{1 + \Sigma(b_i(r))^2} = r^N \frac{|b_o(r)|}{1 + \Sigma(b_i(r))^2} \geqslant \lambda r^N,$$

donde $\lambda = \min\, \{\dfrac{|b_o(r)|}{1 + \Sigma(b_i(r))^2} : r \in |0,b|\}$.

Pero $h(r) \geqslant \lambda r^N$ significa $F(x) \geqslant \lambda|G(x)|^N$ para todo $x \in S$, y el lema queda demostrado.

El siguiente resultado caracteriza las subvariedades de V cuyos ideales son localmente reales, como aquellas que contiene suficientes puntos centrales de V. Más concretamente,

2.10. <u>Definición</u>.- *Una subvariedad* W *de* V *decimos que es* <u>*central*</u> *si* $W \cap V_c$ *es Zariski-denso en* W, *i.e.* $J(W \cap V_c) = J(W)$.

Recordemos que la condición $J(W \cap V_c) = J(W)$ es equivalente a decir que $V_c \cap Reg(W)$ tiene interior no vacío en $Reg(W)$ con la topología fuerte de W (cf. [Re]).

2.11. Teorema.- *Sea* V *una variedad algebraica real irreducible de* R^n *y sean* W *una subvariedad de* V *y* $q = J(W)$ *su ideal en* $R[V]$. *Entonces* q *es localmente real si y sólo si* W *es una subvariedad central de* V.

Demostración.- Sean $h_1, h_2 \in R[V] = R[X_1,\ldots,X_n]/p$, $p = J(V)$ dos funciones totalmente positivas tales que $h_1+h_2 \in q$. Fijemos

$$h_i(x) = \frac{1}{|b_i(x)|^2} \left(\sum_{k=1}^{t_i} |a_{ik}(x)|^2\right), \quad b_i(x),\ a_{ik}(x) \in R[V],$$
$$b_i \neq 0, \quad i=1,2.$$

Por ser W central en V, existe un abierto Ω en V tal que $\Omega \cap W \subset Reg(W) \cap V_c$. Afirmamos que para todo $y \in \Omega \cap W$ se tiene $h_i(y) \geqslant 0$, $i=1,2$. En efecto, supongamos, por ejemplo, $h_1(y_o) < 0$, $y_o \in \Omega \cap W$. Entonces existe un entorno abierto $\Omega' \subset \Omega$ de y_o tal que $h_1(z) < 0$ $\forall z \in \Omega'$. Por la forma de h_1 esto significa que $b_1(z) = 0$ $\forall z \in \Omega'$ y por tanto b_1 se anula en un entorno de un punto central y_o, es decir $b_1(x) = 0$ en $R[V]$, contradicción. Así pues $h_1(y) \geqslant 0$ y $h_2(y) \geqslant 0$ $\forall y \in \Omega \cap W$. Puesto que $h_1+h_2 \in q$ se tiene que $h_1(y)+h_2(y) = 0$ $\forall y \in \Omega \cap W$, de donde $h_1(y) = h_2(y)=0$. Por consiguiente, h_1 y h_2 se anulan en un abierto de Reg(W), lo que implica $h_1, h_2 \in q$. Como q es radical, q es localmente real.

Recíprocamente, sea $q = (f_1,\ldots,f_r)R[V]$ y supongamos que $J(W \cap V_c) \neq J(W)$. Sea $g \in R[V]$ tal que $g \in J(W \cap V_c) \setminus J(W)$ y pongamos $f = f_1^2 + \ldots + f_r^2$. Se tiene:

$$Z_{V_c}(f) = \{x \in V_c : f(x) = 0\} \subset Z_{V_c}(q) = \{x \in V_c : g(x) = 0\}.$$

Sean F_i, $G \in R[X_1,\ldots,X_n]$ tales que $F_i+p = f_i$ y $G+p = g$. Distinguimos dos casos:

(a) V_c es acotado. Entonces, por el lema 2.9 existen $N \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in R$, $\lambda > 0$, tales que $|G(x)|^{2N} \leqslant \lambda F(x)$, $\forall x \in V_c$. En otras palabras, $\forall x \in V_c$, $\lambda F(x) - G(x)^{2N} \geqslant 0$ y por tanto, la función $h(x) = \lambda f(x) - g(x)^{2N} \in R[V]$ es suma de cuadrados en $R(V)$. Pero,

$$g(x)^{2N} + h(x) = \lambda f(x) \in q,$$

y tanto $g(x)^{2N}$ como $h(x)$ son sumas de cuadrados en $R(V)$. Como por construcción $g(x)^{2N} \notin q$ (pues q es radical), q no es localmente real.

(b) V_c no es acotado. Después de un cambio de coordenadas podemos suponer $V_c \subset \{x \in R^n : |x| > 1\}$. Consideramos la transformación ϕ, $\phi(x_i) = z_i = \dfrac{x_i}{|x|^2}$ (inversión respecto a la circunferencia unidad). El conjunto $S = \phi(V_c) \cup \{(0,\ldots,0)\}$ es un semialgebraico cerrado y acotado de R^n, y los polinomios

$$F'(z) = |z|^{2s}\, F\left(\frac{z_1}{|z|^2},\ldots,\frac{z_n}{|z|^2}\right),$$

$$G'(z) = |z|^{2t}\, G\left(\frac{z_1}{|z|^2},\ldots,\frac{z_n}{|z|^2}\right),$$

donde s y t son los grados de $F(x)$ y $G(x)$ respectivamente, verifican que $Z_s(F') \subset Z_s(G')$. Sustituyendo G por una potencia conveniente podemos suponer $t \geqslant s$. Como en (a), existen λ, N, tales que

$$\lambda F'(z) - |G'(z)|^{2N} \geqslant 0 \qquad \forall z \in S.$$

Para un M suficientemente alto (exactamente $M \geqslant Nt-s$), tenemos

$$\lambda |x|^{2M} F(x) - |G(x)|^{2N} \geqslant 0 \qquad \forall x \in V_c.$$

La demostración concluye ahora, como en (a), es decir, la función

$$h(x) = \lambda|x|^{2M} f(x) - g(x)^{2N}$$

es suma de cuadrados en $R(V)$, pero

$$g(x)^{2N} + h(x) = \lambda|x|^{2M} f(x) \in q.$$

Como $g(x)^{2N} \notin q$, q no es localmente real, lo que completa el teorema.

2.12. Observaciones.- (a) La demostración anterior resuelve el problema planteado por Brumfiel (cf. [Br_2]) de encontrar una caracterización de los ideales localmente reales por métodos elementales. La misma demostración se extiende palabra por palabra para caracterizar las subvariedades W de V cuyo ideal es convexo con respecto al orden parcial derivado de un orden parcial finitamente generado $\beta_w[g_1,\ldots,g_t]$ en $R[V]$ (cf. [Br_1] para la notación y nociones necesarias): son aquellas que verifican que la intersección $W \cap V_c \cap$ $\cap \{g_1 \geq 0,\ldots,g_t \geq 0\}$ es Zariski denso en V.

(b) T. Recio (cf. [D-R]) ha conjeturado que el conjunto de puntos centrales de una variedad algebraica real es un conjunto semialgebraico cerrado básico, i.e. puede ser expresado como:

$$V_c = \{x \in R^n : h_1(x) \geq 0,\ldots,h_s(x) \geq 0\}, \quad h_i \in R[X_1,\ldots,X_n], \quad 1 \leq i \leq s.$$

Dicha conjetura ha sido probada por J. Ruiz ([Ru]) para superficies. Suponiendo demostrada la conjetura, el teorema 2.9 es una consecuencia fácil del teorema de los ceros de Stengle (cf. [St]): en efecto, si f, g, F y G son escogidos como en la segunda parte de la demostración del teorema, la condición $Z_{V_c}(f) \subset Z_{V_c}(g)$ significa que $g \in J(V_c \cap \{f = 0\})$ y por el resultado de Stengle, existen $N \in \mathbb{N}$ y $a \in S[h_1,\dots,h_s]$ -es decir, a es un polinomio en $h_1,\dots,h_s$ con coeficientes en el semianillo S de las sumas de cuadrados de $R[X_1,\dots,X_n]$- tales que

$$G^{2N} + a \in (F).$$

Pero a es no negativo sobre V_c y por tanto totalmente positivo en $R(V)$. Tomando cocientes módulo p, resulta:

$$g^{2N} + a \in (f) \subset q.$$

Como $g^{2N} \notin q$, q no es localmente real.

(c) Obsérvese que una condición suficiente para que q sea localmente real es que exista un punto $Q \in W$ que sea simultáneamente regular en V y W. No obstante, esta condición no es necesaria, como muestra el ejemplo 2.13(b).

2.13. <u>Ejemplos</u>.- (a) El ideal $m = (x,y)A$, en el anillo $A = \mathbb{R}[X,Y]/(Y^2+X^2-X^3)$ no es localmente real, pues el origen no es un punto central en la cúbica $Y^2+X^2-X^3 = 0$. No obstante, m sí es un ideal real de A.

(b) Sea $V = V(X^2-ZY^2)$ (paraguas de Whitney) y W el eje Z. W es una subvariedad central de V, pues $W \cap V_c$ es el semieje positivo, que es Zariski-denso en W. Por consiguiente $q = (x,y)\mathbb{R}|V|$ es localmente real en $\mathbb{R}[V]$, aunque W y V no tienen ningún punto regular en común.

(c) Sea $V = \mathcal{V}(Z(Y^2+X^2)-X^3) \subset \mathbb{R}^3$ (paraguas de Cartan). V es un cono sobre la cúbica $X^2+Y^2-X^3 = 0$ situada en el plano $Z = 1$ y con vértice en el origen. Por tanto el eje Z corta al conjunto de puntos centrales sólo en el origen. En consecuencia, el ideal $q = (x,y)\mathbb{R}[V]$ no es localmente real. Esto puede ser comprobado directamente como sigue: tenemos

$$z(x^2+y^2) - x^3 = 0,$$

de donde

$$x - z = zy^2/x^2,$$

y finalmente, $zx-z^2 = z^2y^2/x^2$.

Así pues $zx-z^2$ es un cuadrado en $\mathbb{R}(V)$. Ahora

$$z^2 + (zx-Z^2) = zx \in (x) \subset q.$$

Pero $z^2 \notin q$, luego q no es localmente real.

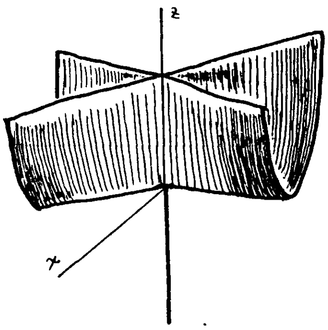


Fig.1: Paraguas de Whitney

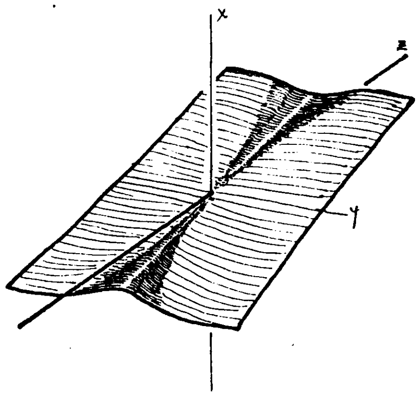


Fig. 2: Paraguas de Cartan

Finalizamos el epígrafe con unas aplicaciones del teorema 2.10.

2.14. Corolario.- *Sea* V *una variedad algebraica, real, irreducible, no singular de* R^n. *Entonces, los ideales reales de* $R[V]$ *coinciden con los ideales localmente realmente reales de* $R[V]$. *En particular, cualquier ideal real de* $R[X_1,\ldots,X_n]$ *es localmente real.*

2.15. Corolario.- *Sea* A *un dominio de integridad real y finitamente generado sobre* R. *Entonces cualquier ideal maximal entre los ideales localmente reales de* A *es maximal.*

Demostración.- Sea m un ideal de A que es maximal en el conjunto de ideales localmente reales. Sea V una variedad cuyo anillo de coordenadas es A. Entonces m define una subvariedad central W de V. Sea $x \in W \cap V_c$ y consideremos el ideal maximal $J(\{x\}) \supset m$. $J(\{x\})$ es localmente real por 2.5 y por tanto $m = J(\{x\})$.

§3. Anillos de valoración reales. Caracterización.

Tomando los ideales localmente reales como punto de partida, se puede desarrollar una teoría de anillos de valoración reales similar al caso general, caracterizando dichos anillos como los ideales maximales entre los ideales locales cuyo ideal maximal es localmente real.

3.1. Definición.- *Sean* K *un cuerpo real y* A *un anillo de valoración de* K.

Diremos que A *es un anillo de valoración real si su cuerpo* *residual es real (o, equivalentemente, si su ideal maximal* m_A *es real).*

Es inmediato comprobar que si un cuerpo K tiene un anillo de valoración real entonces K es real. Para aspectos técnicos, extendemos la clase de ideales localmente reales como sigue:

3.2. Definición.- *Sean* A *un subanillo de un cuerpo real* K *y* p *un ideal de* A. *Decimos que* p *es totalmente real con respecto a* K *si para cada* $x_1,\ldots,x_n \in K$ *tales que* $x_1^2+\ldots+x_n^2 \in p$ *se tiene* $x_i \in p$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

3.3. Observaciones.- (a) La diferencia entre la definición anterior y la de ideal real, está, en que aquí los elementos x_i se toman en K, mientras que en la de ideal real han de pertenecer al anillo A. Es inmediato que

totalmente real $\Longrightarrow$ localmente real $\Longrightarrow$ real.

(b) La definición 3.2 es altamente restrictiva. En efecto, en particular, implica que todo elemento de A que es suma de cuadrados en K lo es en el cuerpo de fracciones de A. Más precisamente, sea $b \in p$ y denotemos por $b^{-1}p$ el conjunto

$$b^{-1}p = \{a/b : a \in p\} \subset K$$

Entonces todo elemento de A que es suma de cuadrados en K lo es en $L = \bigcap_{b\in p} b^{-1}p$. En efecto, sea $f = f_1^2+\ldots+f_r^2$, $f_i \in K$ y sea $b \in p$ arbitrario. Multiplicado por b^2 resulta:

$$b^2f = (bf_1)^2 +\ldots+ (bf_r)^2 \in p,$$

luego $bf_i \in p$ $1 \leqslant i \leqslant r$, de donde $f_i \in b^{-1}p$.

Por supuesto, cualquier elemento $f \in A$ que sea suma de cuadrados $f = f_1^2 +\ldots+ f_r^2$, con algún $f_i \notin A$, genera un ideal que no es localmente real. Así pues, la definición 3.2 no parece interesante en sí misma, y sólo la usaremos para enfatizar el fuerte comportamiento de los ideales de los anillos de valoración reales.

El siguiente resultado motiva la definición 3.2.

3.3. Proposición.- *Sean* K *un cuerpo real y* A *un anillo de valoración de* K. *Entonces, son equivalentes:*

(a) A *es un anillo de valoración real.*

(b) El ideal maximal m_A *de* A *es localmente real.*

(c) El ideal maximal m_A *de* A *es totalmente real.*

Demostración.- (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a) es inmediato. Probaremos, pues, (a) $\Rightarrow$ (c). Sean $x_1,\ldots,x_n \in K$ tales que $x_1^2 +\ldots+ x_n^2 \in m_A$. Sea v la valoración canónica asociada a A, y sea $v(x_s) = \min\{v(x_1),\ldots,v(x_n)\}$. Entonces, si $v(x_s) > 0$ se tiene que para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $v(x_i) > 0$ y por tanto $x_i \in m_A$. Supongamos $v(x_s) \leqslant 0$. Entonces $x_s^{-1} \in A$ y

$$(x_s^{-1})^2(x_1^2 +\ldots+ x_n^2) = 1 + \sum_{i\neq s} (x_s^{-1}x_i)^2 \in m_A.$$

Pero, por construcción $x_s^{-1}.x_i \in A$ y m_A es real por hipótesis. Se sigue, pues, que $1 \in m_A$, contradicción.

Paralelamente al caso clásico se tiene:

3.4. <u>Proposición</u>.- *Sea* A *un anillo de valoración real de un cuerpo* K. *Entonces:*

(a) Cada subanillo B *tal que* $A \subset B \subset K$ *es un anillo de valoración real.*

(b) El ideal maximal m_B *de un anillo* B *en las condiciones de (a) es un ideal primo de* A *totalmente real.*

(c) La aplicación $p \to A_p$ *es una biyección, que invierte el orden, entre el conjunto de ideales primos de* A *y el conjunto de anillos* B, $A \subset B \subset K$. *La aplicación inversa es* $B \to m_B$.

<u>Demostración</u>.- (a) Que B es un anillo de valoración es conocido. Sea m_B su ideal maximal. Se tiene $m_B \subset m_A$, y m_B es un ideal primo de A. Vamos a ver que B es real. Supongamos $x_1,\dots,x_n \in B$ tales que $x_1^2 +\dots+ x_n^2 \in m_B$ y, digamos, $x_1 \notin m_B$. Entonces, puesto que B es un anillo de valoración, $x_1^{-1} \in B$ y

$$(x_1^{-1})^2(x_1^2 +\dots+ x_n^2) = 1 + (x_1^{-1}x_2)^2 +\dots+ (x_1^{-1}x_n)^2 \in m_B \subset m_A.$$

Pero, por 3.3(c), m_A es totalmente real y sería $1 \in m_A$, contradicción. Así pues, $x_i \in m_B$, $1 \leq i \leq n$, lo que prueba que m_B es real y su consecuencia que B es un anillo de valoración real.

(b) es inmediato después de (a) y 3.3 (c).

(c) es conocido por la teoría general de anillos de valoración (cf. [Bo]).

3.5. <u>Corolario</u>.- *Sea* A *un anillo de valoración real de* K. *Entonces todos los ideales primos de* A *son totalmente reales (y 'a fortiori' localmente reales).*

3.6. <u>Nota</u>.- El corolario 3.5, en su segundo enunciado, es un caso particular de una situación más general que estudiaremos más adelante (ver 4.6.).

Siguiendo el desarrollo clásico hacia el teorema de caracterización, necesitamos ahora un análogo real al lema de Chevalley sobre extensión de ideales. Dicho resultado aparece por primera vez en $[Br_1]$ subsumido en una demostración más general. Por completitud, establecemos separadamente y damos aquí una prueba detallada del mismo. Precisamos de un lema que enunciamos sin demostración, que usaremos en varias ocasiones en lo sucesivo, y cuya prueba puede encontrarse en $[Br_1]$.

3.7. <u>Lema</u>($[Br]_1$).- *Sea* A *un subanillo de un cuerpo real* K. *Sea* β *la restricción a* A *de un orden parcial de* K, *y sea* p *un ideal primo de* A *que es* β*-convexo. Entonces existe un orden total* $\hat{\beta}$ *en* K *que extiende a* β *tal que* p *es convexo con respecto a* $\hat{\beta} \cap A$.

La demostración se hace aplicando el lema de Zorn.

3.8. <u>Lema</u> (Lema de Chevalley real, $[Br_1]$).- *Sea* A *un subanillo de un cuerpo real* K. *Sean,* β *un orden total en* K, m *un ideal de* A *que es* $(\beta \cap A)$*-convexo y* $x \in K$, $x \neq 0$. *En* *tonces o existe un ideal* m' *en* $A[x]$ *que es* $(\beta \cap A[x])$-*-convexo y* $m' \supset m\, A[x]$, *o existe un ideal* m'' *en* $A[x^{-1}]$ *que es* $(\beta \cap A[x^{-1}])$-*convexo y* $m'' \supset mA[x^{-1}]$.

Demostración.- Cambiando x por $-x$ si es preciso, podemos suponer que $x > 0$ (todas las desigualdades son con respecto al orden β). Si no existe un ideal propio m' en $A[x]$ que es $(\beta \cap A[x])$-convexo y tal que $m' \supset m\, A[x]$, existen $a_o,\dots,a_m \in m$, tales que:

$$1 \leqslant a_o x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m \qquad (*)$$

En efecto, el conjunto $H = \{f \in A[x] : f^{2r} \leqslant a_o x^m + \dots + a_m,\ a_i \in m\}$, es un ideal de $A[x]$, contiene a $mA[x]$ y es $(\beta \cap A[x])$-convexo. Por tanto, H es propio si y sólo si $1 \notin H$.

Análogamente, si no existe un ideal propio m'' en $A[x^{-1}]$ tal que $m'' \supset m\, A[x^{-1}]$ y es $\beta \cap A[x^{-1}]$-convexo, existen $b_o,\dots$ $\dots,b_n \in m$ tales que

$$1 \leqslant b_o x^{-n} + b_1 x^{-n+1} + \dots + b_n. \qquad (**)$$

Tanto m como n son positivos, pues supongamos, por ejemplo, $m = 0$. Entonces $1 \leqslant a_o$, $a_o \in m$, y puesto que m es $(\beta \cap A)$-convexo, sería $1 \in m$, contradicción. Tomemos m y n mínimos entre los enteros que verifican ecuaciones del tipo $(*)$ y $(**)$, y, supongamos $m \geqslant n$. Entonces, $a_o \geqslant 0$ y $b_o \geqslant 0$, pues si no,

$$1 \leqslant a_o x^m + \dots a_m \leqslant a_1 x^{m-1} + \dots + a_m.$$

Multiplicando $(**)$ por x^m, resulta:

$$x^m(1-b_n) \leqslant b_o x^{m-n} + \ldots + b_{n-1}x^{m-1} \qquad (***)$$

Pero $1-b_n \geqslant 0$ (pues si $1 \leqslant b_n$, como $b_n \in m$ sería $1 \in m$, absurdo), y multiplicando (*) por $1-b_n$, obtenemos:

$$1-b_n \leqslant a_o x^m(1-b_n) + \ldots + a_m(1-b_n),$$

y sustituyendo el valor de $x^m(1-b_n)$ de (***),

$$1-b_n \leqslant a_o(b_o x^{m-n} + \ldots + b_{n-1}x^{m-1}) + \ldots + a_m(1-b_n),$$

que proporciona una ecuación de tipo (*) con exponente estrictamente más bajo que m, contradicción. Por consiguiente el lema queda demostrado.

3.9. Corolario.- *Sean,* A *un subanillo de un cuerpo real* K, m *un ideal de* A *que es localmente real con respecto a* K, *y* $x \in K$, $x \neq 0$. *Entonces, o* $\sqrt[\ell]{mA[x]}^K$ *es un ideal propio en* $A[x]$, *o* $\sqrt[\ell]{mA[x^{-1}]}^K$ *es un ideal propio en* $A[x^{-1}]$.

Demostración.- Es suficiente demostrar el corolario cuando m es primo. Entonces, por el lema 3.7, existe un orden total β en K tal que m es $(\beta \cap A)$-convexo. Pero, por el lema 3.8, podemos suponer que existe un ideal m' en $A[x]$ tal que $m' \supset mA[x]$ y m' es $(\beta \cap A[x])$-convexo. En particular, m' es localmente real y, en virtud de 2.4(c), $\sqrt[\ell]{mA[x]}^K \subset m'$.

Para enunciar el teorema de caracterización, recordamos, que dados dos anillos locales $A \subset B$, se dice que B domina sobre A si $m_B \cap A = m_A$, donde m_A y m_B representan los ideales maximales de A y B respectivamente.

3.10. Teorema.- *Sean* K *un cuerpo real y* A *un subanillo de* K. *Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) A *es un anillo de valoración real.*

(b) K *es el cuerpo de fracciones de* A *en* K, *el conjunto de ideales de* A *está totalmente ordenado por la relación de inclusión y todos los ideales primos de* A *son localmente reales con respecto a* K.

(c) A *es un elemento maximal en el conjunto* F *de subanillos locales de* K *cuyo ideal maximal es localmente real con respecto a* K, *ordenado por la relación de dominación.*

Demostración.- (a) $\Rightarrow$ (b). Las dos primeras afirmaciones de (b) son conocidas por la teoría general de valoraciones, y la realidad local de los ideales primos de A se sigue de 3.5.

(b) $\Rightarrow$ (c). Puesto que el conjunto de ideales de A está totalmente ordenado por inclusión, A tiene un único ideal maximal m_A, y en consecuencia, A es local. Más aún, por ser m_A localmente real con respecto a K, $A \in F$. Supongamos que $B \in F$, $A \subset B$ y que B domina sobre A. Sea $b \in B$; en particular $b \in K$ y por (b), es $b = \frac{m}{n}$, $m,n \in V$. Pero, $mA \subset nA$, o $mA \supset nA$. En el primer caso, $b \in A$, y en el segundo, $b^{-1} \in A$. En éste, como $b \in B$ y B domina sobre A, $b^{-1} \notin m_A$ y por tanto b^{-1} es una unidad en A. Consecuentemente $b \in A$, luego, en cualquier caso $b \in A$ lo que prueba $B \subset A$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea A maximal de F, y supongamos $x \in K$ tal que $x \notin A$ y $x^{-1} \notin A$. Como el ideal maximal m_A de A es localmente real con respecto a K, uno de los ideales $\sqrt[\ell]{m_A A[x]}^K$, $\sqrt[\ell]{m_A A[x^{-1}]}^K$ es propio en el respectivo anillo $A[x]$ ó $A[x^{-1}]$.

Tomemos, por ejemplo, el primero, y sea p un ideal primo de $A[x]$, localmente real y tal que $p \supset \sqrt[\ell]{mA[x]}$. Entonces $B = A[x]_p \in F$ en virtud del lema siguiente 3.11, $B \subset A$ y B domina sobre A, lo que contradice la elección A.

3.11. <u>Lema</u>.- *Sea* A *un subanillo de un cuerpo real* K *y sea* p *un ideal primo de* A *que es localmente real con respecto a* K. *Entonces* pA_p *es un ideal primo de* A_p *que es localmente real con respecto a* K.

<u>Demostración</u>.- Sean $h_1, h_2 \in A_p$ elementos totalmente positivos en K tales que $h_1+h_2 \in pA_p$. Fijemos $h_i = a_i/b_i$, $a_i, b_i \in A$, $b_i \notin p$, $i=1,2$. Entonces $b_2a_1 + b_1a_2 \in p$, y multiplicando por b_1b_2 obtenemos

$$b_2^2b_1a_1 + b_1^2b_2a_2 \in p.$$

Como $b_ia_i = b_i^2 \frac{a_i}{b_i}$, b_ia_i es totalmente positivo en K. Puesto que p es localmente real, se sigue $b_2^2b_ia_1 \in p$ y $b_1^2b_2a_2 \in p$ y por ser p primo, $a_1, a_2 \in p$. En consecuencia $h_1, h_2 \in pA_p$.

3.12. <u>Observación</u>.- La misma demostración sirve para probar que, si β es un orden (parcial o total) en K y p es $(\beta \cap A)$-convexo, entonces pA_p es $(\beta \cap A_p)$-convexo.

Terminamos el epígrafe con una aplicación del teorema 3.10 que constituye uno de los resultados fundamentales en la teoría de valoraciones reales. En ella, los ideales primos localmente reales de un anillo, aparecen como centros de dichas valoraciones, confirmando que éstos, deben tomarse como la clase de ideales apropiada para la elaboración de una teoría de valoraciones reales.

3.13. <u>Teorema</u> (Teorema de existencia de valoraciones reales, [Br_1]).- *Sea* A *un subanillo de un cuerpo real, y sea* p *un ideal primo de* A, *localmente real con respecto a* K. *Entonces existe un anillo de valoración real* B *de* K *tal que* $A \subset B$ *y* $m_B \cap A = p$, *donde* m_B *representa el ideal maximal de* B.

<u>Demostración</u>.- En virtud del lema 3.11, pA_p es localmente real en A con respecto a K. Por el teorema 3.10 (c), si B es un elemento maximal de Ω dominando sobre A_p, B es el anillo de valoración real que buscamos.

3.14. <u>Observación</u>.- Habida cuenta de que en la demostración anterior sólo se usan los lemas 3.8 y 3.11, se sigue de la observación 3.12 que el teorema 3.13 también es válido en la situación siguiente:

"Si β es un orden total en K y p es $(\beta \cap A)$-convexo, entonces existe un anillo de valoración B de K, B A y $m_B \cap A = p$, tal que m_B es $(\beta \cap B)$-convexo".

Este es el enunciado con el que aparece por primer vez en [Br_1]. Para una demostración diferente y simple del mismo resulta do, haciendo uso de la interrelación entre órdenes y anillos de valoración convexos para dichos órdenes, véase [Br_2], pág. 9.

§4. Intersección de los anillos de valoración reales. Clausura semientera.

Computamos en esta sección la intersección de los anillos de valoración reales que contienen a un anillo dado A. Motivados por la caracterización de la dependencia entera en términos de los anillos de valoración, se define la noción de dependencia semientera y estudiamos algunas propiedades de la misma.

Sea B un anillo real. Definimos los conjuntos:

$$S(B) = \{1 + \Sigma y_i^2 : y_i \in B\}, \quad y \quad S(B)^{-1} = \{1/s : s \in S(B)\}$$

Sea A un subanillo de un cuerpo real K, y denotemos por $A^{\sim}$ el conjunto de elementos de K que verifican una ecuación

$$sx^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \quad s \in S(K), \quad a_1,\ldots,a_n \in A.$$

Obsérvese que $A^{\sim}$ contiene a los elementos enteros sobre A, sin más que poner $s = 1 \in S(K)$. El siguiente resultado es una aplicación del teorema 3.10.

4.1. Teorema.- *Sea* A *un subanillo de un cuerpo real* K. *Denotemos por* $A[S(K)^{-1}]$ *el subanillo generado por* A *y* $S(K)^{-1}$, *y por* $\overline{A[S(K)^{-1}]}$ *su clausura entera. Entonces,*

$$\overline{A[S(K)^{-1}]} = A^{\sim} = \bigcap V_i$$

donde la intersección está tomada sobre todos los anillos de valoración reales que contienen a A.

Demostración.- Probaremos que $\overline{A[S(K)^{-1}]} \subset \bigcap V_i \subset \tilde{A}$, y puesto que, por la propia definición de $\tilde{A}$, $\tilde{A} \subset \overline{A[S(K)^{-1}]}$, se tendrá la igualdad. Sea V un anillo de valoración real que contiene a A. Entonces, si $s \in S(K)$, $s \in V$ o $s^{-1} \in V$. Veremos que en cualquier caso $s^{-1} \in V$. En efecto, si $s = 1+ \Sigma y_i^2 \in V$, $y_i \in K$, s tiene que ser una unidad en V, pues de otro modo sería $1+\Sigma y_i^2 \in m_V$, y como V es localmente real, $1 \in m_V$, contradicción. Por tanto, para todo $s \in S(K)$, $1/s \in V$, de donde $A[S^{-1}(K)] \subset V$. Como V es íntegramente cerrado, esto prueba $\overline{A[S^{-1}(K)]} \subset \bigcap V_i$.

Sea, ahora, $x \notin A$. Afirmamos que $\sqrt{x^{-1}A[x^{-1}]}^K$ es un ideal propio de $A[x^{-1}]$. En efecto, si no, tendríamos:

$$1 + \Sigma y_i^2 = x^{-1}.f(x^{-1}), \quad y_i \in K, \quad f(x^{-1}) \in A[x^{-1}].$$

Sea n el grado de $f(x^{-1})$ y multipliquemos por x^{n+1}. Se tiene

$$x^{n+1}(1 + \Sigma y_i^2) = g(x), \quad g(x) \in A[x],$$

con $g(x)$ de grado n. Pero si $s = 1 + \Sigma y_i^2$, la ecuación anterior, $sx^{n+1} - g(x) = 0$, indica que $x \in \tilde{A}$, absurdo. Así pues, ${}^{\ell}\sqrt{x^{-1} A[x^{-1}]}^K$ es un ideal propio de $A[x^{-1}]$. Consideremos un ideal primo p de $A[x^{-1}]$, localmente real con respecto a K tal que $p \supset {}^{\ell}\sqrt{x^{-1} A[x^{-1}]}$. Por 3.10, existe un anillo de valoración real V dominando sobre $A[x^{-1}]_p$. En particular $x^{-1} \in p \subset m_V$ y por tanto $x \notin V$, lo que prueba el contenido $\bigcap V_i \subset \tilde{A}$.

4.2. Observaciones.- (a) Otras caracterizaciones de la intersección de los anillos de valoración reales que contienen a A aparecen en $[Br_1]$ y $[Br_2]$.

(b) un primer vistazo al conjunto $A[S(K)^{-1}]$ pone de manifiesto el pequeño número de valoraciones reales existentes: en efecto, el conjunto $A[S(K)^{-1}]$ es mucho mayor que la clausura entera $\bar{A}$ de A en K. Los resultados posteriores de esta sección mostrarán con más detalle el tamaño de $A^{\sim}$.

El teorema 4.1 sugiere la siguiente definición:

4.3. Definición.- *Sea* A *un subanillo de un cuerpo real* K. *Un elemento* $x \in K$ *decimos que es semientero sobre* A *si* $x \in A^{\sim}$. *El anillo* $A^{\sim}$ *recibe el nombre de clausura semientera de* A *en* K. *Un anillo* $B \subset K$ *decimos que es semientero sobre* A *si* $B \subset A^{\sim}$, *y* A *es semiíntegramente cerrado en* K *si* $A = A^{\sim}$. *Diremos que* A *es semiíntegramente cerrado si lo es en su cuerpo de fracciones.*

4.4. Observaciones.- (a) La noción anterior ha sido desarrollada en [Br_1] para anillos reales cualesquiera A y B. Nosotros aquí, estamos interesados sólo en su aplicación a la teoría de valoraciones reales, por lo que nos restringimos a la presente situación.

(b) La clausura semientera de $\mathbb{Z}$ en un cuerpo real K recibe el nombre de anillo de funciones holomorfas de K, y ha sido estudiado en [Sch_1] y [Sch_2]. En efecto, allí, Schulting prueba que $\mathbb{Z}^{\sim}$ coincide con la intersección de todos los anillos de valoración de K correspondientes a lugares con cuerpo residual $\mathbb{R}$.

En este sentido, si K es un cuerpo de funciones en una variable sobre $\mathbb{R}$, el conjunto de lugares $\phi : K \to \mathbb{R},\infty$, es el análogo real a la superficie de Riemann de un cuerpo de funciones en una variable sobre $\mathbb{C}$. Entonces, $\mathbb{Z}^{\sim}$ es el conjunto de funciones $f \in K$ tales que para todo punto $\phi : K \to \mathbb{R},\infty$ de dicha superficie, $f(\phi) = \phi(f) \in \mathbb{R}$, es decir f es "holomorfa" en ϕ. Esto justifica el nombre de $\mathbb{Z}^{\sim}$ como el anillo de funciones holomorfas de K.

El anillo $\mathbb{Z}^{\sim}$ puede ser aplicado en el problema decimosexto de Hilbert, para el estudio de las componentes conexas de una variedad algebraica sobre el cuerpo de los números reales (ver op. cit.).

Establecemos ahora una serie de propiedades del anillo $A^{\sim}$ que usaremos en lo sucesivo.

4.5. <u>Proposición</u>.- *Si* A *es semiíntegramente cerrado y* q *es un ideal primo de* A *localmente real, entonces* A_q *es semiíntegramente cerrado.*

<u>Demostración</u>.- Sea K el cuerpo de fracciones de A y sea $X \in K$ semientero sobre A_q. Entonces, existen elementos $y_1,\ldots,y_s \in K$ y $\alpha_i = a_i/t_i \in A_q$, $a_i \in A$, $t_i \in A \setminus q$ tales que:

$$(1 + \sum_{i=1}^{t} y_i^2)x^n + \alpha_1 x^{n-1} +\ldots+ \alpha_n = 0$$

Pongamos $t = \prod_{i=1}^{n} t_i$ y multipliquemos por t^n en la ecuación anterior. Resulta,

$$(1 + \Sigma y_i^2)(tx)^n + b_1(tx)^{n-1} +\ldots+ b_n = 0$$

donde $b_i = \frac{a_i}{t_i} t^i \in A$. Por ser A semiíntegramente cerrado, $tx \in A$, y por tanto $x = (tx)/t \in A_q$.

