

**Universidad Complutense de Madrid**  
**Departamento de Matemática Aplicada**



**Aproximación Numérica**  
**de un Problema**  
**con Frontera Libre**

Memoria para optar al grado de doctor  
en CC. Matemáticas que presenta  
**Ana María Alonso Rodríguez**

Madrid, Mayo 1993

*A mi padre*

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento al profesor José Carrillo, director de esta tesis, por toda la ayuda que me ha prestado. Gracias por su dedicación, sus enseñanzas y su paciencia.

También quiero mostrar mi agradecimiento a Juan Antonio Infante por sus valiosos consejos y por estar siempre dispuesto a escucharme, ayudarme y animarme.

Gracias por último, a los compañeros del departamento de Matemática Aplicada que, con su apoyo, han contribuido a llevar a término este trabajo.

# Contenidos

<b>1</b>	<b>Filtración de un fluido en un medio poroso</b>	<b>1</b>
1.1	Planteamiento del problema . . . . .	1
1.2	Primeros resultados . . . . .	6
1.2.1	Regularidad . . . . .	6
1.2.2	Condiciones de contorno de tipo Dirichlet como caso límite . . . .	13
1.3	Existencia de solución . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Resolución numérica del problema</b>	<b>39</b>
2.1	El problema discreto . . . . .	39
2.1.1	Planteamiento del problema . . . . .	39
2.1.2	Existencia de solución del problema discreto . . . . .	44
2.2	Acotaciones de la solución discreta . . . . .	49
2.3	Estudio de la convergencia . . . . .	58
<b>3</b>	<b>El algoritmo</b>	<b>81</b>
3.1	Descripción del algoritmo . . . . .	81
3.1.1	Gradiente con proyección . . . . .	82
3.1.2	Gradiente conjugado . . . . .	84
3.2	Pruebas numéricas . . . . .	88
<b>A</b>	<b>El módulo DAMEV</b>	<b>119</b>



# Introducción

En esta memoria se estudia el problema de la filtración de un fluido a través de un medio poroso con unas condiciones de contorno distintas de las habituales en la literatura. Surgen de una modelización más realista del problema que lleva a substituir las condiciones de contorno de tipo Dirichlet de una parte de la frontera, por condiciones no lineales en las que el flujo normal en el borde es función del salto de presión.

El agua que está empapando la tierra tiene una gran importancia en la evaluación y la gestión de los recursos hidrológicos. Esta agua está en constante movimiento y dada la gran extensión que suelen tener los acuíferos, el volumen total de agua desplazada es muy grande; de ahí el interés existente por el estudio de este tema.

Desde el punto de vista físico, se trata de un problema de filtración de un fluido en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{R}^2$ , ocupado por un medio poroso. Las leyes fundamentales que gobiernan este movimiento son la ley de Darcy y la ley de conservación de la masa.

Llamemos  $p$  a la presión del fluido y  $g$  a la saturación. Si se supone que el dique es homogéneo e isótropo, este problema puede formularse matemáticamente de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(g + \alpha p) - \Delta p = \frac{\partial}{\partial x_N} g \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ g \in H(p) \end{array} \right\} (P)$$

donde  $H(s)$  es el grafo maximal monótono asociado a la función de Heaviside y  $\alpha$  el coeficiente de compresibilidad.

La formulación del problema se completa con un estado inicial para  $g + \alpha p$  y con apropiadas condiciones de contorno. Se dan tres tipos distintos de condiciones de contorno:

**Frontera impermeable:** En las zonas impermeables el flujo es nulo; se tienen condiciones de tipo Neumann homogéneas.

**Frontera permeable:** La presión es continua a través de las zonas permeables de la frontera; en esta región, la presión es un dato y se tienen, por tanto, condiciones de tipo Dirichlet,

**Frontera semipermeable:** Si existe una discontinuidad de presión dentro y fuera del dique porque una zona de la frontera es semipermeable, entonces el flujo a través de esa región es función del salto de presión.

En la mayor parte de los trabajos realizados sobre el tema se han tenido en cuenta únicamente los dos primeros tipos de condiciones de contorno. En esta memoria se estudia el modelo completo, lo que incorpora una no linealidad más al problema: la correspondiente al flujo en la zona semipermeable.

Los primeros estudios matemáticos rigurosos sobre el tema son de comienzos de los años 70 y se deben a C. Baiocchi. En un primer artículo (ver [4]) demuestra la existencia y unicidad de solución para el problema estacionario bidimensional en el caso particular de un dique rectangular: mediante un cambio de variable del tipo  $w_{x_2} = p$  transforma el problema en una inecuación variacional. Posteriormente H. Brezis, D. Kinderlehrer y G. Stampacchia [10], y H.W. Alt [2] dieron una nueva formulación del problema estacionario que permite un tratamiento más general, especialmente en lo que se refiere a la geometría del dominio. El problema de la unicidad de solución fue resuelto por J. Carrillo y M. Chipot (ver [16, 17]). Otro aspecto importante de este problema es la regularidad de la frontera libre. L. Caffarelli demuestra en [11] que la frontera libre es analítica y posteriormente, en un artículo con G. Gilardi [12] demuestran que en el caso bidimensional es monótona.

A. Torelli da los primeros resultados relativos a la ecuación ( $P$ ) [41, 42]. Estudia sólo el caso de un dominio de  $\mathbb{R}^2$  rectangular pues utiliza la misma técnica que introduce C. Baiocchi para resolver el correspondiente problema estacionario. La existencia de una solución débil para cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}^N$  con  $N \geq 2$  abierto, conexo, de frontera lipschitziana fue demostrada para el caso incompresible ( $\alpha = 0$ ) por G. Gilardi [26] y para el caso compresible ( $\alpha > 0$ ) por J. Carrillo [13]. Posteriormente E. DiBenedetto y A. Friedman ([24]) dan una nueva demostración de la existencia de solución débil que incluye los dos casos. A diferencia de lo que ocurre en el caso estacionario la solución de este problema es única como demuestra J. Carrillo en [14].

Los primeros resultados acerca del problema estacionario con condiciones de contorno semipermeables en una parte de la frontera son de J.F. Rodrigues [37]. Son J. Carrillo y M. Chipot en [18] quienes demuestran la existencia de solución y queda abierto el problema de la unicidad.

También son muchos los trabajos numéricos realizados sobre este tema, debido al interés práctico del estudio de la filtración de un fluido en un medio poroso. En su mayoría se refieren al caso estacionario.

Los primeros trabajos son anteriores a la formulación matemática rigurosa del problema. Utilizan un método iterativo para determinar la región del dique que está mojada por el fluido (ver [23]). C. Baiocchi, V. Comincioli, E. Magenes y G. Volpi [6] presentan por primera vez un método de dominio fijo; está basado en la formulación de C. Baiocchi

por lo que tiene fuertes limitaciones sobre la geometría del dominio. Básicamente ha de ser un dique rectangular.

Posteriormente, utilizando la formulación introducida por H. Brezis, D. Kinderlehrer y G. Stampacchia ([10]) y por H. Alt ([2]) éste último presenta ([3]) un método numérico de dominio fijo, aplicable a geometrías mucho más generales. Sin embargo, este método es bastante restrictivo en cuanto a la triangulación que puede tomarse y, como consecuencia de ello, requiere un tratamiento muy especial del borde del dominio. P. Pietra ([35]) resuelve estas dificultades utilizando un operador de tipo “up-wind” para la discretización del término de transporte. De este modo, la única limitación que se impone a la triangulación es que sea de tipo débilmente agudo.

En [15] J. Carrillo propone un esquema discreto para aproximar la solución del problema de evolución con condiciones de tipo Dirichlet. Siguiendo la idea de P. Pietra utiliza un operador “up-wind”. Nosotros presentamos un método numérico para resolver ese mismo problema con condiciones de contorno no lineales que es, en cierto modo, una generalización del que se propone en [15].

El trabajo está dividido en tres capítulos:

### Capítulo 1

Está dedicado al estudio del problema continuo. Se divide en tres secciones

- En la primera sección se presenta el problema: se deducen las ecuaciones y se introducen las condiciones de contorno. Se da la formulación del problema con la que trabajaremos en lo sucesivo: sea  $Q = (0, T) \times \Omega$  y sean  $\Gamma^D, \Gamma^W, \Gamma^I$  tres subconjuntos disjuntos de la frontera de  $\Omega$  correspondientes a la region permeable, semipermeable e impermeable respectivamente. Sea  $\beta$  la función de permeabilidad en  $\Gamma^W$  y  $\phi$  la presión exterior:

*Hallar un par  $(p, g)$  tal que*

$$\left. \begin{aligned}
 &(p, g) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^\infty(Q) \\
 &p \geq 0 \text{ c.t.p. } (x, t) \in Q \\
 &p = 0 \text{ en } \Gamma^D \\
 &g \in H(p) \text{ c.t.p. } (x, t) \in Q
 \end{aligned} \right\} (P_\beta)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\int_Q (\nabla p + ge) \nabla \xi - \int_Q (g + \alpha p) \xi_t \leq \\
 &\leq \int_\Omega (g^0 + \alpha p^0) \xi(\cdot, 0) + \int_{\Sigma^W} \beta (\phi - p) \xi
 \end{aligned} \right.$$

$\forall \xi \in H^1(Q)$  tal que  $\xi(\cdot, T) = 0$  en  $\Omega$  y  $\xi \geq 0$  en  $\Sigma^D$ .



- En la segunda sección se demuestran algunas propiedades de regularidad de la solución análogas a las que se tienen en el caso de condiciones de tipo Dirichlet. En concreto se demuestra:

**Proposición:** Sea  $(p, g)$  solución de  $(P_\beta)$  entonces

$$\alpha p \in C([0, T]; L^2(\Omega))$$

y si  $\alpha p^0 \in L^\infty(\Omega)$  entonces

$$p \in L^\infty(Q).$$

También en esta sección se demuestra un resultado que establece que las condiciones de contorno de tipo Dirichlet clásicas son un caso límite de las condiciones semipermeables que aquí se consideran.

**Proposición:** Sea  $(p_\varepsilon, g_\varepsilon)$  solución del problema  $(P_{\beta_\varepsilon})$  siendo  $\beta_\varepsilon$  la función de permeabilidad  $\beta_\varepsilon(s) = s/\varepsilon$ ; entonces la sucesión de pares  $\{(p_\varepsilon, g_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$  converge débilmente en el espacio  $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^\infty(Q)$  hacia la solución del problema con condiciones de contorno de tipo Dirichlet en  $\Gamma^W \cup \Gamma^D$ .

- En la tercera sección se demuestra el resultado más importante de este capítulo que es la existencia de solución del problema  $(P_\beta)$ . Todos los resultados de la sección están encaminados a demostrar el teorema de existencia. Se utiliza un argumento de semidiscretización: se divide el intervalo de tiempo en  $[0, T]$  en  $M$  subintervalos de longitud  $\tau = T/M$  y se resuelve en cada instante  $t_n = n\tau$  un problema elíptico.

Para demostrar la existencia de solución del problema semidiscreto se regulariza la función de Heaviside  $H(s)$ . En la primera proposición de esta sección, mediante una técnica de punto fijo y argumentos de monotonía se demuestra la existencia de solución del problema semidiscreto regularizado. En la segunda proposición, pasando al límite en el problema regularizado, se obtiene la existencia de solución del problema semidiscreto. La siguiente proposición establece una serie de acotaciones de la solución semidiscreta.

La sección concluye con el teorema de existencia.

**Teorema 1:** Sea  $\beta$  monótona, continua, tal que  $\beta(0) = 0$  y que existen dos constantes positivas  $a, b$  de manera que  $|\beta(s)| \leq a|s| + b \forall s \in \mathbb{R}$ ; entonces existe una solución del problema  $(P_\beta)$

En la demostración se utilizan las acotaciones obtenidas anteriormente y resultados de compacidad para pasar al límite en el problema semidiscreto. Estos argumentos

dan convergencia débil de la solución semidiscreta lo que no es suficiente para pasar al límite en el término no lineal. Esta dificultad se resuelve utilizando la monotonía de  $\beta$  para demostrar que de hecho la solución semidiscreta converge fuertemente en  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  hacia una solución del problema continuo.

## Capítulo 2

En este capítulo se estudia un método numérico de aproximación del problema. Se hace una discretización espacial del problema semidiscreto presentado en el capítulo anterior, con un tratamiento especial del término de transporte  $\frac{\partial g}{\partial x_N}$ ; en concreto se utiliza un operador de tipo “up-wind” para discretizar ese término. Consta este capítulo de tres secciones:

- En la primera sección se plantea el problema discreto. Sea  $\Omega_h$  una aproximación poligonal de  $\Omega$ ; se construyen los espacios  $H_h$  y  $L_h$ , subespacios de dimensión finita de  $H^1(\Omega_h)$  y  $L^\infty(\Omega_h)$  respectivamente. La formulación del problema es:

Hallar una familia  $\{(p_{h,n}, g_{h,n})\}_{n=0}^M$  tal que

$$(p_{h,0}, g_{h,0}) = (p_h^0, g_h^0)$$

siendo está una aproximación del dato inicial continuo, y para cada  $n = 1, \dots, M$

$$\left. \begin{aligned} & (p_{h,n}, g_{h,n}) \in H_h \times L_h \\ & p_{h,n} \geq 0 \text{ c.t.p. } (x, t) \in Q_h \\ & 0 \leq g_{h,n} \leq 1 \text{ c.t.p. } (x, t) \in Q_h \\ & p_{h,n} = 0 \text{ en } \Gamma_h^D \\ & \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega_h} (\nabla p_{h,n} \nabla \xi_h + g_{h,n} D_h(\xi_h)) + \\ & + \int_{\Omega_h} \left[ \frac{g_{h,n} - g_{h,n-1}}{\tau} + \alpha R_h \left( \frac{p_{h,n} - p_{h,n-1}}{\tau} \right) \right] R_h(\xi_h) \leq \\ & \leq \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - p_{h,n})) T_h(\xi_h) \\ & \forall \xi_h \in H_h \text{ tal que } \xi^i = 0 \forall i \in I_h^D \end{aligned} \right\} (P_{\beta, \tau, h}) \\ & (*) \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega_h} \left[ (1 - g_{h,n}) D_h(\xi_h) + \frac{1 - g_{h,n}}{\tau} R_h(\xi_h) \right] \geq 0 \\ & \forall \xi_h \in H_h \text{ tal que } \xi^i \geq 0 \text{ si } p_n^i = 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

$D_h$  es un operador de derivación discreta de tipo “up-wind”,  $R_h$  es un operador de interpolación entre  $H_h$  y  $L_h$ , y  $T_h$  es un operador de traza.

**Teorema 2:** *Supongamos que tenemos una descomposición en  $N$ -simplices de  $\Omega_h$  de tipo débilmente agudo y que  $\tau \leq Ch$  para cierta constante  $C$  que depende de la descomposición; entonces existe al menos una solución del problema  $(P_{\beta,\tau,h})$ .*

La demostración de la existencia es constructiva en el sentido de que da un método para calcular la solución del problema  $(P_{\beta,\tau,h})$ . La inecuación (\*) es una condición de ortogonalidad entre la presión y la saturación que nos permite descomponer la resolución del problema en dos pasos: En cada instante de tiempo  $t_n$  se calcula primero la presión, minimizando un funcional de energía y después la saturación, resolviendo un sistema algebraico lineal relacionado con la condición de ortogonalidad. Para demostrar que estos dos problema intermedios tienen solución y que la solución que se obtiene es solución del problema discreto, es fundamental la aplicación que hace corresponder a cada  $\chi_h \in L_h$  el elemento del dual de  $H_h$

$$\xi_h \longrightarrow \int_{\Omega_h} \left[ \chi_h D_h(\xi_h) + \frac{\chi_h}{\tau} R_h(\xi_h) \right]$$

tenga inversa monótona. Aquí es donde interviene el haber discretizado el término de transporte con un operador “up-wind” que nos permite elegir al discretizar la dirección que nos da el signos de los coeficientes deseado.

- La segunda sección está dedicada a probar distintas acotaciones de la solución discreta, necesarias para demostrar la convergencia.
- En la tercera sección de este capítulo se demuestra la convergencia de la solución discreta hacia una solución del problema continuo. El resultado de convergencia que se tiene es el siguiente

**Teorema 3:** *Es posible elegir una familia de elementos finitos de modo que la sucesión  $\{(g_h^\tau, p_h^\tau)\}_{h,\tau>0}$  de soluciones del correspondiente problema discreto  $(P_{\beta,\tau,h})$  converja hacia una solución  $(p, g)$  del problema continuo en el siguiente sentido:*

$$\begin{aligned} \chi(Q_h)p_h^\tau &\longrightarrow \chi(Q)p \text{ en } L^2(\mathbb{R}^{N+1}) \\ \chi(Q_h)\nabla p_h^\tau &\longrightarrow \chi(Q)\nabla p \text{ en } (L^2(\mathbb{R}^{N+1}))^N \\ \chi(Q_h)g_h^\tau &\longrightarrow \chi(Q)g \text{ débilmente en } L^2(\mathbb{R}^{N+1}) \end{aligned}$$

La demostración es constructiva: se elige una familia de elementos finitos para la que mediante argumentos de compacidad y de monotonia se demuestra la convergencia de las soluciones discretas hacia una solución del problema continuo.

### Capítulo 3

Se estudia en este capítulo el algoritmo de resolución del problema discreto.