4.6. Proposición.- *Si* A *es semiíntegramente cerrado, entonces cualquier ideal radical de* A *es localmente real.*

Demostración.- Por el teorema 4.1, si K es el cuerpo de fracciones de A, $A = A^{\sim} \supset A[S(K)^{-1}]$. Sea q un ideal radical de A y supongamos $x \in A$ tal que

$$x^{2r} + \Sigma y_i^2 \in q, \qquad y_i \in K$$

Entonces $x^{2r}(1 + \Sigma(y_i x^{-r})^2) \in q$. Pero $(1 + \Sigma(y_i x^{-r})^2)^{-1} \in S(K)^{-1} \subset A$, luego deducimos $x^{2r} \in q$ y en consecuencia $x \in q$.

El siguiente resultado muestra la relación entre los anillos locales que son semiíntegramente cerrados y los anillos de valoración reales:

4.7. Proposición.- *Un anillo de valoración de un cuerpo real* K, *es real, si y sólo si es semiíntegramente cerrado. Más aún, todo subanillo local semiíntegramente cerrado en* K *es un anillo de valoración real.*

Demostración.- Por el teorema 4.1, todo anillo de valoración real es semiíntegramente cerrado. Recíprocamente, si A es un anillo de valoración que es semiíntegramente cerrado y m_A es su ideal maximal, entonces m_A es real por 4.6, luego A es real. Para probar la última parte de la proposición, es suficiente ver, que si A es un anillo local que es semiíntegramente cerrado en K, entonces A es un anillo de valoración de K.

Sea $x \in K$ y $x^{-1} \in K$. Por ser A semiíntegramente cerra do, se tiene $(1+x^2)^{-1} \in A$ y por tanto $1-(1+x^2)^{-1} = x^2/(1+x^2) \in A$. Por otra parte $(1+x^2)^{-1}$ es una unidad en A, pues si $(1+x^2)^{-1} \in m_A$ entonces $1-(1+x^2)^{-1} = x^2/(1+x^2)$ sería una unidad en A y tendríamos $(1+x^2)/x^2 = 1+(1/x)^2 \in A$, de donde $(1/x)^2 \in A$ y por tanto $x^{-1} \in A$ puesto que A es, en particular, íntegramente cerrado. Contradicción. Así pues, $(1+x^2) \in A$, luego $x^2 \in A$ y $x \in A$.

4.8. Corolario.- *Sea* A *un subanillo semiíntegramente cerrado en un cuerpo* K. *Entonces, para cada ideal primo* p *de* A, A_p *es un anillo de valoración real de* K.

4.9. Corolario.- *Sea* A *un subanillo de un cuerpo real* K. *La familia de anillos de valoración reales de* K *que contienen a* A *es la familia de anillos locales* $(A^{\sim})_p$, *donde* p *recorre todos los ideales primos de* $A^{\sim}$.

4.10. Corolario.- *Sea* A *un subanillo de un cuerpo real* K. *Entonces,* K *es el cuerpo de fracciones de* $A^{\sim}$.

Demostración.- Basta observar que si q es un ideal primo (distinto de cero) de $A^{\sim}$ entonces $(A^{\sim})_q$ es un anillo de valoración de K. Consiguientemente el cuerpo de fracciones de $A^{\sim}$ coincide con el cuerpo de fracciones de $(A^{\sim})_q$ y éste con K.

Los últimos corolarios muestran el enorme tamaño de $A^{\sim}$: incluso si $A = \mathbb{Z}$, el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}^{\sim}$ es K. Esto provoca que la clausura semientera $A^{\sim}$ no sea un elemento útil desde el punto de vista geométrico. En efecto, $A^{\sim}$ no es, en general, finitamente generado, ni noetheriano, aunque A lo sea (*). A pesar de todo, en algunas ocasiones, es la herramienta necesaria para resolver problemas de valoraciones reales, por venir caracterizado como la intersección de todas ellas. Por otra parte, el tamaño de $A^{\sim}$, en comparación con el de la clausura entera $\bar{A}$ de A, muestra la escasez de valoraciones reales dentro del conjunto de todas las valoraciones de K, lo que auspicia las grandes dificultades que aparecen (y encontraremos) a la hora de describir aquellas, máxime si se impone alguna condición sobre las mismas.

§5. Compatibilidad local de órdenes. Teoremas de ascenso

Estudiamos aquí el comportamiento, por paso al cociente, de las sumas de cuadrados en el cuerpo. Esto conduce a unas ecuaciones de compatibilidad de órdenes con las cuales enunciamos teoremas de ascenso de ideales en extensiones semienteras.

Sea A un subanillo de un cuerpo real K y sea p un ideal primo de A localmente real. Designemos por Δ el cuerpo de fracciones de A/p y por $\Sigma(K)$ y $\Sigma(\Delta)$ el conjunto de sumas de cuadrados de K y Δ respectivamente. Podemos considerar los siguientes órdenes parciales en A/p:

(*) En efecto, Becker demuestra en [Be_2], proposición 1.22, que si K es un cuerpo de funciones sobre un cuerpo realmente cerrado R, y A = R, entonces, si K tiene grado de transcendencia ≥ 2, $A^{\sim}$ no es notheriano.

$$\beta_1 = (\Sigma(K) \cap A)/p = \{x+p \in A/p \; : \; x \in \Sigma(K) \cap A\}$$
$$(*)$$
$$\beta_2 = \Sigma(\Delta) \cap (A/p).$$

¿Cuál es la relación entre β_1 y β_2? La respuesta es: en general β_1 y β_2 no son comparables.

En efecto, sean: $A = R[X,Y,Z]/(X^2-ZY^2)$, K el cuerpo de fracciones de A y $p = (X,Y)/(X^2-ZY^2)$. En virtud de 2.11 (ver también el ejemplo 2.13 (b)) p es localmente real y $A/p = R[Z]$. Sean x, y, z las clases de X, Y, Z en A respectivamente. Entonces, en A, tenemos $z = (x/y)^2 \in \Sigma(K)$ A y por tanto $z+p \in \beta_1$ en $R[z]$. Pero, claramente $z+p \notin \beta_2$, puesto que β_2 está formado por los elementos de $R[z]$ que son no negativos en R. En consecuencia $\beta_1 \not\subset \beta_2$.

Por otra parte, sean, $A = R[X,Y,Z]$, $K = R(X,Y,Z)$ y $p = (X^2-ZY^2)A$. De nuevo por 2.11, p es localmente real en A. Se tiene $Z+p = [(X+p)/(Y+p)]^2 \in \Sigma(\Delta)$ y por tanto $Z+p \in \beta_2$. Sin embargo, $Z+p \notin \beta_1$: supongamos $Z+p \in \beta_1$. Entonces tendríamos una ecuación:

$$Z = f(X,Y,Z) + g(X,Y,Z), \quad f(X,Y,Z) \in R[X,Y,Z], \quad g(X,Y,Z) \in p,$$

y $$f(X,Y,Z) = \frac{1}{b(X,Y,Z)^2}\,\Sigma[a_i(X,Y,Z)]^2, \qquad g(X,Y,Z),$$

$$a_i(X,Y,Z) \in R[X,Y,Z].$$

Sustituyendo la ecuación anterior en el punto $(0,0,-1)$, resultará:

$$-1 = f(0,0,-1),$$

y, por ser $f(X,Y,Z)$ un polinomio, es negativo en un entorno $U \subset R^3$ de $(0,0,-1)$. Pero esto significa que $b(X,Y,Z)$ se anula en todo punto de U y por tanto $b(X,Y,Z) = 0$ en $R[X,Y,Z]$, contradicción. En consecuencia $\beta_2 \not\subset \beta_1$.

Los ejemplos anteriores ilustran claramente cuales son las condiciones necesarias para la compatibilidad de β_1 y β_2 cuando se trata con cuerpos de funciones. En efecto, tenemos:

5.1. <u>Proposición</u>.- *Sean* V *una variedad algebraica irreducible de* R^n, $A = R[X_1,\dots,X_n]/q$ *su anillo de coordenadas,* $q = J(V)$, *y* K *el cuerpo de funciones de* V. *Sean* p *un ideal primo de* A *localmente real,* $W = V(p)$, *y* β_1, β_2 *los órdenes parciales (*) en* A/p. *Entonces* $\beta_1 \subset \beta_2$ *si y sólo si* $W_c \subset V_c$.

<u>Demostración</u>.- Sea $f+p \in \beta_1$. Entonces $f \in \Sigma(K) \cap A$, y por 2.6 $f(x) \geq 0$ para todo $x \in V_c$. Como $W_c \subset V_c$ entonces $f(x) \geq 0$ $\forall x \in W_c$ y, de nuevo por 2.6, $f+p$ es suma de cuadrados en A. Por tanto $f+p \in \beta_2$. Recíprocamente, supongamos $W_c \not\subset V_c$ y sea $a = (a_1,\dots,a_n) \in W_c \setminus V_c$. Existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{x \in V : (x_1-a_1)^2 +\dots+ (x_n-a_n)^2 - \varepsilon < 0\} \cap V_c = \emptyset.$$

La función $g(x) = (x_1-a_1)^2 +\dots+ (x_n-a_n)^2-\varepsilon$ es no negativa en V_c y por consiguiente $g(x) \in \Sigma(K)$ y $g(x)+p \in \beta_1$. Pero $g(x)+p \notin \beta_2$ pues existe un punto central de W en el que $g(x)+p$ es negativa.

5.2. Proposición.- *Con la notación de 5.1, si* $\beta_2 \subset \beta_1$ *entonces* $W \setminus W_c \subset V \setminus V_c$.

Demostración.- Supongamos $a \in W \setminus W_c$, $a \in V_c$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que si

$$g(x) = (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 - \varepsilon,$$

$\{x \in V : g(x) < 0\} \cap W_c = \emptyset$. Por tanto $g(x)+p$ es totalmente positiva en A/p, i.e. $g(x)+p \in \beta_2$. Pero $g(x)$ es negativa en el punto central a de V, luego $g(x) \notin \Sigma(K)$ y por tanto $g(x)+p \notin \beta_1$.

El recíproco de 5.2 es un problema mucho más difícil, que aparece expuesto em [G-R] y [Re_3]: dada una función regular f de V, tal que f es suma de cuadrados en $R(W)$ (equivalentemente, f es no negativa en W_c), ¿existe una función regular g de V, que es suma de cuadrados en $R(V)$, tal que $f+p = g+p$?.

Tenemos el siguiente resultado

5.3. Proposición.- *Sea* $f \in A$ *una función no negativa en* W_c. *Entonces, si*

$$\overline{\{f(x) < 0\}} \cap V_c \cap W = \emptyset,$$

existe una función $g \in A$, *no negativa en* V_c, *tal que* $f+p = g+p$.

Demostración.- Pasando al anillo de polinomios, sea $F \in R[\underline{X}]$ tal que $F+p = f$ y supongamos $J(W) = (H_1, \ldots, H_s)R[\underline{X}]$. Consideremos $H = H_1^2 + \ldots + H_s^2$, e $Y = \overline{\{F(x) < 0\}} \cap V_c$. Y es un conjunto semialgebraico, cerrado, y por hipótesis $H(x) \neq 0$ para todo $x \in Y$. Por consiguiente la función F/H está definida en Y, es continua y semialgebraica en Y.

Por cada $r > 0$, $r \in R$, definimos

$$Y_r = Y \cap \{x \in R^n : |x| = r\}.$$

Y_r es semialgebraico, cerrado y acotado, y por tanto la función F/H alcanza un mínimo en él (nótese que F/H es negativa en Y). En efecto, al igual que la demostración del lema 2.9, puesto que todos los conjuntos y funciones que intervienen son semialgebraicos, la existencia de dicho mínimo se expresa mediante una frase cerrada elemental. Como es cierta para los números reales, lo es para cualquier cuerpo realmente cerrado R. Definimos

$$\varepsilon : R^+ \to R, \qquad \varepsilon(r) = \min \{F(x)/H(x) : x \in Y_r\}.$$

En virtud del principio de Tarski, la función $\varepsilon(r)$ es continua y semialgebraica. Sea

$$U(T,Z) = a_o(T)Z^m + a_1(T).Z^{m-1} + \ldots + a_m(T) \in R[T,Z]$$

un polinomio irreducible tal que $U(r,\varepsilon(r)) = 0$ $\forall r \in R$. Multiplicando por $a_o(T)^{m-1}$ y operando como en 2.9 obtenemos

$$|\varepsilon(r)| \leqslant \frac{1+\Sigma(b_i(r))^2}{|a_o(r)|}, \qquad b_i(r) = a_i(r).(a_o(r))^{i-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Sea $b \in R$, $b > 0$ tal que $\forall r \notin (-b,b)$, $a_o(r) \neq 0$. Entonces, existen $\lambda_1 \in R^+$, $N \in N$ tales que

$\dfrac{1+\Sigma(b_i(r))^2}{|a_o(r)|} \leqslant \lambda_1 r^{2N}$ para todo $r \notin (-b,b)$, y existe $\lambda_2 \in R^+$ tal que $|\varepsilon(r)| \leqslant \lambda_2$ si $r \in [-b,b]$, por la continuidad de $\varepsilon(r)$. Por consiguiente si $\lambda = \max \{\lambda_1,\lambda_2\}$, se sigue que para todo $r \in R^+$

$$|\varepsilon(r)| \leqslant \lambda(1+r^{2N}),$$

de donde, para todo $x \in V_c$

$$|F(x)| \leqslant \lambda(1 + |x|^{2N})H(x)$$

Definamos, $G(x) = F(x) + \lambda(1+ |x|^{2N})H(x)$.

Se tiene $G + J(W) = F + J(W)$, y, si $x \in Y$, $G(x) \geqslant 0$. Por otra parte, si $x \in V_c \setminus Y$ entonces $F(x) \geqslant 0$ y por tanto $G(x) \geqslant 0$ también. En consecuencia $g = G+q$ es suma de cuadrados en $R(V)$, lo que concluye la proposición.

Dada $f \in A$, designemos por Y_f el semialgebraico

$$Y_f = \overline{\{x \in V : f(x) < 0\}} \cap V_c,$$

y sea $Y = \bigcup_{f \in \beta_2} Y_f$, donde la unión se toma sobre todos los $f \in A$ tales que $f+p \in \beta_2$. Entonces, tenemos el siguiente corolario de 5.3.

5.4. <u>Corolario</u>.- *Si* $Y \cap W = \emptyset$ *entonces* $\beta_2 \subset \beta_1$.

5.5. <u>Observación</u>.- Señalamos que, en general, no toda función no negativa sobre W es restricción de una función no negativa sobre V. Por ejemplo (cf. [G-R]), si $V = \mathbb{R}^2$ y $W = V(X^3-Y^2)$, la función $X + (X^3-Y^2)\mathbb{R}[X,Y]$ es no negativa en W, pero no existe ningún polinomio $F(X,Y)$, no negativo en $\mathbb{R}^2$ tal que $F(X+Y) + (X^3-Y^2)\mathbb{R}[X,Y] = X + (X^3-Y^2)\mathbb{R}[X,Y]$.

Por otra parte, la condición de 5.3 no es necesaria. Por ejemplo, si $V = \mathbb{R}^2$ y $W = V(Y-X^2)$, si tomamos $F(X,Y) = Y$, entonces $Y_F \cap W \neq \emptyset$, pero $Y + (Y-X^2)\mathbb{R}[X,Y] = X^2 + (Y-X^2)\mathbb{R}[X,Y]$ y X^2 es no negativa sobre $\mathbb{R}^2$.

Volvemos, ahora, a nuestra situación inicial, es decir, A un subanillo cualquiera de un cuerpo real K, p un ideal primo de A localmente real y los órdenes parciales en A/p, β_1 y β_2. En general, como hemos visto, $\beta_1 \not\subset \beta_2$ y $\beta_2 \not\subset \beta_1$. Esto provoca dificultades del tipo siguiente: si p y q son ideales primos de A, localmente reales, $p \subset q$, no podemos asegurar que q/p sea un ideal localmente real en A/p; recíprocamente, si q es un ideal primo localmente real de A/p, la imagen inversa $\phi^{-1}(q)$ mediante la proyección canónica $A \xrightarrow{\phi} A/p$ no tiene por qué ser localmente real en A.

Hay una clase de anillos para los que $\beta_1 = \beta_2$. En efecto, sean B un anillo de valoración real de K, m su ideal maximal. Entonces $\Delta = B/m_B$ y se tiene, directamente,

$$\beta_2 = \Sigma(\Delta) \qquad \beta_1 = (\Sigma(K) \cap B)/m_B$$

Por otra parte, $\Sigma(K) \cap B = \Sigma(B)$. En efecto, si $x \in B \cap \Sigma(K)$, y $x = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$, $x_i \in K$, sea, por ejemplo, $v(x_1) = \min\{v(x_1), \ldots \ldots, v(x_m)\}$, donde v es la valoración definida por B. Si $v(x_1) \geq 0$ entonces $x_i \in B$, $1 \leq i \leq m$ y $x \in \Sigma(B)$. Si $v(x_1) < 0$ entonces $x_1^{-1} \in B$ y $x = x_1^{-2}(1 + \sum_{i=2}^{m} (x_i . x_1^{-1})^2) \in \Sigma(B)$. Consecuentemente $\beta_1 = \beta_2$.

Esto motiva la introducción de un tercer orden parcial en A/p, de la siguiente forma: sea B un anillo de valoración real de K con centro p en A, i.e. $A \subset B$ y $p = m_B \cap A$. Designe mos por $R(B)$ el cuerpo residual de B. Entonces $A/p \subset \Delta \subset R(B)$ y definimos

$$\beta_3 = \Sigma(R(B)) \cap (A/p).$$

Trivialmente $\beta_2 \subset \beta_3$, y, en virtud del párrafo anterior,

$$\beta_1 = (\Sigma(K) \cap A)/p \subset [(\Sigma(K) \cap B)/m_B] \cap (A/p) \subset \beta_3.$$

Así pues, β_3 es una extensión de β_1 y β_2. En general $\beta_1 \neq \beta_3$, por lo que damos la siguiente definición:

5.6. Definición.- *Sean A un subanillo de un cuerpo real K y p un ideal primo, localmente real, de A. Sea B un anillo de valoración real de K. Decimos que B es localmente compatible con A en p, si B está centrado en p en A y $\beta_1 = \beta_3$, donde $\beta_1 = (\Sigma(K) \cap A)/p$ y $\beta_3 = \Sigma(B/m_B) \cap (A/p)$. Diremos que en p hay compatibilidad local si existe un anillo de valoración real de K que es localmente compatible con A en p.*

La compatibilidad local permite establecer algunos resultados sobre ascenso de ideales que tendremos oportunidad de usar más adelante.

5.7. Proposición.- *Sean A, C dos subanillos de un cuerpo real K. Supongamos que $A \subset B$ y que B es semientero sobre A. Entonces, si p es un ideal de A localmente real con respecto a K, existe un ideal primo q de B, localmente real con respecto a K tal que $q \cap A = p$.*

Demostración.- Por el teorema de existencia de lugares reales (3.13), existe un anillo de valoración real B de K con centro p en A. Puesto que C es semientero sobre A, $C \subset B$. Basta tomar $q = m_B \cap C$.

5.8. Corolario.- *Si C es entero sobre A y p es un ideal de A localmente real con respecto a K, existe un ideal primo q de A localmente real con respecto a K tal que $q \cap A = p$.*

5.9. Proposición.- *Sea A un subanillo de un cuerpo real K y sean p_1, p_2 dos ideales primos de A, localmente reales con respecto a K, $p_1 \subset p_2$. Supongamos que B_1 es un anillo de valoración de K localmente compatible con A en p_1. Entonces, existe un anillo de valoración real B_2 de K tal que $A \subset B_2 \subset B_1$, y B_2 tiene centro p_2 en A.*

Demostración.- Se tiene el siguiente diagrama conmutativo y que conserva los órdenes:

$$\begin{tikzcd}
(A,\ \Sigma(K) \cap A) \arrow[r] \arrow[d] & (B_1, \Sigma(K) \cap B_1) \arrow[d, "\pi"] \\
(A/p_1,\ \beta_1) \arrow[r] & (B_1/m_{B_1},\ \Sigma(B_1/m_{B_1}))
\end{tikzcd}$$

La condición de compatibilidad local de B_1 implica que

p_2/p_1 es un ideal primo de A/p_1 localmente real con respecto a B_1/m_{B_1}. Por 3.13, existe un anillo de valoración real B' de B_1/m_{B_1} centrado en p_2/p_1 en A/p_1. El anillo $B_2 = \pi^{-1}(B')$ es el anillo de valoración real buscado.

5.10. <u>Corolario</u>.- *Sean* A *y* C *dos subanillos de un cuerpo real* K, $A \subset C$ *y* C *semientero sobre* A. *Sean* p_1, p_2 *dos ideales primos de* A *localmente reales con respecto a* K, $p_1 \subset p_2$.

(a) Si en p_1 *hay compatibilidad local, entonces existen* $q_1 \subset q_2$, *ideales primos de* C *localmente compatibles con respecto a* K, *tales que* $q_1 \cap A = p_1$ *y* $q_2 \cap A = p_2$.

(b) Supongamos que q_1 *es un ideal primo de* C *localmente real con respecto a* K, *que yace sobre* p_1, *y en el que hay compatibilidad local. Entonces existe un ideal primo* q_2 *de* C *localmente real con respecto a* K *tal que* $q_1 \subset q_2$ *y* $q_2 \cap A = p_2$.

<u>Demostración</u>.- (a) Sea B_1 un anillo de valoración real de K localmente compatible con A en p_1. Por 5.9 existe un anillo de valoración real B_2 de K tal que $B_2 \subset B_1$ y $m_{B_2} \cap A = p_2$. Por ser C semientero sobre A, es $C \subset B_2 \subset B_1$. Basta tomar $q_2 = m_{B_2} \cap C$ y $q_1 = m_{B_1} \cap C$.

(b) Análogo tomando B_1 anillo de valoración real de K localmente compatible con C en q_1.

El problema es, pues, encontrar condiciones para que haya compatibilidad local. Sea B un anillo de valoración real de K centrado en p en A.

Una condición suficiente para que B sea localmente compatible con A en p es que el ideal maximal m_B de B sea convexo con respecto a todos los órdenes de K. En efecto, si $f \in A$ verifica que $f+p \in \beta_3$ entonces

$$f \equiv x_1^2 + \ldots + x_m^2 \pmod{m_B}, \quad x_i \in B, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Por tanto f es positivo en todos los órdenes del cuerpo residual B/m_B. Supongamos que existe un orden β en K tal que $-f \in \beta$. Como m_B es β-convexo entonces β/m_B es un orden en B/m_B y tendríamos $-f \in \beta/m_B$, contradicción. Así pues, f es positivo en todos los órdenes de K, es decir, f es totalmente positivo en K y se sigue $f \in \beta_1$.

En particular, por 3.7, tenemos

5.11. <u>Corolario</u>.- *Si* K *es un cuerpo con un orden único entonces, para cualquier subanillo* A *y cualquier anillo de valoración real* B *de* A, B *es localmente compatible con* A *en* $m_B \cap A$.

Aunque la condición del orden único es muy fuerte, puede ser aplicada pasando a las clausuras reales de los cuerpos, como en la siguiente:

5.12. <u>Proposición</u>.- *Sea* A *un subanillo de un cuerpo real* K *y sean* p_1 *y* p_2 *dos ideales primos de* A *localmente reales* *con respecto a* K. *Supongamos que* $p_1 \subset p_2$ *y que existe un orden* β *en* K *tal que* p_1 *y* p_2 *son* $(\beta \cap A)$*-convexos. Entonces, si* $C \subset A$ *es una extensión semientera de* A, *existen ideales primos* $q_1 \subset q_2$ *de* C, *localmente reales con respecto a* K *tales que* $q_1 \cap A = p_1$ *y* $q_2 \cap A = p_2$. *Más aún,* q_1 *y* q_2 *son* $(\beta \cap C)$*-convexos.*

<u>Demostración</u>.- Sea R la clausura real de K con respecto a β. Sea $C^{\sim}$ la clausura semientera de C en R. Entonces $C^{\sim}$ es semientero sobre A y p_1 y p_2 son convexos con respecto al único orden, R^+, de R. En particular, p_1 y p_2 son locamente reales con respecto a R y por 5.10 y 5.11 existen q_1' y q_2', ideales primos de $C^{\sim}$ locamente reales tales que $q_1' \subset q_2'$, $q_1' \cap A = p_1$ y $q_2' \cap A = p_2$. Basta tomar $q_1 = q_1' \cap C$ y $q_2 = q_2' \cap C$.

Por otra parte, q_1' y q_2' son $(R^+ \cap C^{\sim})$-convexos, de donde q_1 y q_2 son $(\beta \cap C)$-convexos.

5.13. <u>Proposición</u>.- *Sea* A *un subanillo de cuerpo real* K *y sean* $p_1 \subset \dots \subset p_r$ *una familia de ideales primos de* A *localmente reales con respecto a* K. *Supongamos que existe un orden* β *en* K *tal que todos los* p_i *son* $(\beta \cap A)$*-convexos. Entonces, existe una familia de anillos de valoración reales de* K,

$$A \subset B_r \subset B_{r-1} \subset \dots \subset B_1$$

tales que B_i *está centrado en* p_i *en* A.

Demostración.- Sea R la clausura real de (K,β). Entonces, si B'_1 es un anillo de valoración real de R con centro p_1 en A, en virtud de 5.9, existe B'_2 tal que $A \subset B'_2 \subset B'_1$ y B'_2 tiene centro p_2 en A. Aplicando reiteradamente 5.9 a $p_2 \subset p_3$ y B'_2, etc..., encontramos una cadena de anillos de valoración reales de R, $A \subset B'_r \subset \ldots \subset B'_1$, tales que B'_i tiene centro p_i en A. Basta tomar $B_i = B'_i \cap K$.

5.14. Corolario.- *En las condiciones de 5.12, si* $p_1 \subset \ldots \subset p_r$ *es una familia de ideales primos de* A *localmente reales y* β *es un orden en* K *de modo que todos los* p_i *son* $(\beta \cap A)$*-convexos, entonces existe una familia de ideales primos de* C, $q_1 \subset \ldots \subset q_r$ *tales que son* $(\beta \cap C)$*-convexos (y por lo tanto localmente reales con respecto a* K*) y*

$q_i \cap A = p_i$, $1 \leq i \leq r$.

5.14. Observación.- Pudiera parecer que la condición en 5.12, 5.13 y 5.14 de que exista un orden que haga convexos simultáneamente a los ideales es muy fuerte. Sin embargo tenemos el siguiente recíproco de 5.11:

Proposición.- *Sea* p_1 *y* p_2 *dos ideales primos de un subanillo* A *de un cuerpo real* K, $p_1 \subset p_2$. *Supongamos que existen ideales primos* q_1 *y* q_2 *en la clausura semientera,* $A^\sim$, *de* A *en* K, *tales que* $q_1 \subset q_2$, *y* $q_1 \cap A = p_1$ *y* $q_2 \cap A = p_2$. *Entonces existe un orden* β *en* K *tal que* p_1 *y* p_2 *son* $(\beta \cap A)$*-convexos.*

<u>Demostración</u>.- En virtud de 4.8, $(A^{\sim})_{q_1}$ y $(A^{\sim})_{q_2}$ son anillos de valoración reales. Además $(A^{\sim})_{q_2} \subset (A^{\sim})_{q_1}$. Por consiguiente, cf. [Z-S], hay una cadena de lugares reales (cf. §6) $K \xrightarrow{\theta_2} K_1,\infty \xrightarrow{\theta_1} \Sigma,\infty$ tales que $(A^{\sim})_{q_2}$ es el anillo de valoración de θ_2 y $(A^{\sim})_{q_1}$ es el anillo de valoración de $\theta_1 \circ \theta_2$. Fijemos un orden arbitrario en Σ. Demostraremos en 6.4 que existe un orden en K_1 tal que θ_1 conserva órdenes, es decir si $a \in K_1$, $a \geqslant 0$, entonces $\theta_1(a) \geqslant 0$, o $\theta_1(a) = \infty$. Análogamente, existe un orden en K tal que θ_2 conserva órdenes (donde en K_1 consideramos el orden que acabamos de obtener). El orden β de K así obtenido verifica que q_1 y q_2 son $(\beta \cap A^{\sim})$-convexos. En consecuencia p_1 y p_2 son $(\beta \cap A)$-convexos.

CAPITULO II: EXISTENCIA DE LUGARES REALES EN CUERPOS REALES DE FUNCIONES.

En este capítulo iniciamos el estudio de lugares reales en cuerpos de funciones. No obstante, el epígrafe §6 se dedica al estudio general de existencia y extensión de lugares sobre un cuerpo arbitrario. A lo largo de todo el capítulo, R será un cuerpo realmente cerrado arbitrario (salvo mención explícita de lo contrario como en §8), y V será una variedad algebraica real irreducible de R^n. Todo el capítulo está destinado a demostrar la existencia de lugares reales con centro en V, rango y dimensión dados arbitrariamente de antemano. Para ello se inicia por la situación más sencilla, para concluir en el teorema general, teorema 10.8.

Aunque el estudio intenta ser lo más algebraico posible, se utilizan argumentos geométricos cuando son necesarios, como en el §8. Finalmente, el capítulo concluye con un epígrafe dedicado al cono tangente real (§11).

§6. Existencia y extensión de lugares reales.

Recordemos que dados dos cuerpos K y L, un lugar $\phi : K \to L,\infty$, que suponemos sobreyectivo, es real, si L es un cuerpo real. Es inmediato, que en estas circunstancias, K es real también. Por supuesto, la definición anterior es equivalente a decir que ϕ es real si su anillo de valoración $B_\phi = \{x \in K : \phi(x) \in L\}$, es real (cf. 3.1). Designamos por m_ϕ el ideal maximal de B_ϕ,

$m_\phi = \{x \in K : \phi(x) = 0\}$. Dos <u>lugares</u> (reales o no) ϕ y ψ de K, $\phi : K \to L_\phi,\infty$, $\psi : K \to L_\psi,\infty$, <u>son equivalentes</u> si verifican una de las siguientes condiciones -a su vez equivalentes- (cf. [Z-S]):

(a) existe un isomorfismo $f : L_\phi \to L_\psi$ tal que $\psi = f\circ\phi$,

(b) los anillos de valoración B_ϕ y B_ψ coinciden.

Decimos que un lugar ϕ de K, es <u>finito</u> en un subanillo A de K, si $A \subset B_\phi$. Si ϕ es finito en A, el ideal primo $p = m_\phi \cap A$ se llama <u>centro</u> de ϕ en A. Por último, si K y L son cuerpos ordenados y $\phi : K \to L,\infty$ es un lugar real decimos que ϕ <u>preserva el orden</u> si para todo $x \in K$, tal que $x \geqslant 0$, $\phi(x) \geqslant 0$, o $\phi(x) = \infty$. Es inmediato comprobar, que si ϕ preserva el orden entonces B_ϕ y m_ϕ son convexos con respecto al orden β fijado en K. Recíprocamente si B es un anillo de valoración cuyo ideal maximal m_B (o equivalentemente, el mismo B) es convexo con respecto a un orden total β de K, entonces, el lugar canónico $\phi_B : K \to (B/m_B)$, donde en B/m_B se fija el orden cociente $(\beta \cap B)/m_B = \{x+m_B \mid x \in \beta \cap B\}$, preserva el orden.

Así, el teorema 3.13 puede ser enunciado en términos de lugares del siguiente modo:

6.1. <u>Teorema</u> (de existencia de lugares reales, [Br_1]).- *Sean* A *un subanillo de un cuerpo real y* p *un ideal primo de* A *localmente real con respecto a* K. *Entonces, existe un lugar real* ϕ *de* K, *finito en* A *y con centro* p *en* A.

De ls misma manera, la observación 3.14 permite la siguiente formulación de 6.1:

6.2. Teorema [Br_1].- *Con la notación de 6.1, si* β *es un orden total de* K *tal que* p *es* $(\beta \cap A)$*-convexo, entonces existe un lugar* ϕ *de* K *que preserva el orden, con centro* p *en* A.

El teorema 6.2, junto con los resultados 2.8 y 2.11, conducen al próximo resultado para cuerpos de funciones, cuya versión para el caso de puntos aparece ya, en [Du_1]. Recordamos, que si V es una variedad algebraica irreducible en un cuerpo K^n, y W es una subvariedad irreducible de V, un lugar ϕ de K(V) se dice que está centrado en W en V (o que tiene centro W en V) si $K[V] \subset B_\phi$ y $m_\phi \cap K[V] = J(W)$.

6.3. Teorema.- *Sea* V *una variedad algebraica real e irreducible de* R^n, *donde* R *es un cuerpo realmente cerrado cualquiera. Sea* $W \subset V$ *una subvariedad irreducible de* V. *Entonces* W *es centro de un lugar real de* R(V) *si y sólo si* W *es una subvariedad central de* V.

Entre los resultados clásicos que no son ciertos para las valoraciones reales, destaca, por su importancia, el teorema de extensión. Más concretamente, no es cierto que si $h : A \to L$ es un homomorfismo de un subanillo de un cuerpo real K, con valores en un cuerpo real L, h se extienda a un lugar real de K. El teorema 6.3 proporciona múltiples ejemplos. Sirva, como botón de muestra $A = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-X^3)$, K el cuerpo de fracciones de A y $h : A \to \mathbb{R}$ el homomorfismo de sustitución en (0,0). Si h se extendiera a un lugar real ϕ de K, el centro de ϕ en

$V = V(X^2+Y^2-X^3) \subset \mathbb{R}^2$ sería el origen, que no es una subvariedad central de V.

Surge así, uno de los problemas más clásicos y difíciles en la teoría de lugares reales: la extensión de lugares reales. El problema es atacado por primer vez por Lang en su célebre "The theory of real places" ([L]). Allí, Lang demuestra, que tomando como punto de partida un cuerpo y un lugar, en vez de un anillo y un homomorfismo, la extensión es posible en algunas ocasiones. Damos aquí una nueva demostración de este resultado, que sirve de ejemplo de utilización de las técnicas desarrolladas en el capítulo I. Necesitamos, primero, un lema que parece remontarse hasta Baer y Krull:

6.4. Lema.- *Sea* $\phi : K \to L,\infty$ *un lugar real de* K, *y supongamos que fijamos un orden* $\overline{\beta}$ *en* L. *Entonces, existe un orden* β *en* K *tal que* $\phi : (K,\beta) \to (L,\overline{\beta}),\infty$ *preserva el orden.*

Demostración.- Consideramos

$$F = \{\text{órdenes parciales } \alpha \text{ de } K : \phi : (K,\beta) \to (L,\overline{\beta}) \text{ preserva el orden}\}.$$

F es distinto del vacío pues $\Sigma(K) \in F$. Es inmediato comprobar que F es inductivo, con respecto a la relación de inclusión. Sea β un elemento maximal de F. Afirmamos que β es un orden total de K. Pues, supongamos que existe $x \in K$ tal que $x \notin \beta$ y $-x \in \beta$. Entonces, también $1/x \notin \beta$ y $-1/x \notin \beta$, pues, si, por ejemplo, $1/x \in \beta$, se tiene $x^2(1/x) = x \in \beta$, absurdo. Sustituyendo x por $1/x$ si es necesario, podemos suponer $\phi(x) \in L$, es de cir, finito. Pero, los conjuntos

$$\beta[x] = \{a+bx : a,b \in \beta\}, \quad y \quad \beta[-x] = \{a-bx : a,b \in \beta\}$$

son órdenes parciales de K. Entonces, si $\phi(x) \in \overline{\beta}$, $\beta[x] \in F$, y si $\phi(x) \in (-\overline{\beta})$, $\beta[-x] \in F$, luego en cualquier caso, llegamos a una contradicción con la maximalidad de β.

6.5. <u>Teorema</u> (Lang [L]).- *Sea* $\phi : K \to L,\infty$ *un lugar real de* ϕ *tomando valores en un cuerpo* L *realmente cerrado. Entonces existe una clausura real* $\overline{K}$ *de* K, *y un lugar real* $\overline{\phi} : \overline{K} \to L,\infty$ *que extiende* ϕ.

<u>Demostración</u>.- Sea $\Delta = \phi(K)$ y consideremos en Δ el orden inducido por el orden de L. Por 6.4, existe un orden β en K tal que ϕ preserva el orden. Sean B_ϕ el anillo de valoración de ϕ y m_ϕ su ideal maximal. El ideal m_ϕ es $(\beta \cap B_\phi)$-convexo, y si consideramos en $\Delta_\phi = B_\phi/m_\phi$ el orden cociente $\overline{\beta} = (\beta \cap B_\beta)/m_\phi$ tenemos un isomorfismo $f : (\Delta_\phi, \overline{\beta}) \to \Delta$ que preserva el orden (ver diagrama).

Consideremos la clausura real $\overline{K}$ de K con respecto al orden β y denotemos también por β' el único orden de $\overline{K}$. Entonces m_ϕ es $(\beta' \cap B_\phi)$-convexo. Por el teorema 6.2, existe un anillo de valoración real B' de $\overline{K}$ tal que $B' \subset B_\phi$, y su ideal maximal m' es $(\beta' \cap B')$-convexo y $m' \cap B_\phi = m_\phi$. Por ser B_ϕ anillo de valoración, es $B' \cap K = B_\phi$, con lo que la restricción a K del lugar canónico $\pi' : \overline{K} \to \Delta' = B'/m'$ es el lugar canónico $\pi : K \to \Delta_\phi$. Se tiene, así, el siguiente diagrama conmutativo y que preserva órdenes:

$$\begin{tikzcd}
\overline{K} \arrow[r, "\pi'"] & \Delta' \arrow[drr, dashed, "\overline{f}"] & & \\
K \arrow[u] \arrow[r, "\pi"] \arrow[drr, "\phi"'] & \Delta_\phi \arrow[u] \arrow[dr, "f"] & & \\
& & \Delta \arrow[r] & L
\end{tikzcd}$$

Finalmente, Δ' es una extensión algebraica de Δ_ϕ y por tanto el isomorfismo f se extiende a un monomorfismo $\overline{f} : \Delta' \to L$ que preserva el orden. La composición $\overline{\phi} = \overline{f}\circ\pi'$ es el lugar real buscado.

Obsérvese, que si K está ordenado desde el principio con un orden β tal que el lugar $\phi : K \to L,\infty$ preserva el orden, entonces la clausura real a la que es posible la extensión puede ser fijada de antemano. En este caso, como además el cuerpo residual de la extensión es algebraico sobre Δ, el anillo de valoración B' de $\overline{\phi}$ viene caracterizado por ser el mínimo anillo de valoración real de $\overline{K}$ con centro m_ϕ en B_ϕ y con ideal maximal m' $(\beta' \cap B')$-convexo. Por tanto la extensión $\overline{\phi}$ está unívocamente determinada y tenemos

6.6. <u>Teorema</u> (Knebusch [K]).- *Sea* K *un cuerpo ordenado y* ϕ *un lugar real de* K, $\phi : K \to L,\infty$, *que preserva el orden y que toma valores en un cuerpo realmente cerrado* L. *Sea* $\overline{K}$ *la clausura real de* K *y sea* F *un cuerpo cualquiera,* $K \subset F \subset \overline{K}$. *Entonces, existe una única extensión* $\overline{\phi} : F \to L,\infty$, *de* ϕ, *tal que* $\overline{\phi}$ *preserva el orden.*

Si prescindimos de la restricción de que la extensión $\bar{\phi}$ tome valores en L, podemos generalizar el teorema anterior como sigue:

6.7. <u>Proposición</u>.- *Sea* K *y* L *dos cuerpos ordenados,* E *una extensión ordenada de* K *(no necesariamente algebraica), y sea* $\phi : K \to L,\infty$ *un lugar real de* K*, que suponemos sobreyectivo y que preserva el orden. Entonces* ϕ *se extiende a un lugar* ϕ^* *de* E *con valores en una extensión ordenada* L^* *de* L*,* $\phi^* : E \to L^*,\infty$*, y tal que* ϕ^* *preserva el orden.*

<u>Demostración</u>.- La demostración es similar a la del teorema 6.5. Puesto que ϕ preserva el orden, si denotamos por β el orden en K, m_ϕ es $(\beta \cap B_\phi)$-convexo. Sea β' el orden de E. Como β' es extensión de β, m_ϕ es, también, $(\beta' \cap B_\phi)$-convexo. Entonces, existe un anillo de valoración real, B', de E, tal que $B' \subset B_\phi$ y $m' \cap B_\phi = m_\phi$. En consecuencia $B' \cap K = B_\phi$, y la restricción del lugar canónico $\pi' : E \to B'/m' = \Delta'$ es el lugar canónico $\pi_\phi : K \to B_\phi/m_\phi = \Delta_\phi$. Tenemos pues el siguiente diagrama conmutativo y que preserva órdenes (formado por las flechas contínuas):

$$\begin{tikzcd}
\bar{K} \arrow[r, "\pi'"] & \Delta' \arrow[r, dashed, "f^*"] \arrow[dr, dashed, "f'"'] & \tilde{L} \\
 & & L' \arrow[u, dashed, hook] \\
K \arrow[uu, hook] \arrow[r, "\pi_\phi"] \arrow[drr, "\phi"'] & \Delta_\phi \arrow[uu, hook] \arrow[dr, "f"] & \\
 & & L \arrow[uu, dashed, hook]
\end{tikzcd}$$

donde f es el isomorfismo canónico, que preserva órdenes, tal que $\phi = f\circ\pi_\phi$.

Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una base de transcendencia de Δ' sobre Δ_ϕ, y consideremos el cuerpo $L' = L(\{x_i : i \in I\})$ y el isomorfismo

$$f' : \Delta_\phi(\{x_i : i \in I\}) \to L(\{x_i : i \in I\})$$

definido por: $f'|_{\Delta_\phi} = f$, y $f'(x_i) = x_i$. Denotemos por α el orden imagen por f' del orden $\beta' \cap \Delta_\phi(\{x_i : i \in I\})$. Entonces f' es un isomorfismo que preserva el orden, y por consiguiente extiende a un monomorfismo, f^*, de Δ' en la clausura real, L^*, de L', que preserva órdenes. La composición $\phi^* = f^*\circ\pi'$ produce el lugar real buscado.

El resultado anterior muestra una de las dificultades fundamentales al tratar con lugares reales: la falta de información sobre el cuerpo residual. Esto provoca multitud de problemas y, en efecto, podrá comprobarse en las páginas sucesivas, que uno de los principales esfuerzos se realiza con el fin de tener algún tipo de control sobre el mismo. Por citar un ejemplo, es bien conocido, que si $\phi : K \to L,\infty$ es un lugar de un cuerpo K, y E es una extensión de grado de transcendencia r sobre K, entonces existen extensiones ϕ^* de ϕ, $\phi^* : E \to L^*,\infty$, de dimensión s sobre ϕ, es decir, L^* tiene grado de transcendencia s sobre L, para cualquier s, $0 \leqslant s \leqslant r$. El enunciado análogo para lugares entre cuerpos ordenados es falso, como muestra el siguiente simple ejemplo: sea $K = L = \mathbb{Q}$ y $\phi = 1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Sea E la clausura real contenida en $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}(\pi)$. Entonces no existe ningún lugar real de E, que extienda ϕ y sea de dimensión cero sobre él. En efecto, la proposición 6.10, que demostraremos más adelante, asegura que tal lugar no existe por ser E una extensión arquimediana de $\mathbb{Q}$.

Por otra parte, la extensión E de K factoriza en

$$K \subset K[x_1, \ldots, x_r] = F \subset E,$$

donde F es una extensión puramente transcendente de K y E es una extensión algebraica de F. Si denotamos por β^* el orden en E, $\beta' = \beta^* \cap F$, y $\beta = \beta^* \cap K$, y suponemos que podemos extender el lugar $\phi : K \to L, \infty$ a un lugar real ϕ' de F que tenga dimensión s sobre ϕ y preserve el orden, el teorema 6.6 garantiza la extensión de ϕ' a un lugar ϕ^* de E, que sería de dimensión s sobre ϕ. Por tanto, la dificultad aparece, no en las extensiones algebraicas, sino en las extensiones puramente transcendentes. Más concretamente, estriba en el hecho de que las extensiones de los lugares tienen que preservar un orden dado de antemano. Por otra parte, si suprimimos esta condición de conservar el orden tenemos:

6.8. <u>Proposición</u>.- *Sean* K *un cuerpo real y* ϕ *un lugar real de* K. *Sea* $E = K(T_1, \ldots, T_r)$ *una extensión puramente transcendente de* K. *Entonces, para cada* d, $0 \leqslant d \leqslant r$, *existe un lugar real* ψ_d *de* E, *que es extensión de* ϕ *y tiene dimensión* d *sobre él.*

<u>Demostración</u>.- Sean B el anillo de valoración de ϕ y m_ϕ su ideal maximal. Consideremos el anillo $C = B_\phi[T_1, \ldots, T_r]$ y

los ideales $p_i = (m_\phi, T_1,\ldots,T_i)C$, $1 \leq i \leq r$, $p_o = m_\phi C$. Puesto que $T_1,\ldots,T_r$ son algebraicamente independientes sobre B_ϕ, los ideales p_i, $0 \leq i \leq r$ son primos y yacen sobre m_ϕ, i.e. $p_i \cap B_\phi = m_\phi$, (a posteriori, esta demostración prueba que también son localmente reales en C). Afirmamos que C_{p_o} es un anillo de valoración real de E. En efecto,

(a) E es el cuerpo de fracciones de C (y a fortiori de C_{p_o})

(b) Sea $x \in E$. Veremos que $x \in C_{p_o}$ o $1/x \in C_{p_o}$. En efecto, por (a), x se escribe:

$$x = \frac{\Sigma f_i\, m_i}{\Sigma g_j\, n_j}, \quad f_i, g_j \in B_\phi,$$

y donde m_i, n_j son distintos monomios de la forma $T_1^{i_1}\ldots T_r^{i_r}$.

- Si $\Sigma g_j\, n_j \notin p_o$ entonces $x \in C_{p_o}$

- Si $\Sigma f_i\, m_i \notin p_o$ entonces $1/x \in C_{p_o}$

- Supongamos $\Sigma f_i\, m_i \in p_o$ y $\Sigma g_j\, n_j \in p_o$. Entonces $f_i, g_j \in m_\phi$ $\forall i,j$. Si $v(g_x) = \min\{v(f_i), v(g_j)\}$ entonces,

$$x = \frac{\Sigma(f_i/g_k)m_i}{\Sigma(g_j/g_k)n_j} \in C_{p_o},$$

y si $v(f_k) = \min\{v(f_i), v(g_j)\}$ entonces

$$\frac{1}{x} = \frac{\Sigma(g_j/g_k)n_j}{\Sigma(f_i/f_k)m_i} \in C_{p_o},$$

donde v representa la valoración definida por B_ϕ. En consecuencia C_{p_o} es un anillo de valoración de E.

(c) Veamos que es real. Por la independencia algebraica de $T_1,\dots,T_r$ se tiene

$$C_{p_o}/p_oC_{p_o} = \text{c.fr.}(C/p_o) = \text{c.fr.}(B_\phi/m_\phi(t_1,\dots,t_r)) =$$
$$= \Delta_\phi(t_1,\dots,t_r)$$

donde $t_1,\dots,t_r$ son los p_o-residuos de $T_1,\dots,T_r$ y son algebraicamente independientes sobre Δ_ϕ, el cuerpo residual de ϕ. Como ϕ es real, Δ_ϕ es real y por tanto también lo es $\Delta_\phi(t_1,\dots,t_r)$, cuerpo residual de C_{p_o}.

Sea Φ_o el lugar real definido por C_{p_o}. Φ_o es una extensión de ϕ de dimensión r sobre él. Consideremos la restricción de Φ_o a C

$$\Phi_o : C \to \Delta_\phi[t_1,\dots,t_r].$$

Tenemos, $\Phi_o(p_i) = p_i/p_o = (p_o,T_1,\dots,T_r)/p_o = (t_1,\dots,t_i)\Delta_\phi[t_1,\dots,t_r]$. Ahora, dado el anillo de polinomios $\Delta_\phi[t_1,\dots,t_r]$ y la cadena de ideales $(t_1)\subset(t_1,t_2)\subset\dots\subset(t_1,\dots,t_r)$, tomamos el lugar real

$$\Phi_1 : \Delta_\phi(t_2,\dots,t_r)(t_1) \to \Delta_\phi(t_2,\dots,t_r)$$

definido por el anillo de valoración $\Delta_\phi(t_2,\dots,t_r)[t_1]_{(t_1\Delta_\phi(t_2,\dots t_r)[t_1])}$. A continuación sea θ_2 el lugar real de $\Delta_\phi(t_2,\dots,t_r)$,

$$\theta_2 : \Delta_\phi(t_3,\dots,t_r)(t_2) \to \Delta_\phi(t_3,\dots,t_r)$$

definido por el anillo de valoración $\Delta_\phi(t_3,\dots,t_r)[t_2]_{(t_2\Delta_\phi(t_3,\dots,t_r)[t_2])}$ y tomemos $\Phi_2 = \psi_2 \circ \Phi_1$. Por recurrencia obtenemos una cadena de lugares reales $\Phi_1,\dots,\Phi_r$, cada uno compuesto del anterior

$$\Delta_\phi(t_1,\dots,t_r) \to \Delta_\phi(t_2,\dots,t_r) \to \dots \to \Delta_\phi(t_r) \to \Delta_\phi$$

cuyos respectivos centros en $\Delta_{\phi}[t_1,\ldots,t_r]$ son (t_1), (t_1,t_2), ..., $(t_1,\ldots,t_r)$.

Por último las composiciones $\psi_d = \Phi_d \circ \Phi_o$, $1 \leqslant d \leqslant r$, $\psi_o = \Phi_o$, proporcionan una cadena de lugares reales de E, que extienden ϕ y ψ_d tiene dimensión d sobre ϕ, lo que concluye la demostración. Obsérvese que ψ_d tiene centro p_d en C, lo que prueba que p_d es localmente real, $0 \leqslant d \leqslant r$.

Para concluir hay un caso de extensión de lugares que es particularmente importante: cuando el lugar base, ϕ, es trivial, es decir, dado un cuerpo real K y una extensión real suya, E, ¿cuando existe un lugar real ψ de E tal que $\psi|_K = 1_K$?.

6.9. Definición.- *Sea* E *una extensión de un cuerpo* K. *Un lugar* ψ *de* E *se dice que es un lugar de E sobre K si* $\phi|_K = 1_K$. *Si* ψ *es un lugar de* E *sobre* K *(brevemente, un lugar de* E|K*) definimos la dimensión de* ψ (dim ψ) *como el grado de transcendencia del cuerpo residual de* ψ *sobre* K.

Por supuesto, dim $\psi \leqslant$ grado trans $[E : K]$. Recordemos el siguiente resultado:

6.10. Proposición.- *Sea* E *una extensión real de un cuerpo real* K. *Entonces, existen lugares reales, no triviales, de* E *sobre* K *si y sólo si existe un orden* β *en* E *tal que* (E,β) *no es arquimediano sobre* $(K, \beta \cap K)$.

Demostración.- Supongamos que para todo orden β de E, (E,β) es arquimediano sobre $(K, \beta \cap K)$, y sea $\phi : E \to L,\infty$ un lugar real de E sobre K. Fijemos un orden arbitrario α en L. Por 6.4, existe un orden β_o en E tal que ϕ preserva el orden β_o. Entonces el anillo de valoración B_ϕ de ϕ es β_o-convexo y $B_\phi \supset K$. Como (E,β_o) es arquimediano sobre K, resulta $B_\phi = E$ y por tanto ϕ es trivial.

Recíprocamente si β es un orden de E tal que (E,β) no es arquimediano sobre $(K, \beta \cap K)$, el lugar de Krull definido por K y β, es decir, el lugar de anillo de valoración

$$B = \{x \in E : \text{ existe } a \in K, \ -a \leq_\beta x \leq_\beta a\},$$

y cuyo ideal maximal es

$$m = \{x \in E : \text{ para todo } a \in K, \ -a <_\beta x <_\beta a\},$$

es un lugar real de E sobre K, que no es trivial.

6.11. Definición.- *Con la notación de la definición 6.9, un lugar de* E *sobre* K *de dimensión cero recibe el nombre de* ***lugar algebraico*** *sobre* K. *Cuando el cuerpo residual es el propio* K *el* ***lugar*** *se dice que es* ***racional***.

§7. Existencia de lugares reales racionales, discretos, de rango 1, en cuerpos reales de funciones

Empezamos el estudio específico de lugares reales en cuerpos de funciones, dedicando este epígrafe a probar un único resultado, que servirá de motivación para aquellos, mucho más exigentes, que seguirán en las próximas secciones. Por otra parte, la técnica usada aquí es diferente a las que utilizaremos en el futuro: se trata de una aplicación del teorema de inmersión de Lang (Lang's embedding theorem, [L]). En todo lo que sigue R es un cuerpo realmente cerrado arbitrario.

7.1. Proposición.- *Sea* $K = R(x_1,\ldots,x_n)$ *un cuerpo real de funciones de grado de transcendencia* r *sobre* R. *Sea* $A = R[x_1,\ldots,x_n]$. *Entonces, existe un lugar real de* K *sobre* R, $\Phi : K \to R,\infty$, *que es finito en* A, *de rango uno y discreto.*

Demostración.- La demostración es como sigue: consideramos el anillo de series con exponentes fraccionarios $R((t))^*$, que es realmente cerrado, y definimos una inmersión de K en $R((t))^*$. En $R((t))^*$ tenemos la valoración canónica de rango 1:

$$\begin{aligned} v : R((t))^* &\to \mathbb{Q} \\ z(t) &\to O(z(t)), \end{aligned}$$

donde $O(z(t))$ representa el orden de la serie $z(t)$. La composición de la inmersión obtenida con v produce una valoración de rango 1 en K. Hay un punto de fundamental importancia: la inmersión ha de ser escogida de modo que para cada $i=1,\ldots,n$, la imagen $z_i(t)$ de x_i sea tal que $O(z_i(t)) \geq 0$, para obtener la finitud de ϕ en A.

Por el lema de normalización de Noether podemos suponer que $\{x_1,\ldots,x_r\}$ es una base de transcedencia de K sobre R y que A es entero sobre $R[x_1,\dots,x_r]$. Sea ξ un elemento primitivo de K sobre $R(x_1,\dots,x_r) = R(x')$, y sea $f(T,x') = T^s + a_{s-1}(x')T^{s-1} + \dots + a_o(x')$ el polinomio mínimo de ξ sobre $R(x')$. Sea $G_\nu(a_i(x'))$ una sucesión de Sturm para f y consideremos la familia finita de funciones racionales de $R(x')$, $\{g_\nu\}$, formada por x_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, los coeficientes de f, $a_i(x')$, y las funciones $G_\nu(a_i(x'))$. Fijemos un orden arbitrario en K y consideremos las funciones g_ν con su respectivo signo en dicho orden. Por [L], existe una especialización $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ de x' en R^r tal que $g_\nu(\alpha)$ tiene el mismo signo (en R) que $g_\nu(x')$ (en K), para cada ν.

Ahora, $R \subset R((t))^*$ y considerando las funciones $g_\nu(x')$ como funciones sobre $(R((t))^*)^r$, son continuas en $\alpha \in (R((t))^*)^r$, y por lo tanto conservan el signo en un entorno de α. Sea $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ una r-tupla de elementos algebraicamente independientes de $R((t))^*$ sobre R, suficientemente pequeños para que, para cada ν, el signo de $g_\nu(\alpha+\lambda)$ sea el mismo que el de $g_\nu(\alpha)$. Afirmamos que $O(\lambda_i(t)) \geqslant 0$. En efecto, tomemos λ_i tal que $|\lambda_i-\alpha| < 1$ (en el único orden de $R((t))^*$). Si

$$\lambda_i(t) = t^{s_i}(c_i+d_i+\dots) \qquad \alpha_i \in Q, \quad c_i \neq 0,$$

El elemento $c_i+d_it+\dots$, es finito con respecto a R (i.e. está acotado por elementos de R en el orden de $R((t))^*$) y por tanto, λ_i es infinito o finito con respecto a R según s_i sea o no negativo respectivamente. Como $|\lambda_i-\alpha| < 1$ entonces $s_i \geqslant 0$.

Puesto que $f(T,x')$ tiene una raíz real en K, $f(T,\alpha+\lambda)$

tiene una raíz real η en $R((t))^*$, y $K = R(x_1,\dots,x_r,\xi)$ es isomorfo a $R(\alpha_1+\lambda_1,\dots,\alpha_r+\lambda_r,\eta) \subset R((t))^*$, mediante el isomorfismo: $x_i \to z_i(t) = \alpha_i+\lambda_i(t)$, $\xi \to \eta(t)$. Por consiguiente, si $i=1,\dots,r$, $O(z_i(t)) \geqslant 0$. Si $i > r$, tenemos una ecuación de dependencia entera

$$x_i^m + b_1(x')x_i^{m-1} +\dots+ b_m(x') = 0, \quad b_i(x') \in R[x_1,\dots,x_r].$$

Aplicando el isomorfismo anterior, como $O(b_j(z_1(t),\dots,z_r(t))) \geqslant 0$, si fuera $O(z_i(t)) < 0$ (donde $z_i(t)$ es la imagen de x_i), tomando órdenes en la ecuación anterior sería

$$O(z_i(t)^m + b_1(z_1(t),\dots,z_r(t))z_i(t)^{m-1} +\dots+$$
$$+ b_m(z_1(t),\dots,z_r(t))) = O(z_i(t)^m) < 0,$$

contradicción. Por tanto $O(z_i(t)) \geqslant 0$ para todo $i=1,\dots,n$. Finalmente, supongamos $z_i(t) \in R[[T^{1/d_i}]]$ y sea d el mínimo común múltiplo de los d_i. El isomorfismo de sustitución $h : R((t))^* \to R((t))^*$, $h(z(t)) = z(t^d)$, compuesto con el isomorfismo inicial proporciona una inmersión de K en el cuerpo de series de Laurent, $R((t))$. Sea $v : R((t)) \to \mathbb{Z}$ la valoración canónica de $R((t))$, $v(z(t)) = O(z(t))$. La composición de la inmersión $K \to R((t))$, con v produce una valoración real, discreta y de rango uno cuyo cuerpo residual es R. El lugar asociado con dicha valoración concluye la demostración de 7.1.

7.2. Observación.- Nótese que la proposición 7.1 no dice nada acerca del centro en A del lugar que construimos. Dicho centro tiene que ser un ideal maximal, localmente real de A. La pregunta natural es, ¿puede éste ser fijado "a priori"?. Por ejemplo, supongamos que el ideal $m = (x_1,\dots,x_n)A$ es localmente real. ¿Existe un lugar real ϕ de K sobre R tal que es discreto, racional, tiene rango uno y centro m en A?. Un primer modo de atacar el problema es intentar escoger la inmersión de la proposición 7.1 de forma que verifique las condiciones apropiadas, a saber, que $O(z_i(t)) > 0$, $i=1,\dots,n$. De cualquier manera, esto no parece nada claro, y nos vemos obligados a afrontar el problema desde un punto de vista geométrico, que es el objeto de la siguiente sección.

§8. Lemas de selección de curvas Zariski-densas. Cuerpos de Cantor.

El problema final que queremos resolver, es, como indicamos al final del epígrafe anterior, la existencia de lugares reales discretos de rango 1 y dimensión cero, con centro dado de antemano. Geométricamente, si V es una variedad algebraica irreducible cuyo cuerpo de funciones es K y cuyo anillo de coordenadas es $A = R[x_1,\dots,x_n] = R[X_1,\dots,X_n]/J(V)$, tales lugares se corresponden con evaluaciones a lo largo de curvas formales, $X_i = z_i(t) \in R[[t]]$ $1 \leqslant i \leqslant n$, contenidas en V y que son densas en la topología de Zariski de V, es decir si un polinomio se anula sobre ellas entonces el polinomio es idénticamente cero en A. El centro del lugar en V es, entonces, el punto $(z_1(0),\dots,z_n(0))$.

8.1. Definición.- *Sea* V *una variedad algebraica real irreducible de* R^n. *Sea* $J(V) \subset R[X_1,\dots,X_n]$ *el ideal de* V. *Consideremos que el origen* $\underline{0} = (0,\dots,0) \in V_c$. *Una curva analítica en* V *pasando por el origen es un homomorfismo*

$$\gamma : R[X_1,\dots,X_n] \to R[[t]]$$

tal que $O(\gamma(X_i)) > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *y* $\ker \gamma \supset J(V)$. *Decimos que* γ *es Zariski densa en* V *si* $\ker \gamma = J(V)$. *Sea*

$$S = \{x \in V : f_1(x) > 0,\dots,f_p(x) > 0\}, \quad f_i \in R[V], \quad 1 \leqslant i \leqslant p,$$

un conjunto semialgebraico, abierto, de V, *tal que* $\underline{0} \in \overline{S}$ *Decimos que* γ *está contenida en* S *si* $\gamma(f_1) > 0,\dots$ $\dots,\gamma(f_p) > 0$ *en el orden de* $R[[t]]$ *que hace* $t > 0$.

Así pues, nuestro propósito es encontrar curvas analíticas, Zariski-densas, en V, a través del origen. Para ello utilizaremos el siguiente resultado de MacLane y Schilling que asegura la existencia de suficientes elementos en $R[[t]]$ que son algebraicamente independientes sobre $R(t)$, y proporciona un método para construirlos:

8.2. <u>Lema</u> ([Mac-Sch]).- *Sea* $K((t))$ *el cuerpo de series formales con coeficientes en el cuerpo* K *de característica cero. Entonces, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existen* n *series de potencias* $y_1,\dots,y_n \in K((t))$ *que son algebraicamente independientes sobre* $K(t)$. *Más aún,* $y_1,\dots,y_n$ *pueden ser tomadas en* $\mathbb{Q}[[t]]$ *y con órdenes tan altos como queramos.*

<u>Demostración</u>.- El primer aserto es el que aparece en [Mac-Sch], Lema 1, pág. 509. Las puntualizaciones sobre las posibilidades de elección de $y_1,\dots,y_n$ son consecuencia directa de la demostración que allí se da. En efecto, allí prueban que si

$$y_1 = a_{1o} + a_{1\ell_1(1)}\, t^{\ell_1(1)} + \dots + a_{1\ell_1(k)}\, t^{\ell_1(k)} + \dots$$

$$\vdots$$

$$y_n = a_{n_o} + a_{n\ell_n(1)}\, t^{\ell_n(1)} + \dots + a_{n\ell_n(k)}\, t^{\ell_n(k)} + \dots,$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, y los exponentes verifican las condiciones:

$$(*)\quad \begin{array}{l} \ell_1(K+1) \geq (k+1)\, \ell_1(k), \qquad \ell_1(1) \geq 1 \\ \ell_i(k+1) \geq \ell_{i-1}[k+1+k\, \ell_i(k)], \qquad \ell_i(1) \geq 1, \quad i=2,\dots,n, \end{array}$$

entonces las series $y_1,\dots,y_n$ son algebraicamente independientes sobre $K(t)$. Consiguientemente las series $y_1' = t^{\alpha_1} y_1,\dots,y_n' = t^{\alpha_n} y_n$

son, también, algebraicamente independientes sobre $K(t)$.

8.3. Observaciones.- (a) De la demostración anterior se deduce, que una condición suficiente para la independencia algebraica es dejar lagunas de gran tamaño en los exponentes de t: las dadas por la condición (*). Observamos también, que construidas n series algebraicamente independientes sobre $K(t)$ por el método anterior, siempre podemos añadir q nuevas series, sin modificar las anteriores para obtener $n+q$ series algebraicamente independientes, sin más que usar las inecuaciones (*).

(b) Si L es una extensión ordenada de K, e $y_1,\dots,y_n$ son n series algebraicamente independientes sobre $K(t)$, construidas como en 8.4, entonces $y_1,\dots,y_n$ son, también, algebraicamente independientes sobre $L(t)$, puesto que la inecuaciones (*) sólo afectan a los exponentes.

(c) El mismo hecho de poder elegir libremente los coeficientes de las series $y_1,\dots,y_n$, hace que, si trabajamos en un cuerpo en el que podamos hablar de convergencia (piénsese, por ahora, en $\mathbb{R}$), las series $y_1,\dots,y_n$ pueden tomarse en $R\{t\}$.

Si el origen $\underline{0}$ es un punto simple de V, el lema de existencia de curvas Zariski-densas en V por $\underline{0}$ es una aplicación fácil del teorema de la función implícitas para series formales.

8.4. Lema.- *Sea* V *una variedad algebraica irreducible de* R^n, *y supongamos que* $\underline{0}$ *es un punto simple de* V. *Entonces,* *existe una curva analítica* γ *en* V, *a través de* $\underline{0}$, *que es Zariski-densa en* V.

Demostración.- Sea $r = \dim V = \dim_{\underline{0}} V$. Puesto que $\underline{0}$ es un punto simple, existen polinomios $f_{r+1},\dots,f_n$, con diferenciales linealmente independientes en $\underline{0}$, y tales que en un entorno U de $\underline{0}$ se tiene que

$$U \cap V = \{x \in R^n : f_{r+1}(x) = \dots = f_n(x) = 0\}$$

(cf. [Re], o [Br$_1$]). Después de un cambio de coordenadas podemos suponer que $\det\left(\frac{\partial f_{r+1},\dots,f_n}{\partial x_{r+1},\dots,x_n}(0,0)\right) \neq 0$. Por 8.2, sean $z_1(t),\dots,z_r(t)$ r series de potencias en $R[[t]]$, algebraicamente independientes sobre R(t) y tales que $z_1(0) = \dots = z_r(0) = 0$. El sistema

$$\begin{cases} f_{r+1}(z_1(t),\dots,z_r(t),x_{r+1},\dots,x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(z_1(t),\dots,z_r(t),x_{r+1},\dots,x_n) = 0, \end{cases}$$

$f_{r+k}(z(t);x'') \in R[[t,x_{r+1},\dots,x_n]]$, verifica que $\det\left(\frac{\partial f_{r+1},\dots,f_n}{\partial x_{r+1},\dots,x_n}(0,0)\right) \neq 0$. Por consiguiente, en virtud del teorema de la función implícita para series formales [To], existen series formales $z_{r+1}(t),\dots,z_n(t)$ tales que

$$f_{r+1}(z_1(t),\dots,z_n(t)) = \dots = f_n(z_1(t),\dots,z_n(t)) = 0,$$

y $z_{r+1}(0) = \dots = z_n(0) = 0$.

Definimos $\gamma : R[X_1,\dots,X_n] \to R[[t]]$, $\gamma(X_i) = z_i(t)$, $1 \leq i \leq n$. Por construcción, tenemos $J(V) \subset \ker \gamma$, y por consi guiente, dim (ker γ) $\leqslant$ dim ($J(V)$) = r. Por otra parte, ker $\gamma \cap R[X_1,\ldots,X_r] = \{0\}$, puesto que $z_1(t),\ldots,z_r(t)$ son algebraicamente independientes sobre R. Por tanto, tenemos una inclusión $R[X_1,\ldots,X_r] \to R[X_1,\ldots,X_n]/\ker\gamma$ y dim (ker γ) $\geqslant$ r. En consecuencia ker $\gamma = J(V)$, lo que completa la prueba.

8.5. Observación.- Si el cuerpo base son los números reales (u otros cuerpos que definiremos más adelante) el argumento anterior es el siguiente: después de un cambio de coordenadas podemos suponer

$$U \cap V = \{(x_1,\ldots,x_r,\phi_1(x_1,\ldots,x_r),\ldots,\phi_{n-r}(x_1,\ldots,x_r) :$$
$$: (x_1,\ldots,x_r) \in U' \subset R^r\}$$

donde U' es un entorno abierto del origen en R^r y $\phi_1,\ldots,\phi_{n-r}$ son funciones analíticas-algebraicas. Escogemos $z_1(t),\ldots,z_r(t)$, series convergentes a través del origen y algebraicamente independientes sobre R y definimos por $X_i = z_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$X_{r+j} = \phi_j(z,(t),\ldots,z_r(t)).$$

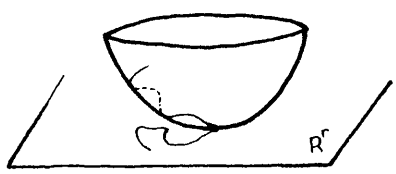


Fig. 3

Para la demostración del caso general, es decir, cuando el origen es un punto central de V necesitamos introducir los cuerpos de Cantor. Dichos cuerpos son definidos por primera vez por Dubois $[Du_1]$ y Bukowski [Bu], como aquellos cuerpos reales donde tiene sentido hablar de convergencia de series.

8.6. Definición.- *Un cuerpo ordenado se dice que es un cuerpo de Cantor si existe un elemento* $\mu \in K^+$ *tal que* $\lim_n \mu^n = 0$, *i.e.* $\forall \varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, *existe* $n \in N$ *tal que* $0 < \mu^n < \varepsilon$. *El elemento* μ *se dice que es un microbio.*

Por ejemplo, en $\mathbb{R}$, 1/2 es un microbio. Análogamente, si $K(t)$ es ordenado de forma que t es infinitesimal y positivo, entonces t es un microbio en $K(t)$, pero 1/2 no lo es, pues $t < (1/2)^n$ para todo n.

Los siguientes resultados aparecen en [Du_1] (cf. también [D-B]):

8.7. Proposición.- *Cualquier extensión finitamente generada de un subcuerpo de los números reales es un cuerpo de Cantor, con respecto a todos sus órdenes.*

8.8. Proposición.- *Si* K *es un cuerpo de Cantor y* $\overline{K}$ *es su clausura real, entonces* $\overline{K}$ *es de Cantor.*

Dado un cuerpo K ordenado, podemos definir su complección $K^\wedge$ usando el valor absoluto definido por dicho orden, de manera totalmente análoga a la construcción de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$, i.e. una sucesión $\{a_n\} \subset K$ se dice que es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_o$ tal que $\forall p,q \geq n_o$, $|a_p - a_q| < \varepsilon$, donde todas las desigualdades se refieren al orden fijado en K. Se considera el conjunto de sucesiones de Cauchy, etc... (cf. [VdW]). Además, si K es realmente cerrado también lo es $K^\wedge$ (cf. |Bu|).

Dado un cuerpo ordenado K, definimos la noción de convergencia de una serie usando la topología del orden.

8.9. Definición.- *Una serie* $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ *de elementos de* K *es convergente si la sucesión* $\{s_k\}_{k\geqslant 0}$, $s_k = \sum_{n=o}^{k} a_n$ *es de Cauchy.*

En consecuencia, una serie convergente de K converge a un elemento de $K^\wedge$. Si K es un cuerpo de Cantor y μ es un microbio, es inmediato comprobar que la serie $\sum_{n=o}^{\infty} r^n$ converge a $\frac{1}{1-r}$ cuando $0 < r < \mu$. Igualmente tenemos el siguiente hecho inmediato.

8.10. Lema.- *Sean* $r_o > 0$, $M > 0$, *tales que* $\forall n \geqslant 0$, $|a_n| r_o^n \leqslant M$. *Entonces,* $\forall r \in K$, $0 < r < r_o$, *la serie de potencias* $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ *converge normalmente en el disco cerrado* $D_{\mu r} = \{x \in K : |x| \leqslant \mu r\}$.