- En la primera sección se detalla el algoritmo. En cada paso de tiempo hay que resolver un problema de minimización y un sistema lineal. Se trata de un sistema triangular de modo que su resolución no tiene dificultad. El problema de minimización es más delicado ya que el funcional que tenemos no es cuadrático y se busca el mínimo sobre un subconjunto del espacio de trabajo  $\mathbb{R}^h$ . Se proponen dos métodos clásicos de minimización: uno de tipo gradiente con proyección y otro de tipo gradiente conjugado. El primero es válido para una clase muy amplia de funciones  $\beta$ , pero es lento; el segundo necesita más regularidad sobre  $\beta$ , pero es más rápido.
- En la segunda sección se da una rápida descripción del programa utilizado para hacer las pruebas numéricas. El resto de la sección está dedicado a mostrar y comentar los resultados obtenidos para distintos problemas test en los que se ven algunas de las propiedades cualitativas de la solución obtenidas teóricamente.

En el apéndice final se incluyen los programas fuente con los que se realizaron las pruebas numéricas.

El algoritmo diseñado por P. Pietra para resolver el problema estacionario con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, está incorporado como un módulo, de nombre DAMIAN, en la biblioteca de elementos finitos MODULEF, donde también existe otro módulo (PIGRA) de L. Marini y P. Pietra que transforma cualquier triangulación en una de tipo débilmente agudo. El esquema numérico que se estudia en esta memoria, también ha sido programado siguiendo las normas de la biblioteca MODULEF. Utiliza el módulo PIGRA para la obtención de un mallado regular y parte del módulo DAMIAN para el cálculo de los coeficientes correspondientes al operador de “up-wind” (para la documentación de estos módulos ver [32]).



# Capítulo 1

## Filtración de un fluido en un medio poroso

### 1.1 Planteamiento del problema

Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto conexo de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ) de frontera lipschitziana  $\Gamma$ .  $\Omega$  representa un medio poroso a través del cual se filtra un fluido. En su frontera distinguimos tres zonas: una parte impermeable  $\Gamma^I$ , una parte semipermeable  $\Gamma^W$  y una parte totalmente permeable, que está en contacto con el aire  $\Gamma^D$ .

Suponemos que:

- $\Gamma^D \neq \emptyset$ .
- $\Gamma^D$ ,  $\Gamma^W$  y  $\Gamma^I$  son disjuntos dos a dos.
- $\Gamma^D \cup \Gamma^W \cup \Gamma^I = \Gamma$ .
- $\Gamma^W$  tiene un número finito de componentes conexas  $\Gamma_i^W$   $1 \leq i \leq N_E$ .
- $\Gamma^D$  es un subconjunto abierto de  $\Gamma$ .

Vamos a estudiar el problema en un intervalo de tiempo  $(0, T)$ ,  $T \in \mathbb{R}$ ,  $0 < T < \infty$ . Llamaremos  $Q = \Omega \times (0, T)$ .

Desde el punto de vista físico, cada componente conexa de  $\Gamma^W$  representa la frontera que separa el medio poroso de un embalse. Cuando  $\Gamma^W$  es no vacío, un dato importante en este problema es el nivel del fluido en los embalses que, en general, varía con el tiempo. Sea  $\phi \in C^{0,1}(\overline{Q})$ ,  $\phi \geq 0$  la función que representa la presión del fluido en el exterior del dique. Supondremos la presión atmosférica normalizada a cero, de manera que  $\Gamma^W \cap \{\phi(\cdot, t) = 0\}$  es una zona de la frontera que en ese instante está en contacto con el aire. Si suponemos, por ejemplo, que el número de componentes conexas de

$\Gamma^W \cap \{\phi(\cdot, t) > 0\}$  coincide en todo instante  $t$  con el número de embalses  $N_E$ , la manera definir  $\phi$  en  $\Gamma^W$  es la siguiente:

$$\phi(x, t) = (h_i(t) - x_N)^+ \text{ en } \Gamma_i^W \quad 1 \leq i \leq N_E.$$

donde  $h_i(t)$  es una función lipschitziana que representa el nivel del fluido en el embalse correspondiente.

Sean

$$Q = \Omega \times (0, T)$$

$$\Sigma = \Gamma \times (0, T)$$

$$\Sigma^I = \Gamma^I \times (0, T)$$

$$\Sigma^D = \Gamma^D \times (0, T)$$

$$\Sigma^W = \Gamma^W \times (0, T)$$

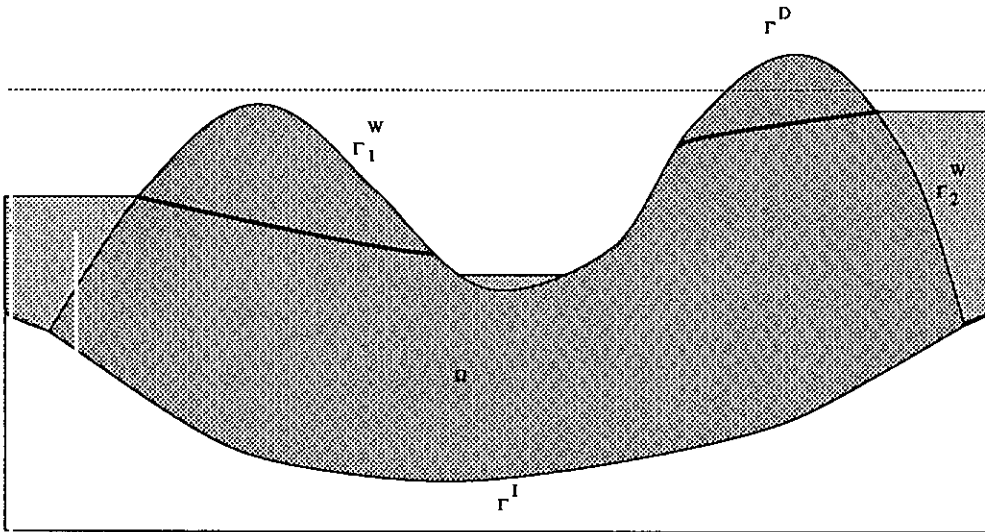


Figura 1.1:

El fluido se filtra a través del dique, mojando en cada instante  $t$  un subconjunto  $\mathcal{W}(t)$  de  $\Omega$ . Sea  $\mathcal{W} = \{(x, t) \in Q \mid x \in \mathcal{W}(t)\}$ .

La ley fundamental que gobierna el movimiento del fluido en  $\mathcal{W}$  es la ley de Darcy. Sea  $q$  la descarga específica, esto es, el volumen de agua que fluye por unidad de tiempo a través de una superficie unidad, normal a la dirección del flujo. Sean  $p$  la presión y

$\psi = p + x_N$  la altura piezométrica. La ley de Darcy, establece que la descarga específica está dada por

$$q = -K\nabla(p + x_N) = -K\nabla\psi,$$

donde  $K$  es un coeficiente de proporcionalidad llamado conductividad hidráulica. Si se trata de un medio homogéneo e isótropo,  $K$  es una constante escalar que depende de las propiedades del fluido y del medio poroso (viscosidad, porosidad, ...). En lo sucesivo supondremos  $K$  normalizado:  $K = 1$ .

La otra ley fundamental en el movimiento de un fluido es la ley de conservación de la masa. Sea  $\sigma$  la porosidad del medio (Volumen vacío/ Volumen total), y  $\rho$  la densidad del fluido. Según la ley de conservación de la masa:

$$\frac{\partial(\sigma\rho)}{\partial t} = -\text{div}(\rho q).$$

Se define el coeficiente de compresibilidad del fluido como

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p},$$

de modo que podemos escribir

$$\frac{\partial(\sigma\rho)}{\partial t} = \sigma \frac{\partial\rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \sigma\rho\beta \frac{\partial p}{\partial t} = \sigma\rho\beta \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Seguindo a Bear ([7]), se supone que  $q\nabla\rho \ll \sigma \frac{\partial\rho}{\partial t}$ , es decir, se supone que las variaciones en espacio de  $\rho$  son mucho más pequeñas que las variaciones en tiempo. Podemos escribir la ley de conservación de la masa del siguiente modo:

$$\sigma\rho\beta \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\rho \text{div}q.$$

Haciendo uso de la ley de Darcy y llamando  $\alpha = \sigma\beta$  obtenemos que la altura piezométrica verifica en  $\mathcal{W}$  la ecuación

$$\alpha \frac{\partial\psi}{\partial t} - \Delta\psi = 0.$$

Se trata ahora de obtener una ecuación válida en todo  $Q$ , ya que a priori no se conoce  $\mathcal{W}$ . Seguiremos el argumento de E. DiBenedeto y A. Friedman en [24].

La frontera libre  $\Sigma^l$  es la región  $\partial(\{p > 0\}) \cap Q$ ; es una parte de  $\partial\mathcal{W}$  y en ella se verifica que

$$\begin{aligned} p &= 0, \\ \nu \cdot (q, 1) &= 0, \end{aligned}$$



siendo  $\nu \in \mathbb{R}^{N+1}$  el vector normal exterior, unitario. Por la propia definición de  $\Sigma^l$  en ella

$$\nu = -\frac{(\nabla p, p_t)}{(|\nabla p|^2 + p_t^2)^{1/2}} = (\nu_{x^l}, \nu_{x_N}, \nu_t).$$

Según esto y la ley de Darcy, se verifica que

$$|\nabla p|^2 + \frac{\partial p}{\partial x_N} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \text{ en } \Sigma^l.$$

De aquí se deduce formalmente una ecuación en  $\mathcal{D}'(Q)$ :  $\forall \xi \in \mathcal{D}(Q)$

$$\begin{aligned} \langle -\Delta p, \xi \rangle &= \langle p, -\Delta \xi \rangle = \int_{\{p>0\}} p(-\Delta \xi) = \int_{\{p>0\}} \nabla p \nabla \xi = \\ &= \int_{\Sigma^l} \nabla p \cdot \nu \xi - \int_{\{p>0\}} \Delta p \xi = - \int_{\Sigma^l} \frac{|\nabla p|^2}{(|\nabla p|^2 + p_t^2)^{1/2}} \xi - \int_{\{p>0\}} \Delta p \xi = \\ &= - \int_{\Sigma^l} (\nu_{x_N} - \nu_t) \xi - \alpha \int_{\{p>0\}} p_t \xi = \\ &= - \left\langle \frac{\partial}{\partial t} H(p) - \frac{\partial}{\partial x_N} H(p), \xi \right\rangle - \alpha \langle p_t, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Llamemos  $g$  a la saturación, tenemos entonces:

$$g \in H(p) \text{ en } Q, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(g + \alpha p) - \Delta p = \frac{\partial}{\partial x_N} g \text{ en } \mathcal{D}'(Q). \quad (1.2)$$

$H$  es el grafo maximal monótono de Heaviside:

$$H(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0 \\ [0, 1] & \text{si } s = 0 \\ 0 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

### Condiciones de contorno y dato inicial

Tenemos distintas condiciones de contorno en cada una de las regiones de  $\Gamma$ :

- $\Sigma^I$  es la región de la frontera impermeable, por tanto no hay flujo a través de ella, es decir

$$q \cdot \nu = 0 \text{ en } \Sigma^I,$$

que escrito en función de  $\psi$  es

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(p + x_N) = 0 \text{ en } \Sigma^I. \quad (1.3)$$

- $\Sigma^D$  es una region de la frontera que siempre está en contacto con el aire y que es permeable. Tenemos por tanto condiciones de tipo Dirichlet. Como la presión atmosférica está normalizada a cero ha de ser

$$p = 0 \text{ en } \Sigma^D. \quad (1.4)$$

En ningún momento hay flujo hacia el interior en esta región, pero es posible que el fluido salga del medio poroso a través de ella. Se tiene de este modo la siguiente condición sobre el flujo:

$$-\frac{\partial}{\partial \nu}(p + x_N) \geq 0 \text{ en } \Sigma^D. \quad (1.5)$$

- $\Sigma^W$  es una frontera semipermeable. Si  $p$  es la presión en el dominio considerado y  $\phi$  la presión exterior, en  $\Sigma^W$  se supone que el flujo es función de la diferencia entre ambas.

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(p + x_N) = \beta(\phi - p) \text{ en } \Sigma^W. \quad (1.6)$$

$\beta$  es una función real de variable real, continua, monótona creciente y tal que  $\beta(0) = 0$ . En el modelo más simple,  $\beta(s) = s/c$  donde  $c$  es la resistencia de la capa semipermeable.

La formulación del problema se completa dando un dato inicial  $g^0 + \alpha p^0$ . Formalmente

$$g(0) + \alpha p(0) = g^0 + \alpha p^0 \text{ en } \Omega. \quad (1.7)$$

De todo esto concluimos que en el problema de filtración de un fluido en un medio poroso las incógnitas son dos: la presión  $p$  y la saturación  $g$ , que formalmente han de verificar (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) y (1.7).

## Formulación débil

Trabajaremos en lo sucesivo con soluciones débiles de este problema. La definición es la siguiente:

**Definición 1.1** Sea  $p^0 \in L^2(\Omega)$ ,  $p^0 \geq 0$  y sea  $g^0 \in H(p^0)$ ; se dice que un par de funciones  $(p, g)$  es solución del problema  $(P_{\beta, \phi, g^0 + \alpha p^0})$  si y sólo si verifica

$$(p, g) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^\infty(Q) \quad (1.8)$$

$$p \geq 0 \text{ c.t.p. } (x, t) \in Q \quad (1.9)$$

$$p = 0 \text{ en } \Sigma^D \quad (1.10)$$

$$g \in H(p) \text{ c.t.p. } (x, t) \in Q \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_Q (\nabla p + ge) \nabla \xi - \int_Q (g + \alpha p) \xi_t \leq \\ & \leq \int_\Omega (g^0 + \alpha p^0) \xi(\cdot, 0) + \int_{\Sigma^w} \beta(\phi - p) \xi \\ \forall \xi \in H^1(Q) \text{ tal que } \xi(x, T) = 0 \text{ c.t.p. } x \in \Omega \text{ y } \xi \geq 0 \text{ en } \Sigma^D. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Si no hay confusión, llamaremos a este problema simplemente  $(P)$ .

## 1.2 Primeros resultados

### 1.2.1 Regularidad

Llamaremos  $V$  al espacio

$$V = \{\zeta \in H^1(\Omega) \mid \zeta = 0 \text{ en } \Gamma^D\}$$

y  $V'$  a su dual topológico.

**Observación 1.2** Sea  $(p, g)$  una solución de  $(P)$ . Supongamos que existen dos constantes  $a, b$  tales que  $|\beta(s)| \leq a|s| + b$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ ; entonces la aplicación

$$\begin{aligned} L^2(0, T; V) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longrightarrow \int_Q (\nabla p + ge) \nabla \xi - \int_{\Sigma^w} \beta(\phi - p) \xi \end{aligned}$$

es un elemento de  $[L^2(0, T; V)]' = L^2(0, T; V')$ . Además si tomamos la función  $\xi$  en  $\mathcal{D}(0, T; V)$  tenemos:

$$\begin{aligned} \int_Q (\nabla p + ge) \nabla \xi - \int_{\Sigma^w} \beta(\phi - p) \xi &= \int_Q (g + \alpha p) \xi_t = \\ &= - \langle (g + \alpha p)_t, \xi \rangle, \end{aligned}$$

por lo tanto se verifica que

$$\frac{\partial}{\partial t} (g + \alpha p) \in L^2(0, T; V').$$

Como  $\{\xi \mid \xi \in L^2(0, T; V') \text{ y } \xi_t \in L^2(0, T; V')\} \subset C^0([0, T]; V')$  se deduce que

$$(g + \alpha p) \in C^0([0, T]; V').$$

(Ver [26]). #

A la vista de esta observación se tiene que si un par  $(p, g)$  es solución de  $(P_{\beta, g^0 + \alpha p^0})$  entonces

$$g(\cdot, 0) + \alpha p(\cdot, 0) = g^0 + \alpha p^0$$

como elementos de  $V'$ .

El primer resultado que veremos es un lema técnico relativo a cómo manejar funciones test más generales que las que se indican en la formulación débil del problema. Nos interesa en concreto tomar funciones test de la forma  $F(p)$ . Este primer lema, como las dos proposiciones que se demuestran a continuación, es válido para pares  $(p, g)$  que verifiquen las ecuaciones (1.1) y (1.2), independientemente de la condición de contorno que se tenga en  $\Sigma^W$ . Por eso consideramos el siguiente problema  $(P_{\hat{\beta}}^*)$ :

**Definición 1.3** Sea  $\hat{\beta} \in L^2(\Sigma^W)$ ; diremos que un par de funciones  $(p, g)$  es una solución de  $(P_{\hat{\beta}}^*)$  si verifica (1.8), (1.9), (1.10), (1.11) y

$$\left. \begin{array}{l} \int_Q (\nabla p + ge) \nabla \xi - \int_Q (g + \alpha p) \xi_t \leq \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} \xi \\ \forall \xi \in H^1(Q) \text{ tal que } \xi(x, 0) = \xi(x, T) = 0 \text{ c.t.p. } x \in \Omega \\ \text{y } \xi \geq 0 \text{ en } \Sigma^D \end{array} \right\} \quad (1.13)$$

**Lema 1.4** Sea  $(p, g)$  solución de  $(P_{\hat{\beta}}^*)$ , sea  $q \in H^1(Q)$  y sea  $F \in W_{\text{loc}}^{1, \infty}(\mathbb{R}^2)$ , tal que:

- $F(p, q) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .
- $F(0, q) \in H^1(Q)$ .
- $F(s_1, s_2) \geq 0$  c.t.p.  $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ .
- $\frac{\partial F}{\partial s_1}(s_1, s_2) \geq 0$  c.t.p.  $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$  (o bien  $\leq 0$ ).