Así pues, en cuerpos de Cantor tiene sentido considerar el anillo de series convergentes $K\{t\}$ con coeficientes en K. Resaltemos que según nuestra definición de convergencia, una serie $Z(t) \in K\{t\}$, define una función en el disco de convergencia, con valores en $K^\wedge$.

Por último, digamos que las mismas demostraciones que para el caso de los números reales conducen a los siguientes resultados sobre cuerpos de Cantor (cf. [Ch]):

8.11. Proposición (teorema de la función implícita para cuerpos de Cantor).- *Sea* K *un cuerpo de Cantor, y* $f \in K\{X,Y\}$ *una* *serie convergente tal que* $f(0,0) = 0$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$. *Entonces existe una única* $\phi(x) \in K\{x\}$ *tal que* $\phi(0) = 0$ *y* $f(x, \phi(x)) = 0$.

8.12. Proposición.- *Sea* $f \in K\{X\}[Y]$ *tal que* $f(0,0) = 0$, *y sea* $\phi \in K[[X]]^*$ *(anillo de series de exponentes fraccionarios) tal que* $\phi(0) = 0$ *y* $f(X,\phi(x)) = 0$ *en* $K[[X]]^*$. *Entonces* $\phi \in K\{X\}^*$.

Estamos ya en condiciones de establecer la siguiente

8.13. Proposición.- *Sea* V *una variedad algebraica real irreducible de* R^n, *donde* R *es un cuerpo realmente cerrado y de Cantor. Sea* S *un semialgebraico abierto de* Reg V, *y supongamos que* $\underline{0} = (0,\ldots,0) \in \overline{S}$. *Entonces, existe una curva analítica* γ *en* R^n, *a través de* $\underline{0}$, *que está contenida en* S *y es Zariski-densa en* V.

8.14. Observación.- Aquí la curva γ va a ser además "analítica" en el sentido de que sus ecuaciones van a ser series convergentes de $R\{t\}$. Entonces γ define una función $\gamma : R \to (R^r)^n$. Por tanto, para valores de t suficientemente pequeños, γ representa una curva analítica (en sentido cojuntista), y si $S^\wedge$ representa el conjunto semialgebraico definido por las ecuaciones de S entonces, para valores de t suficientemente pequeños, γ está contenido conjuntistamente en $S^\wedge$. Por otra parte es inmediato comprobar que en esta situación es equivalente decir $f(\gamma(t)) > 0$ en $R^\wedge$ si $0 < t < \varepsilon$, a decir que $\gamma(f) > 0$ en $R[[t]]$, donde

$\gamma : R[X_1,\ldots,X_n] \to R[[t]]$ es el homomorfismo definido por γ.

Demostración de 8.13.- Sea $r = \dim V = \dim S$. Por hipótesis tenemos $J(S) = J(V)$. Por el teorema de estratificación topográfica de los conjuntos semialgebraicos (cf. [Lo] para el caso $R = \mathbb{R}$ y [De] para cuerpos realmente cerrados arbitrarios), existe un cambio lineal de coordenadas de forma que nos podemos reducir a la siguiente situación: $\pi : S \to R^r$ es la proyección sobre las r primeras coordenadas, $\dim(\pi(S)) = \dim S = r$, $\underline{0} \in \overline{\pi(S)}$ y existen funciones semialgebraicas (analítica a trozos), $\xi_{r+k} : \pi(S) \to R$, $1 \leq K \leq n-r$, tales que

$$S = \{(x',\xi_{r+1}(x'),\ldots,\xi_n(x')) : x' = (x_1,\ldots,x_r) \in \pi(S)\}.$$

Para cada k, $1 \leq k \leq n-r$, sea $P_k(X',X_{r+k}) \in R[X_1,\ldots,X_r,X_{r+k}]$ un polinomio irreducible tal que $P_k(x',\xi_{r+k}(x')) \equiv 0$. Entonces existe una partición de R^r en un número finito de semialgebraicos $T_1^k,\ldots,T_{i_k}^k$ (cf. [Lo], [D-K]) tales que en cada T_i^k, para cada $x' \in T_i^k$, $P_k(x',X_{r+k})$ tiene un número constante a_i^k de raíces que vienen dadas por funciones semialgebraicas $\eta_{\gamma_1}^k(x') < \ldots < \eta^k_{ia_i^k}(x')$, $x' \in T_i^k$.

Intersecando $\pi(S)$ convenientemente con otros semialgebraicos, podemos suponer que $\pi(S)$ tiene la propiedad de que para todo $x' \in \pi(S)$, para todo $k = 1,\ldots,n-r$ $P_K(x',X_{r+1})$ tiene un número constante a_k de raíces, dadas por funciones semialgebraicas ordenadas crecientemente $\eta_1^k(x') < \ldots < \eta_{a_k}^k(x')$, una de las cuales coincide con $\xi_{r+k}(x')$.

A continuación necesitamos el siguiente lema, que demostraremos más adelante:

8.15. Lema.- *Sea* S *un conjunto semialgebraico abierto de dimensión* r *de* R^r, *donde* R *es un cuerpo de Cantor realmente cerrado. Supongamos que* $\underline{0} \in S$. *Entonces existe una curva analítica* $\alpha(t)$ *a través de* $\underline{0}$, *tal que* $\alpha(t) = (z_1(t),\ldots,z_r(t)) \in S^\wedge$ *si* $t \in (0,\varepsilon)$ *y* $z_1(t),\ldots,z_r(t) \in R\{t\}$ *son algebraicamente independientes sobre* $R(t)$.

Aplicando 8.15 al semialgebraico $\pi(S)$ existe una curva analítica $\alpha(t) = (z_1(t),\ldots,z_r(t))$ tal que $\alpha(0) = \underline{0}$, $\alpha(t) \in \pi(S)^\wedge$ si $t \in (0,\varepsilon)$ y $Z_1(t),\ldots,Z_r(t) \in R\{t\}$ son algebraicamente independientes sobre $R(t)$.

Para cada $k = 1,\ldots,n-r$ consideramos

$$P_k(t,X_{r+k}) = P_k(Z_1(t),\ldots,Z_r(t),X_{r+k}) \in R[[t]]^*[X_{r+k}],$$

y sean $\mu_1^*(t),\ldots,\mu_{s_k}^k(t) \in R[[t]]^*$ las raíces de $P_k(t,X_{r+k})$ (obsérvese que $R((t))^*$ es realmente cerrado). Por 8.12 se tiene que $\mu_1^k(t),\ldots,\mu_{s_k}^k(t) \in R\{t\}^*$, y por consiguiente, para $t \in (0,\delta_k)$, δ_k convenientemente pequeñas definen funciones continuas con valores en $R^\wedge$ y que podemos ordenar $\mu_1^k(t) < \ldots < \mu_{s_k}^k(t)$.

Ahora bien, una inmediata aplicación del teorema de Tarski-

Seidemberg muestra que para todo $x' \in \pi(S)^\wedge$, $P_k(x', X_{r+k})$ tiene exactamente a_k raíces y que estas vienen dadas sobre $\pi(S)^\wedge$ por las funciones semialgebraicas $(\eta_1^k)^\wedge(x') < \ldots < (\eta_{a_k}^k)^\wedge(x')$, donde $(\eta_i^k)^\wedge$ representa la extensión (única), por continuidad, de η_i^k a $\pi(S)^\wedge$ con valores en $R^\wedge$. Se sigue pues, inmediatamente que $s_k = a_k$, y que cada $(\eta_i^k)^\wedge(z_1(t),\ldots,z_r(t))$ coincide con algún $\mu_j^k(t)$ para $t \in (0,\delta_k)$. Denotemos por $\mu^k(t)$ aquella raíz de $P_k(t, X_{r+k})$ que coincide con $\xi_{r+k}^\wedge(z_1(t),\ldots,z_r(t))$.

Después de una sustitución adecuada $t \to t^e$, podemos suponer que $k=1,\ldots,n-r$, $\mu^k(t) \in R\{t\}$. Observamos que las series $Z_1(t^e),\ldots,Z_r(t^e)$ siguen siendo algebraicamente independientes sobre R, (de hecho lo son sobre $R(t^e)$), y designamos, de nuevo, a estas series por $Z_1(t),\ldots,Z_r(t)$.

Finalmente, definimos $\gamma(t)$ por las ecuaciones

$$(*)\quad \begin{cases} X_i = Z_i(t) & 1 \leq i \leq r \\ X_{r+k} = \mu^k(t) & 1 \leq k \leq n-r. \end{cases}$$

$\gamma(t) \in S^\wedge$ si $t \in (0,\delta)$ donde $\delta = \min\{\varepsilon, \delta_1', \ldots, \delta_{n-r}'\}$ y $\gamma(0) = 0$. Por tanto en el homomorfismo

$$\gamma : R[X_1,\ldots,X_n] \to R[[t]]$$

definido por γ, se tiene $\gamma(f_i) > 0$, $1 \leq i \leq p$, si $S = \{f_1 > 0,\ldots,f_p > 0\}$ (cf. observación 8.14) y por consiguiente γ está contenida en S. Por otra parte $\gamma \subset V^\wedge$, luego

$\mathrm{Ker}\ \gamma \supset J(V)$. Además $\mathrm{Ker}\ \gamma \cap R[X_1,\ldots,X_r] = (0)$, puesto que $Z_1(t),\ldots,Z_r(t)$ son algebraicamente independientes sobre R. Por tanto $\dim(\ker \gamma) \geq r$ y como $\dim J(V) = r$, se sigue que $\ker \gamma = J(V)$, lo que finaliza la prueba de 8.13.

Demostración de 8.15.- Damos, ahora, dos demostraciones del lema 8.15. La primera está basada en la estructura de los conjuntos semialgebraicos dada por Lojasiewicz ([Lo]). La segunda en un resultado de Bloom y Risler [Bl-R] sobre aproximación de curvas analíticas.

8.15.1. Primera demostración.- Claramente es suficiente demostrar el caso:

$$S = \{x \in R^r : f_1(x) > 0,\ldots,f_n(x) > 0\},$$

y suponemos, también, que S es conexo. Haremos la demostración por inducción sobre r. El caso r=1 es trivial. Supongamos r > 1. Usando la descripción de Lojasiewicz [Lo], S es una unión de conjuntos semialgebraicos de la forma

$$\{(x_1,\ldots,x_{r-1};x_r : \xi_i(x_1,\ldots,x_{r-1}) < x_r < \xi_{i+1}(x_1,\ldots,x_{r-1})\}$$

donde las funciones ξ_i son semialgebraicas y analíticas a trozos (cf. [D-K] para una demostración de dicha descripción sobre cuerpos realmente cerrados arbitrarios). Podemos suponer (si no, el problema se reduce fácilmente a este caso):

$$S = \{(x_1,\ldots,x_{r-1},x_r) : \xi_1(x_1,\ldots,x_{r-1}) < x_r < \xi_2(x_1,\ldots,x_{r-1})\},$$

con $\lim\limits_{x'\to o} \xi_1(x') = \lim\limits_{x'\to o} \xi_2(x') = 0$, $x' = (x_1,\ldots,x_{r-1}) \in S'$,

S' abierto semialgebraico de dimensión $r-1$ tal que el origen $\underline{0} \in R^{r-1}$, es $\underline{0} \in \overline{S}'$.

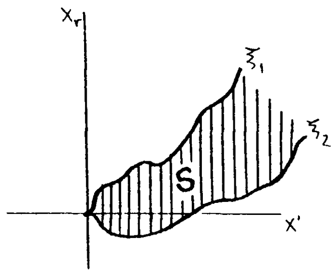


Fig. 4

En las condiciones anteriores, sean:

$P_1(X_1,\ldots,X_{r-1},X_r)$ y $P_2(X_1,\ldots,X_{r-1},X_r)$ polinomios irreducibles tales que

$$P_1(x',\xi_1(x')) \equiv 0, \qquad P_2(x',\xi_2(x')) \equiv 0.$$

Por la hipótesis de inducción existe un arco analítico $\theta(t) = (Z_1(t),\ldots,Z_{r-1}(t))$ tal que $\theta(0) = (0,\ldots,0)$, $\theta(t) \in S'$ si $t \in (0,\varepsilon_1)$, y $Z_1(t),\ldots,Z_{r-1}(t)$ son algebraicamente independientes sobre $R(t)$.

Consideramos los polinomios $P_i(t,X_r) = P_i(Z_1(t),\ldots$ $\ldots,Z_r(t))[X_r] \in R((t))^*[X_r]$, $i=1,2$. Puesto que $P_i(t,X_r) \in$ $\in R\{t\}[X_r]$ las raíces $\eta_i^j(t) \in R[[t]]^*$ de $P_i(t,X_r)$ pertenecen a $R\{t\}^*$. Sea $\eta_i(t)$ la raíz de $P_i(t,X_r)$ correspondiente a $\xi_i(Z_1(t),\ldots,Z_{r-1}(t))$, es decir $\eta_1(t) = \xi_1(Z_1(t),\ldots,Z_{r-1}(t))$ y $\eta_2(t) = \xi_2(Z_1(t),\ldots,Z_{r-1}(t))$ para $t \in (0,\varepsilon_2)$ (cf. pág. 72).

Haciendo una sustitución adecuada $t \to t^e$ podemos suponer $\eta_1(t)$, $\eta_2(t) \in R\{t\}$. Por otra parte las series $Z_1(t^e),\ldots,Z_{r-1}(t^e)$ siguen siendo algebraicamente independientes sobre $R(t)$: en efecto, lo son sobre $R(t^e)$ y $R(t)$ es algebraico sobre $R(t^e)$. Denotamos a estas series de nuevo por $Z_1(t),\dots,Z_{r-1}(t)$.

Por nuestras hipótesis tenemos $\eta_1(0) = 0$ y $\eta_2(0) = 0$. Sea, ahora, $Z'_r(t) \in R\{t\}$ una serie tal que $Z_1(t),\dots,Z_{r-1}(t)$, $Z'_r(t)$ son algebraicamente independientes sobre $R(t)$ (ver observación 8.3 (a)). Para $t \in (0,\varepsilon_3)$, es $|Z'_r(t)| < 1$. Entonces, dado $t \in (0,\varepsilon_3)$, se tiene

$$Z'_r(t) = -\lambda(t) + (1 - \lambda(t)),$$

con $\lambda(t) \in R\{t\}$ y $0 < \lambda(t) < 1$. Definimos

$$Z_r(t) = \lambda(t)\eta_1(t) + (1 - \lambda(t))\eta_2(t)$$

(es decir, para cada t hacemos una transformación del intervalo $(-1,1)$ en el intervalo $(\eta_1(t),\eta_2(t))$. Tenemos $Z_r(0) = 0$, $Z_r(t) \in R\{t\}$, y puesto que $\eta_1(t)$ y $\eta_2(t)$ son algebraicos sobre $R(t,Z_1(t),\dots,Z_{r-1}(t))$, $Z_r(t)$ es transcendente, con lo que $Z_1(t),\dots,Z_r(t)$ son algebraicamente independientes sobre $R(t)$. Es evidente que la curva $\alpha(t) = (Z_1(t),\dots,Z_r(t))$ cumple las condiciones del lema 8.15, lo que concluye la demostración.

8.15.2. Segunda demostración.- Esta demostración se apoya en el siguiente lema, que aparece en [Bl-R] para conjuntos semianalíticos, trabajando sobre el cuerpo base de los números reales. Aquí trabajamos sobre un cuerpo de Cantor, realmente cerrado, arbitrario. Creemos que el lema tiene interés en sí mismo, lo que motiva esta segunda demostración de 8.15.

8.16. Lema.- *Sea* S *un conjunto semialgebraico abierto,* $S \subset R^r$ *con* $\underline{0} \in \overline{S}$. *Sea* C *una curva semialgebraica a través de* $\underline{0}$ *tal que* $C - \{\underline{0}\} \subset S$. *Entonces, existe un entero* ν *tal que toda curva analítica* C' *de* R^r *a través de* $\underline{0}$ *que tiene un orden de contacto* $\geq \nu$ *con* C *verifica que* $C' - \{\underline{0}\} \subset S$.

Demostración.- Por una curva semialgebraica C, entendemos una parametrización $C(t) = (h_1(t),\dots,h_r(t))$, $h_i \in R\{t\}$ tal que la función $C : [0,\varepsilon] \to S$, $t \to C(t)$ tiene grafo semialgebraico, y consideramos $C = C([0,\varepsilon])$. Dividimos la demostración en dos partes: primero demostramos un análogo a la desigualdad de Lojasiewicz en nuestra situación, que aplicaremos en el segundo.

A.- Los conjuntos C y $W = R^r \setminus S$ son semialgebraicos cerrados de R^r, y por nuestras hipótesis se tiene $C \cap W = \{0\}$.

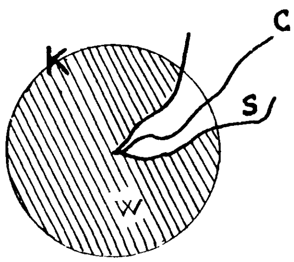


Fig. 5

Sea $K = \{x \in R^r : |x| \leq \delta\}$. K es un semialgebraico cerrado y acotado. Observamos primero que, dado $x \in K$, los números

$$d(x,C) \quad \text{y} \quad d(x,W)$$

están bien definidos en R. En efecto, la frase:

"$\forall$ semialgebraico cerrado $C \subset R^r$, $\forall x \in R^r$, $\exists\, b \in C$ tal que $\forall a \in C$, $d(x,a) \geq d(x,b)$" es una frase polinomial cerrada puesto que C es semialgebraico, y es cierta en $\mathbb{R}$, luego también lo es en R, y definimos $d(x,C) = d(x,b)$.

A continuación definimos la función $h : (0,\delta) \to R$,

$$h(s) = \min \{d(x,C \cap K) + d(x,W \cap K) : |x| = s\}.$$

Un razonamiento análogo al anterior muestra que la función $h(s)$ está bien definida y es, por supuesto, semialgebraica. Además, por nuestras hipótesis sobre C y W, $h(s) > 0$ $\forall s \in (0,\delta)$. Ahora, el mismo razonamiento desarrollado en 2.9 prueba que existen $\lambda \in R$, $\lambda > 0$, y $\alpha \in \mathbb{N}$, tales que $\forall s \in (0,\delta)$, es $h(s) \geq \lambda s^{\alpha}$, lo que significa que $\forall x \in K$, se tiene:

$$\lambda d(x,0)^{\alpha} \leq d(x,C \cap K) + d(x,W \cap K) \qquad (*)$$

B.- Si $C(t) = (h_1(t),\dots,h_r(t))$, $h_i(t) \in R\{t\}$ es una parametrización de C, y ω es el mínimo de los órdenes de las series $h_i(t)$, las siguientes acotaciones aparecen en [Bl-R], y su validez sobre nuestro cuerpo base R es inmediata y rutinaria, pues dependen sólo del orden y la continuidad:

Existe $\lambda_1 \in R$, $\lambda_1 > 0$ tal que

$$|t|^{\omega} \leq \lambda_1 \; |C(t)|,$$

para $t \in (0,\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 \in R$, suficientemente pequeño.

Sea C' una curva analítica $C'(t) = (h'_1(t),\dots,h'_r(t))$, $h'_i(t) \in R\{t\}$, tal que tiene un orden de contacto $\nu \geq \omega(\alpha+1)$ con C, es decir, para todo $i=1,\dots,r$,

$$h_i(t) \equiv h'_i(t) \quad (\mathrm{mod}\ m^{\nu}),$$

donde m representa el ideal maximal de $R\{t\}$.

Se tiene, $\forall x \in C' \cap K$, $\forall t$ suficientemente pequeño:

$$d(x,C) \leqslant \lambda_2 |t|^{\nu} \leqslant \lambda_3 |x|^{\nu/\omega} \leqslant \lambda_3 |x|^{\alpha+1},$$

donde λ_2 y λ_3 son constantes apropiadas. Por tanto, si $x \in C' \cap K$ (restringiendo K si es preciso), por (*), tenemos:

$$d(x,W) \geqslant \lambda |x|^{\alpha} - d(x,C) \geqslant \lambda_4 |x|^{\alpha} ,$$

lo que implica que $C' - \{\underline{0}\} \subset S$ (donde $C' = C'([0,\varepsilon'])$ con ε' suficientemente pequeño), y el lema 8.16 queda demostrado.

Volvamos a la demostración de 8.15. Por el lema de selección de curva (cf. [D-K] o [Ro]) existe una curva semialgebraica $C(t)$, a través del origen con $C - \{0\}$ contenida en S. Sea $C(t) = (h_1(t),\dots,h_r(t))$ una parametrización de C, $h_i(t) \in R[[t]]$. Por 8.12, $h_i(t) \in R\{t\}$, y estamos en las condiciones de 8.16.

Apliquemos el lema 8.2 para obtener $y_1(t),\dots,y_r(t) \in R\{t\}$, algebraicamente independientes sobre $R(t)$. Sea ν el entero determinado por 8.16 para la curva $C(t)$, y consideremos:

$$\begin{aligned} Z_1(t) &= h_1^*(t) + t^{\nu+1}\, y_1(t) \\ &\vdots \\ Z_r(t) &= h_r^*(t) + t^{\nu+1}\, y_r(t), \end{aligned}$$

donde $h_i^*(t)$ representa el polinomio de grado $\leqslant\nu$ de la serie $h_i(t)$, es decir, si

$$h_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, t^k, \quad \text{entonces} \quad h_i^*(t) = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik}\, t^k.$$

Afirmamos que $Z_1(t),\dots,Z_r(t)$ son algebraicamente independientes sobre $R(t)$. En efecto, $R(t)(y_1,\dots,y_r) = R(t)(Z_1,\dots,Z_r)$.

Además, por construcción, el orden de contacto de $\alpha(t) =$ $= (Z_1(t),\ldots,Z_r(t))$ con $C(t)$ es mayor o igual que ν, por lo que $\alpha(t) - \{0\} \subset S$, y el lema 8.15 está completo.

8.17. <u>Observación</u>.- El lema 8.16 también es cierto si S es un semialgebraico abierto, $S \subset \text{Reg } V$, donde V es una variedad algebraica real. La conclusión es, ahora, que si $C'(t)$ es una curva analítica contenida en V, cuyo orden de contacto con $C(t)$ es $\geqslant \nu$, entonces $C'(t) - \{\underline{0}\} \subset S$. La demostración es la misma, definiendo W por $W = V \setminus S$.

Vamos ahora a demostrar el teorema de selección de Curvas Zariski-densas sobre un cuerpo base realmente cerrado cualquiera. El método consiste en considerar un subcuerpo de Cantor contenido en nuestro cuerpo base, usar en éste la proposición 8.13 y por último comprobar que la curva así definida es Zariski-densa también sobre el cuerpo inicial.

8.18. <u>Teorema</u> (Teorema de selección de curvas Zariski-densas).- *Sea* V *una variedad algebraica real irreducible de* R^n, *donde* R *es un cuerpo realmente cerrado arbitrario. Sea* S *un semialgebraico abierto de* $\text{Reg } V$,

$$S = \{x \in V : f_1(x) > 0,\ldots,f_s(x) > 0\}, \quad f_i \in R[V],$$

y supongamos $\underline{0} = (0,\ldots,0) \in \overline{S}$. *Entonces existe una curva* γ *de* R^n, *a través de* $\underline{0}$, *contenida en* S *y que es Zariski-densa en* V.

<u>Demostración</u>.- Consideremos el subcuerpo K' de R formado por la extensión de $\mathbb{Q}$ con los coeficientes de un sistema de generadores de $J(V)$ y de un sistema de un polinomios que definen S. Sea K la clausura real de K', contenida en R. Por 8.7 y 8.8 K es un cuerpo de Cantor. Representemos por V_K y S_K la variedad algebraica y conjunto semialgebraico definidos por los mismos polinomios anteriores, pero sobre el cuerpo base K. Aplicando la proposición 8.13 a V_K y S_K, encontramos una curva γ, de ecuaciones $X_i = Z_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $Z_1(t),\ldots,Z_r(t)$ son algebraicamente independientes sobre K, $r = \dim V$, y γ está contenida en S_K En particular, la curva γ tiene coeficientes en $\mathbb{R}$ y por tanto define un homomorfismo

$$\gamma : R[X_1,\ldots,X_n] \to R[[t]], \quad \gamma(X_i) = Z_i(t) \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Veremos que, en efecto, γ es una curva contenida y Zariski-densa en V. Primero, puesto que K contiene a los coeficientes de un sistema de generadores de $J(V)$, $\ker \gamma \supset J(V)$. Por otra parte, $Z_1(t),\ldots,Z_r(t)$ han sido construido según 8.2, y por tanto, (ver observación 8.3(b)) son algebraicamente independientes sobre R. Entonces $\ker \gamma \cap R[X_1,\ldots,X_r] = \{0\}$ y en consecuencia $\dim (\ker \gamma) \geqslant r$, lo que prueba la igualdad $\ker \gamma = J(V)$.

Finalmente, si consideramos el homomorfismo

$$\gamma^K : K[X_1,\ldots,X_n] \to K[[t]], \quad \gamma^K(X_i) = Z_i(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

la condición "$\gamma^K \subset S_K$" equivale a "$\gamma^K(f_i) > 0$ en $K[[t]]$, $1 \leqslant i \leqslant s$". Como $\gamma^K(f_i) = \gamma(f_i)$, y el orden de $R[[t]]$ extiende el orden de $K[[t]]$, resulta $\gamma(f_i) > 0$ $1 \leqslant i \leqslant s$, es decir

γ está contenida en S, con lo que el teorema queda demostrado.

§9. Existencia de lugares reales, de rango 1, con centro dado y cuya dimensión coincide con la dimensión del centro.

En nuestro proceso de construcción de lugares con rango, centro y dimensión dados, empezamos por el caso de rango 1, y dentro de éste con la igualdad entre las dimensiones del centro y del lugar. En esta situación, los resultados son aplicación de los lemas de selección de curvas obtenidas en el párrafo anterior.

Estudiamos primero el caso $\dim \phi = 0$. En §7, demostramos, que si $K = R(x_1,\ldots,x_n)$ es un cuerpo real de funciones, existe un lugar real de K sobre R, que es discreto, racional y de rango 1. La siguiente proposición muestra que el centro de un lugar con esas características puede ser fijado de antemano.

9.1. Proposición.- *Sea* $K = R(x_1,\ldots,x_n)$ *un cuerpo real de funciones de grado de transcedencia* r *sobre* R. *Sean,* $A = R[x_1,\ldots,x_n]$ *y* p *un ideal primo, localmente real de* A *de dimensión cero. Entonces, existe un lugar real,* ϕ, *de* K *sobre* R, *que es finito en* A, *discreto, racional, tiene centro* p *en* A *y rango 1.*

Demostración.- Sea V una variedad algebraica real irreducible de R^n cuyo anillo de coordenadas es A. El ideal p define en V un punto, que en virtud de 2.8 es central en V. Salvo una traslación podemos suponer que dicho punto es el origen $\underline{0} \in R^n$.

Por 8.18, existe una curva γ a través de $\underline{0}$ que está con tenida y es Zariski-densa en V. Tal curva γ define una inmersión

$$\hat{\gamma} : K \to R((t)).$$

Designemos por v la valoración canónica de $R((t))$, $v(z((t)) = o(z(t))$, que a cada serie le hace corresponder su orden. La composición $v \circ \hat{\gamma}$ define una valoración real de K, que es finita en A puesto que $\hat{\gamma}(A) \subset R[[t]]$. Es discreta, racional y de rango 1 (en efecto, el grupo de valores es $\mathbb{Z}$). Además el centro m de $v \circ \hat{\gamma}$ en A es p, puesto que si $\gamma(X_i) = Z_i(t)$, tenemos que $Z_i(0) = 0$, y por tanto $(v \circ \hat{\gamma})(X_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$. Así pues, $m \supset p$ y como p es maximal se tiene la igualdad. El lugar ϕ buscado, es el asociado a la valoración $v \circ \hat{\gamma}$.

9.2. Observación.- Nótese, que el resultado anterior puede enunciarse, también, del siguiente modo:

- *"Sean* V *una variedad algebra real irreducible, de* R^n *y* $\underline{0} = (0,\ldots,0)$ *un punto central de* V. *Sea* $h: R[V] \to R$ *el homomorfismo de especialización en* $\underline{0}$, *es decir* $h(f(x_1,\ldots,x_n)) = f(0,\ldots,0)$. *Entonces* h *extiende a un lugar* $\phi : R(V) \to R$ *discreto y de rango 1".*

Nuestro siguiente paso será la ampliación de la dimensión del ideal p. En concreto trataremos el caso $\dim p = \dim \phi = s$. Esta etapa se reduce a la anterior mediante el proceso de extensión del cuerpo base. Este método será usado continuamente en lo que sigue, por lo que lo establecemos por separado.

9.3. Método de extensión del cuerpo base. Consideremos K y A como antes. Sea p un ideal primo de A, localmente real y de dimensión s. Si denotamos $\bar{x}_i = x_i + p$, entonces $A/p = R[\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n]$ y el cuerpo de fracciones de A/p, $\Delta = R(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$, tiene grado de transcendencia s sobre R. Reordenando los generadores si es preciso, podemos suponer que $\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_s\}$ es una base de transcendencia de Δ sobre R.

Sea β un orden total en $K = R(x_1,\ldots,x_n)$ tal que p es $(\beta \cap A)$-convexo (cf. 3.7), y sea Γ la clausura real de K con respecto a β. Consideremos, ahora, la clausura real, E, de $R(x_1,\ldots,x_s)$ contenida en Γ, y pongamos

$$C = E[x_{s+1},\ldots,x_n], \quad \text{y} \quad F = E(x_{s+1},\ldots,x_n).$$

Tenemos $A \subset C \subset F \subset \Gamma$. Designemos por β' el orden en F inducido por el único orden en Γ. Entonces β' es una extensión de β y por tanto p es $(\beta' \cap A)$-convexo. Aplicando el teorema de existencia de lugares (3.13) existe un anillo de valoración real, B, de F, tal que $B \supset A$ y B tiene centro p en A. En particular, se tiene

$$B \supset R[x_1,\ldots,x_s]_{p \cap R[x_1,\ldots,x_s]} = R(x_1,\ldots,x_s),$$

puesto que por nuestra elección de $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_s$ como base de transcendencia de Δ sobre R, $p \cap R[x_1,\ldots,x_s] = \{0\}$.

Más aún, como E es la clausura real de $R(x_1,\ldots,x_s)$, E es entero sobre $R(x_1,\ldots,x_s)$ y se sigue que $B \supset E$, ya que B es íntegramente cerrado. Por último, como $x_{s+1},\ldots,x_n \in A$, también pertenecen a B, y, en definitiva, tenemos, $B \supset C$.

Sea q el centro de B en C, q es un ideal localmente real de C y $q \cap C = p$, es decir q yace sobre p. (Obsérvese, que si B es un anillo de valoración β' convexo, entonces q es $(\beta' \cap C)$-convexo). Afirmamos que $\dim q = 0$ (dimensión de Krull como ideal de C). En efecto,

$$\dim q = \text{gr.transc.}\ [(E[x_{s+1},\dots,x_n]/q) : E]$$

y por nuestra elección de $x_1,\dots,x_s$, para cada $j > s$, existe un polinomio $f_j(T) \in R[x_1,\dots,x_s][T]$ tal que $f_j(x_j) \in p \subset q$. Por lo tanto, x_j+q es algebraico sobre E, $s < j \leqslant n$, luego $\dim q = 0$.

Concluyendo, hemos probado:

<u>Lema</u>.- *Con la notación anterior, si* p *es un ideal primo, localmente real, de* A *de dimensión* s, *existe un dominio real* $C = E[x_{s+1},\dots,x_n]$, *finitamente generado sobre un cuerpo realmente cerrado* E, *y existe un ideal primo* q, *de dimensión cero (i.e. maximal), localmente real, de* C, *tales que* $A \subset C$ *y* $q \cap A = p$. *Más aún, si* β *es un orden total en* K, *tal que* p *es* $(\beta \cap A)$*-convexo, entonces existe un orden* β' *en el cuerpo cociente* F *de* C, *que extiende a* β *y tal que* q *es* $(\beta' \cap C)$*-convexo.*

Siguiendo con la notación anterior, profundicemos un poco más en la relación entre los órdenes de E, K y Δ. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$(*)\qquad \begin{tikzcd}
C_q \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, leftrightarrow, "1_{C_q}"] & E \arrow[d, leftrightarrow, "1_E"] \\
C_q \arrow[r, "\pi'"] & C_p/pC_p = E \\
A_p \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\pi"] & A_p/pA_p = \Delta \arrow[u, hook, "i"] \arrow[uu, bend right=60, hook, "\theta = 1_E \circ i"']
\end{tikzcd}$$

donde π' y π son los epimorfismos canónicos. Denotemos por $\overline{\beta}'$ y $\overline{\beta}$ los órdenes cocientes en E y Δ respectivamente, inducidos por β' y β. Puesto que β' es una extensión de β, el cuadrado inferior del diagrama anterior también preserva los órdenes, y como E es realmente cerrado y algebraico sobre Δ, puede considerarse, mediante la inyección θ, que E es la clausura real de Δ con respecto al orden $\overline{\beta}$ inducido por β.

En particular, si ahora consideramos otro orden β'' en F, tal que q es $(\beta'' \cap C)$-convexo, el orden cociente $\overline{\beta}''$ en C_q/qC_q *coincide con* $\overline{\beta}'$, puesto que E es realmente cerrado y por consiguiente tiene un único orden. Este hecho, de naturaleza trivial, permitirá puntualizar la existencia de determinados órdenes en los cuerpos residuales.

Pasemos, por fin, a la anunciada generalización de 9.1.

9.4. Proposición.- *Con la notación de 9.1, si* p *es un ideal primo de* A*, localmente real y de dimensión* s, $0 \leq s \leq r-1$, *entonces existe un lugar real* ϕ *de* K *sobre* R*, que es finito en* A*, discreto, de rango 1, tiene centro* p *en* A

y dimensión s.

Demostración.- El caso $s = 0$ es la proposición 9.1. Si $s > 0$, por el lema 9.3, consideramos un cuerpo real de funciones $F = E(x_{s+1},\dots,x_n)$, E realmente cerrado, y un ideal maximal q, localmente real de $C = E[x_{s+1},\dots,x_n]$ tal que $A \subset C$ y $q \cap A = p$. Ahora aplicamos 9.1 a F, C y q, y obtenemos un lugar real ϕ'

$$\phi' : E(x_{s+1},\dots,x_n) \to E$$

de F sobre E tal que es finito en C, discreto, de rango 1 y con centro q en C.

Sea ϕ la restricción de ϕ' a K, y sea $\Sigma = \phi(K)$. Puesto que F es algebraico sobre K, ϕ es discreto y de rango 1. Por otra parte, como $\phi'|_E = 1_E$, se tiene $R(x_1,\dots,x_s) \subset \Sigma \subset E$, y, en consecuencia, Σ es algebraico sobre $R(x_1,\dots,x_s)$, con lo que ϕ tiene dimensión s. Finalmente, como $q \cap A = p$, σ tiene centro p en A, y 9.4 queda concluido.

9.5. Corolario.- *Con la notación de 9.4, si* $\Delta = A_p/pA_p$ *y* Σ *es el cuerpo residual de* ϕ, *entonces, para cada orden en* K *tal que* p *es* $(\beta \cap A)$*-convexo, si* $\bar{\beta}$ *representa el orden cociente inducido por* β *en* Δ, ϕ *puede ser escogido tal que existe un orden* $\hat{\beta}$ *en* Σ *de modo que* $(\Sigma,\hat{\beta})$ *es una extensión ordenada de* $(\Delta,\bar{\beta})$ *(vía la inclusión canónica* $\Delta \to \Sigma$*).*

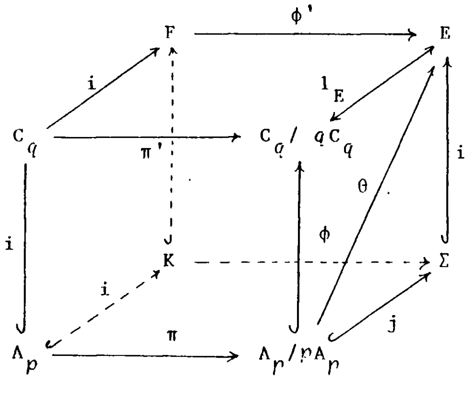
Demostración.- Usamos en la demostración, las observaciones finales sobre los órdenes hechos en 9.3. Sea $j : \Delta \to \Sigma$

la inclusión canónica tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_p \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \Sigma \\ & \Delta = A_p/pA_p \arrow[ur, hook, "j"'] & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo, donde π es el epimorfismo canónico.

Si $s=0$, entonces $\Sigma = \Delta = R$ y no hay nada que demostrar. Si $s > 0$, aplicamos el método 9.2 utilizando el orden β para la construcción de Γ y E. Construimos ϕ como en 9.4, es decir es la restricción a K de un lugar $\phi' : F \to E$. Entonces, $\Sigma \overset{i}{\to} E$, y se tiene que la aplicación $i \circ j : \Delta \to E$ coincide con la aplicación θ del diagrama (*) en 9.3. Sea E^+ el único orden de E, y tomamos $\hat{\beta} = E^+ \cap \Sigma$. $\hat{\beta}$ es un orden en Σ verificando la condición pedida, pues por la commutatividad (conservando los órdenes) de (*), se tiene $j^{-1}(\hat{\beta}) = \overline{\beta}$. (Ver el siguiente diagrama en forma de cubo del cual (*) son las caras anterior y superior).



La proposición 9.4 puede ser interpretada geométricamente, aunque imprecisamente, como sigue: hacemos un cambio de coordenadas de modo que la subvariedad W de V definida por p -donde V es una variedad algebraica, real, irreducible cuyo anillo de coordenadas es A- se proyecta sobre el espacio afín de las s-primeras coordenadas $\mathbb{A}^s$ en un semialgebraico que es Zariski-denso en $\mathbb{A}^s$, es decir

$$p \cap R[x_1,\ldots,x_s] = \{0\}.$$

Consideremos ahora nuestra variedad tomando $R(x_1,\ldots,x_s)$ como cuerpo base. Mediante especializaciones $(a_1,\ldots,a_s)$ de $(x_1,\ldots,x_s)$, donde tengan sentido, obtenemos una subvariedad algebraica real Z, r-s dimensional sobre R, y el lugar ϕ construido es de dimensión cero sobre esta subvariedad y define, por tanto una curva sobre ella, centrada en un punto de $W \cap Z$. la colección de todas estas curvas define una "variedad formal" C de dimensión s+1 contenida en V y Zariski-densa en ella. La valoración se realiza evaluando las variables $x_{s+1},\ldots,x_n$ a lo largo de C en función de $x_1,\ldots,x_s$.

§10. Existencia de lugares reales, de rango 1, con centro dado y cuya dimensión es superior a la dimensión del centro.

En este epígrafe eliminamos la igualdad entre la dimensión del lugar ϕ y la dimensión de su centro. Este paso, de apariencia inocente debido a su sencillez en el caso clásico, resulta complicado en el caso real, principalmente por la dificultad de saber cuando la extensión de un ideal localmente real a un anillo mayor sigue siendo localmente real. Como corolario de nuestros resultados obtenemos una demostración nueva de la existencia de divisores primos reales centrados en un ideal dado, que no precisa del teorema de desingularización de Hironaka.

Mantenemos la misma notación que en §9 (ver 9.1), y comenzamos, como allí, por el caso $\dim p = 0$, es decir p es un ideal maximal de A. Siguiendo a Zariski [Za_1] reducimos el problema a hipersuperficies, y para éstas tenemos el siguiente resultado:

10.1. Lema.- *Sea* V *una hipersuperficie real, irreducible, de* R^n, *y supongamos que* $\underline{0} = (0,\dots,0)$ *es un punto central de* V. *Sea* ϕ *un lugar real de* R(V), *finito en* R[V], *de rango 1, discreto, racional y centrado en el origen en* V. *Entonces existe una hipersuperficie real* $\tilde{V}$, *birracionalmente equivalente a* V, *tal que* $R[\tilde{V}] \supset R[V]$, ϕ *es finito en* $R[\tilde{V}]$ *y está centrado en un punto simple de* $\tilde{V}$.

10.2. Observación.- El lema anterior, para un lugar ϕ arbitrario es el teorema de uniformización local de Zariski [Za_2]. No obstante para nuestro ϕ particular (¡cuya existencia ha sido demostrada en 9.1!) la demostración es totalmente elemental.

Demostración.- Supongamos que V está definida por $f(X_1,\dots,X_n) = 0$, donde f es un polinomio irreducible. Sea $A = R[V] = R[X_1,\dots,X_n]/(f)$, y representemos $x_i = X_i+(f)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Sea v la valoración canónica asociada a ϕ y supon gamos:

$$0 \leqslant v(x_1) \leqslant v(x_2) \leqslant \dots \leqslant v(x_n).$$

Si el origen $\underline{0} \in V$ es un punto simple, hemos terminado. Así pues, supongamos que $\underline{0}$ es múltiple. Entonces $f(X_1,\dots,X_n)$ se escribe en la forma:

$$f = f_r + f_{r+1} + \dots + f_m,$$

donde $f_i(X_1,\dots,X_n)$ es una forma de grado i, y $r > 1$.

Puesto que ϕ es racional, para cada $i=2,\dots,n$, existen constantes $c_i \in R$ (unívocamente determinadas) tales que

$$v(x_i - c_i\, x_1) > v(x_1) \qquad 2 \leqslant i \leqslant n.$$

Consideramos la transformación cuadrática definida por

$$(*) \qquad Y_1 = x_1, \quad Y_i = \frac{x_i - c_i x_i}{x_1} \qquad 2 \leqslant i \leqslant n.$$

Es decir consideramos el anillo $C = R[y_1,\dots,y_n] \supset A$, y cuyo cuerpo de fracciones sigue siendo $R(V)$, pues $x_i = Y_1(y_i + c_i)$, $2 \leqslant i \leqslant n$. Tenemos:

$$(**) \qquad f(X_1,\dots,X_n) = Y_1^r\, f^1(Y_1,\dots,Y_n),$$

donde

$$f^1(Y_1,\dots,Y_n) = f_r(1,Y_2,\dots,Y_n) + $$
$$+ Y_1 f_{r+1}(1,Y_2,\dots,Y_n) + \dots + Y_1^{m-r} f_m(1,Y_2,\dots,Y_n).$$

C es el anillo de coordenadas de la hipersuperficie V_1 de ecuación $f^1(Y_1,\dots,Y_n) = 0$. Puesto que ϕ es racional, el centro de ϕ en V_1 es un punto, y como, por construcción, $v(y_i) > 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant n$ (donde $y_i = Y_i + (f^1)$), ϕ está centrado en el origen en V_1.

De la ecuación (**), por derivación, obtenemos (las ecuaciones tienen lugar en B) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = y_1^{r-1} \left(y_1 \dfrac{\partial f^1}{\partial y_1} - \sum\limits_{i=2}^{n} (y_i + c_i) \dfrac{\partial f^1}{\partial y_i} \right. \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = y_1^{r-1} \dfrac{\partial f^1}{\partial y_i} \qquad 2 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

donde $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial X_i} + (f)$ y $\dfrac{\partial f^1}{\partial y_i} = \dfrac{\partial f^1}{\partial Y_i} + (f^1)$.

De aquí, resulta,

$$\min \{v(\frac{\partial f}{\partial x_i}),\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant (r-1)v(y_1) + \min \{v(\frac{\partial f^1}{\partial y_i}),\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

y como $v(y_1) = v(x_1) > 0$ y $r > 1$, concluimos que

$$\min \{v(\frac{\partial f^1}{\partial y_i}),\ 1 \leqslant i \leqslant n\} < \min \{v(\frac{\partial f}{\partial x_i})\ \ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

De este modo, repitiendo transformaciones del tipo (*), en un número finito de pasos (menor o igual que $\min \{v(\frac{\partial f}{\partial x_i})\}$) obtenemos una hipersuperficie $\tilde{V}$ definida por $\tilde{f}(T_1,\ldots,T_n) = 0$, tal que $R[\tilde{V}] \supset A = R[V]$, ϕ está centrado en el origen en $\tilde{V}$, y

$$\min \{v(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t_i}),\ 1 \leqslant i \leqslant n\} = 0,$$

lo que significa que el origen es un punto simple de $\tilde{V}$.

Ahora tenemos el siguiente resultado, que prueba, en particular, la existencia de divisores primos reales sobre puntos simples.

10.2. <u>Lema</u>.- *Sean* K *y* A *como en 9.1. Supongamos que el ideal maximal* $p = (x_1,\ldots,x_n)A$ *es localmente real y que* A_p

es un anillo local regular. Entonces, si $A_i = A\left[\frac{x_1}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right]$, $1 \leq i \leq n$, *al menos para un* i, *se tiene* $pA_i \cap A = p$, *y* $pA_i = x_iA_i$ *es un ideal primo localmente real de* A_i.

<u>Demostración</u>.- p define una valoración discreta del siguiente modo:

"si $f \in A$, $v(f) = t$, si y sólo si $f \in p^t$ y $f \notin p^{t+1}$, y dado $h \in K$, si $h = f/g$ entonces $v(h) = v(f) - v(g)$".

Dicha valoración recibe el nombre de divisor primo canónico definido por p, y Zariski, demuestra [cf. Za_4] que si $v(x_i) = \min\{v(x_1),\dots,v(x_n)\}$ entonces la valoración v tiene centro x_iA_i en $A_i = A\left[\frac{x_1}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right]$. En consecuencia, para concluir el resultado basta probar que la valoración v es real.

Para ello usaremos el siguiente criterio (que se prueba inmediatamente que es equivalente a la realidad local del ideal maximal del anillo de valoración de v):

"Si $\alpha,\beta \in A$ son sumas de cuadrados de K, entonces $v(\alpha+\beta) = \min(v(\alpha),v(\beta))$". Sean $\alpha,\beta \in A$, $\alpha = \frac{1}{b^2}(\Sigma a_i^2)$, $a_i,b \in A$, $b \neq 0$, y

$$\beta = \frac{1}{d^2}(\Sigma c_j^2), \qquad c_j,d \in A, \qquad d \neq 0.$$

Supongamos $v(\alpha) = t$ y $v(\beta) = s$. Entonces $\alpha = \alpha_t+\alpha_{t+1}+\dots$ y $\beta = \beta_s+\beta_{s+1}+\dots$, donde α_k y β_k representan formas homogéneas en unos parámetros de uniformización $z_1,\dots,z_r$ de m. Resulta

$$b^2\alpha = \Sigma a_i^2, \qquad y$$
$$d^2\beta = \Sigma c_j^2$$

Escribiendo a_i, b, d y c_j como polinomio en $z_1, \ldots, z_r$, e igualando las formas iniciales, resulta

$$b_p^2\alpha_t = \Sigma a_{i,u}^2 \ ,$$

y

$$d_q^2\beta_s = \Sigma c_{j,\omega}^2,$$

donde $v(b) = p$, $v(d) = q$, $u = \min\{v(a_i)\}$, $\omega = \min\{v(c_j)\}$ y las sumas se toman sobre los a_i y c_j que alcanzan los valores u y ω respectivamente. Supongamos que $v(\alpha+\beta) > \min(v(\alpha), v(\beta))$. Entonces $\alpha_t+\beta_s = 0$. Pero, de las ecuaciones anteriores resulta

$$0 = d_q^2\ b_q^2(\alpha_t+\beta_s) = \Sigma(a_{i,u}\ d_q)^2 + \Sigma(c_{j,\omega}\cdot b_p)^2,$$

lo que contradice la realidad del anillo A. Por consiguiente, el divisor primo canónico es, en efecto, real, lo que concluye el lema.

Antes de enunciar el resultado que andamos buscando, recordamos el siguiente, cuya demostración puede verse en $[Br_1]$. Afirma que la altura y la dimensión de un ideal primo localmente real de A, pueden ser medidas utilizando cadenas de ideales primos localmente reales. Más aún, estas cadenas son "fuertes" en el sentido de que existe un orden total β de K tal que todos los ideales de la cadena son simultáneamente convexos para $\beta \cap A$.

10.3. <u>Proposición</u> $[Br_1]$.- *Sea* $K = R(x_1, \ldots, x_n)$ *un cuerpo de funciones de grado de transcendencia* r *sobre* S *y sea*

$A = \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$. *Supongamos que* p *es un ideal primo de* A, *localmente real y de dimensión* s. *Entonces, existe una cadena de ideales primos de* A, *localmente reales,*

$$0 \subsetneq p_{r-1} \subsetneq \cdots \subsetneq p_s = p \subsetneq p_{s-1} \subsetneq \cdots \subsetneq p_o \subsetneq A.$$

y tales que existe un orden β *en* K *de modo que para todo* $0 \leqslant i \leqslant r-1$, p_i *es* $(\beta \cap A)$*-convexo.*

Ahora tenemos:

10.4. <u>Proposición</u>.- *Sean* $K = \mathbb{R}(x_1,\dots,x_n)$ *un cuerpo real de funciones de grado de transcendencia* r *sobre* $\mathbb{R}$ *y sea* $A = \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$. *Sea* s *un entero,* $0 \leqslant s \leqslant r-1$, *y supongamos que el ideal maximal* $p = (x_1,\dots,x_n)A$ *es localmente real. Entonces, existe un lugar real de* K *sobre* $\mathbb{R}$, *finito en* A, *discreto, que tiene rango 1, dimensión* s *y centro* p *en* A.

<u>Demostración</u>.- Por 9.1, existe un lugar real ψ de K sobre $\mathbb{R}$, discreto, de rango 1, racional y con centro p en A. También, por el lema de Normalización de Noether, existen elementos $y_1,\dots,y_r \in A$, que son combinaciones lineales de $x_1,\dots,x_n$, tales que A es entero sobre $\mathbb{R}[y_1,\dots,y_r]$. Sea $Y_{r+1} \in A$ un elemento primitivo de K sobre $\mathbb{R}(y_1,\dots,y_r)$ y sea $f(y_1,\dots,y_r,T) \in \mathbb{R}[y_1,\dots,y_r,T]$ el polinomio mínimo de Y_{r+1} sobre $\mathbb{R}(y_1,\dots,y_r)$ (nótese que $f(y_1,\dots,y_r,T) \in \mathbb{R}[y_1,\dots,y_r,T]$ por ser Y_{r+1} entero sobre $\mathbb{R}[y_1,\dots,y_r]$, y $\mathbb{R}[y_1,\dots,y_r]$ íntegramente cerrado).

Consideremos la hipersuperficie de ecuación $f(y_1,\dots,y_r,T)=0$, cuyo anillo de coordenadas es $A^* = R[y_1,\dots,y_r,y_{r+1}] \subset A$. Sea p^* el centro de ϕ en A^*, es decir, $p^* = p \cap A^*$. Aplicando el lema 10.1 al lugar ψ, K, A^* y p^*, existe un dominio finitamente generado sobre R, A', tal que K es el cuerpo de fracciones de A', y ψ está centrado en un ideal p' en A' tal que $A'_{p'}$ es regular. Sean $A' = R[z_1,\dots,z_m]$, $p' = (z_1,\dots,z_m)A'$ (en realidad, sabemos, por 10.1 que $m = r+1$).

Apliquemos ahora el lema 10.2 a A' y p'. Sabemos que para algún $i=1,\dots,m$, digamos, por ejemplo, $i=1$, el ideal $p'A'_1 = z_1A'_1$ es primo, localmente real; y $p'A'_1 \cap A' = p'$, donde $A'_1 = A'\left[\frac{z_2}{z_1},\dots,\frac{z_n}{z_1}\right] = R\left[z_1, \frac{z_2}{z_1},\dots,\frac{z_n}{z_1}\right]$.

Puesto que A'_1 es un dominio finitamente generado, y $p'A'_1$ es principal, por el teorema de Krull, $p'A'_1$ tiene dimensión r-1. Consideremos, por último, un ideal primo q de A'_1, localmente real, de dimensión s y tal que $q \supset p'A'_1$. Tal ideal existe en virtud de 10.3. Ahora estamos en las condiciones de la proposición 9.4: A'_1 es un dominio finalmente generado, K es su cuerpo de fracciones, y q es un ideal de A'_1, localmente real y de dimensión s. Entonces, existe un lugar real ϕ de K sobre R, que es finito en A'_1, discreto, de rango 1, dimensión s y con centro q en A'_1. Para concluir la proposición, falta probar que ϕ es finito sobre A y que tiene centro p en A.

Pero, $A'_1 \supset A'$, y

$$q \cap A' \supset p'A'_1 \cap A' = p'.$$

Como p' es maximal, resulta $q \cap A' = p'$, luego ϕ tiene centro p' en A'. Por otra parte, por construcción, tenemos:

$$A^*_{p^*} \subset A'_{p'} \qquad \text{y} \qquad p' \cap A^* = p^*.$$

Además, $A'_{p'}$ es integramente cerrado, por ser un anillo local regular. Puesto que $A_p \supset A^*_{p^*}$, y A_p es entero sobre $A^*_{p^*}$, resulta $A_p \subset A'_{p'}$, y en consecuencia ϕ es finito en A_p. Más aún,

$$p'A'_{p'} \cap A_p = pA_p$$

puesto que ambos son centro del lugar ψ inicial, luego, ϕ tiene centro p en A, y la demostración está completa.

El método 9.3 de extensión del cuerpo base, permite generalizar la situación al caso en que $\dim p > 0$, análogamente a lo que se hizo para pasar de 9.1 a 9.4. Así, tenemos:

10.5. <u>Teorema</u>.- *Sean* K *y* A *como en 10.4, y supongamos que* p *es un ideal primo de* A, *localmente real y de dimensión* t, $0 \leqslant t \leqslant r-1$. *Entonces, dado un entero* s, $t \leqslant s \leqslant r-1$, *existe un lugar real de* K *sobre* R, *finito en* A, *discreto, de rango 1, dimensión* s *y centro* p *en* A.

<u>Demostración</u>.- Usando 9.3, con un orden de K que haga a p $(\beta \cap A)$-convexo, reducimos el problema al caso de $\dim \tilde{p} = 0$, donde $\tilde{p}$ es ahora un ideal primo, localmente real de $C = E[x_{t+1},\dots,x_n]$, $\tilde{p} \cap A = p$, E es la clausura real de $R(x_1,\dots,x_t)$ con respecto al orden $\beta \cap R(x_1,\dots,x_t)$, y $x_1,\dots,x_t$ son tales que $\{x_1+p,\dots,x_t+p\}$ es una base de transcendencia de A/p sobre R.

Apliquemos 10.4, para obtener un lugar real sobre E,

$$\psi : E(x_{t+1},\ldots,x_n) \to E,\infty$$

finito en C, discreto, de rango 1, centrado en p y de dimensión $s' = s-t$. Ahora, es inmediato que la rstricción $\phi = \psi|_K$ es el lugar buscado.

10.6. <u>Corolario</u> (Existencia de divisores primos).- *Sean* K *y* A *como en 10.4. Sea* p *un ideal primo de* A*, localmente real. Entonces, existe un divisor primo de* K *centrado en* p *en* A.

<u>Demostración</u>.- Basta aplicar 10.5 con $s = r-1$.

10.7. <u>Observación</u>.- (a) La demostración de 10.4, muestra, como dado un punto central en una hipersuperficie real, después de un número finito de explosiones, obtenemos como transformado del punto una subvariedad real de codimensión 1, que da lugar a un divisor primo centrado en el punto. Esto resuelve el problema planteado por Brumfiel en $[Br_2]$. No obstante, el hecho de basarse la demostración en la obtención de un punto simple, hace que el número de explosiones utilizado, no sea, en general, el mínimo necesario para ello. Por ejemplo en

$$x^2 + y^2 = z^4,$$

Si ϕ es un lugar discreto, racional, centrado en $(0,0,0)$ y tal que $v_\phi(x) < v_\phi(y) < v_\phi(z)$, entonces, haciendo la explosión $x' = \frac{x}{z}$, $y' = \frac{y}{z}$, $z' = z$, resulta

$$(x')^2 + (y')^2 = (z')^2$$

y el transformado real de $(0,0,0)$ es $(0,0,0)$. Ahora, sólo una explosión más es necesaria para obtener un transformado de codimensión 1 de $(0,0,0)$, concretamente $x'' = \frac{x'}{z'}$, $y'' = \frac{y'}{z'}$ y $z'' = z'$, mientras que en el proceso de 10.4, hacen falta dos: en la primera alcanzamos un punto simple sobre $(0,0,0)$ y finalmente explotamos con centro ese punto.

(b) El teorema 10.5 muestra que, en cuanto a lugares de rango 1, la situación es óptima, es decir, siempre que se den las condiciones necesarias para la existencia de lugares reales de rango 1, con centro p y dimensión s, tales lugares existen.

10.7. <u>Corolario</u>.- *Con la notación de 10.5, si* β *es un orden total en* K *de forma que* p *es* $(\beta \cap A)$*-convexo, y si* $\overline{\beta}$ *denota el orden cociente inducido por* β *en* $\Lambda = A_p/pA_p$, *entonces el lugar* ϕ *puede ser tomado tal que su cuerpo residual* Σ *tiene un orden* $\hat{\beta}$ *que extiende el orden* $\overline{\beta}$ *mediante la inclusión canónica* $\Lambda \to \Sigma$.

<u>Demostración</u>.- Es idéntica a la del corolario 9.5.

Finalmente, la composición de lugares de rango 1 permite obtener lugares de rango arbitrario, como muestra el siguiente teorema:

10.8. <u>Teorema</u> (Teorema de existencia de lugares reales con centro y dimensión dados).- *Sea* p *un ideal primo de* A, *localmente real y de dimensión* t. *Sean* m *y* s *dos enteros* *tales que*

$$1 \leqslant m \leqslant r, \qquad t \leqslant s, \qquad y \qquad s+m \leqslant r.$$

Entonces, existe un lugar real de K *sobre* R, *finito en* A, *discreto, de rango* m, *dimensión* s *y centro* p *en* A.

Demostración.- Resolvemos primero el caso $t = 0$. La demostración es por inducción sobre $m =$ rango (ϕ). Si $m = 1$ el resultado es el teorema 10.5. Supongamos que $m > 1$. Tomemos, por 10.5, un lugar sobreyectivo, $\phi_1 : K \to K_1$, de K sobre R, de rango 1, dimensión r-1 y centro p en A. ϕ_1 es un divisor primo, y por consiguiente, el cuerpo residual K_1 es un cuerpo real de funciones de grado transcendencia r-1 sobre R (cf. [Z-S] pág. 89). Por nuestra hipótesis en t, tenemos $\Delta = A_p/pA_p = R$.

Si $r = 1$, hemos terminado. Supongamos, pues, $r > 1$, y sean $y_1,\dots,y_d \in K_1$ tales que $K_1 = R(y_1,\dots,y_d)$. Pongamos $B = R[y_1,\dots,y_d]$. Puesto que B es un dominio, real, finitamente generado, existen cadenas de ideales primos localmente reales de longitud máximo, i.e. de todas las dimensiones $0,1,\dots,r-2$. Consideremos q un ideal primo de R, localmente real y de dimensión $t' \leqslant s$. Por la hipótesis de inducción, aplicada a q, B, K_1, m-1, s y r-1, existe un lugar real ϕ_2 de K_1 sobre R, de rango m-1, dimensión s y centro q en B.

Tomemos $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$. Entonces, ϕ es un lugar real de K sobre R, finito en A, de rango m y dimensión s. Además, p está contenido en el centro de ϕ en A, y como p es maximal, resulta que ϕ está centrado en p, lo que concluye el caso $t=0$.

Supongamos $t > 0$. Usando el método 9.3 de extensión del cuerpo base, pasamos a un ideal primo $\tilde{p}$, localmente real de $C = E[x_{t+1},\dots,x_n]$, donde E es la clausura real de $R(x_1,\dots,x_t)$ respecto a un orden β que hace $(\beta \cap A)$-convexo al ideal p. Entonces, por la primera parte de éste teorema, existe un lugar real

$$\psi : E(x_{t+1},\dots,x_n) \to \Sigma_\psi$$

de $E(x_{t+1},\dots,x_n)$ sobre E, centrado en $\tilde{p}$, de rango m y dimensión (sobre E) $s' = s-t$. La restricción $\phi = \psi|_K$ es el lugar buscado, pues, como $E(x_{t+1},\dots,x_n)$ es algebraico sobre K, el rango de ϕ coincide con el de ψ.

10.9. Corolario.- *Con la notación de 10.8, si* β *es un orden total en* K*, de forma que* p *es* $(\beta \cap A)$*-convexo, y si* $\bar{\beta}$ *denota el orden cociente inducido por* β *en* $\Delta = A_p/pA_p$*, entonces el lugar* ϕ *puede tomarse tal que su cuerpo residual* Σ *tiene un orden* $\hat{\beta}$ *que extiende el orden* $\bar{\beta}$ *mediante la inclusión canónica* $\Delta \to \Sigma$.

Demostración.- Idéntica a la de 9.5.

§11. Como tangente real

En el epígrafe anterior hemos observado las dificultades existentes para encontrar divisores primos reales sobre puntos singulares de una variedad. El origen de tales contratiempos está en el lema 10.2. En efecto, trabajando sobre un cuerpo base cualquiera, siempre es cierto que al menos uno de las extensiones $\mathfrak{m}A_i = x_iA_i$ (donde A_i y $\mathfrak{m}$ tienen el mismo significado que en 10.2), se contrae a $\mathfrak{m}$. Si el cuerpo base es algebraicamente cerrado, dicho ideal define una subvariedad de codimensión 1, que produce un divisor primo sobre $\mathfrak{m}$. Sin embargo, si el cuerpo base es realmente cerrado, para que x_iA_i defina una subvariedad real de codimensión 1, uno de sus primos asociados debe ser real, y si, además, queremos que defina un divisor primo real, dicha subvariedad debe ser central (cf. 2.10), i.e. su ideal debe ser localmente real. Ninguna de estas cosas es cierta, en general, si el punto es singular, como muestra el siguiente:

11.1. <u>Ejemplo</u>.- Sea $A = \mathbb{R}[x_1,x_2,x_3]$, donde $x_1^2 + x_2^2 = x_3^4$. Sea $\mathfrak{m} = (x_1,x_2,x_3)A$. Entonces, ninguna de las tres extensiones $\mathfrak{m}A_i$ es real, ni tiene asociados primos reales. En efecto, $\mathfrak{m}A_1 = x_1\mathbb{R}\left[x_1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right]$ y se tiene

$$1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^4 x_1^2 .$$

Por tanto $1 + (\frac{x_2}{x_1}) \in x_1A_1$ lo que prueba que $^{\mathbb{R}}\sqrt{x_1A_1} = A_1$ ($^{\mathbb{R}}\sqrt{x_1A_1}$ = radical real de x_1A_1, cf. [Du$_3$] o [Ri] para su definición y propiedades).

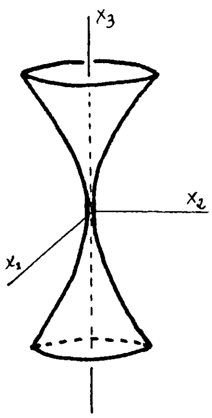


Fig. 6

El caso $\mathfrak{m}A_2$ es idéntico. En cuanto a $\mathfrak{m}A_3$, tenemos

$$\mathfrak{m}A_3 = x_3\mathbb{R}\left[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, x_3\right], \qquad \text{donde}$$

$$(\frac{x_1}{x_3})^2 + (\frac{x_2}{x_3})^2 = x_3^2 .$$

En consecuencia, $(\frac{x_1}{x_3}) \in {}^{\mathbb{R}}\sqrt{x_3A_3}$ y $(\frac{x_2}{x_3}) \in {}^{\mathbb{R}}\sqrt{x_3A_3}$, de donde resulta

$$V(x_3A_3) = V((\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})A_3) = \{(0,0,0)\},$$ que tiene codimensión 2 en V_3.

Por otra parte, el ejemplo 11.1 pone de manifiesto, el auténtico problema detrás del planteamiento: es sabido, que, si el cuerpo base es algebraicamente cerrado, para cada i, la variedad definida por x_iA_i coincide con la i-ésima parte afín del cono tangente proyectivo de la variedad V en el origen. Análogamente, x_iA_i definirá una subvariedad real de codimensión 1 si el cono tangente de V en $\underline{0} = V(m)$ contiene suficientes tangentes reales en el abierto afín $x_i \neq 0$ de R^n. Así, en el ejemplo anterior, sólo existe una recta tangente, real, a la variedad en el origen: el eje z, lo que provoca que ninguna de las extensiones de lugar a una subvariedad real de codimensión 1.

Se plantea, entonces, de modo natural, el estudio del cono tangente real a una variedad real en un punto. Sea V una variedad algebraica real y sea $p = (0,\ldots,0) \in V$. Representamos $R(V)$ por $R(x_1,\ldots,x_n) = R(\underline{x})$, y $R[V]$ por $R[x_1,\ldots,x_n] = R[\underline{x}]$. Definimos los siguientes conos de R^n, con vértice en p:

11.2. <u>Definición</u>.- $C_R^o(V,p)$ *es el conjunto de puntos* $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_n) \in R^n$ *tales que la especialización de* $R[\underline{x},u,\underline{t}]$ *en el punto* $(\underline{0};0,\underline{a}) \in R^{2n+1}$, *i.e. el homomorfismo:*

$$\phi : R[x_1,\ldots,x_n;u;t_1,\ldots,t_n] \to R,$$

definido por $\phi(f(x_1,\ldots,x_n;u;t_1,\ldots,t_n)) = f(0,\ldots,0;0;a_1,\ldots,a_n)$*, se extiende a un lugar racional, del cuerpo* $R(\underline{x};u;\underline{t})$*, donde* u *es un elemento transcedente sobre* $R(\underline{x})$ *y* $ut_i = x_i$, $1 \leq i \leq n$.

11.3. Definición.- *Definimos el* *cono tangente real* *de* V *en* p *como el conjunto* $C_R^1(V,p) = C_R(V,p)$ *de puntos pertenecientes a rectas que son límites de rectas del haz de vértice* p*, secantes a la variedad* V*, i.e.* "$(a_1,\ldots,a_n) \in C_R(V,p)$ *si y sólo si existen sucesiones* $\{a^{(k)} = (a_1^{(k)},\ldots,a_n^{(k)})\}_{k\in\mathbb{N}} \subset R^n$*, y* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset R$ *tales que* $\{a^{(k)}\} \to a$, $\{\lambda_k\} \to 0$ *y para cada* $k \in \mathbb{N}$, $x^{(k)} = (\lambda_k a_1^{(k)},\ldots,\lambda_k a_n^{(k)}) \in V$".

11.4. Definición.- *Definimos el conjunto* $C_R^2(V,p)$ *como la variedad definida en* R^n *por el ideal homogéneo de las formas iniciales de los polinomios de* $J(V)$.

11.5. Observaciones.- (a) Si el cuerpo base R es algebraicamente cerrado, por el teorema de extensión de especializaciones, la definición 11.2 coincide con el conjunto de puntos $\underline{a} \in R^n$ tales que $(\underline{0},;0,a)$ es especialización de $R[\underline{x};u,\underline{t}]$, i.e. está definido el homomorfismo de sustitución

$$\phi : R[x_1,\ldots,x_n;u,t_1,\ldots,t_n] \to R,$$

$\phi(f(x_1,\ldots,x_n;u;t_1,\ldots,t_n)) = f(0,\ldots,0;0;a_1,\ldots,a_n)$.

Es bien conocido, que si R es algebraicamente cerrado,

$C^o_R(V,P) = C_R(V,P) = C^2_R(V,p)$. Sin embargo, en nuestras hipótesis de que R es realmente cerrado, los tres conjuntos son en general distintos, como muestran los ejemplos que damos más adelante.

(b) Representamos $V_{R(i)}$ la variedad definida por $J(V) \subset R[X_1,\dots,X_n]$ en el cuerpo algebraicamente cerrado $R(i)$, se verifica que

$$C^2_R(V,p) = C_{R(i)}(V_{R(i)},p) \cap R^n$$

donde $C_{R(i)}(V_{R(i)},p)$ representa el cono tangente de $V_{R(i)}$ en en $[R(i)]^n$.

(c) $C_R(V,p) \neq \{p\}$ si y sólo si p no es un punto aislado de V.

La siguiente proposición muestra la relación entre los tres conos definidos. Usamos la siguiente notación: $V^o = V$ y por recurrencia, definimos $V^{i+1} = \text{Sing } V^i$.

11.6. Proposición.- *(a)* $C^o_R(V,p)$ *es un cono semialgebraico cerrado de* R^n. *Además* $C^o_R(V,p) \neq \{0\}$ *si y sólo si* $p \in V_c$.

(b) $C_R(V,p) = \bigcup_{\substack{i>o \\ \dim V^i>o}} C^o_R(V^i,p)$. *En particular* $C_R(V,p)$ *es semialgebraico y cerrado.*

(c) $C^o_R(V,p) \subset C_R(V,p) \subset C^2_R(V,p)$.

Demostración.- (a) Probaremos primero que $C^o_R(V,p)$ es semialgebraico y cerrado. Sea $\tilde{V}$ la variedad algebraica de R^{n+1} cuyo anillo de coordenadas es $B = R[x_1,\dots,x_n;u;t_1,\dots,t_n] =$

$= R[u;t_1,\ldots,t_n]$. Puesto que $ut_i = x_i$, $\tilde{V}$ es la imagen en la carta afín $u \neq 0$, por la explosión del origen, del cilindro V' de R^{n+1} construido sobre V. Así, un punto $(z,x_1,\ldots,x_n) \in \tilde{V}$ si y sólo si $(zx_1,\ldots,zx_n) \in V$, y si $z \neq 0$, y $(x_1,\ldots,x_n) \neq$ $\neq (0,\ldots,0)$, $(z,x_1,\ldots,x_n)$ es regular en $\tilde{V}$ si y sólo si $(zx_1,\ldots,zx_n)$ es regular en V.

La condición de que la especialización en $(0,a_1,\ldots,a_n)$ se extienda a un lugar racional $\phi : R(u,t_1,\ldots,t_n) \to R$, equivale, después de los resultados de este capítulo (cf. 9.1) a que el punto $(0,a_1,\ldots,a_n)$ sea central en $\tilde{V}$. Por consiguiente, identificando R^n con el subespacio $\{(0,x_1,\ldots,x_n) : x_i \in R,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset R^{n+1}$ obtenemos

$$C_R^o(V,p) = \tilde{V}_c \cap \{u = 0\},$$

lo que demuestra que $C_R^o(V,p)$ es semialgebraico y cerrado. Por otra parte, si $(a_1,\ldots,a_n) \in C_R^o(V,p)$, entonces $(0,a_1,\ldots,a_n) \in \tilde{V}_c$ y existe una sucesión de puntos regulares de $\tilde{V}$ $\{(\lambda_k,a_1^{(k)},\ldots,a_n^{(k)})\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\lambda_k \neq 0$ para todo k, y $\{\lambda_k\} \to 0$, tal que $\{(\lambda_k,a_1^{(k)},\ldots,a_n^{(k)})\} \to (0,a_1,\ldots,a_n)$. Por tanto, $(\lambda_k a_1^{(k)},\ldots,\lambda_k a_n^{(k)}) \in \operatorname{Reg} V$, y para cualquier $\rho \in R\setminus\{0\}$,

$$((\lambda_k\rho^{-1})(\rho a_1^{(k)}),\ldots,(\lambda_k\rho^{-1})(\rho a_n^{(k)})) =$$
$$= (\lambda_k a_1^{(k)},\ldots,\lambda_k a_n^{(k)}) \in \operatorname{Reg} V,$$

lo que prueba que $(\lambda_k\rho^{-1},\rho a_1^{(k)},\ldots,\rho a_n^{(k)}) \in \operatorname{Reg} \tilde{V}$. Pero

$$\{(\lambda_k\rho^{-1},\rho a_1^{(k)},\ldots,\rho a_n^{(k)})\} \to (0,\ a_1,\ldots,\ a_n)$$

y se sigue que el punto $(0,\rho a_1^{(k)},\ldots,\rho a_n^{(k)}) \in \tilde{V}_c$, es decir

$(\rho a_1, \ldots, a_n) \in C^o_R(V,p)$, lo que demuestra que $C^o_R(V,p)$ es un cono. Finalmente, es evidente que $C^o_2(V,p) \neq \{0\}$ y sólo si $p \in V_c$.