Además, sea  $\mathcal{F}$  tal que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1}(s_1, s_2) = F(s_1, s_2) \text{ c.t.p. } (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$$

y supongamos que

- $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_2}(r, q) q_t \in L^2(Q)$ ,  $\forall r \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ;

entonces:

$$\left. \begin{aligned} & \int_Q (\nabla p + ge) \nabla (F(p, q) \xi) - \int_{\Sigma^w} \hat{\beta} F(p, q) \xi \\ & - \alpha \int_Q \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_2}(p, q) q_t \xi + \mathcal{F}(p, q) \xi_t \right\} = \\ & = \int_Q (\nabla p + ge) \nabla (F(0, q) \xi) - \int_{\Sigma^w} \hat{\beta} F(0, q) \xi \\ & - \alpha \int_Q p \frac{\partial}{\partial t} (F(0, q) \xi) \\ & \forall \xi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega} \times (0, T)). \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

En particular, si  $F(0, q) \xi = 0$  en  $\Sigma^D$  entonces

$$\left. \begin{aligned} & \int_Q (\nabla p + ge) \nabla (F(p, q) \xi) - \int_{\Sigma^w} \hat{\beta} F(p, q) \xi \\ & - \int_Q \left\{ g(F(0, q) \xi)_t + \alpha \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_2}(p, q) q_t \xi + \alpha \mathcal{F}(p, q) \xi_t \right\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

*Demostración.*- Es una adaptación directa de la demostración del lema 2.1 de [14].

Sea  $\zeta$  una función regular tal que  $\zeta = 0$  en  $\Sigma^D$  y  $Sop(\zeta) \subset \mathbb{R}^N \times (\tau_0, T - \tau_0)$  para  $\tau_0 > 0$ ; entonces para todo  $\tau \in (-\tau_0, \tau_0)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q (\nabla p + ge)(x, t) \nabla \zeta(x, t - \tau) dx dt - \int_Q (g + \alpha p)(x, t) \zeta_t(x, t - \tau) dx dt \\ & - \int_{\Sigma^w} \hat{\beta}(x, t) \zeta(x, t - \tau) d\sigma dt = \\ & = \int_Q (\nabla p + ge)(x, t) \nabla \zeta(x, t - \tau) dx dt + \int_Q (g + \alpha p)(x, t) \zeta_\tau(x, t - \tau) dx dt \\ & - \int_{\Sigma^w} \hat{\beta}(x, t) \zeta(x, t - \tau) d\sigma dt = \\ & = \int_Q (\nabla p + ge)(x, t) \nabla \zeta(x, t - \tau) dx dt + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \int_Q (g + \alpha p)(x, t) \zeta(x, t - \tau) dx dt \right) \\ & - \int_{\Sigma^w} \hat{\beta}(x, t) \zeta(x, t - \tau) d\sigma dt, \end{aligned}$$

y por lo tanto, para todo  $\tau \in (-\tau_0, \tau_0)$  tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q (\nabla p + ge)(x, t + \tau) \nabla \zeta(x, t) dx dt + \frac{\partial}{\partial \tau} \int_Q (g + \alpha p)(x, t + \tau) \zeta(x, t) dx dt \\ & - \int_{\Sigma^w} \hat{\beta}(x, t + \tau) \zeta(x, t) d\sigma dt. \end{aligned}$$

Esta igualdad se verifica también para cualquier función  $\zeta \in L^2(0, T; V)$  tal que  $\zeta = 0$  c.p.t.  $(x, t) \in \Omega \times ((0, \tau_0) \cup (T - \tau_0, T))$

Sea  $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times (\tau_0, T - \tau_0))$ ,  $\xi \geq 0$  y tomemos  $\zeta = F(p, q)\xi - F(0, q)\xi$  (que efectivamente verifica  $\zeta = 0$  en  $\Sigma^D$ )

$$\left. \begin{aligned} & \int_Q (\nabla p + ge)(x, t + \tau) \nabla \zeta(x, t) dx dt \\ & - \int_{\Sigma^w} \hat{\beta}(x, t + \tau) \zeta(x, t) d\sigma dt = \\ = & -\frac{\partial}{\partial \tau} \int_Q (g + \alpha p)(x, t + \tau) F(p(x, t), q(x, t)) \xi(x, t) dx dt + \\ & + \frac{\partial}{\partial \tau} \int_Q (g + \alpha p)(x, t + \tau) F(0, q(x, t)) \xi(x, t) dx dt. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Llamemos  $G$  a la función

$$G(\tau) = \int_Q (g + \alpha p)(x, t + \tau) F(p(x, t), q(x, t)) \xi(x, t) dx dt.$$

Todos los miembros del primer término de la ecuación (1.16) son funciones continuas de  $\tau$  para  $\tau \in (-\tau_0, \tau_0)$ . También

$$\begin{aligned} & \int_Q (g + \alpha p)(x, t + \tau) F(0, q(x, t)) \xi(x, t) dx dt = \\ & = \int_Q (g + \alpha p)(x, t) F(0, q(x, t - \tau)) \xi(x, t - \tau) dx dt \end{aligned}$$

es una función de  $C^1(-\tau_0, \tau_0)$ , por lo tanto  $G(\tau)$  es un función de  $C^1(-\tau_0, \tau_0)$  y se verifica la igualdad

$$\left. \begin{aligned} & \int_Q (\nabla p + ge)(x, t) \nabla (F(p, q)\xi)(x, t) dx dt \\ & - \int_{\Sigma^w} \hat{\beta}(x, t) (F(p, q)\xi)(x, t) d\sigma dt + \frac{\partial G}{\partial \tau}(0) = \\ & \int_Q (\nabla p + ge)(x, t) \nabla (F(0, q)\xi)(x, t) dx dt \\ & - \int_{\Sigma^w} \hat{\beta}(x, t) (F(0, q)\xi)(x, t) d\sigma dt \\ & - \int_Q (g + \alpha p)(x, t) \frac{\partial}{\partial t} (F(0, q)\xi)(x, t) dx dt. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Calculemos  $\frac{\partial G}{\partial \tau}(0)$ ; para ello descomponemos  $G(\tau) = G_1(\tau) + G_2(\tau) + G_3(\tau) + G_4(\tau)$  siendo

$$G_1(\tau) = \int_Q g(x, t + \tau) [F(p(x, t), q(x, t)) - F(0, q(x, t))] \xi(x, t) dx dt.$$

$$G_2(\tau) = \alpha \int_Q [p(x, t + \tau) - p(x, t)] F(p(x, t), q(x, t)) \xi(x, t) dx dt + \\ + \alpha \int_Q [\mathcal{F}(p(x, t), q(x, t)) - \mathcal{F}(p(x, t + \tau), q(x, t))] \xi(x, t) dx dt.$$

$$G_3(\tau) = \alpha \int_Q [p(x, t) F(p(x, t), q(x, t)) \xi(x, t) - \mathcal{F}(p(x, t), q(x, t)) \xi(x, t)] dx dt.$$

$$G_4(\tau) = \int_Q g(x, t + \tau) F(0, q(x, t)) \xi(x, t) + \\ + \alpha \int_Q \mathcal{F}(p(x, t + \tau), q(x, t)) \xi(x, t) dx dt.$$

La función  $(G_1 + G_2)(\tau) \in C^1(-\tau_0, \tau_0)$  tiene en  $\tau = 0$  un extremo y por tanto  $(G_1 + G_2)(0) = 0$ . En efecto,  $G_1 + G_2 = G - G_3 - G_4 \in C^1(-\tau_0, \tau_0)$ , distinguimos dos casos:

En el caso  $\frac{\partial F}{\partial s_1} \geq 0$ , para casi todo  $(x, t) \in Q$  y para todo  $\tau \in (-\tau_0, \tau_0)$  se tiene

$$0 \leq G_1(\tau) = g(x, t + \tau) [F(p(x, t), q(x, t)) - F(0, q(x, t))] \leq \\ \leq F(p(x, t), q(x, t)) - F(0, q(x, t)) = \\ = g(x, t) [F(p(x, t), q(x, t)) - F(0, q(x, t))] = G_1(0)$$

y por tanto

$$G_1(\tau) \leq G_1(0), \quad \forall \tau \in (-\tau_0, \tau_0)$$

Además la función  $s_1 \rightarrow \mathcal{F}(s_1, s_2)$  es una función convexa y por tanto para casi todo  $(x, t) \in Q$  y para todo  $\tau \in (-\tau_0, \tau_0)$  tenemos:

$$G_2(\tau) = (p(x, t + \tau) - p(x, t)) F(p(x, t), q(x, t)) + \\ + \mathcal{F}(p(x, t), q(x, t)) - \mathcal{F}(p(x, t + \tau), q(x, t)) \leq 0 = G_2(0)$$

por tanto también la función  $G_2$  tiene en  $\tau = 0$  un máximo.

En el caso  $\frac{\partial F}{\partial s_1} \leq 0$ , se demuestra de la misma manera que  $G_1 + G_2$  tiene un mínimo en  $\tau = 0$ .

En cualquier caso  $G_1 + G_2$  tiene en  $\tau = 0$  un extremo y por tanto

$$\frac{\partial(G_1 + G_2)}{\partial \tau}(0) = 0.$$

Claramente  $G_3$  es una función constante en  $\tau$  de modo que

$$\frac{\partial G_3}{\partial \tau}(0) = 0.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_A}{\partial \tau}(0) &= - \int_Q g(x, t) \frac{\partial}{\partial t} [F(0, q(x, t)) \xi(x, t)] \\ &- \alpha \int_Q \frac{\partial}{\partial s_2} \mathcal{F}(p(x, t), q(x, t)) \frac{\partial q}{\partial t}(x, t) \xi(x, t) - \alpha \int_Q \mathcal{F}(p(x, t), q(x, t)) \xi_t(x, t). \end{aligned}$$

Substituyendo en (1.17)  $\frac{\partial G}{\partial \tau}(0)$  por el valor calculado se obtiene

$$\begin{aligned} &\int_Q (\nabla p + ge) \nabla (F(p, q) \xi) - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} (F(p, q) \xi) \\ &- \int_Q \left\{ g(F(0, q) \xi)_t + \alpha \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_2}(p, q) q_t \xi + \alpha \mathcal{F}(p, q) \xi_t \right\} = \\ &= \int_Q (\nabla p + ge) \nabla (F(0, q) \xi) - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} (F(0, q) \xi) - \int_Q (g + \alpha p) \frac{\partial}{\partial t} (F(0, q) \xi) \end{aligned}$$

de donde simplificando se obtiene (1.14).

Si  $F(0, q) \xi = 0$  en  $\Sigma^D$  podemos tomar  $\zeta = F(p, q) \xi$  y obtenemos (1.15) #

Utilizamos este lema para obtener varios resultados de regularidad de la solución de (P).

**Proposición 1.5** Sean  $(p, g)$  solución de  $(P_{\hat{\beta}}^*)$  entonces

$$\alpha p \in C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

*Demostración.*- También en [14] puede verse la demostración de este resultado en el caso de tener condiciones de contorno de tipo Dirichlet en  $\Sigma^W$ . La demostración que hacemos aquí es la misma, pero resulta más corta al no tener el dato de contorno Dirichlet.

Apliquemos el lema anterior con  $F(s_1, s_2) = s_1$  y  $\xi \in \mathcal{D}(0, T)$ ,  $\xi \geq 0$

$$\int_{\Sigma^W} \hat{\beta} p \xi = \int_Q [(\nabla p + ge) \nabla p \xi - \alpha \frac{p^2}{2} \xi_t].$$

Como  $\xi$  no depende de  $x$  podemos escribir

$$\begin{aligned} &\int_0^T \xi \left[ \int_{\Gamma^W} \hat{\beta} p - \int_{\Omega} (\nabla p + ge) \nabla p \right] = -\frac{\alpha}{2} \int_0^T \xi_t \int_{\Omega} p^2 = \\ &= -\frac{\alpha}{2} \int_0^T \xi_t \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{\alpha}{2} < \frac{d}{dt} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2, \xi \in \mathcal{D}'(0, T) \times \mathcal{D}(0, T), \end{aligned}$$

es decir

$$\int_0^T \xi \left[ \int_{\Gamma^W} \hat{\beta} p - \int_{\Omega} (\nabla p + ge) \nabla p \right] = \frac{\alpha}{2} < \frac{d}{dt} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2, \xi \in \mathcal{D}'(0, T) \times \mathcal{D}(0, T)$$



y por tanto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha}{2} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \int_{\Gamma^w} \hat{\beta} p - \int_{\Omega} (\nabla p + ge) \nabla p$$

en sentido de  $\mathcal{D}'(0, T)$ . Ahora bién, la función

$$t \longrightarrow \int_{\Gamma^w} \hat{\beta} p - \int_{\Omega} (\nabla p + ge) \nabla p$$

es un función de  $L^1(0, T)$  de modo que la función

$$t \longrightarrow \frac{\alpha}{2} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2$$

es una función de  $W^{1,1}(0, T) \subset C([0, T])$ . Se tiene entonces que

$$\alpha p \in C([0, T]; L^2(\Omega)). \quad \#$$

**Observación 1.6** En el caso incompresible ( $\alpha = 0$ ) no es cierto en general que  $p$  sea continua (ver [19]).

La siguiente proposición es otro resultado de regularidad de  $p$ .

**Proposición 1.7** Sean  $(p, g)$  solución de  $(P_{\beta, \phi, g^0 + \alpha p^0})$ ; si  $\alpha p^0 \in L^\infty(\Omega)$  entonces  $p \in L^\infty(Q)$ . En particular en el caso incompresible ( $\alpha = 0$ ) se tiene  $p \in L^\infty(Q)$ .

*Demostración.*- Sea  $C > 0$  una constante real tal que

$$C - x_N \geq \max(\|p^0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\phi\|_{L^\infty(Q)}),$$

para todo  $x_N \in \mathbb{R}$  tal que  $(x', x_N) \in \Omega$  para algún  $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ . Llamemos  $q$  a la función  $q(x) = C - x_N$  y sea  $F(p, q) = (p - q)^+$ . Sea  $\xi_\delta$  la función

$$\xi_\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t \leq \delta \\ \frac{t - \delta}{\delta} & \text{si } \delta < t \leq 2\delta \\ 1 & \text{si } 2\delta < t \leq T - 2\delta \\ \frac{(T - \delta) - t}{\delta} & \text{si } T - 2\delta < t \leq T - \delta \\ 0 & \text{si } T - \delta < t < T \end{cases}$$

Aplicando el lema 1.4 obtenemos que se verifica

$$\int_Q (\nabla p + e) \nabla F(p, q) \xi_\delta - \int_{\Sigma^w} \beta(\phi - p) F(p, q) \xi_\delta$$

$$-\alpha \left( \frac{1}{\delta} \int_{\delta}^{2\delta} \int_{\Omega} \mathcal{F}(p, q) - \frac{1}{\delta} \int_{t-2\delta}^{T-\delta} \int_{\Omega} \mathcal{F}(p, q) \right) = 0$$

donde

$$\mathcal{F}(p, q) = \frac{[(p - q)^+]^2}{2} = \frac{[F(p, q)]^2}{2}.$$

Como ya vimos que  $\alpha p \in C([0, T]; L^2(\Omega))$  al pasar al límite cuando  $\delta$  tiende a cero tenemos

$$\begin{aligned} & \int_Q (\nabla p + e) \nabla F(p, q) - \int_{\Sigma^W} \beta(\phi - p) F(p, q) \\ & - \alpha \left( \frac{1}{2} \|F(p, q)(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|F(p, q)(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

y como  $\beta(\phi - p)(p - q)^+ \leq 0$  tenemos

$$\int_Q (\nabla p + e) \nabla F(p, q) - \alpha \left( \frac{1}{2} \|F(p, q)(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|F(p, q)(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq 0.$$

Por otra parte  $q$  verifica

$$\int_Q (\nabla q + e) \nabla F(p, q) = 0$$

por lo tanto

$$\int_Q \nabla(p - q) \nabla F(p, q) - \alpha \left( \frac{1}{2} \|F(p, q)(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|F(p, q)(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq 0$$

es decir

$$\|\nabla(p - q)^+\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|(p - q)^+(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$$

ya que  $\|(p - q)^+(0)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ .

Puesto que  $(p - q)^+ = 0$  en  $\Sigma^D$  se deduce que  $(p - q)^+ = 0$  c.p.t.  $(x, t) \in Q$ , por lo cual  $p \leq q$  c.p.t.  $(x, t) \in Q$ . #

**Observación 1.8** En la proposición anterior se ha encontrado una cota para  $\|p\|_{L^\infty(Q)}$  que depende de  $\alpha\|p^0\|_{L^\infty(\Omega)}$ , de  $\phi$  y del dominio  $\Omega$  pero que no depende de  $\beta$

## 1.2.2 Condiciones de contorno de tipo Dirichlet como caso límite

Llamemos  $(P_{\infty, \phi, g^0 + \alpha p^0})$  al problema de la filtración de un fluido en un medio poroso con condiciones de contorno de tipo Dirichlet en  $\Sigma^W \cup \Sigma^D$ . Demostraremos que este problema puede entenderse como el límite del problema con condiciones de contorno sobre el flujo si hacemos tender a infinito la función  $\beta$ , que representa la permeabilidad de la frontera  $\Sigma^W$ .

**Proposición 1.9** Sea  $\{\varepsilon\}$  una sucesión de números reales positivos que tiende a cero y sean  $(p_\varepsilon, g_\varepsilon)$  solución de  $(P_{\beta_\varepsilon, \phi, g^0 + \alpha p^0})$ , con  $\beta_\varepsilon(s) = s/\varepsilon$ ; entonces la sucesión  $\{(p_\varepsilon, g_\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$  converge débilmente en  $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(Q)$  hacia una solución de  $(P_{\infty, \phi, g^0 + \alpha p^0})$ .

*Demostración.*- Comenzamos estableciendo distintas acotaciones a priori de  $p_\varepsilon$  y  $g_\varepsilon$  que nos permitirán, mediante argumentos de compacidad, pasar al límite cuando  $\varepsilon$  tiende a cero.

Sea  $F(s_1, s_2) = s_1$  y  $\xi = \xi_\delta$  como en la proposición anterior. Por el lema 1.4 sabemos que se verifica:

$$\int_Q (\nabla p_\varepsilon + g_\varepsilon e) \nabla p_\varepsilon \xi_\delta - \int_{\Sigma^W} \frac{\phi - p_\varepsilon}{-\varepsilon} p_\varepsilon \xi_\delta - \frac{\alpha}{2} \int_Q p_\varepsilon^2 (\xi_\delta)_t = 0.$$

Pasando al límite cuando  $\delta$  tiende a cero se obtiene

$$\int_Q (\nabla p_\varepsilon + g_\varepsilon e) \nabla p_\varepsilon - \int_{\Sigma^W} \frac{\phi - p_\varepsilon}{-\varepsilon} p_\varepsilon - \frac{\alpha}{2} [\|p_\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|p_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)}^2] = 0. \quad (1.18)$$

Por otra parte, al ser  $(p_\varepsilon, g_\varepsilon)$  solución de  $(P_{\beta_\varepsilon, \phi, g^0 + \alpha p^0})$ , verifica para cualquier función  $\xi \in H^1(Q)$  tal que  $\xi(x, 0) = \xi(x, T) = 0$  c.t.p.  $x \in \Omega$  y  $\xi = 0$  en  $\Sigma^D$

$$\int_Q (\nabla p_\varepsilon + g_\varepsilon e) \nabla \xi - \int_{\Sigma^W} \frac{\phi - p_\varepsilon}{\varepsilon} \xi - \int_Q (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon) \xi_t = 0.$$

En particular puesto que  $\phi = 0$  en  $\Sigma^D$  podemos tomar  $\xi = \phi \xi_\delta$

$$\int_Q (\nabla p_\varepsilon + g_\varepsilon e) \nabla \phi \xi_\delta - \int_{\Sigma^W} \frac{\phi - p_\varepsilon}{\varepsilon} \phi \xi_\delta - \int_Q (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon) (\phi_t \xi_\delta + \phi (\xi_\delta)_t) = 0$$

de donde haciendo tender  $\delta$  a cero se tiene, puesto que  $g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon \in C^0([0, 1]; V')$

$$\left. \begin{aligned} & \int_Q (\nabla p_\varepsilon + g_\varepsilon e) \nabla \phi - \int_{\Sigma^W} \frac{\phi - p_\varepsilon}{\varepsilon} \phi - \int_Q (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon) \phi_t \\ & - \int_\Omega (g^0 + \alpha p^0) \phi(0) + \int_\Omega (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon)(T) \phi(T) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Haciendo la diferencia entre (1.18) y (1.19) obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_Q (\nabla p_\varepsilon + g_\varepsilon e) \nabla (p_\varepsilon - \phi) - \int_{\Sigma^W} \frac{\phi - p_\varepsilon}{\varepsilon} (p_\varepsilon - \phi) + \int_Q (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon) \phi_t = \\ & = \frac{\alpha}{2} [\|p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|p_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)}^2] + \int_\Omega (g^0 + \alpha p^0) \phi(0) - \int_\Omega (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon)(T) \phi(T). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $-\int_{\Sigma^W} \frac{\phi - p_\varepsilon}{\varepsilon} (p_\varepsilon - \phi) \geq 0$  obtenemos la siguiente acotación:

$$\|\nabla p_\varepsilon\|_{(L^2(Q))^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|p_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_Q (\nabla p_\varepsilon + g_\varepsilon e) \nabla \phi - \int_Q g_\varepsilon \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x_N} - \int_Q (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon) \phi_t + \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} \|p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega (g^0 + \alpha p^0) \phi(0) \leq \\
&\leq C_1 \|\nabla p_\varepsilon\|_{(L^2(Q))^N} + \alpha C_2 \|p_\varepsilon\|_{L^2(Q)} + C_3.
\end{aligned}$$

Puesto que  $p_\varepsilon$  se anula en  $\Sigma^D$ , la desigualdad de Poincaré nos permite acotar

$$\|p_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq C \|\nabla p_\varepsilon\|_{(L^2(Q))^N}$$

donde  $C$  es una constante independiente de  $\varepsilon$  y de este modo obtenemos

$$\|\nabla p_\varepsilon\|_{(L^2(Q))^N} \leq C. \quad (1.20)$$

Si tomamos  $\xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  como función test en  $(P_{\beta_\varepsilon, \phi, g^0 + \alpha p^0})$  tenemos

$$\langle (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon)_t, \xi \rangle = - \int_Q (\nabla p_\varepsilon + g_\varepsilon e) \nabla \xi,$$

de donde, usando (1.20)

$$\begin{aligned}
|\langle (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon)_t, \xi \rangle| &\leq \|\nabla p_\varepsilon\|_{(L^2(Q))^N} \|\nabla \xi\|_{(L^2(Q))^N} + C \|\nabla \xi\|_{(L^2(Q))^N} \leq \\
&\leq C' \|\nabla \xi\|_{(L^2(Q))^N},
\end{aligned}$$

es decir

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon) \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C'. \quad (1.21)$$

Sea

$$W = \left\{ \xi \mid \xi \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \frac{\partial}{\partial t} \xi \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \right\}.$$

Las acotaciones (1.20) y (1.21) nos proporcionan una cota uniforme de  $g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon$  en  $W$ . Este espacio  $W$  está contenido en  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  con inyección compacta, de modo que existe una subsucesión de  $\{g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  fuertemente convergente en  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .

De la acotación (1.20) y la desigualdad de Poincaré obtenemos una acotación uniforme de la norma de  $p_\varepsilon$  en  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  y por tanto es posible extraer una subsucesión débilmente convergente en  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  hacia un límite  $\bar{p}$ . Por otra parte, al ser  $\|g_\varepsilon\|_{L^\infty(Q)} \leq 1$  existe también una subsucesión de  $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  débilmente convergente en  $L^2(Q)$  hacia  $\bar{g}$ .

En definitiva podemos extraer una subsucesión de  $\{(g_\varepsilon, p_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$  (que seguiremos llamando  $\{(g_\varepsilon, p_\varepsilon)\}_\varepsilon$ ) que verifica

$$\begin{aligned} p_\varepsilon &\rightharpoonup \bar{p} && \text{en } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ g_\varepsilon &\rightharpoonup \bar{g} && \text{en } L^2(Q), \\ g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon &\rightarrow \bar{g} + \alpha \bar{p} && \text{en } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Hemos de demostrar ahora que este par  $(\bar{p}, \bar{g})$  es solución de  $(P_{\infty, \phi, g^0 + \alpha p^0})$ .

Como los conjuntos  $\{\xi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \mid \xi \geq 0 \text{ c.t.p. } (x, t) \in Q\}$  y  $\{\xi \in L^2(Q) \mid 0 \geq \xi \geq 1 \text{ c.t.p. } (x, t) \in Q\}$  son cerrados y convexos, son débilmente cerrados en los espacios correspondientes y por tanto se verifica también  $\int_Q (1 - \bar{g})\bar{p} \geq 0$ .

De la convergencia fuerte en  $L^2(0, T; H^{-1})$  de  $g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon$  se obtiene que para toda  $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\xi \geq 0$

$$\int_Q (1 - (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon))p_\varepsilon \xi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q (1 - (\bar{g} + \alpha \bar{p}))\bar{p} \xi.$$

Además, por ser  $(g_\varepsilon, p_\varepsilon)$  solución de  $(P_{\beta_\varepsilon, \phi, g^0 + \alpha p^0})$

$$\int_Q (1 - g_\varepsilon)p_\varepsilon = 0 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

de modo que

$$-\alpha \int_Q p_\varepsilon^2 \xi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q (1 - (\bar{g} + \alpha \bar{p}))\bar{p} \xi.$$

Por otra parte, de la convergencia débil de  $p_\varepsilon$  en  $L^2(0, T; H^1)$  se obtiene que

$$\int_Q \bar{p}^2 \xi \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q p_\varepsilon^2 \xi$$

y por tanto

$$-\alpha \int_Q \bar{p}^2 \xi \geq -\alpha \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q p_\varepsilon^2 \xi = \int_Q (1 - \bar{g})\bar{p} \xi - \alpha \int_Q \bar{p}^2 \xi$$

de donde  $\forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\int_Q (1 - \bar{g})\bar{p} \xi = 0$ , es decir

$$\int_Q (1 - \bar{g})\bar{p} = 0.$$

Sea  $\xi \in H^1(Q)$  tal que  $\xi(x, T) = 0$  c.t.p.  $x \in \Omega$ ,  $\xi = 0$  c.t.p. en  $\Sigma^W$  y  $\xi \geq 0$  en  $\Sigma^D$ . Para cada  $\varepsilon$  se verifica

$$\int_Q (\nabla p_\varepsilon + g_\varepsilon e) \nabla \xi - \int_Q (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon) \xi_t \leq \int_\Omega (g^0 + \alpha p^0) \xi(0).$$

Pasando al límite cuando  $\varepsilon$  tiende a cero:

$$\int_Q (\nabla \bar{p} + \bar{g}e) \nabla \xi - \int_Q (\bar{g} + \alpha \bar{p}) \xi_t \leq \int_\Omega (g^0 + \alpha p^0) \xi(0).$$

Por último, para ver que  $\bar{p}$  coincide con  $\phi$  en  $\Sigma^W$  hagamos la diferencia entre (1.21) y (1.20).

$$\begin{aligned} & \int_Q (\nabla p_\varepsilon + g_\varepsilon e) \nabla (\phi - p_\varepsilon) - \int_{\Sigma^W} \frac{(\phi - p_\varepsilon)^2}{\varepsilon} = \\ & = \int_Q (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon) \phi_t - \frac{\alpha}{2} [\|p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|p_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)}^2] \\ & \quad - \int_\Omega (g^0 + \alpha p^0) \phi(0) + \int_\Omega (g + \alpha p)(T) \phi(T). \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma^W} (\phi - p_\varepsilon)^2 = \varepsilon \left( \int_Q (\nabla p_\varepsilon + g_\varepsilon e) \nabla (\phi - p_\varepsilon) \right. \\ & \quad - \int_Q (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon) \phi_t + \frac{\alpha}{2} [\|p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|p_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)}^2] + \\ & \quad \left. + \int_\Omega (g^0 + \alpha p^0) \phi(0) - \int_\Omega (g + \alpha p)(T) \phi(T) \right) \leq \\ & \leq \varepsilon \left( \int_Q (\nabla p_\varepsilon + g_\varepsilon e) \nabla (\phi - p_\varepsilon) - \int_Q (g_\varepsilon + \alpha p_\varepsilon) \phi_t + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\alpha}{2} \|p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega (g^0 + \alpha p^0) \phi(0) \right). \end{aligned}$$

Todo el término entre paréntesis a la derecha, está uniformemente acotado en  $\varepsilon$  de modo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\phi - p_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma^W)} = 0.$$

Puesto que la traza en  $\Sigma^W$  es un operador lineal y continuo de  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  en  $L^2(\Sigma^W)$  es débilmente continuo, de manera que

$$\bar{p} = \phi \text{ en } \Sigma^W \quad \#$$

**Observación 1.10** Si  $\alpha \neq 0$  se verifica además que

$$p_\varepsilon \rightarrow \bar{p} \text{ en } L^2(Q)$$

pues

$$p_\varepsilon \rightarrow \bar{p} \text{ en } L^2(Q)$$

y

$$\alpha \|p_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \rightarrow \alpha \|\bar{p}\|_{L^2(Q)}.$$

### 1.3 Existencia de solución

Para demostrar que existe al menos una solución del problema  $(P)$ , vamos a utilizar un método de semidiscretización: fijemos un número natural  $M$  y sean  $\tau = T/M$ ,  $t_n = n\tau$ . Planteamos el siguiente problema semidiscreto, al que llamaremos  $(P_\tau)$ :

Hallar una familia de funciones  $\{(p_n, g_n)\}_{n=0}^M$  tal que

$$g_0 + \alpha p_0 = g^0 + \alpha p^0 \quad (1.22)$$

y  $\forall n = 1, \dots, M$

$$(p_n, g_n) \in V \times L^\infty(\Omega) \quad (1.23)$$

$$p_n \geq 0 \quad (1.24)$$

$$\int_{\Omega} (1 - g_n) p_n = 0 \quad (1.25)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (g_n + \alpha p_n) \xi + \int_{\Omega} (\nabla p_n + g_n e) \nabla \xi \leq \\ & \leq \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (g_{n-1} + \alpha p_{n-1}) \xi + \int_{\Gamma_W} \beta(\phi(t_n) - p_n) \xi \\ & \forall \xi \in H^1(\Omega) \text{ tal que } \xi \geq 0 \text{ en } \Gamma^D \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Tenemos en cada paso una inecuación variacional elíptica de la forma

$$\frac{1}{\tau} \int_{\Omega} [(g_n + \alpha p_n) \xi + (\nabla p_n + g_n e) \nabla \xi] \leq \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} f_{n-1} \xi + \int_{\Gamma_W} \beta(\phi(t_n) - p_n) \xi$$

$\forall \xi \in H^1(\Omega)$  tal que  $\xi \geq 0$  en  $\Gamma^D$ , donde  $f_{n-1} = g_{n-1} + \alpha p_{n-1}$  es una función conocida que está en el espacio  $L^2(\Omega)$  y es no negativa.

Para resolver en cada paso este problema elíptico seguimos el argumento de [18]. Sea  $H_\varepsilon$  la aproximación del grafo de Heaviside definida

$$H_\varepsilon(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0 \\ s/\varepsilon & \text{si } 0 \leq s \leq \varepsilon \\ 1 & \text{si } \varepsilon \leq s \end{cases}$$

Consideremos el siguiente problema regularizado  $(P_{\tau,\varepsilon})$

Hallar  $q_\varepsilon \in V$  tal que

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (H_\varepsilon(q_\varepsilon) + \alpha q_\varepsilon) \xi + \int_{\Omega} (\nabla q_\varepsilon + H_\varepsilon(q_\varepsilon) e) \nabla \xi = \\ & = \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} f_{n-1} \xi + \int_{\Gamma_W} \beta(\phi(t_n) - q_\varepsilon) \xi \end{aligned} \right\}$$

$\forall \xi \in H^1(\Omega)$  tal que  $\xi = 0$  en  $\Gamma^D$ .

El primer resultado que probaremos es la existencia de solución para este problema regularizado.

**Proposición 1.11** *Sea  $\beta$  continua, monótona creciente, que verifica  $\beta(0) = 0$  y para dos constantes  $a$  y  $b$*

$$|\beta(s)| \leq a|s| + b \quad \forall s \in \mathbb{R};$$

*Entonces para todo  $\varepsilon > 0$ , existe una única solución  $q_\varepsilon$  del problema  $(P_{\tau,\varepsilon})$ . Además  $q_\varepsilon \geq 0$  c.t.p.  $x \in \Omega$ .*

*Demostración.-* Definimos el operador  $T : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$  del siguiente modo: a cada  $q \in L^2(\Omega)$  le hace corresponder  $T(q) = p$  solución del problema  $(P_{\tau,\varepsilon,q})$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\tau} \int_{\Omega} p \xi + \int_{\Omega} \nabla p \nabla \xi - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} f_{n-1} \xi - \int_{\Gamma^W} \beta(\phi(t_n) - p) \xi = \\ = - \int_{\Omega} H_\varepsilon(q) \left( \frac{1}{\tau} \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x_N} \right) \end{aligned}$$

para todo  $\xi \in V$ .

Paso 1.- La aplicación  $T$  está bien definida:

Sea  $\mathcal{B}$  la función definida

$$\mathcal{B}(s) = \int_0^s \beta(\sigma) d\sigma$$

y sea  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  el funcional definido

$$J(\xi) = f(\xi) + j(\xi)$$

donde

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\tau} \int_{\Omega} \xi^2 + \int_{\Omega} |\nabla \xi|^2 \right) - \int_{\Omega} f_{n-1} \xi + \int_{\Omega} H_\varepsilon(q) \left( \frac{1}{\tau} \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x_N} \right) \\ j(\xi) &= \int_{\Gamma^W} \mathcal{B}(\phi(t_n) - \xi). \end{aligned}$$

Claramente  $f$  es convexa y continua. También  $j$  es convexa porque  $\mathcal{B}$  lo es; veamos que es semicontinua inferiormente.

De la hipótesis de crecimiento sobre  $\beta$  se deduce que

$$0 \leq \mathcal{B}(s) \leq \frac{a}{2} s^2 + b|s|,$$

de modo que dada  $\xi \in L^2(\Gamma^W)$ ,  $\mathcal{B}(\xi) \in L^1(\Gamma^W)$ .

Sea  $\xi_k$  una sucesión de funciones de  $V$  que convergen en norma hacia  $\xi_0$ ; en ese caso  $\xi_k|_{\Gamma^W} \rightarrow \xi_0|_{\Gamma^W}$  en  $L^2(\Gamma^W)$  y por lo tanto, en casi todo punto. Se tiene entonces que



- $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathcal{B}(\phi(t_n) - \xi_k)(\sigma)| = |\mathcal{B}(\phi(t_n) - \xi_0)(\sigma)| \geq 0$  c.t.p.  $\sigma \in \Gamma^W$ .
- $\sup_k \int_{\Gamma^W} |\mathcal{B}(\phi(t_n) - \xi_k)(\sigma)| \leq \sup_k \int_{\Gamma^W} [a|\phi(t_n) - \xi_k|^2 + b|\phi(t_n) - \xi_k|] < \infty$

Por el lema de Fatou

$$\int_{\Gamma^W} \mathcal{B}(\phi(t_n) - \xi_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Gamma^W} \mathcal{B}(\phi(t_n) - \xi_k).$$

Hemos visto entonces que  $J$  es convexa y semicontinua inferiormente. Además  $J$  es coercitiva ya que al ser  $\mathcal{B}(s) \geq 0$  para todo  $s$  resulta

$$J(\xi) \geq c_1 \|\xi\|_{H^1(\Omega)}^2 + c_2 \|\xi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Por tanto existe  $p \in V$  tal que

$$J(p) \leq J(\xi) \quad \forall \xi \in V.$$

Veamos ahora que  $J$  es diferenciable Gateaux (en realidad solo hay que ver que  $j$  lo es).