(b) Sea $a = (a_1, \ldots, a_n) \in C_R(V,p)$. Entonces, existen sucesiones $\{a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)})\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $\{a^{(k)}\} \to a$, $\{\lambda_k\} \to 0$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^{(k)} = (\lambda_k a_1^{(k)}, \ldots, \lambda_k a_n^{(k)}) \in V$. Puesto que V se descompone en una unión finita:

$$V = (V^o \setminus V^1) \cup (V^1 \setminus V^2) \cup \ldots$$

existen subsucesiones, que denotamos también por $\{\lambda_k\}$ y $\{a^{(k)}\}$, y existe $i > o$, tales que para cada k, $x^{(k)} \in (\lambda_k a_1^{(k)}, \ldots, \lambda_k a_n^{(k)})$. Se sigue que $x^{(k)} \in \text{Reg}\,(V^i)$. Pero entonces, para cada k, se tiene $(\lambda_k, a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}) \in \text{Reg}\,((\tilde{V}^i))$, de donde $(0, a_1, \ldots, a_n) \in (\tilde{V}^i)_c$, y $a = (a_1, \ldots, a_n) \in C^o_R(V^i,p)$. Esto prueba $C_R(V,p) \subset \subset \bigcup_{i>o} C^o_R(V^i,p)$.

$\dim V^i \geq 0$ Recíprocamente, sea $a \in C^o_R(V^i,p)$. Entonces $(0;a) \in (\tilde{V}^i)$ y existe una sucesión $\{(\lambda_k, a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)})\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{Reg}\,(\tilde{V}^i,p)$, $\lambda_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tal que $\{(\lambda_k, a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)})\} \to \to (0, a_1, \ldots, a_n)$. En particular, $\{\lambda_k\} \to 0$, $\{(a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)})\} \to a$ y para cada k, $x^{(k)} = (\lambda_k a_1^{(k)}, \ldots \ldots, \lambda_k a_n^{(k)}) \in V^i \subset V$, es decir $a \in C_R(V,p)$, lo que concluye (b).

(c) $C^o_R(V,p) \subset C_R(V,p)$ ha sido probado en (b). Por otra parte $C_R(V,p) \subset C_{R(i)}(V_{R(i)},p) \cap R^n = C^2_R(V,p)$ (observación 11.5(b)).

11.7. Comentario.- El cono $C_R^o(V,p)$ produce las rectas tangentes que provienen de la parte central de V, i.e. que son límite de rectas secantes a V en puntos centrales. $C_R^o(V,p)$ constituye, pues, la parte de $C_R(V,p)$ de dimensión máxima. Por otra parte $C_R^2(V,p)$, al ser la parte real del cono tangente de la variedad complexificada, contiene también las rectas reales tangentes a puntos no reales, y es en general mayor que $C_R(V,p)$ (cf. Ejemplo 11.8).

Por último, la proposición 11.6 reduce el problema del cálculo de $C_R(V,p)$ a un problema de cálculo de puntos centrales de una determinada variedad. Dicho cálculo es constructible, en el sentido de que existe un algoritmo que lo lleva a cabo.

Resaltamos que el cono tangente real no es, en general algebraico. Esto hace que no exista ninguna caracterización algebraica en términos de ideales o anillos graduados, exceptuando la dada en 11.6 usando lugares reales. En particular, es significativo que el ideal de las formas iniciales no determina el cono tangente real, en el sentido de que dos variedades pueden tener el mismo ideal de formas iniciales y su cono real diferente.

11.8. Ejemplos.- En todos los ejemplos, el punto p representa el origen de coordenados.

11.8.1.- Sea V_1 la variedad de R^2 definida por $y(x^2+y^4) = x^3$. Se tiene:

$$\text{signo } y = \text{signo } x,$$

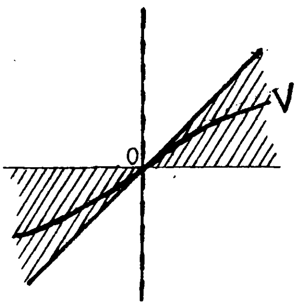


Fig. 7

y reescribiendo la ecuación en la forma $x^2(x-y) = y^5$, resulta

signo $(x-y)$ = signo y.

En consecuencia la curva está contenida entre las rectas $y=x$ e $y=o$ (zona sombreada en la figura). Se tiene $C_R^2(V_1,p) = \{(x,y) : x^2(x-y)=0\}$, mientras $C_R^o(V_1,p) = C_R(V_1,p) = \{(x,y) : x-y = 0\}$, pues evidentemente la recta $x = 0$ no es límite de tangentes reales.

11.8.2.- Sea $V_2 \subset R^3$, definida por $x^2+y^2 = z^4$ (ver figura 6, pág. 101). En este caso $C_R^o(V_2,p) = C_R(V_2,p) = C_R^2(V_2,p) = \{(0,0,z) : z \in R\}$. Por tanto, resulta $\dim C_R(V_2,p) < \dim_p V_2$.

11.8.3.- Sea $V_3 \subset R^3$ definida por $z(x^2+y^2) = x^5$ (fig. 8). Resulta, $C_R^2(V_3,p) = \{(x,y,z) : z(x^2+y^2) = 0\} = \{z = 0\} \cup \cup \{(0,0,z) : z \in R\}$.

Calculemos $C_R^o(V_3,p)$, la variedad $(\tilde{V}_3) \subset R^4$ viene definida por la ecuación

$$(*) \qquad z(x^2+y^2) = u^2x^5.$$

Entonces $C_R^o(V_3,p) = (\tilde{V}_3)_c \cap \{u = 0\} = \{(0,x,y,z) : (x^2+y^2)z = 0\} \cap \cap (\tilde{V}_3)_c$. Ahora bien, los puntos $(0,x,y,0) \neq (0,0,0,0)$ son regulares de $\tilde{V}_3$ y por tanto $\{z = 0\} \subset C_R^o(V_3,p)$. Por otra parte, los puntos del eje z, $(0,0,0,z)$ no son centrales en $(\tilde{V}_3)$, pues

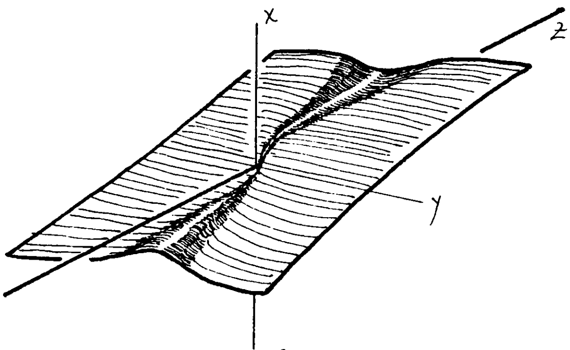


fig. 8

si $\{(\lambda_k, x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)})\} \to (0,0,0,1)$ y $(\lambda_k, x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}) \in (\tilde{V}_3)$ para $k >> 0$, $z^{(k)} > 0$, y por consiguiente $x^{(k)} > 0$. De la ecuación (*) resulta

$$(\lambda_k)^2 = z^{(k)}((x^{(k)})^2 + (y^{(k)})^2) \;/\; (x^{(k)})^5$$

de donde si $(x^{(k)}, y^{(k)}) \to (0,0)$, $(\lambda_k) \to \infty$, contradicción.

En consecuencia

$$C_R^o(V_3, p) = \{z = 0\}, \quad y$$

$$C_R(V_3, p) = C_R^o(V_3, p) \cup C_R^o(V_3^1, p) = \{z = 0\} \cup \{(0,0,z) : z \in R\}.$$

11.8.4.- Sea $V_4 \subset R^3$ definida por $z(x^2+y^2+z^4) = x^3$. Tenemos

$$C_R^2(V_4, p) = \{(x,y,z) : z(x^2+y^2) = x^3\} \qquad \text{(fig. 2, pág. 15)}$$

Sin embargo, tenemos:

$$\text{signo } (z) = \text{signo } (x)$$

y reescribiendo la ecuación en la forma

$$z(y^2+z^4) = x^2(x-z),$$

resulta,

$$\text{signo } (z) = \text{signo } (x-z).$$

Por tanto, la superficie está comprendida entre los planos $z=0$ y $x-z = 0$, con lo que es evidente que el eje z no es límite de secantes a la variedad. En conclusión, tenemos

$$C_R^o(V_4,p) = C_R(V_4,p) = S_1 = \{(x,y,z) : z(x^2+y^2) = x^3\} \setminus$$
$$\setminus \{(0,0,z) : z \in R \setminus \{0\}\}.$$

Observamos que $C_R(V_4,p)$ es semialgebraico. Además, V_4 y $z(x^2+y^2) = x^3$, tienen la misma forma inicial, pero sus conos tangentes reales en el origen son distintos.

<u>11.8.5</u>.- Damos, finalmente, otro ejemplo de una variedad algebraica real, irreducible, cuyo cono tangente es semialgebraico. Sea $V_5 \subset R^4$ definida por

$$tx^2 - zy^2 + t^5 = 0.$$

Resulta,

$$C_R^2(V_5,p) = \{(x,y,z,t) : tx^2-zy^2 = 0\}$$

Ahora bien, reescribiendo la ecuación de V_5, obtenemos

$$t(x^2+t^4) = zy^2 \quad , \qquad \text{de donde}$$

signo (t) = signo (z), siempre que $t \neq 0$. Por tanto, resulta inmediato que las rectas $(0,0,\lambda a,\lambda b) \subset C_R^2(V_5,p)$, donde $ab < 0$ no son límite de rectas secantes a V_5. En consecuencia.

$$C_R^o(V_5,p) = C_R(V_5,p) = C_R^2(V_5,p) \setminus \{(0,0,z,t) : zt < 0\} =$$

$$= S_2 = \{(x,y,z,t) : tx^2 - zy^2 = 0\} \setminus \{(x,y,z,t) : zt < 0\}.$$

11.9. <u>Corolario</u>.- *Con la notación de 11.6, se tiene:*

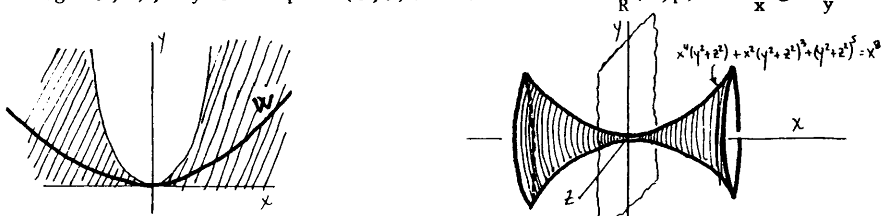
$$\dim C_R^o(V,p) = \dim C_R(V,p) \leqslant \dim C_R^2(V,p).$$

Además, en general, la desigualdad $\dim C_R(V,p) \leqslant$ $\leqslant \dim C_R^2(V,p)$ *es estricta.*

<u>Demostración</u>.- Puesto que si S y T son semialgebraicos y $S \quad T$, se tiene que $\dim S \leqslant \dim T$ (cf. [Re_1]), el corolario es consecuencia inmediata de la proposición 11.6. Para probar que la dimensión de $C_R^2(V,p)$ es, en general, mayor que la de $C_R(V,p)$, basta dar un ejemplo: Sea W la curva de R^2 definida por la ecuación

$$y(x^2 + y^4) = x^4 \qquad (*)$$

(ver fig. 9,a), y sea $p = (0,0)$. Se tiene $C_R^2(W,p) = R_x \cup R_y$.



(a) (b)

Fig. 9

De (*), resulta, signo $(y) \geqslant 0$ y reescribiendo (*) en la forma

$$y^5 = x^2(x^2 - y),$$

signo (y) = signo (x^2-y). Por tanto, $y \leqslant x^2$ y es evidente que la recta R_y no pertenece a $C_R(W,p)$. Es decir, $C_R(W,p) = R_x$. Consideremos la variedad V_6 obtenida al girar W tomando R_x como eje de giro. Es inmediato que $C_R^2(V_6,p) = R_{yz} \cup R_x$, mientras que $C_R(V_6,p) = R_x$.

Resumimos los resultados de los ejemplos dados, en el siguiente cuadro, donde R_x, R_y, R_z representan los ejes x, y, z respectivamente, R_{xy} el plano $z = 0$, etc...

	$C_R^o(V,p)$	$C_R(V,P)$	$C_R^2(V,p)$
V_1	R_{x-y}	R_{x-y}	$R_{x-y} \cup R_y$
V_2	R_z	R_z	R_z
V_3	R_{xy}	$R_{xy} \cup R_z$	$R_{xy} \cup R_z$
V_4	S_1	S_1	$z(x^2+y^2)=x^3$
V_5	S_2	S_2	$tx^2-zx^2 = 0$
V_6	R_x	R_x	$R_{yz} \cup R_x$

Concluimos la sección mostrando, como usando los resultados de lugares reales demostrados en el capítulo, pueden probarse inmediatamente dos resultados que aparecen por vez primera en Efroymson [E]. El primero afirma que dada una variedad real, irreducible, $V \subset R^n$ en la que $\underline{0} = (0,\dots,0)$ es un punto central de V, si consideramos la explosión con centro el origen, siempre existe un punto real (central en la transformada de V) en el divisor excepcional sobre $\underline{0}$.

En efecto, sea $A = R[x_1,\dots,x_n]$ el anillo de coordenadas de V y sea ϕ un lugar real de $R(V)$ con centro $\underline{0}$ en V. Supongamos que $v_\phi(x_1) = \min\{v_\phi(x_1),\dots,v_\phi(x_n)\}$, donde v_ϕ representa la valoración canónica asociada a ϕ. Entonces $A_1 = A\left[\frac{x_2}{x_1},\dots,\frac{x_n}{x_1}\right] \quad B_\phi$, donde B_ϕ es el anillo de valoración de ϕ. Sea p el centro de ϕ en A_1. Se tiene $p \quad A = (x_1,\dots,x_n)A$. Por último, sea m_1 un ideal maximal de A, resulta $m_1 \cap A = (x_1,\dots,x_n)A$. El ideal m_1 define un punto central en V_1, la transformada de V, en la carta afín $x_1 \neq 0$, de V, que yace sobre $\underline{0}$.

El segundo afirma, que si V' es la normalización de V, entonces existe en V' un punto central que yace sobre $\underline{0}$. En efecto, si ϕ es un lugar real de $R(V)$ con centro $\underline{0}$ en V, entonces $V' \quad B_\phi$ puesto que V' es entero sobre V. Sea m' el centro de ϕ en $R[V']$. Como $m' \cap R[V] = (x_1,\dots,x_n)R[V]$, m' es maximal en $R[V']$, y es localmente real por ser centro de un lugar real. En consecuencia m' define un punto central $\underline{0}'$ de V' que yace sobre $\underline{0}$.

Observamos que ambos resultados son falsos si se prescinde de la hipótesis de que el punto $\underline{0}$ sea central. Por ejemplo, si V es la curva en $\mathbb{R}^2$,

$$x^2+y^2 = x^3,$$

no existe ningún punto real sobre el origen en la transformada de V por la explosión de centro el origen. Del mismo modo, la super ficie de ecuación

$$x^2+y^2+z^2 = x^3 \qquad \text{(fig. 10, pág. 118)}$$

es normal, pero el origen es un punto aislado.

CAPITULO III: CADENAS DE ESPECIALIZACIONES.

En este capítulo aplicamos los resultados obtenidos en el capítulo II para la obtención de cadenas de especializaciones de lugares reales con centro, rangos y dimensiones fijados a priori, cuando éstos están sujetos a ciertas restricciones. En particular, los resultados obtenidos permiten demostrar que para variedades algebraicas de dimensiones 2 y 3 tales restricciones son superfluas. El teorema de Brumfiel (§12) se aplica de manera fundamental para refinar cadenas de ideales localmente reales, y se usa en §13.

§12. Composición de lugares, notación y el teorema de Brumfiel.

A lo largo de todo el capítulo, K es un cuerpo real de funciones de grado de transcendencia r sobre R, $K = R(x_1,\dots,x_n)$, y ponemos $A = R[x_1,\dots,x_n]$. Decimos que una sucesión de lugares reales de K sobre R, $\phi_o,\phi_1,\dots,\phi_{m-1}$ es una cadena de especializaciones de lugares reales de K sobre R, si existe una cadena de lugares

$$K \xrightarrow{\theta_{m-1}} \Sigma_{m-1},\infty \xrightarrow{\theta_{m-2}} \Sigma_{m-2},\infty \xrightarrow{\theta_{m-3}} \dots\dots$$

$$\dots \xrightarrow{\theta_1} \Sigma_1,\infty \xrightarrow{\theta_o} \Sigma_o,\infty$$

donde θ_i es un lugar real no trivial de rango 1 de Σ_{i+1} con cuerpo residual Σ_i, de modo que:

$$\phi_{m-1} = \theta_{m-1}$$

$$\vdots$$

$$\phi_k = \theta_k \circ \dots \circ \theta_{m-2} \circ \theta_{m-1}$$

$$\vdots$$

$$\phi_o = \theta_o \circ \theta_1 \circ \dots \circ \theta_{m-1}.$$

Entonces, para cada $i=0,\dots,m-1$, $\phi_i : K \to \Sigma_i,\infty$ es un lugar real de K sobre R, de rango $m-i$. Si designamos por B_i el anillo de valoración de ϕ_i, y por m_i su ideal maximal, tenemos:

$$B_o \subset B_1 \subset \dots \subset B_{m-2} \subset B_{m-1},$$

y

$$m_{m-1} \subset m_{m-2} \subset \dots \subset m_1 \subset m_o$$

Supongamos que $s_i = \dim \phi_i$ y que todos los lugares ϕ_i son finitos en A. Denotemos por $p_i = m_i \cap A$, el centro de ϕ_i en A. Así, tenemos

$$0 < s_o < s_1 < \dots < s_{m-1} < r,$$

y

$$p_{m-1} \subset p_{m-2} \subset \dots \subset p_1 \subset p_o,$$

donde las inclusiones pueden ser impropias.

Al igual que en el capítulo II, queremos ver en qué ocasiones podemos fijar a priori los ideales p_i, los enteros s_i y el rango m. Al igual que entonces, algunas condiciones son necesarias. Para fijarlas, damos la siguiente definición, siguiendo a Brumfiel $[Br_1]$:

12.1. <u>Definición</u>.- *Decimos que una familia de ideales primos local mente reales de* A*,*

$$p_{m-1} \subset p_{m-2} \subset \cdots \subset p_1 \subset p_o,$$

es una familia <u>*fuerte*</u> *de ideales localmente reales, si existe un orden total* β *en* K *tal que para todo* $i=0,1,\ldots,m-1$, p_i *es* $(\beta \cap A)$*-convexo.*

12.2. <u>Condiciones necesarias</u>.

(1) Los ideales $p_{m-1} \subset p_{m-2} \subset \cdots \subset p_1 \subset p_o$, <u>forman una cadena fuerte de ideales localmente reales</u>. En efecto, sea β_o un orden en Σ_o, y construyamos un orden Σ_1 en Σ_1 tal que θ_o preserva los órdenes (dicho orden existe en virtud del lema 6.4). Ahora, construimos un orden β_2 en Σ_2 tal que θ_1 preserve órdenes, etc.... De este modo obtenemos órdenes $\beta_o, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1} = \beta$, donde β es un orden en K, de forma que todos los θ_i preservan órdenes, y en consecuencia también lo hacen $\phi_o, \ldots, \phi_{m-1}$. Entonces, todos los ideales m_i son $(\beta \cap B_i)$-convexos, y en particu lar p_i es $(\beta \cap A)$-convexo para todo $i=0,1,\ldots,m-1$.

Observamos, que, por tanto, para cada i, si ponemos $\Delta_i = A_{p_i}/p_i A_{p_i}$ y $\overline{\beta}_i$ es el orden cociente en Δ_i inducido por β, entonces los ideales p_j/p_i son $(\overline{\beta}_i \cap (A/p_i))$-convexos en A/p_i, para cada $j < i$. Así, por ejemplo, los ideales $p_o = (X_1,X_2,X_3)\mathbb{R}[X_1,X_2,X_3]$ y $p_1 = (X_1^2+X_2^2+X_3^2-X_1^3)\mathbb{R}[X_1,X_2,X_3]$ no pueden ser los centros de una cadena de especializaciones de luga res ϕ_o, ϕ_1 de $\mathbb{R}(X_1,X_2,X_3)$, pues p_o/p_1 no es localmente real en $\mathbb{R}[X_1,X_2,X_3]/p_1$. ($p_1$ es el ideal de una superficie normal con un punto aislado en el origen. Por el teorema 2.11, tanto p_o como p_1 son ideales localmente reales de $\mathbb{R}[X_1,X_2,X_3]$, pero p_o/p_1 no lo es en $R[X_1,X_2,X_3]/p_1$).

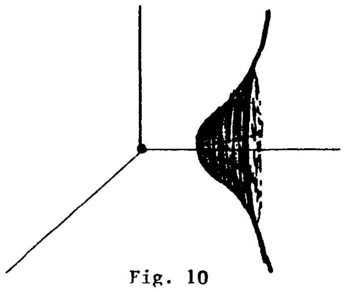


Fig. 10

(2) Los enteros s_i verifican las condiciones:

(a) $0 \leqslant s_o < s_1 < \ldots < s_{m-1} < r$

(b) $s_j \geqslant \dim p_j$

(c) $\dim \phi_j + \text{rango } (\phi_j) \leqslant r$, es decir $s_j + (m-j) \leqslant r$.

Nuestro siguiente paso será la generalización del método 9.3 para cadenas de ideales. Como allí, nuestra intención es lograr un proceso, mediante la extensión del cuerpo base, que permita la reducción al caso en el que el último ideal de la cadena es maximal.

12.3. <u>Método de extensión del cuerpo base para cadenas fuertes de ideales</u>.- Sea $p_t \subset p_{t-1} \subset \cdots \subset p_1 \subset p_o$ una cadena fuerte de ideales localmente reales de $A = R[x_1,\ldots,x_n]$. Supongamos que $\dim p_o = s$. Reordenando los generadores, podemos suponer que $\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_s\}$ es una base de transcendencia de

$$\Delta = A_{p_o}/p_oA_{p_o} = R(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_s,\bar{x}_{s+1},\ldots,\bar{x}_n)$$

sobre R, donde $\bar{x}_i = x_i+p_o$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Sea β un orden total en K tal que todos los p_i son, simultáneamente, $(\beta \cap A)$-convexos, y consideremos la clausura real, Γ, de K con respecto a β. Sea E la clausura real de $R(x_1,\dots,x_s)$ contenida en Γ. Tenemos:

$$A = R[x_1,\dots,x_n] \subset C = E[x_{s+1},\dots,x_n] \subset F = E(x_1,\dots,x_n) \subset \Gamma .$$

Denotemos por β' el orden en F inducido por el único orden en Γ. Como β' extiende a β, se sigue que para cada $i=0,1,\dots,t$, p_i es $(\beta' \cap A)$-convexo. Entonces, por 5.12, existe una cadena de anillos de valoración reales de F, que son β' convexos,

$$A \subset B_o \subset B_1 \subset \dots \subset B_t$$

y tales que B_i tiene centro p_i en A.

Puesto que B_o está centrado en p_o, tenemos

$$B_o \supset R[x_1,\dots,x_s]_{p_o} \cap R[x_1,\dots,x_s] = R(x_1,\dots,x_s)$$

por nuestra elección de $x_1,\dots,x_s$. Por ser E la clausura real de $R(x_1,\dots,x_s)$ resulta $E \subset B_o$. Finalmente, como $x_{s+1},\dots,x_n \in A$, se sigue que $B_o \supset C$. En consecuencia, para todo $i = 1,\dots,t$, $B_i \supset B_o \supset C$.

Sea q el centro de B_i en C. Obtenemos así una cadena de ideales

$$q_t \subset q_{t-1} \subset \dots \subset q_1 \subset q_o$$

tales que q_i es $(\beta' \cap C)$-convexo y $q_i \cap A = p_i$ para todo i. Por último, el mismo argumento que en 9.3 muestra que q_o tiene dimensión cero en C: para cada $j > s$, $\bar{x}_j$ es algebraico sobre $R[\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_s]$, es decir, existe un polinomio $f_i(T) \in R[x_1,\dots,x_s][T]$

tal que $f_j(x_j) \in p_o \subset q_o$. Por tanto $\bar{x}_j$ es algebraico sobre E. Resumiendo, para las futuras aplicaciones, hemos probado:

<u>Lema</u>.- *Si* $p_t \subset p_{t-1} \subset \dots \subset p_1 \subset p_o$ *es una cadena fuerte de ideales localmente reales de* A, *y* dim p_o = s, *entonces, existen un cuerpo realmente cerrado* E R, *un dominio real, finitamente generado* $C = E[x_{s+1},\dots,x_n]$ A, *y una cadena fuerte de ideales localmente reales de* C, $q_t \subset q_{t-1} \subset \dots \subset q_1 \subset q_o$, *que yace sobre la dada y tal que* dim $q_o = 0$. *Más aún, si* β *es un orden en* K *tal que para cada* i, p_i *es* $(\beta \cap A)$*-convexo, entonces existe un orden* β' *en* $E(x_{s+1},\dots,x_n)$ *que extiende a* β *y tal que* q_i *es* $(\beta' \cap C)$*-convexo,* $1 \leq i \leq n$.

Señalamos por último que las observaciones hechas en 9.3 relacionando los órdenes de K, E, F y el cuerpo residual $\Delta_o = A_{p_o}/p_oA_{p_o}$ siguen siendo válidas en la actual situación.

El siguiente resultado constituye, al menos en cuanto nuestro conocimiento alcanza, el primer resultado sobre cadenas de especialización en el cual los centros están fijados de antemano. El resultado es debido a Brumfiel, y su demostración usa técnicas diferentes de las nuestras: él busca órdenes apropiados y define a partir de ellos los lugares de Krull asociados. Nuestra demostración usa técnicas propias de valoraciones, y es un buen ejemplo del uso de los sucesivos corolarios que hemos ido añadiendo a los teoremas de existencia de lugares, y en los que se relacionan los órdenes del cuerpo residual con los órdenes cocientes $\bar{\beta}$ en Δ.

(Corolarios 9.5, 10.7 y 10.9).

Nuestra demostración es por inducción sobre el número de ideales, y está basada en los correspondientes resultado y corola rio para un único ideal, que aparecen también [Br_1], y que son un caso particular de nuestro teorema 10.8.

12.4. __Proposición__.- *Sea* p *un ideal primo de* A, *localmente real y de dimensión* s. *Entonces existe un lugar real* ϕ *de* K *sobre* R, *finito en* A, *discreto, de rango* $r-s$, *dimensión* s *y centro* p *en* A, *tal que su factorización en lugares de rango 1 produce una cadena* __*estricta*__ *de ideales de* A

$$0 \subset p_{r-1} \subset p_{r-2} \subset \cdots \subset p_{s+1} \subset p_s = p.$$

12.5. __Corolario__.- *En las condiciones de 12.4, si* β *es un orden en* K *y* p *es* $(\beta \cap A)$*-convexo, entonces* ϕ *puede ser escogido tal que su cuerpo residual* Σ *posee una orden que extiende el orden* $\overline{\beta}$ *de* $\Lambda = A_p/pA_p$ *inducido por* β.

El teorema anunciado es:

12.6. __Teorema__ [Br_1].- *Con la notación anterior, sea*

$$p_{i_t} \subset p_{i_t -1} \subset \cdots \subset p_{i_1} \subset p_{i_o}, \quad 0 \leqslant i_o < i_1 < \cdots < i_{t-1} < i_t < r$$

una cadena fuerte de ideales localmente reales. Supongamos que $i_j = \dim p_{i_j}$, $j=0,1,\ldots,t$. *Entonces, existe* *una cadena de especializaciones de lugares reales de* K, *sobre* R, $\phi_o, \phi_1, \ldots, \phi_{r-1}$,

$$K \to \Sigma_{r-1,\infty} \to \ldots \to \Sigma_{i_t,\infty} \to \Sigma_{i_t-1,\Sigma} \to \ldots \to \Sigma_{i_1,\infty} \to$$
$$\to \Sigma_{i_1-1,\infty} \to \ldots \to \Sigma_{o,\infty}$$

tal que para cada $j=0,\ldots,r-1$, *el lugar* $\phi_j : K \to \Sigma_{j,\infty}$ *es finito en* A, *tiene rango* r-j, *dimensión* j *y los lugares* ϕ_{i_j} *tienen centro* p_{i_j} *en* A.
Más aún, los centros de los ideales ϕ_j *forman una cadena fuerte y estricta de ideales localmente reales de* A,

$$p_{r-1} \subset \ldots \subset p_{i_t} \subset p_{i_t-1} \subset \ldots \subset p_{i_1} \subset p_{i_1-1} \subset \ldots \subset p_{i_o}.$$

Demostración.- La demostración es por inducción sobre el número t. Exactamente, nuestra hipótesis de inducción se compone de los asertos H_1 y H_2 siguientes:

$H_1 \equiv$ "Si A es un dominio real de funciones y $p_{i_t} \subset \ldots \subset p_{i_1}$ son ideales en las condiciones de 12.6, entonces existe una cadena de especializaciones de lugares reales $\phi_1,\ldots,\phi_{r-1}$ en las condiciones de 12.6", y

$H_2 \equiv$ "Si β es un orden en K tal que todos los p_{i_j} son $(\beta \cap A)$-convexos, entonces existe un orden $\hat{\beta}_{i_1}$ en Σ_{i_1} que extiende al orden cociente $\overline{\beta}_1$ inducido por β en $\Delta_{i_1} = A_{p_{i_1}}/p_{i_1}\Delta_{p_{i_1}}$".

Observamos primero, que en nuestras condiciones todos los cuerpos residuales Σ_j son cuerpos reales de funciones, que son algebraicos sobre Δ_j, pues para cada $j=0,\ldots,r-1$, se tiene $\mathrm{rang}(\phi_j) + \dim \phi_j = r$.

Si $t = 0$, el teorema es la proposición 12.4 y H_2 es el corolario 12.5.

Supongamos $t > 0$, y consideremos, inicialmente, que p_{i_o} es maximal. Aplicamos la hipótesis de inducción a K, A, la cadena fuerte de ideales

$$p_{i_t} \subset p_{i_t - 1} \subset \cdots \subset p_{i_1}$$

y un orden β que hace todos los p_{i_j}, incluyendo p_{i_o}, $(\beta \cap A)$-convexos (hipótesis de H_2). Entonces, existe una cadena de expecializaciones de lugares reales,

$$K \to \Sigma_{r-1,\infty} \to \cdots \to \Sigma_{i_t,\infty} \to \Sigma_{i_t - 1,\infty} \to \cdots \to \Sigma_{i_1,\infty}$$

tal que para cada j, $i_1 \leqslant j \leqslant r-1$, el lugar $\phi_j : K \to \Sigma_{j,\infty}$ tiene rango $r-j$, dimensión j y los lugares ϕ_{i_j} tienen centro p_{i_j} en A, $1 \leqslant j \leqslant t$.

Por H_2, existe un orden $\hat{\beta}_{i_1}$ en Σ_{i_1} que extiende el orden $\overline{\beta}_{i_1}$ de Δ_{i_1}. El ideal $p_{i_o}/p_{i_1} = \overline{p}_{i_o}$ es $(\overline{\beta}_{i_1} \cap (A/p_{i_1}))$-convexo, y es maximal en A/p_{i_1}, puesto que estamos suponiendo p_{i_o} maximal en A. Como $\hat{\beta}_{i_1}$ es extensión de $\overline{\beta}_{i_1}$, tenemos que $\overline{p}_{i_o}$ es $(\hat{\beta}_{i_1} \cap (A/p_{i_1}))$-convexo. Por el teorema de existencia de lugares reales (cf. 3.13), existe un anillo de valoración B de Σ_{i_1} tal que $B \supset A/p_{i_1}$ y B tiene centro $\overline{p}_{i_o}$ en A/p_{i_1}.

Por otra parte, si $\overline{x}_i = x_i + p_{i_1}$, entonces $A/p_{i_1} = R[\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n]$ y Σ_{i_1} es una extensión finita de Δ_{i_1}. Sea y un elemento primitvo de Σ_{i_1} sobre Δ_{i_1}, que suponemos entero sobre A/p_{i_1}. Pongamos

$$C = R[\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n,y].$$

C es entero sobre A/p_{i_1} y por tanto $C \subset B$. Sea q_{i_o} el centro de B en C. Se tiene $q_{i_o} \cap (A/p_{i_1}) = \overline{p}_{i_o}$, lo que implica que q_{i_o} es maximal en C.

Por 12.4 existe una cadena de especializaciones de lugares reales de Σ_{i_1} sobre R, $\psi_o,\ldots,\psi_{i_1-1}$,

$$\Sigma_{i_1} \to \Sigma_{i_1-1},\infty \to \ldots \to \Sigma_{i_o},\infty$$

tal que para cada ℓ, $i_o \leq \ell < i_1$, el lugar $\psi_\ell\colon \Sigma_{i_1} \to \Sigma_\ell,\infty$ es finito en C, tiene rango $i_1-\ell$, dimensión ℓ, ψ_o tiene centro q_{i_o} en C y sus centros forman una cadena fuerte de ideales localmente reales de C estrictamente ascendente $q_{i_1-1} \subset \ldots \subset q_{i_o}$, y de longitud máxima. Sea $\overline{p}_\ell = q_\ell \cap (A/p_{i_1})$. Tenemos $\overline{p}_{i_1} \subset \cdots \subset \overline{p}_{i_o}$, por ser C entero sobre A/p_{i_1}.

Finalmente, definamos $\phi_\ell = \psi_\ell \circ \phi_{i_1}$, $i_o \leq \ell < i_1$. De la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi_{i_1}|A"] \arrow[dr, "\pi"'] & B \arrow[r, "\psi_\ell|B"] & \Sigma_\ell \\
& A/p_{i_1} \arrow[u, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

donde π es el epimorfismo canónico y θ es la inclusión $\Delta_{i_1} \to \Sigma_{i_1}$, se desprende que los lugares ϕ_ℓ tienen centro $p_\ell = \pi^{-1}(\bar{p}_\ell)$ en A, y por tanto forman una cadena estricta, y el centro de ϕ_{i_o} es p_{i_o}. Las aserciones sobre los rangos y dimensiones son inmediatas, lo que prueba H_1. Por otra parte, H_2, en este caso, es trivial, pues como estamos suponiendo p_{i_o} maximal, resulta $\Delta_{i_o} = R$.