Dadas dos funciones  $\xi, \zeta \in V$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [j(\xi + \lambda\zeta) - j(\xi)] &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\Gamma^W} \frac{\mathcal{B}(\phi(t_n) - \xi - \lambda\zeta) - \mathcal{B}(\phi(t_n) - \xi)}{\lambda\zeta} (-\zeta) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\Gamma^W} \beta(\phi(t_n) - \xi - \rho_\lambda \lambda\zeta) (-\zeta) \end{aligned}$$

donde  $0 < \rho_\lambda < 1$ .

Se verifica que

- $\beta(\phi(t_n) - \xi - \rho_\lambda \lambda\zeta) (-\zeta) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \beta(\phi(t_n) - \xi) (-\zeta)$  c.t.p. en  $\Gamma^W$ .
- $|\beta(\phi(t_n) - \xi - \rho_\lambda \lambda\zeta) (-\zeta)| \leq [a|\phi(t_n) - \xi - \rho_\lambda \lambda\zeta| + b] |\zeta| \leq$   
 $\leq [a(|\phi(t_n) - \xi| + |\zeta|) + b] |\zeta| \in L^1(\Gamma^W)$

por lo tanto, en virtud del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [j(\xi + \lambda\zeta) - j(\xi)] = - \int_{\Gamma^W} \beta(\phi(t_n) - \xi) \zeta.$$

Si llamamos  $J'$  a la derivada Gateaux de  $J$  se tiene, para toda función  $\zeta \in V$

$$0 = \langle J'(p), \zeta \rangle_{V' \times V} = \frac{\alpha}{\tau} \int_{\Omega} p \zeta + \int_{\Omega} \nabla p \nabla \zeta -$$

$$-\frac{1}{\tau} \int_{\Omega} f_{n-1} \zeta + \int_{\Omega} H_{\epsilon}(q) \left( \frac{1}{\tau} \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x_N} \right) - \int_{\Gamma^w} \beta(\phi(t_n) - p) \zeta.$$

Esto prueba que el problema  $(P_{\tau, \epsilon, q})$  tiene solución, pero además la solución es única. En efecto, si hubiera dos soluciones  $p, p' \in V$  se verificaría para todo  $\zeta \in V$

$$\frac{\alpha}{\tau} \int_{\Omega} (p - p') \zeta + \int_{\Omega} \nabla(p - p') \nabla \zeta - \int_{\Gamma^w} [\beta(\phi(t_n) - p) - \beta(\phi(t_n) - p')] \zeta = 0.$$

Si tomamos  $\zeta = p - p'$  como  $\beta$  es monótona

$$- \int_{\Gamma^w} [\beta(\phi(t_n) - p) - \beta(\phi(t_n) - p')] (p - p') \geq 0$$

de modo que

$$\frac{\alpha}{\tau} \|p - p'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(p - p')\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 \leq 0$$

y por tanto  $p = p'$ .

Paso 2.- La aplicación  $T$  tiene un punto fijo.

-  $T$  es continua:

Dadas  $q, q' \in L^2(\Omega)$  sean  $p = T(q), p' = T(q')$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\tau} \|p - p'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(p - p')\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 \leq \\ & \leq \int_{\Gamma^w} [\beta(\phi(t_n) - p) - \beta(\phi(t_n) - p')] (p - p') + \\ & + \|H_{\epsilon}(q) - H_{\epsilon}(q')\|_{L^2(\Omega)} \left( \frac{1}{\tau} \|p - p'\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(p - p')\|_{(L^2(\Omega))^N} \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{\epsilon} \|q - q'\|_{L^2(\Omega)} \left( \frac{1}{\tau} \|p - p'\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(p - p')\|_{(L^2(\Omega))^N} \right). \end{aligned}$$

-  $T(L^2(\Omega))$  es un subconjunto precompacto de  $L^2(\Omega)$ :

Veamos primero que  $T(L^2(\Omega))$  es un subconjunto acotado de  $V$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\tau} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla p\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 \leq \frac{1}{\tau} \|f_{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \|p\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Gamma^w} \beta(\phi(t_n) - p) p + \\ & + |\Omega|^{1/2} \left( \frac{1}{\tau} \|p\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla p\|_{(L^2(\Omega))^N} \right). \end{aligned}$$

Por la monotonía de  $\beta$  y por ser  $\phi(t_n) \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_w} \beta(\phi(t_n) - p)p &= \int_{\Gamma_w} \beta(\phi(t_n) - p)\phi(t_n) - \int_{\Gamma_w} \beta(\phi(t_n) - p)(\phi(t_n) - p) \leq \\ &\leq \int_{\Gamma_w} \beta(\phi(t_n))\phi(t_n) \leq C, \end{aligned}$$

lo que nos permite acotar

$$\frac{\alpha}{\tau} \|p\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla p\|_{(L^2(\Omega))^N} \leq C.$$

Puesto que  $T(L^2(\Omega))$  es un acotado de  $V$  y la inyección de  $V$  en  $L^2(\Omega)$  es compacta, deducimos que efectivamente  $T(L^2(\Omega))$  es un subconjunto precompacto de  $L^2(\Omega)$ .

Se deduce, por el teorema de punto fijo de Schauder, que  $T$  tiene un punto fijo,  $q_\varepsilon$  que será solución del problema  $(P_{\tau,\varepsilon})$

Paso 3.- El problema  $(P_{\tau,\varepsilon})$  tiene una única solución

Para ver la unicidad seguiremos el argumento empleado por H. Brezis, D. Kinderlehrer y G. Stampacchia en [10]. Consideremos la función

$$g_\delta(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\delta}{x}\right)^+ & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Si  $q$  y  $q'$  son dos soluciones del problema  $(P_{\tau,\varepsilon})$ , tomemos como función test  $g_\delta(q - q')$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \nabla(q - q') \nabla g_\delta(q - q') + \frac{\alpha}{\tau} \int_{\Omega} (q - q') g_\delta(q - q') = \\ &= - \int_{\Omega} (H_\varepsilon(q) - H_\varepsilon(q')) \left( \frac{1}{\tau} g_\delta(q - q') + \frac{\partial}{\partial x_n} g_\delta(q - q') \right) + \\ &\quad + \int_{\Gamma_w} (\beta(\phi(t_n) - q) - \beta(\phi(t_n) - q')) g_\delta(q - q'). \end{aligned}$$

Por la definición de  $g_\delta$  y la monotonía de  $\beta$  de la anterior igualdad se deduce que

$$\int_{\Omega} \nabla(q - q') \nabla g_\delta(q - q') \leq - \int_{\Omega} (H_\varepsilon(q) - H_\varepsilon(q')) \frac{\partial}{\partial x_n} g_\delta(q - q'). \quad (1.27)$$

Teniendo en cuenta la lipschitzianidad de  $H_\varepsilon$

$$|H_\varepsilon(q) - H_\varepsilon(q')| \leq \frac{1}{\varepsilon} |q - q'|;$$

por otra parte llamando  $Q = q - q'$

$$\frac{\partial}{\partial x_N} g_\delta(Q) = \begin{cases} 0 & \text{si } Q \leq 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x_N} \frac{\delta}{Q^2} & \text{si } Q > 0 \end{cases}$$

de modo que, de la desigualdad (1.27) se deduce

$$\int_{\{Q>\delta\}} \frac{|\nabla Q|^2}{Q^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{Q>\delta\}} \frac{|\nabla Q|}{Q} \leq \frac{|\Omega|^{1/2}}{\varepsilon} \left( \int_{\{Q>\delta\}} \frac{|\nabla Q|^2}{Q^2} \right)^{1/2}.$$

Puesto que

$$\int_{\Omega} \left| \nabla \ln \left( 1 + \frac{(Q - \delta)^+}{\delta} \right) \right|^2 = \int_{\{Q>\delta\}} \left( \frac{|\nabla Q|}{Q} \right)^2 \leq \frac{|\Omega|}{\varepsilon^2},$$

por la desigualdad de Poincaré se obtiene que

$$\left\| \ln \left( 1 + \frac{(Q - \delta)^+}{\delta} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C$$

donde  $C$  es una constante que no depende de  $\delta$ . Haciendo tender  $\delta$  a cero se deduce que  $Q \leq 0$  c.t.p.  $x \in \Omega$ . Puesto que el razonamiento puede repetirse tomando  $q' - q$  se deduce que  $Q = 0$  c.t.p.  $x \in \Omega$ .

Por último, para ver que  $q_\varepsilon$  es mayor que cero tomemos como función test  $\xi = -q_\varepsilon^- = \min\{0, q_\varepsilon\}$

$$\frac{\alpha}{\tau} \int_{\Omega} q_\varepsilon(-q_\varepsilon^-) + \int_{\Omega} \nabla q_\varepsilon \nabla(-q_\varepsilon^-) = \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} f_{n-1}(-q_\varepsilon^-) + \int_{\Gamma^W} \beta(\phi(t_n) - q_\varepsilon)(-q_\varepsilon^-) \leq 0$$

es decir

$$\frac{\alpha}{\tau} \|q_\varepsilon^-\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla q_\varepsilon^-\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 \leq 0$$

y por tanto  $q_\varepsilon^- = 0$  c.t.p.  $x \in \Omega$ . #

**Observación 1.12** Es posible debilitar la hipótesis sobre el crecimiento de  $\beta$ . Es suficiente que se verifique que dadas dos funciones  $\xi$  y  $\zeta$  en  $V$  se tenga

$$\beta(\phi(t_n) - \xi)\zeta \in L^1(\Gamma^W).$$

Si  $\xi \in H^1(\Omega)$  entonces  $\xi|_{\Gamma^W} \in H^{1/2}(\Gamma^W)$  y según las inclusiones de Sobolev

- Si  $N > 2$  entonces  $H^{1/2}(\Gamma^W) \subset L^r(\Gamma^W)$  para todo  $r$  que verifique  $2 \leq r \leq \frac{(N-1)2}{N-2}$ .

- Si  $N = 2$  entonces  $H^{1/2}(\Gamma^W) \subset L^r(\Gamma^W)$  para todo  $r$  que verifique  $2 \leq r < \infty$ .

Para tener  $\beta(\phi(t_n) - \xi)\zeta \in L^1(\Gamma^W)$  es suficiente pedir  $\beta(\phi(t_n) - \xi) \in L^{r'}$  con  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$  ( $r' = r/(r-1)$ ). Si tenemos para  $\beta(s)$  una acotación de la forma  $|\beta(s)| \leq a|s|^c + b$  entonces

$$\phi(t_n) - \zeta \in L^r \Rightarrow \beta(\phi(t_n) - s) \in L^{r/c} \subset L^{r'}$$

si  $r' \leq \frac{r}{c}$  es decir  $c \leq r - 1$ .

De modo que para demostrar la existencia de solución de  $(P_{\varepsilon, \tau})$  es suficiente pedir

$$|\beta(s)| \leq a|s|^c + b$$

con

$$c \leq \frac{N}{N-2} \quad \text{si } N > 2$$

$$c < \infty \quad \text{si } N = 2.$$

Haciendo tender  $\varepsilon$  a cero se obtiene la existencia de solución del problema  $(P_\tau)$ .

**Proposición 1.13** *Sea  $\beta$  continua, monótona creciente, que verifica  $\beta(0) = 0$  y para dos constantes  $a$  y  $b$*

$$|\beta(s)| \leq a|s| + b \quad \forall s \in \mathbb{R};$$

*Entonces el problema  $(P_\tau)$  tiene solución.*

*Demostración.*- Razonamos por inducción. Supongamos calculado el par  $(p_{n-1}, g_{n-1})$ ; para calcular  $(p_n, g_n)$  resolvemos primero el correspondiente problema regularizado, obteniendo así una sucesión de funciones  $\{q_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset V$  de la que además sabemos que verifica

$$\|q_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C.$$

También  $H_\varepsilon(q_\varepsilon)$  está uniformemente acotada, de modo que por argumentos clásicos de compacidad podemos obtener una subsucesión (a la que seguiremos llamando  $\{q_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ) tal que:

$$\begin{aligned} q_\varepsilon &\rightharpoonup p_n \quad \text{en } H^1(\Omega), \\ q_\varepsilon &\rightarrow p_n \quad \text{en } L^2(\Omega), \\ q_\varepsilon &\rightarrow p_n \quad \text{en } L^2(\Gamma^W), \\ H_\varepsilon(q_\varepsilon) &\rightharpoonup g_n \quad \text{en } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Puesto que los conjuntos

$$\{q \in V \mid q(x) \geq 0 \text{ c.t.p. } x \in \Omega\}$$

$$\{g \in L^\infty(\Omega) \mid 0 \leq g \leq 1 \text{ c.t.p. } x \in \Omega\}$$

son cerrados y convexos, son débilmente cerrados de modo que también se verifica  $p_n(x) \geq 0$  y  $0 \leq g_n \leq 1$  c.t.p.  $x \in \Omega$ .

Como

$$\int_{\Omega} (1 - H_\varepsilon(q_\varepsilon))(q_\varepsilon - \varepsilon)^+ = 0$$

para todo  $\varepsilon$  y  $p_n \geq 0$  al pasar al límite se tiene

$$\int_{\Omega} (1 - g_n)p_n = 0.$$

Sólo nos queda demostrar que  $(p_n, g_n)$  verifica la inecuación (1.26). Sea  $\xi \in H^1(\Omega)$ ,  $\xi \geq 0$  en  $\Sigma^D$ ; consideremos la función  $\xi_{\varepsilon, \delta} = \min\{\xi, q_\varepsilon/\delta\} \in V$ ,  $\delta > 0$ . Tomándola como función test en el problema  $(P_{\tau, \varepsilon})$  se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (H_\varepsilon(q_\varepsilon) + \alpha q_\varepsilon) \xi_{\varepsilon, \delta} + \int_{\Omega} \nabla q_\varepsilon \nabla \xi_{\varepsilon, \delta} + \int_{\Omega} H_\varepsilon(q_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_N} \xi_{\varepsilon, \delta} - \\ - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} f_{n-1} \xi_{\varepsilon, \delta} - \int_{\Gamma^W} \beta(\phi(t_n) - q_\varepsilon) \xi_{\varepsilon, \delta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Al hacer tender  $\delta$  a cero se tiene que  $\xi_{\varepsilon, \delta} \rightarrow \xi$  c.t.p.  $x \in \{q_\varepsilon > 0\}$  y por tanto  $H_\varepsilon(q_\varepsilon) \xi_{\varepsilon, \delta} \rightarrow H_\varepsilon(q_\varepsilon) \xi$  y  $q_\varepsilon \xi_{\varepsilon, \delta} \rightarrow q_\varepsilon \xi$  c.t.p.  $x \in \Omega$ , de donde usando el teorema de Lebesgue se deduce que

$$\int_{\Omega} H_\varepsilon(q_\varepsilon) \xi_{\varepsilon, \delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} H_\varepsilon(q_\varepsilon) \xi$$

y que

$$\int_{\Omega} q_\varepsilon \xi_{\varepsilon, \delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} q_\varepsilon \xi.$$

También se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} H_\varepsilon(q_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_N} \xi_{\varepsilon, \delta} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_N} H_\varepsilon(q_\varepsilon) \xi_{\varepsilon, \delta} + \int_{\partial\Omega} H_\varepsilon(q_\varepsilon) \nu_{x_N} \xi_{\varepsilon, \delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_N} H_\varepsilon(q_\varepsilon) \xi + \int_{\partial\Omega} H_\varepsilon(q_\varepsilon) \nu_{x_N} \xi = \int_{\Omega} H_\varepsilon(q_\varepsilon) \frac{\partial \xi}{\partial x_N}. \end{aligned}$$

El término  $\int_{\Omega} f_{n-1} \xi_{\varepsilon, \delta}$  lo descomponemos del siguiente modo:

$$\int_{\Omega} f_{n-1} \xi_{\varepsilon, \delta} = \int_{\{\xi < 0\}} f_{n-1} \xi_{\varepsilon, \delta} + \int_{\{0 \leq \xi\}} f_{n-1} \xi_{\varepsilon, \delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0}$$

$$\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\{\xi < 0\}} f_{n-1} \xi + \int_{\{\xi \geq 0\} \cap \{q_\varepsilon > 0\}} f_{n-1} \xi \leq \int_{\Omega} f_{n-1} \xi.$$

y de manera análoga

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla q_\varepsilon \nabla \xi_{\varepsilon, \delta} &= \int_{\{\xi \leq q_\varepsilon / \delta\}} \nabla q_\varepsilon \nabla \xi_{\varepsilon, \delta} + \int_{\{\xi > q_\varepsilon / \delta\}} \nabla q_\varepsilon \nabla \xi_{\varepsilon, \delta} = \\ &= \int_{\{\xi \leq q_\varepsilon / \delta\}} \nabla q_\varepsilon \nabla \xi + \int_{\{\xi > q_\varepsilon / \delta\}} \nabla q_\varepsilon \frac{\nabla q_\varepsilon}{\delta} \geq \int_{\{\xi \leq q_\varepsilon / \delta\}} \nabla q_\varepsilon \nabla \xi \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla q_\varepsilon \nabla \xi. \end{aligned}$$