Para completar el teorema, falta considerar el caso $\dim p_{i_o} = i_o > 0$. En esta situación, por el método 12.3 extendemos el cuerpo base y nos reducimos al caso anterior. La única cosa no trivial a comprobar es que si

$$q_{r-1} \subset q_{r-2} \subset \dots \subset q_{i_o}, \qquad q_{i_o} \text{ maximal},$$

es una cadena estricta de ideales primos en $C = E[x_{i_o+1},\dots,x_n]$, sus restricciones $p_i = q_i \cap A$ forman una cadena estricta. Pero del diagrama siguiente, donde los enteros representan los grados de transcendencia, se deduce que $\dim p_i = \dim q_i$, y la demostración queda completa.

$$\begin{tikzcd}
 & E[x_{i_o+1},\dots,x_n]/q_i & \\
E \arrow[ur, "i-i_o"] & & R[x_1,\dots,x_n]/p_i = Ap_i \arrow[ul, "0"'] \\
 & R[x_1,\dots,x_{i_o}] \arrow[ul, "0"] \arrow[ur, "i-i_o"'] & \\
 & R \arrow[u, "i_o"] &
\end{tikzcd}$$

El teorema 12.6 muestra que las cadenas fuertes de ideales se comportan bien con respecto a la dimensión de Krull. En efecto, como consecuencia inmediata tenemos el siguiente corolario, que usaremos en lo sucesivo:

12.7. Corolario.- *Sea* p *y* q *dos ideales primos de* A *tales que* $p \subset q$ *y forman una cadena fuerte (i.e. son simultáneamente convexos para un cierto orden* β *de* K*). Supongamos que* $s = \dim p$ *y* $t = \dim q$*. Entonces, existe una cadena fuerte de ideales de* A*, de longitud máxima que conecta* p *y* q*:*

$$p = p_o \subset p_1 \subset \cdots \subset p_{s-t-1} \subset p_{s-t} = q.$$

12.8. Observación.- Dubois y Efroymson [D-E] han demostrado que si $p \subset q$ son dos ideales primos reales de A, entonces p y q pueden conectarse por una cadena de ideales primos reales de longitud máxima. El corolario 12.7 muestra el análogo para cadenas fuertes. Queda planteado el problema análogo para ideales localmente reales: si $p \subset q$ son dos ideales localmente reales, ¿pueden conectarse por una cadena de longitud máxima de ideales localmente reales?. Aunque 12.7 parece más fuerte, este último problema es más complicado de demostrar por una simple razón: tanto el caso de ideales como en el de cadenas fuertes, el ideal cociente q/p es real (resp. convexo respecto al orden cociente), y se puede trabajar en el cociente. Sin embargo, si p y q son localmente reales, q/p puede no ser localmente real como observamos en §5. Esto obliga a trabajar directamente. Creemos, no obstante, que el resultado es cierto a la vista de la caracterización 2.11. La clave estaría en cortar por secciones algebraicas con suficientes puntos centrales de la variedad inicial. De cualquier forma, este resultado no es necesario para lo que sigue.

§13. Primera generalización.

Pretendemos, aquí, generalizar el teorema 12.6 en dos aspectos: los centros y las dimensiones. Obsérvese, que en 12.6 los centros de los lugares son distintos, forman una cadena estricta. Sin embargo esto no tiene por qué ser así como muestra el siguiente ejemplo:

Consideremos en $R(X,Y)$ la cadena de especialización de lugares reales ϕ_o, ϕ_1, $R(X,Y) = R(X,T) \xrightarrow{\phi_1} R(T) \xrightarrow{\phi_o} R$, $T = \frac{Y}{X}$, $\phi_o = \theta_o \circ \phi_1$ donde:

(a) ϕ_1 viene definido por el anillo de valoración $R(T)[X]_{(X)R(T)[X]}$, es decir el lugar de Krull definido por el cuerpo $R(T)$ y el orden en $R(X,Y)$ en el que X y T son positivos, T es infinitesimal con respecto a R y X es infinitesimal con respecto a $R(T)$, y

(b) θ_o viene definido por el anillo de valoración $R[T]_{(T)}$.

Sea $A = R[X,Y]$. Entonces $p_o = p_1 = (X,Y)A$.

Por otra parte, en 12.6 las dimensiones verificaban que

$$\text{rango } (\phi) + \dim \phi = r$$

de modo que todos los cuerpos residuales eran cuerpos de funciones.

Una generalización que rompa esta igualdad tiene el inconveniente fundamental de que los cuerpos residuales no son, en general, cuerpos de funciones, y carecemos de todos los resultados del capítulo anterior, quedándonos reducidos a los teoremas de existencia y extensión de lugares del §6, en los que no existe ningún tipo de control sobre el rango o dimensión.

Como muestra de las dificultades que pueden surgir, y como motivación del próximo lema, consideremos el siguiente ejemplo:

13.1. Ejemplo.- Es bien conocido, en la teoría clásica de lugares el siguiente resultado (cf. [Za_3]): "Sea V es una variedad algebraica y sean $W_1 \subset W_2$ dos subvariedades de V. Sea ϕ_2 un lugar de $R(V)$ con centro W_2 en V. Entonces existe un lugar ϕ_1 de $R(V)$ que es compuesto de ϕ_2 y tiene centro W_1 en V." Pues bien, el análogo real es falso:

Sea $V = \mathbb{R}^3$, y sean W_1 y W_2 correspondientes a los ideales $p_1 = (X+1,Y,Z)$ y $p_2 = (Y,Z)$. Los ideales $p_2 \subset p_1$ forman una cadena fuerte de ideales.

Sea ϕ_2 el lugar de $\mathbb{R}(X,Y,Z)$ definido de la siguiente forma: Consideramos $\mathbb{R}(X)$ como cuerpo base y sumergimos $\mathbb{R}(X)(Y,Z)$ en $\overline{\mathbb{R}(X)}(Y,Z)$, donde $\overline{\mathbb{R}(X)}$ es la clausura real de $\mathbb{R}(X)$ respecto del orden que hace $X > 0$ e infinitesimal respecto de $\mathbb{R}$. Sea ψ el lugar de $\overline{\mathbb{R}(X)}(Y,Z)$ en $\overline{\mathbb{R}(X)}$ definido evaluando en la rama:

$$Z = Y + \sqrt{X}\, Y^2 + \ldots + \sqrt[n]{X}\, Y^n + \ldots$$

Definimos $\phi_2 = \psi|_{\mathbb{R}(X,Y,Z)}$. Entonces, (cf. [Z-S] pág. 105) el cuerpo residual de ϕ_2 es $\mathbb{R}(\sqrt{X}, \sqrt[3]{X}, \sqrt[4]{X}, \ldots)$ y ϕ_2 es un lugar real con centro p_2 en $\mathbb{R}[X,Y,Z]$.

Sin embargo, no existe ningún lugar real que sea compuesto de ϕ_2 y tenga centro p_1 en $\mathbb{R}[X,Y,Z]$. En efecto, si lo hubiera, existiría un lugar real, θ_1, del cuerpo residual $\mathbb{R}(\sqrt{X}, \sqrt[3]{X}, \sqrt[4]{X}, \ldots)$ cuyo centro en $\mathbb{R}[X,Y,Z]/(Y,Z) = \mathbb{R}[X]$ sería el ideal $\overline{p}_1 = (X+1,Y,Z)/(Y,Z) = (X+1)\mathbb{R}[X]$. Ahora bien, entonces $(X+1)$ tendría que ser localmente real en $\mathbb{R}[X]$ <u>con respecto a</u> $\mathbb{R}(\sqrt{X}, \sqrt[3]{X}, \sqrt[4]{X}, \ldots)$. Pero

$$X+1 = (\sqrt{X})^2 + 1 \in (X+1)\, \mathbb{R}[X]$$

y $1 \notin (X+1)\mathbb{R}[X]$, lo que implica que $(X+1)$ no es localmente real con respecto a $\mathbb{R}(\sqrt{X}, \sqrt[3]{X}, \ldots)$ (dicho de otro modo $\mathbb{R}(\sqrt{X}, \sqrt[3]{X}, \sqrt[4]{X}, \ldots)$ debería que tener un orden en el que $(X+1)\mathbb{R}[X]$ fuera convexo, pero entonces $X = -1$, i.e. X debería ser negativo en dicho orden, absurdo pues X es un cuadrado.

No obstante, demostraremos más adelante que efectivamente existe una cadena de especializaciones de lugares reales ψ_1, ψ_2 de $\mathbb{R}(X,Y,Z)$, cuyos centros en $\mathbb{R}[X,Y,Z]$ son $(X+1,Y,Z)$ e (Y,Z), pero, evidentemente, $\psi_1 \neq \phi_1$. Es decir, la dificultad aparece cuando el primer lugar viene fijado de antemano, no cuando ambos lugares pueden ser construidos simultáneamente. Más precisamente, hemos de asegurar que los cuerpos residuales que obtenemos tienen órdenes compatibles con los ideales cocientes, para que permitan seguir adelante en las composiciones sucesivas. Esto es lo que aseguran los corolarios 9.5, 10.7 y 10.9 que hemos establecido después de cada teorema de existencia de lugares.

El lema 13.6 puntualizará mucho más esta situación en cuanto a qué órdenes son posibles en el cuerpo residual del teorema 10.5. Antes necesitamos introducir algunas nociones que aparecen originalmente en [Du_2].

13.2. <u>Definición</u> [Du_2].- *Sea* L *una extensión ordenada de* K *y sean* $x, y \in L$. *Escribiremos* $x \lhd y$ *si* x *es infinitesimal (en el orden de* L*) con respecto a* K(y).

13.3. <u>Definición</u> [Du_2].- *Llamamos* <u>*rango de Gleyzal*</u> *de* L *sobre* K*, y notamos* rang Gl(L|K), *al supremo de las longitudes de cadenas de la forma* $0 < x_s \lhd \dots \lhd x_1 \in J$, *donde la cadena mostrada tiene longitud* s, *y* J *es el conjunto de elementos de* L *infinitesimales con respecto a* K.

Los dos siguientes resultados aparecen también en [Du_2].

13.4. <u>Proposición</u>.- *Sea* L *una extensión no arquimediana de* K*, y supongamos* $0 < x_t \lhd \dots \lhd x_1 \in J$. *Entonces*

(a) $\{x_1, \dots, x_t\}$ *son algebraicamente independientes* sobre K.

(b) rang Gl(L|K) $\leqslant$ grad trans [L : K]

(c) si L' *es una extensión ordenada de* L*, entonces*

rang Gl(L'| L) + rang Gl(L|K) $\leqslant$ rang(L'| K) *(d) si* L' *es algebraico sobre* L *entonces*

$$\text{rang } Gl(L'|K) = \text{rang } Gl(L|K).$$

En particular, si L *es algebraico sobre* K, *se tiene* rang $Gl(L|K) = 0$.

13.5. Proposición.- *Sea* $\phi : L \to \Sigma,\infty$ *un lugar real de* L *sobre* K *que preserva el orden. Entonces,*

$$\text{rango } (\phi) + \text{rang } Gl(\Sigma|K) = \text{rang } Gl(L|K).$$

Estamos ya en condiciones de enunciar nuestro resultado. Recordemos el teorema 10.5: Sean $K = R(x_1,\ldots,x_n)$, $A = R[x_1,\ldots,x_n]$ y p un ideal primo de A, localmente real y de dimensión t. Para cada s, $t \leq s \leq r-1$, existe un lugar ϕ de K sobre R, finito en A, discreto, de rango 1, dimensión s y centro p en A.

13.6. Lema.- *Con la notación del teorema 10.5 (ver párrafo anterior), si* β *es un orden (arbitrario) de* K *y* p *es* $(\beta \cap A)$*-convexo, y si* $\overline{\beta}$ *representa el orden inducido por* β *en* $\Delta = A_p/pA_p$, *entonces* ϕ *puede ser escogido tal que su cuerpo residual* Σ *tiene un orden* $\hat{\beta}$ *que extiende* $\overline{\beta}$ *(via la inclusión* $\Delta \xrightarrow{i} \Sigma$*) y* $(\Sigma,\hat{\beta})$ *tiene rango de Gleyzal* s-dim p *sobre* Δ.

Demostración.- Si $\dim p = \dim \phi$, entonces Σ es algebraico sobre Δ, por lo que, en virtud de 13.4(d), el lema se reduce a probar que ϕ puede ser tomado tal que en Σ existe un orden $\hat{\beta}$, extensión de $\overline{\beta}$. Pero esto es precisamente el corolario 10.7.

Así pues, supongamos $s > \dim p$. Consideramos primero el caso $\dim p = 0$. Entonces, el lugar ϕ está construido según la proposición 10.4. En este caso, $\Delta = R$ y por tanto todo orden en Σ extiende $\bar{\beta}$. Todo se reduce a probar que ϕ puede ser tomado tal que Σ admite un orden con rango de Gleyzal s (ver observación 13.7(b)), y obsérvese que el orden β no juega, por tanto, ningún papel en este caso. Para la demostración, repasamos brevemente las etapas de construcción del lugar ϕ según 10.4.

Partimos de p y A. Después de algunas operaciones obtenemos un dominio finitamente generado C cuyo cuerpo de fracciones es K, y un ideal primo q de A, principal y localmente real, tales que

$$A \subset C_q \qquad \text{y} \qquad qC_q \cap A = p.$$

A continuación considerábamos un ideal primo de C $p_s \supset q$, localmente real y de dimensión s, y usábamos este ideal para la construcción de un lugar real de K con centro en p_s en C y dimensión s. En esta elección de p_s es donde actuamos como sigue:

Consideremos una cadena fuerte de ideales primos de C empezando en q (posible por 10.3):

$$q = p_{r-1} \subset p_{r-2} \subset \cdots \subset p_s \subset \cdots \subset p_1 \subset p_o,$$

donde p_i tiene dimensión i, $0 \leqslant i \leqslant r-1$.

Sea α un orden en K haciendo todos los p_i $(\alpha \cap C)$-convexos, y consideremos elementos $\xi_i \in B$ $0 \leqslant i \leqslant r-1$ tales que

$\xi_i \in p_i \setminus p_{i+1}$. En el orden α estos elementos verifican

$$\xi_{r-1} \lhd \xi_{r-2} \lhd \cdots \lhd \xi_o \lhd R.$$

En efecto, en [Du$_2$] se demuestra que $x \lhd y$ es equivalente a $x < y^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, si fuera $\xi_{i+1} \ntriangleleft \xi_i$ tendríamos

$$\xi_i^n \leqslant \xi_{i+1} \qquad \text{para algún } n \in \mathbb{N},$$

y como p_{i+1} es $\alpha \cap A$ convexo, sería $\xi_i^n \in p_{i+1}$, luego $\xi_i \in p_{i+1}$ por ser p_{i+1} primo, contradicción. Así pues, tenemos, rang $Gl((K,\alpha) : R) = r$, y por 13.4 (a) $\{\xi_o,\ldots,\xi_{r-1}\}$ es una base de transcendencia de K sobre R. Consideremos $C = R[\xi_o,\ldots,\xi_{r-1},\xi_r,\ldots,\xi_m]$. Vamos a construir, usando 9.4 un lugar real de K sobre R, finito en C, discreto, de rango 1, dimensión s y centrado en p_s. Sabemos que un lugar de estas características tiene cuerpo residual Σ, una extensión algebraica de $R(\overline{\xi}_o,\ldots,\overline{\xi}_{s-1})$, donde $\overline{\xi}_i = \xi_i + p_s$, puesto que $\{\overline{\xi}_o,\ldots,\overline{\xi}_{s-1}\}$ es una base de transcendecia de $\Delta_s = C_{p_s}/p_s C_{p_s}$ sobre R (cf. 9.4.).

Además, por el corolario 9.5 aplicado al orden α en K, existe un orden $\hat{\alpha}$ en Σ tal que $\hat{\alpha}$ es una extensión del orden $\overline{\alpha}$ en Δ_s inducido por α. Afirmamos que $\hat{\alpha}$ es el orden buscado en Σ. En efecto, Σ es algebraico sobre $R(\overline{\xi}_o,\ldots,\overline{\xi}_{s-1})$, luego, por 13.4(d),

$$\text{rang}Gl((\Sigma,\hat{\alpha})| R) = \text{rang } Gl([R(\overline{\xi}_o,\ldots,\overline{\xi}_{s-1}), \hat{\alpha} \cap$$
$$\cap R(\overline{\xi}_o,\ldots,\overline{\xi}_{s-1})] | R) = \text{rang } Gl((R(\overline{\xi}_o,\ldots,\overline{\xi}_{s-1}), \overline{\alpha} \cap$$
$$\cap R(\overline{\xi}_o,\ldots,\overline{\xi}_{s-1})) | R)$$

Pero,

$$(R(\overline{\xi}_o,\ldots,\overline{\xi}_{s-1}),\overline{\alpha}\cap R(\overline{\xi}_o,\ldots,\overline{\xi}_{s-1})) \approx (R(\xi_o,\ldots,\xi_{s-1}),\alpha\cap$$

$$\cap R(\xi_o,\ldots,\xi_{s-1}))$$

y en éste

$$\xi_{s-1}\lhd \xi_{s-2}\lhd \cdots \lhd \xi_o,$$

luego, en virtud de 13.4(b):

$$\text{rang } Gl(((R(\overline{\xi}_o,\ldots,\overline{\xi}_{s-1}),\ \overline{\alpha}\cap R(\overline{\xi}_o,\ldots,\overline{\xi}_{s-1})|R) = s$$

lo que concluye el caso $\dim p = 0$.

Pasemos al caso general, $\dim p = t > 0$. Sea β un orden cualquiera en K tal que p es $(\beta\cap A)$-convexo. Usamos el método 9.3 con este orden, y obtenemos

$$A\subset E[x_{t+1},\ldots,x_n] = C\subset E(x_{t+1},\ldots,x_n),$$

donde E es la clausura real de $R(x_1,\ldots,x_t)$ con respecto a $\beta\cap R(x_1,\ldots,x_t)$, y en $E[x_{t+1},\ldots,x_n]$ tenemos un ideal localmente real q, que yace sobre p y de dimensión cero. El punto clave es: $\Delta = A_p/pA_p$ está contenido en E, y además E es la clausura real de $(\Delta,\overline{\beta})$ via la inclusión canónica $\Delta \xrightarrow{i} E$ del diagrama (ver 9.3):

$$\begin{array}{ccc} C_q & \xrightarrow{\pi'} & C_q/qC_q = E \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ A_p & \xrightarrow{\pi} & A_p/pA_p = \Delta \end{array}$$

Por la parte ya demostrada de este lema, existe ϕ', lugar real de F sobre E, finito en C, discreto, de rango 1, dimensión s-t, centro q en C y su cuerpo residual Σ tiene un orden $\hat{\alpha}$ de modo que $(\Sigma,\hat{\alpha})$ tiene rango de Gleyzal s-t sobre E. Sea ϕ la restricción de ϕ' a K. Tenemos el siguiente diagrama commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[rr, "\phi'"] & & \Sigma' \\
C_q \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "\pi'"] & & C_q/qC_q \arrow[ur] & \\
 & K \arrow[uu, dashed] \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & \Sigma \arrow[uu] \\
A_p \arrow[uu] \arrow[ur, dashed] \arrow[rr, "\pi"] & & A_p/pA_p \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

del que nos interesa especialmente la cara lateral derecha. Como en $E = C_q/qC_q$ hay un orden único, que extiende el orden $\overline{\beta}$ de $\Delta = A_p/pA_p$, y todo orden de Σ' extiende el orden de E, resulta que cualquier orden en Σ, restricción de un orden de Σ' extiende al orden $\overline{\beta}$ en Δ. En particular, el orden $\hat{\beta} = \hat{\alpha} \cap \Sigma'$ extiende el orden $\overline{\beta}$ y afirmamos que el rango de Gleyzal de $(\Sigma,\hat{\beta})$ sobre $(\Delta,\overline{\beta})$ es s-t. En efecto, como Σ' es algebraico sobre Σ, por 13.4(d) tenemos:

$$\text{rang Gl}(\Sigma|\Delta) = \text{rang Gl}(\Sigma'|\Delta) = \text{rang Gl}(\Sigma'|E) = s\text{-}t,$$

y el lema queda demostrado.

13.7. Lema.- *El lema 13.6 también es cierto en las condiciones del teorema 10.8.*

Demostración.- Es suficiente probar el caso $\dim p = 0$, pues el otro se sigue de éste como en 13.6. Pero, la demostración de 10.8 es por inducción sobre el rango m del lugar ϕ. Si $m=1$ el resultado es 13.6. Si $m > 1$, entonces, consideramos $\phi_1 : K \to \Sigma_1$, lugar real de rango 1, dimensión $r-1$ y centro p en A. Sea q un ideal maximal en $C = R[y_1,\dots,y_t]$, donde $\Sigma_1 = R(y_1,\dots,y_t)$. Por la hipótesis de inducción, existe ψ, lugar real de dimensión s, rango $m-1$, centrado en q en C y tal que su cuerpo residual Σ tiene rango de Gleyzal s sobre $C_q / qC_q = R = \Delta$ la composición $\phi = \psi \circ \phi_1$ es el lugar buscado.

13.8. Observaciones.- (a) En particular, si $\dim \phi > \dim p$, el orden $\hat{\beta}$ del cuerpo residual construido en 13.6 y 13.7 es una extensión no arquimediana de $(\Delta,\bar{\beta})$.

(b) En 13.6 y 13.7 se trata de buscar un orden en un cuerpo Σ de grado de transcendencia s sobre R, de forma que el rango de Gleyzal sea precisamente s. Si el cuerpo Σ es finitamente generado, esto puede hacerse directamente como sigue. Sea $R[T_1,\dots,T_s]$ un anillo de polinomios en s indeterminadas. Consideramos en $R(T_1,\dots,T_s)$ el orden definido por $0 < T_1 \lhd T_2 \lhd \dots \lhd T_s \lhd R$, y sea F la clausura real de $R(T_1,\dots,T_s)$ con respecto a este orden. F tiene rango de Gleyzal s. Por el teorema de inmersión de Lang, existe un monomorfismo $\Sigma \to F$. Es claro que el orden inducido por F en Σ tiene rango de Gleyzal s sobre s.

Después del engorroso lema anterior, damos la primera generalización del teorema 12.6: aquí los centros pueden ser arbitrarios, aunque los enteros s_i que dan las dimensiones están sujetos a condiciones restrictivas; todos excepto s_o debe ir disminuyendo unidad por unidad y verificando (excepto s_o)

$$\text{rango } \phi + \dim \phi = r.$$

13.9. <u>Teorema</u>.- *Sea* $p_{m-1} \subset \dots \subset p_1 \subset p_o$ *una cadena fuerte de ideales de* A, *<u>donde las inclusiones pueden ser igualdades</u>. Sean* $0 \leqslant s_o < s_1 < \dots < s_{m-1} < r$ *enteros tales que* $s_j = r-m+j$ $\quad 1 \leqslant j \leqslant m$ *(*s_o *puede ser arbitrario), y tales que* $\dim p_j \leqslant s_j$, $0 \leqslant j < m$. *Entonces existe una cadena de especializaciones de lugares reales de* K *sobre* R, $\phi_o, \phi_1, \dots, \phi_{m-1}$,

$$K \to \Sigma_{m-1},\infty \to \dots \to \Sigma_1,\infty \to \Sigma_o,\infty$$

tales que para cada $j=0,\dots,m-1$, *el lugar* $\phi_j : K \to \Sigma_j,\infty$ *es finito en* A, *tiene rango* $m-j$, *dimensión* s_j *y centro* p_j *en* A.

<u>Demostración</u>.- Por inducción sobre m. Si $m=1$, el resultado es el teorema 10.8. Supongamos $m > 1$. Construimos un lugar real de K sobre R, de dimensión r-1, rango 1 y con centro p_{m-1} en A (de nuevo usando 10.8). Sea

$$\phi_{m-1} : K \to \Sigma_{m-1},\infty.$$

Σ_{m-1} es un cuerpo de funciones de grado de transcendencia r-1. Más aún, sabemos por el lema 13.6 (véase observación 13.8(a)) que podemos suponer ϕ_{m-1} tal que en Σ_{m-1} existe un orden $\hat{\beta}_{m-1}$ que extiende el orden cociente $\overline{\beta}_{m-1}$ en $\Delta_{m-1} = A_{p_{m-1}}/p_{m-1}A_{p_{m-1}}$ inducido por un orden β en K tal que todos los p_i son $(\beta \cap A)$-convexos. Más todavía, si $\dim \phi_{m-1} = r-1 > \dim p_{m-1} = t$ entonces $(\Sigma_{m-1}, \hat{\beta}_{m-1})$ tiene rango de Gleyzal $r-1-t$ sobre $(\Delta_{m-1}, \overline{\beta}_{m-1})$.

Usando 12.6, refinamos la cadena fuerte $p_{m-1} \subset p_{m-2} \subset \cdots \subset$ $\cdots \subset p_1 \subset p_o$ a una cadena fuerte de longitud máxima sobre p_{m-1}

$$p_{m-1} = p_t^* \subsetneqq \cdots \subsetneqq p_1^* \subsetneqq p_u^* = p_o \subsetneqq p_{u-1}^* \subsetneqq \cdots \subsetneqq p_o^*$$

donde $t = \dim p_{m-1}$ y $\dim p_k^* = k$, $0 \leqslant k \leqslant t$.

Para cada j tenemos $p_j = p_k^*$ para algún $k \in \{0,\ldots,t\}$. Tomamos como orden β para la construcción de los órdenes $\hat{\beta}_{m-1}$, y $\overline{\beta}_{n-1}$ mencionados arriba, un orden que haga todos los p_k^* (en particular todos los p_j) $(\beta \cap A)$-convexos. Sean

$$A_{m-1} = A/p_{m-1}, \quad \overline{p}_j = p_j/p_{m-1}, \quad y \quad \overline{p}_k^* = p_k^*/p_{m-1}.$$

Por último, sea $A_{m-1}^{\sim}$ la clausura semientera de A_{m-1} en Σ_{m-1} (cf. §4). Por 4.10, Σ_{m-1} es el cuerpo de fracciones de $A_{m-1}^{\sim}$. Distinguimos dos casos:

(I) $\dim \phi_{m-1} = r-1 > \dim p_{m-1} = t$ (obsérvese que este caso se produce, por ejemplo, siempre que $p_{m-2} = p_{m-1}$, pues,

$$t = \dim p_{m-1} = \text{gr. trans}\left[\Delta_{m-1} : R\right] = \text{gr. trans}\left[\Delta_{m-2} : R\right] \leqslant$$
$$\leqslant s_{m-2} < s_{m-1} = r - 1).$$

Consideremos el lugar de Krull, h, definido por Δ_{m-1} y $\hat{\beta}_{m-1}$ en Σ_{m-1}. Dicho lugar tiene rango $r-1-t$, por ser $r-1-t$ el rango de Gleyzal de Σ_{m-1} sobre Δ_{m-1}. Sean $\xi_1,\ldots,\xi_p \in A_{m-1}^{\sim}$ tales que

$$\Sigma_{m-1} = R(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n,\xi_1,\dots,\xi_p), \qquad \overline{x}_i = x_i + p_{m-1},$$

y de forma que en $C = R[\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n,\xi_1,\dots,\xi_p]$ el lugar h produce una cadena estricta de $r-1-t$ ideales $(\hat{\beta}_{m-1}\cap C)$-convexos (véase observación 13.10)

$$(*) \qquad q^*_{r-2} \subsetneqq q^*_{r-3} \subsetneqq \cdots \subsetneqq q^*_t$$

(i.e. los ideales q^*_i surgen como centros en C de la factorización de h en lugares de rango 1. En particular q^*_t es el centro de h). Apliquemos el teorema de ascenso (cf. 5.13) al ideal q^*_t, la cadena

$$\overline{p}^*_t \subsetneqq \overline{p}^*_{t-1} \subsetneqq \cdots \subsetneqq \overline{p}^*_o,$$

y los anillos A_{m-1} y C en $\dot{\Sigma}_{m-1}$ (obsérvese que $q^*_t \cap A_{m-1} = (0) = \overline{p}^*_t$ y que C es semientero sobre A pues $C \subset A^{\sim}_{m-1}$).

Obtenemos así una cadena de ideales $(\hat{\beta}_{m-1}\cap C)$-convexos

$$q^*_t \subsetneqq q^*_{t-1} \subsetneqq \cdots \subsetneqq q^*_o$$

donde $q^*_k \cap A_{m-1} = \overline{p}^*_k$ $\quad 0 \leqslant k \leqslant t$, y que junto con (*) produce una cadena de ideales $(\hat{\beta}_{m-1}\cap C)$-convexos

$$q^*_{r-2} \subsetneqq q^*_{r-3} \subsetneqq \cdots \subsetneqq q^*_t \subsetneqq q^*_{t-1} \subsetneqq \cdots \subsetneqq q^*_u \subsetneqq q^*_{u-1} \subsetneqq \cdots \subsetneqq q^*_o$$

Como C tiene dimensión de Krull $r-1$ resulta que, para cada $k=0,\dots,r-2$, $\dim q^*_k = k$.

Si $\overline{p}_j = \overline{p}^*_k$, llamemos $q_j = q^*_k$, de forma que tenemos una cadena fuerte de ideales en C, $q_{m-2} \subset q_{m-3} \subset \dots \subset q_o$, que yace sobre la cadena $\overline{p}_{m-2} \subset \overline{p}_{m-3} \subset \dots \subset \overline{p}_o$ en A_{m-1}, si $\overline{p}_j = \overline{p}^*_k$.

Además,

$$\dim q_j = \dim q_k^* = \dim p_k^* = k = \dim p_j \leqslant s_j, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m-2.$$

Aplicamos, finalmente, la hipótesis de inducción al cuerpo Σ_{m-1}, el anillo C, los ideales

$$q_{m-2} \subset q_{m-3} \subset \cdots \subset q_o$$

y los enteros $m-1$ y

$$s_o < s_1 < \ldots < s_{m-2}.$$

Obtenemos así, una cadena de especializaciones de lugares reales de Σ_{m-1} sobre R, $\psi_o, \psi_1, \ldots, \psi_{m-2}$,

$$\Sigma_{m-1} \to \Sigma_{m-2},\infty \to \ldots \to \Sigma_1,\infty \to \Sigma_o,\infty$$

tal que para cada $j=0,\ldots,m-2$, el lugar $\psi_j : \Sigma_{m-1} \to \Sigma_j,\infty$ es finito en C, tiene rango $m-j$, dimensión s_j y centro q_j en C. De la commutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi_{m-1}|_A"] \arrow[dr, "\pi"'] & B \arrow[r, "\psi_{m-2}"] & \cdots \\
 & A/p_{m-1} \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

donde π es el epimorfismo canónico, se sigue que si $\phi_j = \psi_j \circ \phi_{m-1}$, $0 \leqslant j \leqslant m-2$ la cadena de especializaciones $\phi_o, \phi_1, \ldots, \phi_{m-1}$ cumple las condiciones del enunciado.

(II) $\dim \phi_{m-1} = r-1 = \dim p_{m-1} = t$. En este caso Σ_{m-1} es una extensión algebraica de $\Delta_{m-1} = R(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$, $\overline{x}_i = x_i + p_{m-1}$. Sea $y \in \Sigma_{m-1}$ un elemento primitivo de Σ_{m-1} sobre Δ_{m-1} que suponemos entero sobre A_{m-1}, y pongamos

$$C = [\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n,y],$$

C es entero sobre A_{m-1}, y en particular es semientero sobre A_{m-1}. Por el teorema del ascenso, la cadena fuerte de ideales primos de A_{m-1}

$$\bar{p}_{m-2} \subset \bar{p}_{m-3} \subset \cdots \subset \bar{p}_1 \subset \bar{p}_o$$

se eleva a una cadena fuerte de ideales primos de C

$$q_{m-2} \subset q_{m-3} \subset \cdots \subset q_1 \subset q_o.$$

Y puesto que C es entero sobre A_{m-1}, tenemos, para cada $j=0,\ldots,m-2$,

$$\dim q_j = \dim \bar{p}_j = \dim p_j \leqslant s_j.$$

La demostración acaba ahora como en el caso I: aplicamos la hipótesis de inducción a Σ_{m-1}, C, los ideales

$$q_{m-2} \subset q_{m-3} \subset \cdots \subset q_1 \subset q_o$$

y los enteros $m-1$ y $s_o < s_1 < \ldots < s_{m-2}$, y obtenemos una cadena de especializaciones de lugares reales de Σ_{m-1} sobre R, $\psi_o,\psi_1,\ldots,\psi_{m-2}$. La cadena de especializaciones de lugares reales de K sobre R, $\phi_o,\phi_1,\ldots,\phi_{m-1}$, donde

$$\phi_j = \psi_j \circ \phi_{m-1}, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m-2$$

cumple las condiciones del enunciado.

13.10. <u>Observación</u>.- En el curso de la demostración, hemos afirmado, que existen $\xi_1,\ldots,\xi_p \in \tilde{A}_{m-1}$ tales que

$$\Sigma_{m-1} = R(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n,\xi_1,\ldots,\xi_p)$$

y el lugar h, de rango w produce una cadena estricta de w ideales en

$$C = R[\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n,\xi_1,\dots,\xi_p].$$

En efecto, por ser Σ_{m-1} el cuerpo de fracciones de $A^{\sim}_{m-1}$ (cf. 4.10) y por ser Σ_{m-1} finitamente generado sobre R, existen $\xi_1,\dots,\xi_q$ en $A^{\sim}_{m-1}$ tales que

$$\Sigma_{m-1} = R(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n,\xi_1,\dots,\xi_q).$$

Por otra parte, como el rango de h es w, el anillo de valoración B_o de H tiene dimensión de Krull w, y tenemos una cadena de ideales primos de longitud w en B_o:

$$m_{w-1} \subsetneq m_{w-2} \subsetneq \dots \subsetneq m_1 \subsetneq m_o$$

donde m_o es el ideal maximal de B_o. Para cada $k=0,\dots,w-1$, el ideal m_k es el ideal maximal del anillo de valoración real $B_k = (B_o)_{m_k}$. Tenemos

$$A^{\sim}_{m-1} \subset B_o \subset B_1 \subset \dots \subset B_{w-1}$$

Afirmamos que las restricciones de los ideales m_k a $A^{\sim}_{m-1}$ son distintas, es decir, si $p_k = m_k \cap A^{\sim}_{m-1}$ entonces

$$p_{w-1} \subsetneq p_{w-2} \subsetneq \dots \subsetneq p_1 \subsetneq p_o \subsetneq A^{\sim}_{m-1}.$$

En efecto, en virtud de 4.8, $(A^{\sim}_{m-1})_{p_k}$ es un anillo de valoración real, y por consiguiente $(A^{\sim}_{m-1})_{p_k} = B_k$, pues B_k domina sobre $(A^{\sim}_{m-1})_{p_k}$. Como los anillos B_k son diferentes, también lo son los ideales p_k. Tomemos $\xi_{q+k+1} \in A^{\sim}_{m-1}$, $\xi_{q+k+1} \in p_k \setminus p_{k+1}$, $k=0,\dots,w-1$. Entonces, basta tomar

$$C = R[\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n,\xi_1,\dots,\xi_q,\xi_{q+1},\dots,\xi_{q+w}].$$

13.11. Corolario.- *Con la notación del teorema 13.9, si* $m=r$, *para cualquier cadena de* r *ideales primos de* A *y cualquier sucesión de enteros* $s_o,\dots,s_r$ *verificando las condiciones 12.2, existe una cadena de especializaciones de lugares reales de* K *sobre* R, $\phi_o,\phi_1,\dots,\phi_{r-1}$, *tales que* $\dim \phi_k = s_k$, $\operatorname{rang} \phi_k = r-k$ *y* ϕ *está centrado en* p_k.

Demostración.- Si $m=r$, las condiciones 12.2 implican $s_k = k$, para todo $k=0,\dots,r-1$. Por tanto estamos en las condiciones de 13.9, y el corolario se sigue del teorema. Obsérvese que el corolario puede enunciarse de la siguiente manera:

13.11. (bis) Corolario.- *Sea* $p_{r-1} \subset p_{r-2} \subset \dots \subset p_o$ *una cadena fuerte de ideales de* A, *tales que, para cada* $k=0,\dots,r-1$, $\dim p_k \leq k$. *Entonces, existe una cadena de especializaciones de lugares reales de* K *sobre* R, $\phi_o,\phi_1,\dots,\phi_{r-1}$ *tales que para cada* $k=0,\dots,r-1$, rango $(\phi_k) = r-k$, $\dim \phi_k = k$ *y* ϕ_k *tiene centro* p_k *en* A.