Por último, teniendo en cuenta que  $\beta(\phi) \geq 0$

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma^W} \beta(\phi(t_n) - q_\varepsilon) \xi_{\varepsilon, \delta} = \\ &= \int_{\Gamma^W \cap \{q_\varepsilon > 0\}} \beta(\phi(t_n) - q_\varepsilon) \xi_{\varepsilon, \delta} + \int_{\Gamma^W \cap \{q_\varepsilon = 0\}} \beta(\phi(t_n)) \min\{\xi, 0\} \leq \\ &\leq \int_{\Gamma^W \cap \{q_\varepsilon > 0\}} \beta(\phi(t_n) - q_\varepsilon) \xi_{\varepsilon, \delta} + \int_{\Gamma^W \cap \{q_\varepsilon = 0\}} \beta(\phi(t_n)) \xi. \end{aligned}$$

Como  $\beta(\phi(t_n) - q_\varepsilon) \xi_{\varepsilon, \delta} \rightarrow \beta(\phi(t_n) - q_\varepsilon) \xi$  c.t.p.  $x \in \Gamma^W \cap \{q_\varepsilon > 0\}$  por el teorema de Lebesgue se tiene:

$$\int_{\Gamma^W \cap \{q_\varepsilon > 0\}} \beta(\phi(t_n) - q_\varepsilon) \xi_{\varepsilon, \delta} + \int_{\Gamma^W \cap \{q_\varepsilon = 0\}} \beta(\phi(t_n)) \xi \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma^W} \beta(\phi(t_n) - q_\varepsilon) \xi.$$

De todo esto se deduce que al pasar al límite cuando  $\delta$  tiende a cero en (1.28) se obtiene

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (H_\varepsilon(q_\varepsilon) + \alpha q_\varepsilon) \xi + \int_{\Omega} \left[ \nabla q_\varepsilon \nabla \xi + H_\varepsilon(q_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_N} \xi \right] \\ &\quad - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} f_{n-1} \xi - \int_{\Gamma^W} \beta(\phi(t_n) - q_\varepsilon) \xi \leq 0 \end{aligned} \right\}$$

Finalmente haciendo tender  $\varepsilon$  a cero resulta

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (g_n + \alpha p_n) \xi + \int_{\Omega} \left[ \nabla p_n \nabla \xi + g_n \frac{\partial}{\partial x_N} \xi \right] \\ &\quad - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (g_{n-1} + \alpha p_{n-1}) \xi - \int_{\Gamma^W} \beta(\phi(t_n) - p_n) \xi \leq 0 \end{aligned} \right\}$$

como queríamos demostrar. #

A partir de la solución del problema  $(P_\tau)$  construimos un par de funciones  $(p^\tau, g^\tau)$  y demostraremos que al hacer tender  $\tau$  a cero la sucesión  $\{(p^\tau, g^\tau)\}_{\tau > 0}$  tiende hacia un par  $(p, g)$ , solución de  $(P)$ .

Asociadas a cada  $t_n$  definimos las funciones:

$$\psi_n(t) = \left(1 - \frac{|t - t_n|}{\tau}\right)^+ \quad n = 0, \dots, M$$

$$\gamma_n(t) = \chi((t_{n-1}, t_n)) \quad n = 1, \dots, M$$

siendo  $\chi(A)$  la función característica del conjunto  $A$ .

Sean

$$\begin{aligned} p^\tau &= \sum_{n=0}^M p_n(x) \psi_n(t), & \hat{p}^\tau &= \sum_{n=1}^M p_n(x) \gamma_n(t), \\ g^\tau &= \sum_{n=0}^M g_n(x) \psi_n(t), & \hat{g}^\tau &= \sum_{n=1}^M g_n(x) \gamma_n(t). \end{aligned} \quad (1.29)$$

El siguiente resultado es una serie de acotaciones a priori que necesitaremos para la convergencia de la sucesión  $\{(p^\tau, g^\tau)\}_{\tau>0}$ .

**Proposición 1.14** *Sea  $\beta$  continua, monótona creciente, que verifica  $\beta(0) = 0$  y para dos constantes  $a$  y  $b$*

$$|\beta(s)| \leq a|s| + b \quad \forall s \in \mathbb{R};$$

sea  $\{(p_n, g_n)\}_{n=0}^M$  solución del problema  $(P_\tau)$  y sean  $p^\tau, g^\tau, \hat{p}^\tau$  y  $\hat{g}^\tau$  las funciones definidas en (1.29). Entonces existe una constante  $C$  tal que

$$\|\hat{p}^\tau\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C \quad (1.30)$$

$$\|\hat{g}^\tau\|_{L^2(Q)} \leq C \quad (1.31)$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (g^\tau + \alpha p^\tau) \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C \quad (1.32)$$

$$\|p_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad \forall n = 0, \dots, M. \quad (1.33)$$

Además, si  $\alpha p^0 \in L^\infty(\Omega)$ , entonces

$$\|p_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad \forall n = 1, \dots, M. \quad (1.34)$$

*Demostración.*- Para la demostración de (1.30) tomamos  $p_n$  como función test en (1.26). Así se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\tau} \|p_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 = \\ & = - \int_{\Omega} \frac{\partial p_n}{\partial x_N} - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (1 - g_{n-1}) p_n + \frac{\alpha}{\tau} \int_{\Omega} p_{n-1} p_n - \\ & - \int_{\Gamma_w} \beta(\phi(t_n) - p_n)(\phi(t_n) - p_n) + \int_{\Gamma_w} \beta(\phi(t_n) - p_n) \phi(t_n) \leq \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq C \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega))^N} + \frac{\alpha}{\tau} \|p_{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \|p_n\|_{L^2(\Omega)} + C \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 + \frac{\alpha}{2\tau} \|p_{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2\tau} \|p_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + C'.
\end{aligned}$$

Multiplicando por  $\tau$  y sumando en  $n$  resulta

$$\|\nabla \hat{p}^\tau\|_{L^2(Q)}^2 = \tau \sum_{n=0}^M \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 \leq \alpha \|p_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + TC'$$

de donde se deduce, gracias a la desigualdad de Poincaré, la acotación (1.30).

La acotación (1.31) se deduce inmediatamente del hecho de que

$$0 \leq g_n \leq 1 \quad \forall n = 1, \dots, M.$$

Para demostrar la desigualdad (1.32) observamos primero que

$$\frac{\partial}{\partial t}(g^\tau + \alpha p^\tau) = \sum_{n=1}^M \left( \frac{g_n - g_{n-1}}{\tau} + \alpha \frac{p_n - p_{n-1}}{\tau} \right) (x) \gamma_n(t).$$

Dada  $\xi \in H_0^1(\Omega)$  se verifica para cada  $n = 1, \dots, M$  que:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left( \frac{g_n - g_{n-1}}{\tau} + \alpha \frac{p_n - p_{n-1}}{\tau} \right) \xi &= - \int_{\Omega} \left( \nabla p_n \nabla \xi + g_n \frac{\partial \xi}{\partial x_N} \right) \leq \\
&\leq (\|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega))^N} + |\Omega|^{1/2}) \|\nabla \xi\|_{(L^2(\Omega))^N}.
\end{aligned}$$

Ahora si tomamos  $\xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  se tiene para casi todo  $t \in (t_{n-1}, t_n)$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(g^\tau + \alpha p^\tau)(t, x) \xi(t, x) dx \right| = \\
&= \left| \int_{\Omega} \left( \frac{g_n - g_{n-1}}{\tau} + \alpha \frac{p_n - p_{n-1}}{\tau} \right) (x) \xi(t, x) dx \right| \leq \\
&\leq (\|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega))^N} + |\Omega|^{1/2}) \|\xi(t)\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Llamemos  $L(t)$  a la función

$$L(t) = \sum_{n=1}^M (\|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega))^N} + |\Omega|^{1/2}) \gamma_n(t);$$

con esta notación, al hacer el producto de dualidad de  $\frac{\partial}{\partial t}(g^\tau + \alpha p^\tau)$  con una función  $\xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  se obtiene:

$$\left| \int_Q \frac{\partial}{\partial t}(g^\tau + \alpha p^\tau)(t, x) \xi(t, x) dx \right| \leq \int_0^T L(t) \|\xi(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq$$

$$\leq \|L\|_{L^2(0,T)} \|\xi\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}.$$

Ahora bien, de la acotación (1.30) obtenemos

$$\|L(t)\|_{L^2(0,T)}^2 = \tau \sum_{n=1}^M (\|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega))^N} + |\Omega|^{1/2})^2 \leq C$$

con lo que se tiene la desigualdad deseada.

Demostremos ahora (1.33). Tomando  $p_n$  como función test en (1.26) hemos obtenido

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\alpha}{\tau} \|p_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 \leq \\ & C \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega))^N} + \frac{\alpha}{\tau} \|p_{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \|p_n\|_{L^2(\Omega)} + C'. \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

Por tanto

$$\frac{\alpha}{\tau} \|p_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\alpha}{\tau} \|p_{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \|p_n\|_{L^2(\Omega)} + \hat{C}.$$

Si  $\alpha \neq 0$

$$\|p_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|p_{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{\alpha} 2C' \leq \|p_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \frac{2C'}{\alpha}$$

lo que demuestra 1.33 . Si  $\alpha = 0$  de (1.35) se deduce

$$\|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega))^N} \leq C$$

y de aquí por la desigualdad de Poincaré

$$\|p_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C'$$

de modo que también en este caso se demuestra 1.33.

Supongamos ahora que  $\alpha p^0 \in L^\infty$ . Sea  $K$  una constante positiva tal que:

- $K - x_n > 0$  para todo  $x_n \in \mathbb{R}$  tal que  $(x', x_N) \in \Gamma$  para algún  $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ .
- $K - x_n \geq \phi$  en  $Q$ .

Si  $\alpha \neq 0$  pidamos además que:

- $K - x_n \geq \|p_0\|_{L^\infty(\Omega)}$  para todo  $x \in \Omega$ .

Llamemos  $w$  a la función  $w = K - x_N$ . Distinguiamos dos casos según sea  $\alpha$  positivo o cero.

Si  $\alpha \neq 0$  según estas hipótesis,  $(p_0 - w)^+ = 0$  c.t.p.  $x \in \Omega$  y podemos razonar por inducción. Supongamos demostrado  $(p_{n-1} - w)^+ = 0$  c.t.p.  $x \in \Omega$ . Puesto que

$$\int_{\Omega} (\nabla w + e) \nabla \xi = 0 \quad \forall \xi \in H^1(\Omega)$$

y  $(p_n - w)^+ = 0$  c.t.p.  $x \in \{p_n = 0\}$ , tomando  $\xi = (p_n - w)^+$  como función test en (1.26) tenemos

$$\int_{\Omega} \nabla(p_n - w) \nabla \xi = \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (g_{n-1} - 1) \xi + \frac{\alpha}{\tau} \int_{\Omega} (p_{n-1} - p_n) \xi + \int_{\Gamma^w} \beta(\phi(t_n) - p_n) \xi.$$

Por la hipótesis de inducción

$$\int_{\Omega} (p_{n-1} - p_n) (p_n - w)^+ \leq 0$$

y por la elección de  $w$  y la monotonía de  $\beta$  también

$$\int_{\Gamma^w} \beta(\phi(t_n) - p_n) \xi \leq 0.$$

Tenemos por tanto que

$$\|\nabla[(p_n - w)^+]\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 \leq 0$$

de donde se deduce

$$(p_n - w)^+ = 0$$

como queríamos demostrar.

Si  $\alpha = 0$  tomando  $\xi = (p_n - w)^+$  como función test en (1.26) se obtiene en este caso que

$$\int_{\Omega} \nabla(p_n - w) \nabla \xi = \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (g_{n-1} - 1) \xi + \int_{\Gamma^w} \beta(\phi(t_n) - p_n) \xi$$

de donde se deduce del mismo modo que

$$\|\nabla[(p_n - w)^+]\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 \leq 0$$

y por tanto

$$(p_n - w)^+ = 0. \quad \#$$

A la vista de estas acotaciones es posible obtener subsucesiones de  $\{\hat{p}^\tau\}_{\tau>0}$  y  $\{\hat{g}^\tau\}_{\tau>0}$  débilmente convergentes cuando  $\varepsilon$  tiende a cero hacia un par  $(p, g)$  que es solución del problema (P).

**Teorema 1.15** *Sea  $\beta$  continua, monótona creciente, que verifica  $\beta(0) = 0$  y para dos constantes  $a$  y  $b$*

$$|\beta(s)| \leq a|s| + b \quad \forall s \in \mathbb{R};$$

*entonces existe un par  $(p, g)$  que es solución del problema (P).*

*Demostración.*- Sea  $\{(p_n, g_n)\}_{n=0}^M$  solución del problema  $(P_\tau)$  y sean  $\hat{p}^\tau$  y  $\hat{g}^\tau$  las funciones definidas en (1.29). De las acotaciones a priori (1.30) y (1.31) obtenidas en la proposición anterior se deduce que existen subsucesiones (que seguiremos designando  $\{\hat{p}^\tau\}_{\tau>0}$  y  $\{\hat{g}^\tau\}_{\tau>0}$ ) tales que

$$\hat{p}^\tau \rightharpoonup p \text{ en } L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

$$\hat{g}^\tau \rightharpoonup g \text{ en } L^2(Q).$$

Veamos que el par  $(p, g)$  así obtenido es solución de  $(P)$

Paso 1:  $p$  y  $g$  verifican

$$\int_Q (1 - g)p = 0. \quad (1.36)$$

Vamos a utilizar un argumento análogo al que se utilizó en la demostración de la proposición 1.9: de las acotaciones (1.30) y (1.31) se deduce una acotación uniforme de  $\|g^\tau + \alpha p^\tau\|_{L^2(Q)}$

Sea

$$W = \{\xi \mid \xi \in L^2(Q) \text{ y } \frac{\partial \xi}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}.$$

Puesto que  $W \subset L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  con inyección compacta, la acotación (1.32) nos dice que existe un subsucesión de  $\{g^\tau + \alpha p^\tau\}_{\tau>0}$  fuertemente convergente en  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  y por tanto

$$\int_Q (1 - (g^\tau + \alpha p^\tau)) \hat{p}^\tau \xi \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \int_Q (1 - (g + \alpha p)) p \xi.$$

$\forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

Veamos dos resultados intermedios que necesitamos para completar la demostración:

- $\int_Q (1 - g^\tau) \hat{p}^\tau \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$ .

En efecto

$$\begin{aligned} \int_Q (1 - g^\tau) \hat{p}^\tau &= \int_Q \left( \sum_{n=0}^M (1 - g_n) \psi_n(t) \right) \left( \sum_{n=1}^M p_n \gamma_n(t) \right) = \\ &= \tau \sum_{n=1}^M \int_\Omega \left( 1 - \frac{g_n + g_{n-1}}{2} \right) p_n = \tau \sum_{n=1}^M \int_\Omega \frac{1 - g_{n-1}}{2} p_n. \end{aligned}$$

Tomando  $p_n$  como función test en (1.26) resulta

$$\frac{1}{\tau} \int_\Omega (1 - g_{n-1}) p_n = \frac{1}{\tau} \int_\Omega (g_n - g_{n-1}) p_n =$$

$$\begin{aligned}
&= -\|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 - \frac{\alpha}{\tau} \left( \|p_n^2\|_{L^2(\Omega)} - \int_{\Omega} p_n p_{n-1} \right) - \int_{\Omega} \frac{\partial p_n}{\partial x_N} + \\
&+ \int_{\Gamma^w} \beta(\phi(t_n) - p_n) \phi(t_n) - \int_{\Gamma^w} \beta(\phi(t_n) - p_n) (\phi(t_n) - p_n) \leq \\
&= C \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 + \frac{\alpha}{2\tau} (\|p_{n-1}^2\|_{L^2(\Omega)} - \|p_n\|_{L^2(\Omega)}^2) + C'.
\end{aligned}$$

Multiplicando por  $\tau$  y sumando en  $n$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau} \left( \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega} (1 - g_{n-1}) p_n \right) \leq \\
&\leq C \|\nabla \hat{p}\|_{(L^2(Q))^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|p_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + TC' \leq \hat{C}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\int_Q (1 - g^\tau) \hat{p}^\tau \leq \tau \hat{C}.$$

- $\limsup_{\tau \rightarrow 0} \left( -\alpha \int_Q p^\tau \hat{p}^\tau \xi \right) \leq -\alpha \int_Q p^2 \xi \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \xi \geq 0.$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\int_Q p^\tau \hat{p}^\tau \xi &= \int_Q \left( \sum_{n=0}^M p_n \psi_n(t) \right) \left( \sum_{n=1}^M p_n \gamma_n(t) \right) \xi = \\
&= \sum_{n=1}^M \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} \left( p_n \left( 1 - \frac{t_n - t}{\tau} \right) + p_{n-1} \frac{t_n - t}{\tau} \right) p_n \xi = \\
&= \frac{\tau}{2} \sum_{n=1}^M \int_{\Omega} (p_n + p_{n-1}) p_n \xi = \frac{1}{4} \int_Q (\hat{p}^\tau + \bar{p}^\tau)^2 \xi
\end{aligned}$$

siendo

$$\bar{p}^\tau = \sum_{n=1}^M p_{n-1} \gamma_n(t).$$

Ahora bien

$$\hat{p}^\tau + \bar{p}^\tau \rightharpoonup 2p \quad \text{en } L^2(Q),$$

por lo tanto

$$4 \int_Q p^2 \xi \leq \liminf \int_Q (\hat{p}^\tau + \bar{p}^\tau)^2 \xi$$

De los dos resultados anteriores se obtiene que para toda función  $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\xi \geq 0$

$$\int_Q (1 - (g + \alpha p)) p \xi = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( -\alpha \int_Q p^\tau \hat{p}^\tau \xi \right) \leq -\alpha \int_Q p^2 \xi$$

de donde se deduce que

$$\int_Q (1 - g) p \leq 0.$$

Como el conjunto  $\{\chi \in L^\infty(Q) \mid 0 \leq \chi \leq 1 \text{ c.t.p. } x \in Q\}$  es cerrado y convexo, es débilmente cerrado y por tanto también  $g$  verifica  $0 \leq g \leq 1$ . Por una razón análoga se tiene que  $p \geq 0$  y por tanto ha de ser

$$\int_Q (1 - g) p = 0$$

Paso 2: Existe una función  $\hat{\beta} \in L^2(\Sigma^W)$  de modo que  $p, g$  verifican la inecuación variacional

$$\left. \begin{aligned} & \int_Q \left( \nabla p \nabla \xi + g \frac{\partial \xi}{\partial x_N} \right) - \int_Q (g + \alpha p) \xi_t - \\ & - \int_\Omega (g_0 + \alpha p_0) \xi(0) + \int_\Omega (\chi + \alpha q) \xi(T) \leq \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} \xi \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

$\forall \xi \in H^1(Q)$  tal que  $\xi \geq 0$  en  $\Sigma^D$ .