14. Segunda generalización.

Brumfiel estudia, en su libro [Br$_1$], el problema de cuando dado un orden total $\bar{\beta}$ en A/p, donde A es, como siempre, un dominio real finitamente generado sobre R, y p un ideal primo de A, dicho orden puede levantarse a un orden total β en A, de modo que el orden cociente β/p coincida con $\bar{\beta}$. Por supuesto, como un orden total β en un dominio se extiende de modo único a un orden total en su cuerpo de fracciones, tenemos un orden β en K (cuerpo de fracciones de A) cuyo orden cociente inducido en $\Delta = A_p/pA_p$ es $\overline{\beta}$.

Sea V una variedad algebraica real de R^n tal que $A = R[V]$, y sea p un ideal primo real de $R[V]$. Sea $W \subset V$ la subvariedad definida por p, y denotemos por W_c y V_c los puntos centrales de W y V respectivamente. Brumfiel prueba los siguientes resultados:

14.1. Proposición [Br_1, pág. 238].- *Sea* $\overline{\beta}$ *un orden total en* A/p, *entonces existe un orden total* β *de* A *tal que* $\beta/p = \overline{\beta}$, *si y sólo si para cada familia finita de funciones regulares* $f_1,\ldots,f_m \in A\ p$, *tales que* $f_i+p \in \overline{\beta}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, *el conjunto*

$$\{x \in W : f_1(x) > 0,\ldots,f_m(x) > 0\} \cap W_c \cap V_c$$

tiene interior no vacío en W_C.

14,2. Corolario.- *Si* $V = V_C$, *entonces, cualquier orden total* $\overline{\beta}$ *en* A/p *se eleva a un orden total* β *en* A *tal que* $\beta/p = \overline{\beta}$.

En este párrafo damos un teorema de existencia de cadenas de especializaciones de valoraciones reales de un cuerpo de funciones, cuyos centros son ideales con la propiedad de que sus órdenes pueden ser levantados. Más precisamente, sea $p_{m-1} \subset p_{m-2} \subset \ldots \subset \subset p_1 \subset p_o$ una cadena fuerte de ideales de A, con la propiedad siguiente:

14.3. *"Para cada* $j=0,\dots,m$, *y para cada orden total* β_j *en* $A/p_j = (A/p_{j+1})/(p_j/p_{j+1})$ *existe un orden* β_{j+1} *en* A/p_{j+1} *tal que* $\beta_j = \beta_{j+1}/(p_j/p_{j+1})$, *donde* $p_m = (0)$".

En este epígrafe denotaremos por A_j el anillo

$$A_j = A/p_j = A/p_{j+1}/(p_j/p_{j+1})$$

y por Δ_j el cuerpo de fracciones de A_j. Obsérvese por último, que a la vista de 14.2, si A es el anillo de coordenadas de una variedad no singular V, una cadena de subvariedades no singulares de V da lugar a una cadena fuerte de ideales con la propiedad 14.3.

14.4. Teorema.- *Sea* $p_{m-1} \subset p_{m-2} \subset \dots \subset p_1 \subset p_o$ *una cadena fuerte de ideales primos de* A *con la propiedad 14.3. Sean* $0 < s_o < s_1 < \dots < s_{m-1} < r$ *enteros tales que para cada* $j=0,1,\dots,m-1$, $\dim p_j = s_j$. *Entonces existe una cadena de especializaciones de lugares reales* K *sobre* R, $\phi_o,\phi_1,\dots,\phi_{m-1}$

$$K \to \Sigma_{m-1},\infty \to \dots \to \Sigma_1,\infty \to \Sigma_o,\infty$$

tales que rango $(\phi_j) = m-j$, $\dim(\phi_j) = s_j$ *y* p_j *tiene centro* p_j *en* A, $0 \leqslant j \leqslant m-1$.

Demostración.- La demostración consiste, básicamente en una "caza de órdenes" en los diagramas que se muestran. Vamos construyendo los lugares sucesivos sobre los ideales dados, pero en cada paso es necesario modificar todos los anteriores. Damos, simplemente, la construcción para los casos $m=1,2,$ y 3, evitando, así, una demostración excesivamente engorrosa por los símbolos. Las herramientas que usamos son, básicamente, los lemas 6.4 y 13.6, y los teoremas 6.6 y 10.8.

Fijemos en K un orden β^1 tal que para cada $j=0,\ldots,m-1$. p_j es $(\beta^1 \cap A)$-convexo. Por el teorema 10.8 y el lema 13.6, existe un lugar real, ϕ^1_{m-1}, de K sobre R, de rango 1 y dimensión s_{m-1}, con centro p_{m-1} en A,

$$\phi^1_{m-1} : K \to \Sigma^1_{m-1},\infty$$

y tal que existe un orden γ^1_{m-1} en el cuerpo residual, Σ^1_{m-1}, de ϕ^1_{m-1} que extiende el orden $\alpha^1_{m-1} = \beta^1/p_{m-1}$ en $A_{m-1} = A/p_{m-1}$.

Los ideales p_j/p_{m-1}, $0 \leqslant j \leqslant m-2$, son $(\alpha^1_{m-1} \cap A_{m-1})$-convexos. Consideremos ahora (ver diagrama, donde para simplificar π representa los epimorfismos canónicos $(A_j)_{(p_{j-1}/p_j)} \to \Delta_{j-1}$) un lugar real ψ^2_{m-2} del cuerpo de funciones Δ_{m-2} sobre R, de rango 1, dimensión s_{m-2} y con centro p_{m-2}/p_{m-1} en A_{m-1},

$$\begin{tikzcd}
(K,\beta^1) \arrow[r, "\phi^1_{m-1}"] \arrow[dr, "\pi"'] & (\Sigma^1_{m-1},\gamma^1_{m-1}) & \\
 & (\Delta_{m-1},\alpha^1_{m-1}) \arrow[u] \arrow[r, dashed, "\psi^2_{m-2}"] \arrow[dr, "\pi"'] & (\Omega^2_{m-2},\gamma^2_{m-2}) \\
 & & (\Gamma_{m-2},\alpha^2_{m-2}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

(<u>diagrama 1</u>)

y tal que existe un orden γ^2_{m-2} en su cuerpo residual, Ω^2_{m-2}, que extiende el orden cociente $\alpha^2_{m-2} = \alpha^1_{m-1}/(p_{m-2}/p_{m-1}) = \beta^1/p_{m-2}$ en Δ_{m-2}. Los ideales $(p_j/p_{m-1})/(p_{m-2}/p_{m-1}) = p_j/p_{m-2}$, $0 \leq k \leq m-3$ son $(\alpha^2_{m-2} \cap A_{m-2})$-convexos.

Sea α^2_{m-1} un orden en Δ_{m-1} tal que el lugar

$$\psi^2_{m-2} : (\Delta_{m-1}, \alpha^2_{m-1}) \to (\Omega^2_{m-2}, \gamma^2_{m-2})$$

preserve órdenes (tal orden existe en virtud de 6.4). Puesto que γ^2_{m-2} es una extensión de α^2_{m-2}, el orden α^2_{m-1} verifica también que todos los ideales p_j/p_{m-1}, $0 \leq j \leq m-2$, son $(\alpha^2_{m-1} \cap A_{m-1})$-convexos.

Usamos, ahora, la propiedad de que la familia $\{p_i\}$ tiene la propiedad 14.3 para obtener un orden β^2 en K tal que $\beta^2/p_{m-1} = \alpha^2_{m-1}$. El orden β^2 es tal que para todo $j=0,\ldots,m-1$, p_j es $(\beta^2 \cap A)$-convexo. Por el lema 13.6, existe un lugar, ϕ^2_{m-1}, de K sobre R, de rango 1, dimensión s_{m-1}, centro p_{m-1} en A y cuyo cuerpo residual, Σ^2_{m-1} tiene orden γ^2_{m-1} que es una extensión de α^2_{m-1} (ver diagrama 2).

Como dim $p_{m-1} = s_{m-1}$, resulta que $(\Sigma^2_{m-1}, \gamma^2_{m-1})$ es una extensión algebraica y ordenada de $(\Delta_{m-1}, \alpha^2_{m-1})$. Por otra parte,

$$\psi^2_{m-2} : (\Delta_{m-1}, \alpha^2_{m-1}) \to (\Omega^2_{m-2}, \gamma^2_{m-1})$$

es un lugar que preserva los órdenes, luego, por el teorema 6.6, existe una extensión (única) de ψ^2_{m-2} a un lugar, θ^2_{m-2} de $(\Sigma^2_{m-1}, \gamma^2_{m-1})$ en una extensión ordenada Σ^2_{m-2} de $(\Omega^2_{m-2}, \gamma^2_{m-1})$, cuyo orden representamos, todavía por γ^2_{m-2}, y que conserva los órdenes.

$$\begin{tikzcd}
(K,\beta^2) \arrow[r, "\phi^2_{m-1}"] \arrow[dr, "\pi"'] & (\Sigma^2_{m-1},\gamma^2_{m-1}) \arrow[r, "\theta^2_{m-2}"] & (\Sigma^2_{m-2},\gamma^2_{m-2}) & \\
& (\Delta_{m-1},\alpha^2_{m-1}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\psi^2_{m-2}"] \arrow[dr, "\pi"'] & (\Omega^2_{m-2},\gamma^2_{m-2}) \arrow[u, hook] & \\
& & (\Delta_{m-2},\alpha^2_{m-2}) \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, "\psi^3_{m-3}"] \arrow[dr, dashed, "\pi"'] & (\Omega^3_{m-3},\gamma^3_{m-3}) \\
& & & (\Delta_{m-3},\alpha^3_{m-3}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

(diagrama 2)

Como Σ^2_{m-1} es algebraico sobre Δ_{m-1}, resulta que θ^2_{m-2} tiene rango 1 y dimensión s_{m-2}. Además por ser extensión de ψ^2_{m-2}, tiene centro p_{m-2} en A_{m-1}. Si $m = 2$, los lugares ϕ^2_{m-1} y $\phi^2_{m-2} = \theta^2_{m-2} \circ \phi^2_{m-1}$ acaban la demostración.

Supongamos $m=3$ y veamos como construir el siguiente paso. De nuevo por 10.8 y 13.6, existe un lugar real ψ^3_{m-3} del cuerpo de funciones Δ_{m-2} sobre R, que tiene rango 1, dimensión s_{m-3} y centro p_{m-3}/p_{m-2} en A_{m-2}, y cuyo cuerpo residual Ω^3_{m-3} tiene un orden γ^3_{m-3} que extiende el orden cociente $\alpha^3_{m-3} = \alpha^2_{m-2}/(p_{m-3}/p_{m-2}) = \beta^2/p_{m-3}$. El orden α^3_{m-3} tiene la propiedad de que $(p_j/p_{m-2})/(p_{m-3}/p_{m-2}) = p_j/p_{m-3}$ es $(\alpha^3_{m-3} \cap A_{m-3})$-convexo, para todo $j=0,\dots,m-4$.

Consideremos un orden α^3_{m-2} en Δ_{m-2} tal que el lugar

$$\psi^3_{m-3} : (\Delta_{m-2},\alpha^3_{m-2}) \to (\Omega^3_{m-3},\gamma^3_{m-3})$$

preserve órdenes (cf. lema 6.4). En particular, como γ^3_{m-3} es una extensión de α^3_{m-3}, α^3_{m-2} verifica que todos los ideales p_j/p_{m-2}, $0 \leqslant j \leqslant m-3$ son $(\alpha^3_{m-2} \cap A_{m-2})$-convexos. Usando la propiedad 14.3, el orden α^3_{m-2} se eleva a un orden α^3_{m-1} de Δ_{m-1} tal que $\alpha^3_{m-2} = \alpha^3_{m-1}/(p_{m-2}/p_{m-1})$. De nuevo todos los ideales p_j/p_{m-1} son $(\alpha^3_{m-1} \cap A_{m-1})$-convexos, $0 \leqslant j \leqslant m-2$.

Ahora, el lema 13.6 garantiza la existencia de un lugar real, ψ^3_{m-2}, de Δ_{m-1} sobre R, de rango 1, dimensión s_2 y centro p_{m-2}/p_{m-1} en A_{m-1}, y cuyo cuerpo residual Ω^3_{m-2} tiene un orden γ^3_{m-2} que es extensión del orden α^3_{m-2} de Δ_{m-2}.

Sea α^3_{m-1} un orden en Δ_{m-1} tal que el lugar

$$\psi^3_{m-2} : (\Delta_{m-1}, \alpha^3_{m-1}) \to (\Omega^3_{m-2}, \gamma^3_{m-2})$$

conserve órdenes. Para cada $j=0,\ldots,m-2$, los ideales p_j/p_{m-1} son $(\alpha^3_{m-1} \cap A_{m-1})$-convexos, puesto que γ^3_{m-2} es extensión de α^3_{m-2}. Levantemos el orden α^3_{m-1} a un orden β^3 de K tal que $\alpha^3_{m-1} = \beta^3/p_{m-1}$. De nuevo, el lema 13.6 asegura la existencia de un lugar real ϕ^3_{m-1} de K sobre R, de rango 1, dimensión s_{m-1} y centro p_{m-1} en A, y cuyo cuerpo residual Σ^3_{m-1} posee un orden γ^3_{m-1} que extiende el orden α^3_{m-1}. Ahora bien, como

$$\psi^3_{m-2} : (\Delta_{m-1}, \alpha^3_{m-1}) \to (\Omega^3_{m-2}, \gamma^3_{m-2})$$

conserva órdenes, y $(\Sigma^3_{m-1}, \gamma^3_{m-1})$ es una extensión algebraica y ordenada de $(\Delta_{m-1}, \alpha^3_{m-1})$, ψ^3_{m-2} se extiende (teorema 6.6) a un lugar

$$
\begin{tikzcd}
(K,\beta^3) \arrow[r, "\phi^3_{m-1}"] \arrow[dr, "\pi"'] & (\Sigma^3_{m-1}, \gamma^3_{m-1}) \arrow[r, "\theta^3_{m-2}"] & (\Sigma^3_{m-2},\gamma^3_{m-2}) \arrow[dr, "\theta^3_{m-3}"] & & \\
& (\Delta_{m-1},\alpha^3_{m-1}) \arrow[u] \arrow[r, "\psi^3_{m-2}"] \arrow[dr, "\pi"'] & (\Omega^3_{m-2},\gamma^3_{m-2}) \arrow[u, hook] & (\Sigma^3_{m-3},\gamma^3_{m-3}) & \\
& & (\Delta_{m-2},\alpha^3_{m-2}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\psi^3_{m-3}"] \arrow[dr, "\pi"'] & (\Omega^3_{m-3},\gamma^3_{m-3}) \arrow[u, hook] & \\
& & & (\Delta_{m-3},\alpha^3_{m-3}) \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, "\psi^4_{m-4}"] \arrow[dr, dashed, "\pi"'] & (\Omega^4_{m-4},\gamma^4_{m-4}) \\
& & & & (\Delta_{m-4},\alpha^4_{m-4}) \arrow[u, hook, dashed]
\end{tikzcd}
$$

(<u>Diagrama 3</u>)

149 bis

$$\theta^3_{m-2} : (\Sigma^3_{m-1},\gamma^3_{m-1}) \to (\Sigma^3_{m-2},\gamma^3_{m-2})$$

que conserva órdenes, donde Σ^3_{m-2} es una extensión ordenada de $(\Omega^3_{m-2},\gamma^3_{m-2})$ cuyo orden denotamos también por γ^3_{m-2}. El lugar θ^3_{m-2} tiene rango 1, dimensión s_{m-2} y centro p_{m-2}/p_{m-1} en A_{m-1}, puesto que Σ^3_{m-1} es algebraico sobre Δ_{m-1} y θ^3_{m-2} extiende a ψ^3_{m-2}. En consecuencia, $(\Sigma^3_{m-2},\gamma^3_{m-2})$ es una extensión ordenada y algebraica de $(\Delta_{m-2},\alpha^3_{m-2})$. Como el lugar

$$\psi^3_{m-3} : (\Delta_{m-2}, \alpha^3_{m-2}) \to (\Omega^3_{m-3},\gamma^3_{m-3})$$

preserva órdenes, hay una extensión (teorema 6.6) de ψ^3_{m-3}, a un lugar θ^3_{m-3} de Σ^3_{m-2} en una extensión ordenada Σ^3_{m-3} de $(\Omega^3_{m-3},\gamma^3_{m-3})$ cuyo orden denotamos, de nuevo, por γ^3_{m-3}.

Como Σ^3_{m-2} es algebraico sobre Δ_{m-2}, θ^3_{m-3} tiene rango 1, dimensión s_{m-3} y centro p_{m-3}/p_{m-2} en A_{m-2}. Los lugares ϕ^3_{m-1}, $\phi^3_{m-2} = \theta^3_{m-2} \circ \phi^3_{m-1}$, y $\phi^3_{m-3} = \theta^3_{m-3} \circ \theta^3_{m-2} \circ \phi^3_{m-1}$, resuelven el caso $m = 3$.

Es claro que el mismo proceso sirve para m arbitrario, $0 < m \leqslant r$, lo que concluye la demostración de 14.4.

§15. Aplicaciones: valoraciones reales en variedades algebraicas reales de dimensiones 2 y 3.

Finalizamos con algunos corolarios y aplicaciones de los resultados anteriores. En particular, demostramos, que para variedades algebraicas reales de dimensiones 2 y 3, la situación es óptima en el sentido de que para cualesquiera m, $s_o,\ldots,s_{m-1}$ y

$p_o,\dots,p_{m-1}$ verificando las condiciones necesarias 12.2, existen cadenas de especializaciones de lugares reales sobre R con los rangos, dimensiones y centros dados.

Empezamos con algunas aplicaciones del teorema 13.9. Para el caso $m=2$ tenemos:

15.1. <u>Proposición</u>.- *Sea* $p_1 \subset p_o$ *una cadena fuerte de ideales de* A. *Sean* m, s_o *y* s_1 *enteros tales que* $0 < m \leqslant r$, $0 \leqslant s_o < s_1 < r$, $r-s_1 < m$ *y* $\dim q_i \leqslant s_i$, $i=0,1$. *Entonces existe una cadena de especializaciones de lugares reales de* K *sobre* R, ϕ_o,ϕ_1, $K \to \Sigma_1,\infty \to \Sigma_o,\infty$, *tales que* rango $(\phi_1) = r-s_1$, rango $(\phi_o) = m$, $\dim \phi_i = s_i$, $i=0,1$, *y* ϕ_i *tiene centro* p_i *en* A, $i=0,1$.

<u>Demostración</u>.- Completamos la sucesión $s_o < s_1$ intercalando enteros t_i hasta tener una sucesión de m enteros en las condiciones de 13.9. Para ello, sean

$$t_i = r+i-m \qquad 1 \leqslant i < m, \qquad y \qquad t_o = s_o.$$

Puesto que, por hipótesis, $r-s_1 < m$, tenemos $t_k = s_1$ para $k = m-(r-s_1)$, y como $s_o \leqslant r-m < r+1-m$, resulta

$$0 \leqslant s_o < t_1 < \dots < t_k = s_1 < t_{k+1} < \dots < t_{m-1} = r-1,$$

donde todos los pasos difieren en una unidad, salvo, posiblemente, t_1 y s_o.

Ahora completamos $p_1 \subset p_o$ hasta tener una cadena de m ideales, con sucesivas repeticiones de p_o y p_1. Exactamente, consideramos

$$p_1 = q_{m-1} \subset \cdots \subset q_k = p_1 \subset q_{k-1} = p_o \subset \cdots \subset q_o = p_o,$$

es decir, $\begin{cases} q_j = p_o & \text{si} \quad 0 \leqslant j < k, \\ q_j = p_1 & \text{si} \quad k \leqslant j < m, \quad \text{donde} \quad k = m-(r-s_1). \end{cases}$

Tenemos,

$$\dim q_j = \dim p_o \leqslant s_o \leqslant t_j \quad \text{si} \quad 0 \leqslant j < k, \quad \text{y}$$

$$\dim q_j = \dim p_1 \leqslant s_1 \leqslant t_j \quad \text{si} \quad k \leqslant j < m.$$

Por tanto, la cadena de ideales

$$q_{m-1} \subset \cdots \subset q_1 \subset q_o$$

y la sucesión de enteros $0 \leqslant t_o < t_1 < \dots < t_{m-1} < r$, están en las condiciones del teorema 13.9. En consecuencia, existe una cadena de especializaciones de lugares reales de K sobre R, $\psi_o, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}$, en las condiciones allí establecidas. Tomamos $\phi_o = \psi_o$ y $\phi_1 = \psi_k$. Entonces,

rango $(\phi_o) = m$, $\dim \phi_o = t_o = s_o$, centro de ϕ_o en $A = q_o = p_o$, y

rango $(\phi_1) = m-k = m-(m-(r-s_1)) = r-s_1$, $\dim \phi_1 = t_k = s_1$, y centro de ϕ_1 en $A = q_k = p_1$.

La misma técnica usada en la demostración de 15.1 permite establecer el siguiente resultado:

15.2. Proposición.- *Dada una sucesión de enteros* $0 \leqslant s_o < s_1 < \ldots < s_{d-1} < r$ *, y una cadena fuerte de ideales primos,* $p_{d-1} \subset p_{d-2} \subset \cdots \subset p_1 \subset p_o$ *, tales que* $\dim p_i \leqslant s_i$ *(de nuevo las inclusiones pueden ser igualdades) existe una cadena de especializaciones de lugares reales de* K *sobre* R*,* $\phi_o, \phi_1, \ldots, \phi_{d-1}$*,*

$$K \to \Sigma_{d-1},\infty \to \ldots \to \Sigma_1,\infty \to \Sigma_o,\infty$$

tal que para cada $j=0,\ldots,d-1$*,* $\phi_j : K \to \Sigma_j,\infty$ *tiene centro* p_j *en* A *y dimensión* s_j.

Demostración.- Obsérvese, primero, que ahora los enteros s_i pueden ser arbitrarios, pero no podemos hacer ninguna precisión sobre los rangos.

Completamos la sucesión de enteros hasta formar una cadena consecutiva, empezando en s_1 hasta $r-1$. Así, tenemos

$$0 \leqslant s_o = t_o < t_1 = s_1 < t_2 < \ldots < t_{i_2} = s_2 < \ldots < t_{i_{d-1}} =$$

$$= s_{d-1} < t_{i_{d-1}+1} < \ldots < t_{m-1} = r-1 < r,$$

donde $t_j = t_1 + (j-1)$, $1 \leqslant j < m$, donde $m=r-t_1+1$.

A continuación completamos la sucesión de ideales p_i, con sucesivas repeticiones hasta obtener una cadena de m ideales

$$p_{d-1} = q_{m-1} \subset \cdots \subset p_{d-1} = q_{i_{d-1}} \subset p_{d-2} = q_{i_{d-1}-1} \subset \cdots \subset p_2 =$$

$$= q_{i_2} \subset p_1 = q_{i_2-1} \subset \cdots \subset p_1 = q_1 \subset q_o = p_o,$$

es decir,

$$q_j = \begin{cases} p_o & \text{si} \quad j = 0 \\ p_1 & \text{si} \quad 1 \leqslant j < i_2 \\ p_2 & \text{si} \quad i_2 \leqslant j < i_3 \\ \vdots & \\ p_{d-1} & \text{si} \quad i_{d-1} \leqslant j < r \end{cases}$$

Por construcción, para cada $j=0,\ldots,m-1$, $\dim q_j \leqslant t_j$. Además,

$$m+s_o < m+t_1 = r-t_1 +1 + t_1 = r+1,$$

luego $m+s_o \leqslant r$. En consecuencia, para m, la sucesión $\{t_i\}$ y la cadena q_i, estamos en las condiciones del teorema 13.9. Sea $\psi_o,\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}$ la cadena de especializaciones de lugares reales con las condiciones allí garantizadas. Definimos $\phi_o = \psi_o$, $\phi_1 = \psi_1$, $\phi_j = \psi_{i_j}$, $2 \leqslant j < d$, los lugares ϕ_i tienen centro p_i en A y dimensión s_i.

15.3. <u>Observación</u>.- Nótese que podemos hacer la siguiente precisión sobre el rango: m puede ser cualquier entero tal que $r-s_1+1 \leqslant m \leqslant r-s_o$. En efecto, el lugar ϕ_o construido en 15.2 tiene rango $r-s_1+1$. Completando la sucesión de enteros entre s_o y s_1, y repitiendo el ideal p_o para ellos, el mismo argumento sirve para encontrar lugares con todos los rangos m descritos.

Analizamos a continuación los lugares reales de variedades algebraicas reales de dimensiones dos y tres. Para el caso bidimensional, el resultado es una consecuencia inmediata de 15.1.

15.4. Proposición.- *Sea* V *una variedad algebraica de dimensión dos sobre un cuerpo realmente cerrado* R. *Entonces, para cualesquiera enteros* m, s_o *y* s_1 *e ideales* p_1, p_o *de* $R[V]$, *verificando las condiciones necesarias 12.2, existe una cadena de especializaciones de lugares reales de* $R(V)$ *sobre* R, *finitos en* $R[V]$, *con los rangos, dimensiones y centros dados.*

Demostración.- Enumeramos todas las posibilidades:

(a) $m = 1$. Entonces hay un sólo ideal y el teorema 10.8 resuelve el problema.

(b) $m = 2$. Entonces $s_o = 0$, $s_1 = 1$, y estamos en las condiciones de la proposición 15.1 (o el corolario 13.11), lo que concluye el resultado.

Para el caso tridimensional, la situación es, también, óptima:

15.5. Proposición.- *Sea* V *una variedad algebraica de dimensión tres sobre un cuerpo realmente cerrado* R. *Entonces, para cualesquiera enteros* m *y* $(s_i)_{0\leqslant i\leqslant 2}$ *e ideales* (p_i) *de* $R[V]$ *verificando las condiciones necesarias 12.2, existe una cadena de especializaciones de lugares reales de* K *sobre* R, *finitos en* $R[V]$, *con los rangos, dimensiones y centros dados.*

Demostración.- Como en 15.4, enumeramos todas las posibilidades:

(a) $m = 1$ queda resuelta por el teorema 10.8.

(b) $m = 3$ queda resuelta por el corolario 13.11.

(c) $m = 2$. Entonces tenemos $p_1 \subset p_o$ y $0 \leqslant s_o < s_1 < 3$, con $\dim p_o \leqslant s_o$, $\dim p_1 \leqslant s_1$. Pueden presentarse los siguientes casos:

(i) $s_1 = 2$, $s_o = 1$. El resultado se sigue de 13.9.

(ii) $s_1 = 2$, $s_o = 0$. De nuevo el resultado se sigue de 13.9.

(iii) $s_1 = 1$, $s_o = 0$. Entonces, consideramos un lugar real de $R(V)$ sobre R, ϕ_1, finito en $R[V]$, con centro en p_1 en $R[V]$, rango 1 y dimensión 1:

$$\phi_1 : R(V) \to \Sigma_1, \infty$$

Sean $A_1 = A/p_1$ y $\Delta_1 = A_{p_1}/p_1 A_{p_1} \to \Sigma_1$. Por el lema 13.6, sabemos que si β es un orden en K tal que p_o y p_1 son $(\beta \cap A)$-convexos, entonces existe un orden $\hat{\beta}$ en Σ_1 tal que $(\Sigma_1, \hat{\beta})$ es una extensión ordenada de $(\Delta_1, \bar{\beta})$.

Ahora, el ideal p_o/p_1 es $(\bar{\beta} \cap A_1)$-convexo, y por consiguiente es $(\hat{\beta} \cap A_1)$ convexo. Por el teorema de existencia de lugares reales, existe un lugar real ψ de Σ_1 finito en A_1 y con centro p_o/p_1 en A_1. Dicho lugar es sobre R, pues extiende el epimorfismo canónico $\pi_1 : A_1 \to A_1/(p_o/p_1) = A/p_o = R$. Además, Σ_1 tiene grado de transcendencia 1 sobre R, y el lugar ψ no es trivial, luego ψ tiene rango 1 y dimensión cero sobre R, i.e. su cuerpo residual es algebraico sobre R, y real, por ser ϕ real. Como R es realmente cerrado, resulta que ψ es racional. Resumiendo, tenemos un lugar real, $\psi : \Sigma_1 \to R,\infty$, de rango 1 y con centro p_o/p_1 en A_1. Definimos $\phi_o = \psi \circ \phi_1$. Es evidente que los lugares ϕ_o y ϕ_1 cumplen las condiciones exigidas.

Aunque nuestros resultados sobre la existencia de cadenas de especializaciones de lugares reales son sólo parciales, concluimos esta memoria conjeturando que un resultado positivo completamente general debe ser cierto.

REFERENCIAS

[A-S] ARTIN, E. - SCHREIER, O. "Algebraische Konstruktion reeller Körper". Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5, 1927.

[Be_1] BECKER, E. "Valuations and real places in the theory of formally real Fields". Actas de la conferencia "formas cuadráticas y geometría algebraica real". Rennes, 1981. (Próxima publicación).

[Be_2] BECKER, E. "The real holomorphy ring and sums of 2n-th powers". Actas de la conferencia "formas cuadráticas y geometría algebraica real", Rennes, 1981. (Próxima publicación).

[Bl-R] BLOOM, T. - RISLER, J.J. "Familles de courbes sur les germes d'espaces analytiques". Bull. Soc. Math. France, 105, 1977, pp. 261-280.

[Br_1] BRUMFIEL, G. "Partially ordered rings and semi-algebraic geometry". London Math. Soc. Lect. Note 37, Cambridge Univ. Press, 1979.

[Br_2] BRUMFIEL, G. "Real Valuation rings and ideals". Actas de la conferencia sobre "formas cuadráticas y geometría algebraica real", Rennes, 1981. (Próxima publicación).

[Bu] BUKOWSKI, A. "Branches and completions for real algebraic curves". Dissertation, Univ. of New Mexico, 1972.

[C-R] COSTE, M. - ROY, M$^{\underline{e}}$ Fr. "Le spectre prime réelle d'un anneau". Contemporary Math. 8, 1982.

[CH] CHENCINER, A. "Introduccion a la géometrie algébrique: multiplicités d'intersection des courbes algebriques planes", Curso en la Universidad París VII, 1974-75.

[D-W] DEDEKIND, R. - WEBER, H. "Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen", J. de Creelle, XCII (1882).

[D-K] DELFS, H. - KNEBUSCH, M. "Semialgebraic topology over a real closed field, II", Math. Zeit. 178, 1981, pp. 175-213.

[De] DELZELL, C. "A constructive continuous solution to Hilbert's 17^{th} problema and...", Dissertation, Stanford Univ. 1980.

[Du_1] DUBOIS, D. "Real algebraic curves". Technical report no. 227, Univ. of New Mexico, 1971.

[Du_2] DUBOIS, D. "Real commutative algebra I: places", Rev. Mat. Hispano-Americana, (4), 39, 1979, no. 2-3.

[Du_3] DUBOIS, D. "A nullstellensatz for ordered fields", Arkiv. fur Math. 8, 1969.

[D-B] DUBOIS, D. - BUKOWSKI, A. "Real commutative algebra II: plane curves over Cantor fields". Rev. Mat. Hispano-Americana (4), 39, 1979, no. 4.

[D-R] DUBOIS, D. - RECIO, T. "A note on Robinson's non negativity-criterium", pendiente de publicación.

[E] EFROYMSON, G. "Local Reality on Algebraic Varieties", Journal of Algebra 29, no. 1, 1974.

[Go] GONDARD, D. "Théorie des modeles et fonctions défines positives sur les variétés algébriques réelles", Contemporary Mathematics 8, 1982.

[G-R] GONDARD, D. - RIBENBOIM, P. "Fonctions définies positives sur les variétés réelles". Bull. Sc. Math. 2ª serie, 98, 1974, pp. 39-47.

[H] HIRONAKA, H. "Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero", Ann. of Math. 79, 1964.

[K] KNEBUSCH, M. "On the extension of real places", Comm. Math. Helv. 48, 1973, pp. 354-369.

[K_1] KNEBUSCH, M. "On the uniqueness of real closures and the existence of real places". Com. Math. Helv. 47, 1972, pp. 260-269.

[K_r] KRULL, W. "Allgemeine Bewertungstheorie", J. de Creelle, CLXVII, 1931.

[Ku_1] KUMMER, E. "Ueber die Zerlegung der aus Wurzeln des Einheit gebildeten complexen Zahlen in Primfactoren", J. de Creelle, XXXV, 1847.

[Ku_2] KUMMER, E. "Mémoire sur les nombres complexes composés de racines de l'unité et des nombres entiers". Journ. de Math. (1), XVI, 1851.

[L] LANG, S. "The theory of real places", Ann. of Math. 57, 1953, pp. 378-391.

[Lo] LOJASIEWICZ, S. "Ensembles semianalytiques", I.H.E.S. 1965.

[Mac-Sch] MACLANE, S. - SCHILLING, O. "Zero dimensional branches of rank one on algebraic varieties", Ann. of Math. 40, 1939, pp. 507-520.

[Re_1] RECIO, T. "Teoria de la dimensión en conjuntos semialgebraicos", Seminario de Geometría Algebraica Real, 1979-80, Univ. Complutense. Madrid.

[Re_2] RECIO, T. "Notas del curso de Geometría Analítica 1974-75", sin publicar.

[Re_3] RECIO, T. "Some open problems", Contemporary Math. 8, 1982.

[Ri] RISLER, J.J. "Une caracterization des Ideaux des variétés algebriques réelles, C.R. Acad. Sc. Paris 271, 1970, pp. 1171-1173.

[R] ROBINSON, A. "Further remarks on ordered fields and definite functions". Math. Annalen 130, 1956, pp. 405-409.

[Ro] ROBSON, R. "The ideal theory of real algebraic curves and.." Dissertation, Stanford Univ. 1981.

[Ru] RUIZ, J. "Aspectos aritméticos y geométricos del problema 17° de Hilbert para gérmenes analíticos". Tesis, Univ. Complutense, Madrid, 1982.

[Sa] SAMUEL, P. "Methodes d'algebre abstraite en Géometrie Algébrique". Springer-Verlag 1955.

[Sch] SCHWARZ, N. "The strong topology on Real Algebraic Varietes". Contemporary Math. 8, 1982.

[St] STENGLE, G. "A Nullstellensatz and a Positivenstellensatz in Semialgebraic Geometry", Math. Annlen 207, 1974, pp. 87-97.

[S_1] SCHÜLTING, H., "Uber reelle stellen eines Körpes und ihren Holomorphiering", Ph. D. thesis, Dortmund 1979.

[S_2] SCHÜLTING, H., "On real places of a field and their holomorphy ring". Commu. in Algebra, por aparecer.

[Ta] TARSKI, A. "A decision method for elementary algebra and geometry". U.C. Berkeley Press, 1951.

[To] TOUGERON, J.C. "Ideaux des fonctions differentiables". Ergeb. der Mathematik, Vol. 71, Berlin, Heilderberg, N. York, Springer 1972.

[VdW] VAN DER WERDERN, "Modern Algebra", Springer-Verlag, 1948.

[Za_1] ZARISKI, O. "The reduction of the singularities of on algebraic surface", Ann. of Math. 40, 1939.

[Za_2] ZARISKI, O. "Local uniformation on algebraic varieties". Ann. of Math. 41, 1940.

[Za_3] ZARISKI, O. "Foundations of a general theory of birational correspondences", Trans. Am. Math. Soc. 53, 1943.

[Za_4] ZARISKI, O. "A simplified proof for the resolution of singularities of an algebraic surface", Ann. of Math. 43, 1942.

[Za_5] ZARISKI, O. "Reduction of singularities of algebraic three-dimensional varieties". Ann. of Math. 45, 1944.

[Z-S] ZARISKI, O. - SAMUEL, P. "Commutative Algebra, Vol II" Van Nostrand, 1960.