Sea  $\xi \in \mathcal{D}(\bar{Q})$ ,  $\xi \geq 0$  en  $\Sigma^D$ ; definimos

$$\hat{\xi}^\tau = \sum_{n=1}^M \xi(t_n, x) \gamma_n(t) \quad \xi^\tau = \sum_{n=0}^M \xi(t_{n+1}, x) \psi_n(t)$$

con  $\xi(t_{M+1}, x) = \xi(t_M, x)$ . Estas funciones verifican la siguiente ecuación:

$$\left. \begin{aligned} & \int_Q \left( \nabla \hat{p}^\tau \nabla \hat{\xi}^\tau + \hat{g}^\tau \frac{\partial \hat{\xi}^\tau}{\partial x_N} - (\hat{g}^\tau + \alpha \hat{p}^\tau) \frac{\partial \hat{\xi}^\tau}{\partial t} \right) - \\ & - \int_\Omega (g_0 + \alpha p_0) \xi(t_1) + \int_\Omega (g_M + \alpha p_M) \xi(t_{M+1}) \leq \int_{\Sigma^W} \beta^\tau \hat{\xi}^\tau \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

siendo  $\beta^\tau = \sum_{n=1}^M \beta(\phi(t_n, x) - p_n(x)) \gamma_n(t) = \beta(\hat{\phi}^\tau - \hat{p}^\tau)$ .

De la hipótesis de crecimiento en el infinito de  $\beta$  y de las acotaciones a priori (1.30) y (1.31) se deduce una acotación de  $\|\beta^\tau\|_{L^2(\Sigma^W)}$ . En efecto

$$\|\beta^\tau\|_{L^2(\Sigma^W)}^2 = \tau \sum_{n=0}^M \|\beta(\phi(t_n) - p_n)\|_{L^2(\Gamma^W)}^2 \leq \tau \sum_{n=0}^M (C_1 \|\phi(t_n) - p_n\|_{L^2(\Gamma^W)}^2 + C_2) \leq$$

$$\leq C_3 \tau \sum_{n=0}^M \|\phi(t_n) - p_n\|_{H^1(\Omega)}^2 + TC_2 \leq C_4.$$

Por tanto existe  $\hat{\beta} \in L^2(\Sigma^W)$  y existe una subsucesión de  $\hat{\phi}^\tau - \hat{p}^\tau$  tales que

$$\beta(\hat{\phi}^\tau - \hat{p}^\tau) \rightharpoonup \hat{\beta} \text{ en } L^2(\Sigma^W).$$

Según hemos visto en el paso anterior, podemos obtener subsucesiones de  $\{\hat{p}^\tau\}_{\tau>0}$  y  $\{\hat{g}^\tau\}_{\tau>0}$  tales que

$$\begin{aligned} \hat{p}^\tau &\rightharpoonup p \text{ en } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ \hat{g}^\tau &\rightharpoonup g \text{ en } L^2(Q) \end{aligned}$$

y

$$\int_Q (1 - g)p = 0.$$

Además, de la acotación (1.33) deducimos que existen  $\chi \in L^\infty(\Omega)$  y  $q \in L^2(\Omega)$  tales que, al menos para una subsucesión

$$g_M + \alpha p_M \rightharpoonup \chi + \alpha q \text{ en } L^2(\Omega).$$

Pasando al límite en (1.38) y por la densidad de  $\mathcal{D}(\bar{Q})$  en  $H^1(Q)$  obtenemos

$$\left. \begin{aligned} &\int_Q \left( \nabla p \nabla \xi + g \frac{\partial \xi}{\partial x_N} \right) - \int_Q (g + \alpha p) \xi_t - \\ &- \int_\Omega (g_0 + \alpha p_0) \xi(0) + \int_\Omega (\chi + \alpha q) \xi(T) \leq \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} \xi \end{aligned} \right\}$$

$\forall \xi \in H^1(Q)$  tal que  $\xi \geq 0$  en  $\Sigma^D$ , y además

$$\chi + \alpha q = g(T) + \alpha p(T)$$

en sentido de las trazas.

**Paso 3:**  $\hat{\beta} = \beta(\phi - p)$ .

Si tomamos  $p$  como función test en la ecuación (1.37), haciendo uso del lema 1.4 se obtiene

$$\|\nabla p\|_{(L^2(Q))^N}^2 + \int_Q \frac{\partial p}{\partial x_N} + \frac{\alpha}{2} (\|p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|p(0)\|_{L^2(\Omega)}^2) = \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} p. \quad (1.39)$$

Por otra parte, tomando  $p_n$  como función test en (1.26) tenemos

$$\|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 + \int_\Omega \frac{\partial p_n}{\partial x_N} + \frac{\alpha}{\tau} \|p_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\alpha}{\tau} \int_{\Omega} p_n p_{n-1} - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (1 - g_{n-1}) p_n + \int_{\Gamma^W} \beta(\phi(t_n) - p_n) p_n \leq \\
&\leq \frac{\alpha}{2\tau} (\|p_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|p_{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2) + \int_{\Gamma^W} \beta(\phi(t_n) - p_n) p_n.
\end{aligned}$$

Multiplicando por  $\tau$  y sumando en  $n$  se tiene

$$\|\nabla \hat{p}^\tau\|_{(L^2(Q))^N}^2 + \int_Q \frac{\partial \hat{p}^\tau}{\partial x_N} + \frac{\alpha}{2} \|p_M\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\alpha}{2} \|p_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Sigma^W} \beta^\tau \hat{p}^\tau. \quad (1.40)$$

Comparando las ecuaciones (1.39) y (1.40) se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\tau \rightarrow 0} \left( - \int_{\Sigma^W} \beta^\tau \hat{p}^\tau + \|\nabla \hat{p}^\tau\|_{(L^2(Q))^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|p_M\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq \\
&\leq \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( - \int_Q \frac{\partial \hat{p}^\tau}{\partial x_N} + \frac{\alpha}{2} \|p_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \\
&= - \int_Q \frac{\partial p}{\partial x_N} + \frac{\alpha}{2} \|p_0\|_{L^2(\Omega)}^2 = - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} p + \|\nabla p\|_{(L^2(Q))^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

De la convergencia

$$g_M + \alpha p_M \rightarrow g(T) + \alpha p(T) \text{ en } L^2(\Omega)$$

se deduce que

$$\liminf \|p_M\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \|p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (1.41)$$

y como

$$\liminf \|\nabla \hat{p}^\tau\|_{(L^2(Q))^N}^2 \geq \|\nabla p\|_{(L^2(Q))^N}^2 \quad (1.42)$$

se tiene que

$$\limsup \left( - \int_{\Sigma^W} \beta^\tau \hat{p}^\tau \right) \leq - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} p. \quad (1.43)$$

De aquí se deduce que

$$- \int_{\Sigma^W} (\beta(\phi - \xi) - \hat{\beta})(\xi - p) \geq 0 \quad \forall \xi \in L^2(\Sigma^W). \quad (1.44)$$

Efectivamente

$$0 \leq - \int_{\Sigma^W} [\beta(\hat{\phi}^\tau - \xi) - \beta(\hat{\phi}^\tau - \hat{p}^\tau)](\xi - \hat{p}^\tau),$$

pasando al límite

$$\begin{aligned}
0 &\leq - \int_{\Sigma^W} \beta(\phi - \xi)\xi + \int_{\Sigma^W} \beta(\phi - \xi)p + \int_{\Sigma^W} \hat{\beta}\xi + \limsup \left( - \int_{\Sigma^W} \beta^\tau \hat{p}^\tau \right) \leq \\
&\leq - \int_{\Sigma^W} (\beta(\phi - \xi) - \hat{\beta})(\xi - p).
\end{aligned}$$



Como el operador

$$\begin{aligned} L^2(\Sigma^W) &\longrightarrow L^2(\Sigma^W) \\ \zeta &\longrightarrow -\beta(\phi - \zeta) \end{aligned}$$

es maximal monótono de la desigualdad 1.44 se deduce que

$$\hat{\beta} = \beta(\phi - p)$$

En particular

$$0 \leq - \int_{\Sigma^W} (\beta(\hat{\phi}^\tau - \hat{p}^\tau) - \hat{\beta})(\hat{p}^\tau - p)$$

de modo que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf \left( - \int_{\Sigma^W} (\beta(\hat{\phi}^\tau - \hat{p}^\tau) - \hat{\beta})(\hat{p}^\tau - p) \right) = \\ &= \liminf \left( - \int_{\Sigma^W} \beta(\hat{\phi}^\tau - \hat{p}^\tau) \hat{p}^\tau \right) + \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} p \end{aligned}$$

es decir

$$\limsup \left( - \int_{\Sigma^W} \beta^\tau p^\tau \right) \leq - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} p \leq \liminf \left( - \int_{\Sigma^W} \beta^\tau p^\tau \right).$$

Por tanto

$$- \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} p = \lim \left( - \int_{\Sigma^W} \beta^\tau \hat{p}^\tau \right).$$

Esto quiere decir que de hecho es

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (\|\nabla \hat{p}^\tau\|_{(L^2(Q))^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|p_M\|_{L^2(\Omega)}^2) \leq \|\nabla p\|_{(L^2(Q))^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

pero a la vista de (1.41) y (1.42)

$$\begin{aligned} &\limsup \|\nabla \hat{p}^\tau\|_{(L^2(Q))^N}^2 = \\ &= \limsup \left( \|\nabla \hat{p}^\tau\|_{(L^2(Q))^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|p_M\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\alpha}{2} \|p_M\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \\ &= \|\nabla p\|_{(L^2(Q))^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \limsup \left( - \frac{\alpha}{2} \|p_M\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \\ &= \|\nabla p\|_{(L^2(Q))^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \liminf \frac{\alpha}{2} \|p_M\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \|\nabla p\|_{(L^2(Q))^N}^2 \leq \liminf \|\nabla \hat{p}^\tau\|_{(L^2(Q))^N}^2. \end{aligned}$$

Por tanto  $\|\nabla p\|_{(L^2(Q))^N} = \lim \|\nabla \hat{p}^\tau\|_{(L^2(Q))^N}$ . Como  $\hat{p}^\tau \rightarrow p$  en  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  se deduce convergencia fuerte

$$\hat{p}^\tau \rightarrow p \text{ en } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \quad \#$$

**Corolario 1.16** *Sea  $\beta$  continua, monótona creciente, que verifica  $\beta(0) = 0$  y supongamos que  $\alpha p^0 \in L^\infty(\Omega)$ . Entonces existe un par  $(p, g)$  que es solución del problema (P).*

*Demostración.-* Si  $\alpha p^0 \in L^\infty(\Omega)$  no es necesaria la hipótesis de crecimiento en el infinito sobre  $\beta$  ya que en ese caso sabemos que  $p \in L^\infty(Q)$  y es posible truncar  $\beta$ . En efecto, para la norma de  $p$  en  $L^\infty(Q)$  tenemos una cota  $K$  que depende de  $\Omega$ , de  $\phi$  y de  $p^0$  y que no depende de  $\beta$ . Sea  $R \in \mathbb{R}$  tal que  $|\beta(\phi - K)(x, t)| \leq R$  c.t.p. en  $Q$  y sea  $\beta_R$  la función definida

$$\beta_R(s) = \begin{cases} R & \text{si } \beta(s) > R \\ \beta(s) & \text{si } -R \leq \beta(s) \leq R \\ -R & \text{si } \beta(s) < -R \end{cases}$$

Sustituyendo  $\beta$  por  $\beta_R$  tenemos un nuevo problema  $(P_{\beta_R, \phi, g^0 + \alpha p^0})$  del que sabemos que tiene una solución  $(p_R, g_R)$ , ya que  $\beta_R$  verifica la hipótesis de crecimiento en el infinito con  $a = 0$  y  $b = R$ . Si  $\alpha p^0 \in L^\infty(\Omega)$  entonces  $p_R \in L^\infty(Q)$  y  $\|p_R\|_{L^\infty(Q)} \leq K$ , de modo que  $\beta_R(\phi - p) = \beta(\phi - p)$  c.t.p. en  $Q$  y por tanto  $(p_R, g_R)$  es solución de  $(P_{\beta, \phi, g^0 + \alpha p^0})$ . #

Resumiendo: la existencia de solución de  $(P_{\beta, \phi, g^0 + \alpha p^0})$  con  $\beta$  monótona creciente continua y tal que  $\beta(0) = 0$ , y con  $p^0 \in L^2(\Omega)$ ,  $g^0 \in H(p^0)$  está demostrada si  $\alpha p^0 \in L^\infty(\Omega)$  o si  $\beta$  verifica la hipótesis  $|\beta(s)| \leq a|s| + b$ .



# Capítulo 2

## Resolución numérica del problema

Para aproximar la solución del problema de filtración en un medio poroso estudiado en el capítulo anterior, vamos a utilizar un método de elementos finitos.

### 2.1 El problema discreto

#### 2.1.1 Planteamiento del problema

##### Discretización en tiempo

Usamos la misma notación que se usó en el argumento de semidiscretización. Tomemos  $M \in \mathbb{N}$  destinado a tender a infinito, ya que es el número de subintervalos en el que se divide  $[0, T]$ . Sea  $\tau = T/M$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $t_n = n\tau$ . Asociadas a cada  $t_n$  definimos las funciones:

$$\psi_n(t) = \left(1 - \frac{|t - t_n|}{\tau}\right)^+ \quad n = 0, \dots, M$$

$$\gamma_n(t) = \chi((t_{n-1}, t_n)) \quad n = 1, \dots, M$$

siendo  $\chi(A)$  la función característica del conjunto  $A$ .

##### Discretización en espacio

Sea  $\Omega_h$  una aproximación poligonal de  $\Omega$  y sea  $\{\mathcal{T}_h\}_h$  una familia de descomposiciones en  $N$ -símplices de  $\Omega_h$ , que depende de un parámetro  $h > 0$ . Si  $N = 2$  se trata de una descomposición en triángulos, si  $N = 3$  son tetraedros.

Para cada descomposición  $\mathcal{T}_h = \{T_i\}_{i=1}^N$  y para cada elemento  $T_i \in \mathcal{T}_h$  llamaremos  $h(T_i)$  al diámetro del elemento  $T_i$  y  $\rho(T_i)$  al supremo de los diámetros de las bolas contenidas en  $T_i$ . El parámetro  $h$  se toma del siguiente modo:

$$h = \max\{h(T_i) \mid T_i \in \mathcal{T}_h\}.$$

Supondremos que la descomposición es regular y de tipo débilmente agudo:

**Definición 2.1** *La descomposición en  $N$ -símplices  $\mathcal{T}_h$  es regular si existe una constante  $c \geq 1$ , independiente de  $h$  tal que*

$$h(T) \leq c \rho(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

*Es de tipo débilmente agudo si para todo elemento  $T$  perteneciente a  $\mathcal{T}_h$  y para cada  $x^i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , vértice de  $T$  la proyección de  $x^i$  sobre el hiperplano soporte de la cara opuesta pertenece a la clausura de dicha cara.*

En el caso  $N = 2$  una triangulación es débilmente aguda si

$$\theta \leq \frac{\pi}{2}$$

para todos los ángulos  $\theta$  de todos los triángulos de  $\mathcal{T}_h$ .

Sea  $\{x_i\}_{i \in I_h}$  el conjunto de nodos de la descomposición.

Haremos también una descomposición dual del dominio  $\Omega_h$ :

$$\overline{\Omega}_h = \overline{\bigcup_{i \in I_h} D_i}$$

siendo  $D_i$  es el dominio baricéntrico asociado a  $x_i$ , es decir

$$D_i = \bigcup_k \{D_i^k \mid T_k \in \mathcal{T}_h \text{ y } x_i \text{ es un vértice de } T_k\},$$

donde

$$D_i^k = \bigcap_{j=1}^N \{x \mid x \in T_k, \lambda_i^j(x) \leq \lambda_i(x)\}$$

y  $\lambda_i^0 = \lambda_i, \lambda_i^1, \dots, \lambda_i^N$  son las coordenadas baricéntricas respecto de los vértices de  $T_k$ ,  $x_i^0 = x_i, x_i^1, \dots, x_i^N$  (ver figura 2.1).

Llamamos  $\Gamma_h$  a la frontera de  $\Omega_h$

$$\Gamma_h = \partial \Omega_h$$

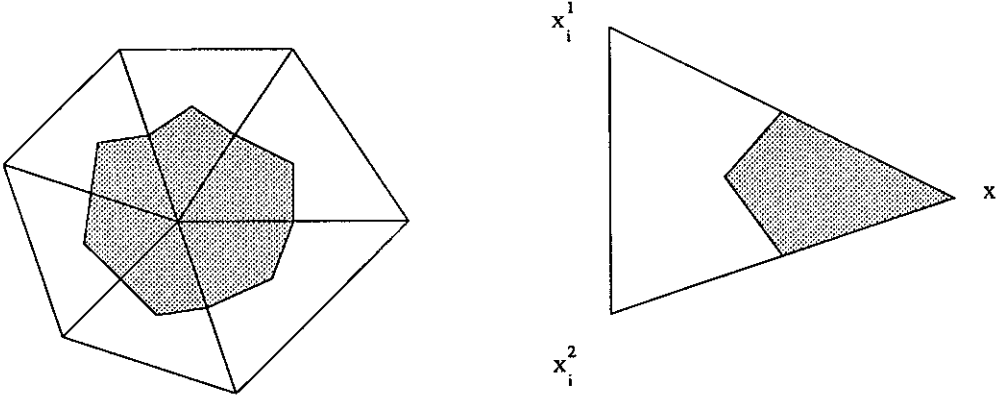


Figura 2.1: Dominio baricéntrico

En  $\Gamma_h$  distinguimos tres subconjuntos disjuntos  $\Gamma_h^I, \Gamma_h^W, \Gamma_h^D$ , tales que su unión es  $\Gamma_h$ , que se corresponden con las tres regiones distintas de la frontera de  $\Omega$ .

Sean  $J_h = \{i \in I_h \mid x_i \in \Gamma_h\}$ ,  $J_h^I = \{i \in I_h \mid x_i \in \Gamma_h^I\}$  y análogamente definidos,  $J_h^W, J_h^D$ .

Pedimos la siguiente hipótesis de aproximación del dominio:

**Hipótesis 2.1** Existe una sucesión  $\varepsilon_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  tal que

$$\Omega_h \subset B(\Omega, \varepsilon_h) \text{ y } \Omega \subset B(\Omega_h, \varepsilon_h)$$

Consideremos el siguiente espacio funcional de dimensión finita:

$$H_h = \{\xi \in C^0(\overline{\Omega_h}) \mid \xi|_T \in P_1 \forall T \in \mathcal{T}_h\} \quad (2.1)$$

siendo  $P_1$  el espacio de polinomios de grado uno.

Sea  $\{\omega_i\}_{i \in I_h}$  una base del espacio  $H_h$  tal que

$$\omega_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in I_h.$$

Para cada  $i \in I_h$  sea  $\chi_i$  la función característica del conjunto  $D_i$  y sea  $L_h$  el espacio vectorial de dimensión finita engendrado por esta familia de funciones:

$$L_h = \{\xi = \sum_{i \in I_h} \xi^i \chi_i \mid \xi^i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in I_h\}.$$

Para cada  $i \in J_h$  llamaremos  $L_i = \overline{D_i} \cap \Gamma_h$  y llamaremos  $\kappa_i$  a la función característica del conjunto  $L_i$ . Sea  $K_h$  el espacio vectorial engendrado por las funciones  $\kappa_i$

$$K_h = \{\xi = \sum_{i \in J_h} \xi^i \kappa_i \mid \xi^i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in J_h\}.$$

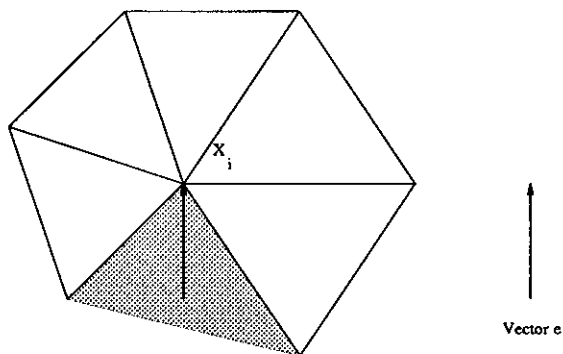


Figura 2.2: Elemento up-wind

Para la discretización del término  $\frac{\partial g}{\partial x_N}$  vamos a utilizar un operador de tipo “up-wind” (ver [39])

**Definición 2.2** Un elemento  $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_h$  se dice que es elemento “up-wind” asociado al nodo  $x_i$  si:

1.  $x_i$  es un vértice de  $\mathcal{U}$
2. Si  $x_i = (x'_i, x_{i,N})$  entonces  $\mathcal{U} \cap \{(x'_i, z) \mid z \in (-\infty, x_{i,N})\} \neq \emptyset$

Si existe más de un elemento “up-wind” para un nodo  $x_i$ , llamaremos  $\mathcal{U}_i$  a uno de ellos elegido arbitrariamente y diremos que  $\mathcal{U}_i$  es el elemento “up-wind” asociado al nodo  $x_i$ . De este modo cada nodo tiene a lo sumo un elemento “up-wind” asociado, aunque hay nodos que no tienen elemento “up-wind”.

Definimos los siguientes operadores:

- Operador de interpolación en  $L_h$

$$R_h : C^0(\overline{\Omega}_h) \longrightarrow L_h$$

$$R_h(\xi) = \sum_{i \in I_h} \xi(x_i) \chi_i(x)$$

- Operador de traza

$$T_h : C^0(\overline{\Omega}_h) \longrightarrow K_h$$

$$T_h(\xi) = \sum_{i \in J_h^W} \xi(x_i) \kappa_i(x)$$

- Operador de derivación discreto

$$D_h : H_h \longrightarrow L_h$$

$$D_h(\xi) = \sum_{i \in I_h} D_h^i(\xi) \chi_i(x)$$

donde

$$D_h^i(\xi) = \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x_N} \Big|_{\mathcal{U}_i} & \text{si existe } \mathcal{U}_i \\ 0 & \text{si no existe elemento "up-wind" asociado al nodo } x_i \end{cases}$$

**Observación 2.3** La definición de  $D_h$  no depende de la elección que se haya hecho de  $\mathcal{U}_i$  en aquellos nodos donde hubiera más de un elemento up-wind. Al ser funciones lineales en cada N-símplice y continuas, el valor de  $\frac{\partial \xi}{\partial x_N}$  es una constante en cada N-símplice y coincide si dos N-símplices son elemento upwind del mismo nodo.

## Planteamiento

El problema se discretiza en tiempo mediante el método de Euler implícito, y en espacio utilizando los espacios de dimensión finita y los operadores discretos que hemos definido anteriormente.

Como dato inicial del problema discreto tomamos un par

$$(p_h^0, g_h^0) \in H_h \times L_h$$

tal que

$$p_h^0(x_i) \geq 0 \quad \forall i \in I_h, \quad p_h^0(x_i) = 0 \quad \forall i \in J_h^D,$$

$$0 \leq g_h^0(x_i) \leq 1 \quad \forall i \in I_h$$

y

$$(1 - g^0) \alpha R_h(p^0) = 0$$

Llamemos  $\phi_n(x) = \phi(x, t_n)$ ,  $n = 1, \dots, M$  y definimos la función

$$\phi^\tau = \sum_{n=1}^M \phi_n(x) \gamma_n(t).$$

Llamemos  $V_h$  al siguiente subespacio de  $H_h$

$$V_h = \{\xi \in H_h \mid \xi_i = 0 \quad \forall i \in I_h^D\}.$$



El problema discreto (que en lo sucesivo llamaremos  $(P_{\tau,h})$ ) es el siguiente:

Hallar una familia de funciones  $\{(p_{h,n}, g_{h,n})\}_{n=0}^M$  tal que

$$(p_{h,0}, g_{h,0}) = (p_h^0, g_h^0) \quad (2.2)$$

y  $\forall n = 1, \dots, M$

$$(p_{h,n}, g_{h,n}) \in V_h \times L_h \quad (2.3)$$

$$p_n^i \geq 0 \quad \forall i \in I_h \quad (2.4)$$

$$0 \leq g_n^i \leq 1 \quad \forall i \in I_h \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\Omega_h} (\nabla p_{h,n} \nabla \xi_h + g_{h,n} D_h(\xi_h)) + \\ & + \int_{\Omega_h} \left( \frac{g_{h,n} - g_{h,n-1}}{\tau} + \alpha R_h \left( \frac{p_{h,n} - p_{h,n-1}}{\tau} \right) \right) R_h(\xi_h) \leq \\ & \leq \int_{\Gamma_h^w} \beta(T_h(\phi_n - p_{h,n})) T_h(\xi_h) \\ & \forall \xi_h \in H_h \text{ tal que } \xi^i \geq 0 \quad \forall i \in I_h^D \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\Omega_h} \left[ (1 - g_{h,n}) D_h(\xi_h) + \frac{1 - g_{h,n}}{\tau} R_h(\xi_h) \right] \geq 0 \\ & \forall \xi_h \in H_h \text{ tal que } \xi^i \geq 0 \text{ si } p_n^i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

En lo sucesivo no escribiremos explícitamente la dependencia en  $h$  de las funciones discreta para simplificar la notación.

### 2.1.2 Existencia de solución del problema discreto

Comenzamos por ver que las funciones base  $\{\omega_i\}_{i \in I_h}$ ,  $\{\chi_i\}_{i \in I_h}$  verifican el siguiente resultado que utilizaremos para la demostración de la existencia de solución del problema discreto  $(P_{\tau,h})$

**Proposición 2.4** Sea  $I_h' = \{i \in I_h \mid \mathcal{U}_i \text{ está bien definido}\}$ ; sea  $c$  la constante

$$c = \max_{i \in I_h'} \left( \frac{|D_i|}{|\mathcal{U}_i|} \right)$$

Si  $T_h$  es de tipo débilmente agudo entonces se verifica que

$$a(\omega_i, \omega_i) > 0 \quad \forall i \in I_h; \quad a(\omega_j, \omega_i) \leq 0 \quad \forall i, j \in I_h \quad i \neq j \quad (2.8)$$

$$b(\chi_i, \omega_i) > 0 \quad \forall i \in I_h; \quad b(\chi_j, \omega_i) \leq 0 \quad \forall i, j \in I_h \quad i \neq j \quad (2.9)$$

siendo

$$a(\xi, \zeta) = \int_{\Omega_h} \left( \nabla \xi \nabla \zeta + \frac{\alpha}{\tau} R_h(\xi) R_h(\zeta) \right) \quad \forall \xi, \zeta \in H_h$$

y

$$b(\chi, \xi) = \int_{\Omega_h} \left( \chi D_h(\xi) + \frac{1}{\tau} \chi R_h(\xi) \right) \quad \forall \chi \in L_h \text{ y } \forall \xi \in H_h.$$

Si además

$$\tau < \frac{h}{3c}$$

entonces se verifica también que

$$\sum_{j \in I_h} b(\chi_j, \omega_i) > 0 \quad \forall i \in I_h. \quad (2.10)$$

*Demostración.*- A la vista de la definición de  $a(\omega_i, \omega_j)$  se verifica trivialmente que  $a(\omega_i, \omega_i) > 0$ . Por otra parte, si  $i \neq j$ ,  $a(\omega_i, \omega_j) = \int_{\Omega_h} \nabla \omega_i \nabla \omega_j$  y en ese caso la desigualdad deseada es un resultado clásico de P.A. Raviart y P.G. Ciarlet (ver [22]).

Respecto de (2.9) en [35] puede verse la demostración de que

$$\int_{\Omega_h} \chi_j D_h(\omega_i) \begin{cases} \geq 0 & \text{si } j = i \\ \leq 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Puesto que

$$b(\chi_j, \omega_i) = \int_{\Omega_h} (\chi_j D_h(\omega_i) + \frac{1}{\tau} \chi_j R_h(\omega_i))$$

se tiene efectivamente (2.9).

Para demostrar (2.10) se observa que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in I_h} \int_{\Omega_h} \chi_j D_h(\omega_i) \right| &= \left| \int_{\Omega_h} D_h(\omega_i) \right| = \left| \sum_{j \in I'_h} |D_j| \frac{\partial}{\partial x_N} (\omega_i|_{U_j}) \right| \leq \\ &\leq c \sum_{j \in I'_h} |U_j| \left| \frac{\partial}{\partial x_N} (\omega_i|_{U_j}) \right| \leq c \int_{\Omega_h} \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial x_N} \right| \leq \frac{c}{h} |Sop(\omega_i)| = \\ &= 3 \frac{c}{h} |D_i|. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{j \in I_h} b(\chi_j, \omega_i) = \frac{1}{\tau} |D_i| + \sum_{j \in I_h} \int_{\Omega_h} \chi_j D_h(\omega_i)$$

se tiene

$$\sum_{j \in I_h} b(\chi_j, \omega_i) \geq -3 \frac{c}{h} |D_i| + \frac{1}{\tau} |D_i| > 0$$

si  $\tau < h/(3c)$ . #

**Observación 2.5** Una primera consecuencia de este resultado es que la matriz  $B$  de coeficientes

$$B = (b_{i,j})_{i,j \in I_h} \quad b_{i,j} = \int_{\Omega_h} \left( \chi_j D_h(\omega_i) + \frac{1}{\tau} \chi_j R_h(\omega_i) \right)$$

es una M-matriz, según la siguiente definición de J.M. Ortega y W.C. Rheinboldt (ver [34]):

**Definición 2.6** Una matriz  $B \in L(\mathbb{R}^n)$  es una M-matriz si es inversible,  $B^{-1} \geq 0$ , y  $b_{i,j} \leq 0$  para todo  $i, j = 1, \dots, n; i \neq j$ .

Las condiciones (2.9) y (2.8) nos permiten deducir que  $B$  es una M-matriz en virtud del siguiente resultado:

**Proposición 2.7** Sea  $B \in L(\mathbb{R}^n)$  estrictamente diagonalmente dominante y supongamos que  $b_{i,j} \leq 0$  si  $i \neq j$ , y que  $b_{i,i} > 0$  para  $i = 1, \dots, n$ . Entonces  $B$  es una M-matriz.

*Demostración.*- Ver [34].

Mostramos ahora la existencia de solución del problema discreto:

**Teorema 2.8** Supongamos que  $T_h$  es de tipo débilmente agudo y que  $\tau < \frac{h}{3c}$  con  $c = \max_{i \in I'_h} \left( \frac{|D_i|}{|\mathcal{U}_i|} \right)$ ; entonces el problema  $(P_{\tau,h})$  tiene solución.

*Demostración.*- Vamos a plantear dos problemas auxiliares. Supuestos conocidos  $p_{n-1}$  y  $g_{n-1}$ , el primer problema auxiliar es el siguiente:

*Problema 1.*- Hallar  $W \in V_h^+ = \{\xi \in V_h \mid \xi \geq 0\}$  tal que

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\Omega_h} \left( \nabla W \nabla(\xi - W) + \frac{\alpha}{\tau} R_h(W) R_h(\xi - W) \right) + \\ & + \int_{\Omega_h} \left( D_h(\xi - W) + \frac{1}{\tau} R_h(\xi - W) \right) - \\ & - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} (g_{n-1} + \alpha R_h(p_{n-1})) R_h(\xi - W) \geq \\ & \geq \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - W)) T_h(\xi - W) \end{aligned} \right\}$$

para toda función  $\xi \in V_h^+$ .

Comenzamos por demostrar que este problema tiene solución. Del mismo modo que se hizo para resolver el problema semidiscreto, llamemos

$$\mathcal{B} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

a la función definida

$$\mathcal{B}(s) = \int_0^s \beta(\sigma) d\sigma.$$

Como  $\beta$  es continua, monótona, creciente y  $\beta(0) = 0$ , tenemos que  $\mathcal{B}$  es derivable, convexa y  $\mathcal{B}(s) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$ . Definimos la aplicación

$$j : H_h \longrightarrow [0, \infty)$$

$$j(\xi) = \int_{\Gamma_h^w} \mathcal{B}(T_h(\phi_n - \xi))$$

y el funcional

$$J(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} \left( |\nabla \xi|^2 + \frac{\alpha}{\tau} R_h(\xi)^2 \right) + \int_{\Omega_h} \left( D_h(\xi) + \frac{1}{\tau} R_h(\xi) \right) - \left. \begin{array}{l} \\ - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} (g_{n-1} + \alpha R_h(p_{n-1})) R_h(\xi) + j(\xi). \end{array} \right\}$$

$J$  consta de una parte cuadrática

$$\frac{1}{2} a(\xi, \xi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} \left( |\nabla \xi|^2 + \frac{\alpha}{\tau} R_h(\xi)^2 \right)$$

una parte lineal

$$L(\xi) = \int_{\Omega_h} \left( D_h(\xi) + \frac{1}{\tau} R_h(\xi) \right) - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} (g_{n-1} + \alpha R_h(p_{n-1})) R_h(\xi) + j(\xi)$$

y una parte no lineal

$$j(\xi) = \int_{\Gamma_h^w} \mathcal{B}(T_h(\phi_n - \xi)).$$

$J : H_h \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, estrictamente convexa y verifica que para toda sucesión  $\{\xi_k\} \subset H_h$  tal que  $\|\xi_k\| \rightarrow +\infty$  cuando  $k$  tiende a cero entonces  $J(\xi_k) \rightarrow +\infty$ . Como  $V_h^+$  es un subconjunto cerrado y convexo de  $H_h$  existe un único  $w \in V_h^+$  que minimiza  $J$  en  $V_h^+$ .

Una vez resuelto el problema 1, sea  $w$  su solución. Sea  $s = \nabla J(w)$ , es decir, para cada  $i \in I_h$

$$s_i = \int_{\Gamma_h^w} \beta(T_h(\phi_n - w)) T_h(\omega_i) - \left[ \int_{\Omega_h} \left( \nabla w \nabla \omega_i + \frac{\alpha}{\tau} R_h(w) \chi_i \right) + \right. \\ \left. + \int_{\Omega_h} \left( D_h(\omega_i) + \frac{1}{\tau} \chi_i \right) - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} (g_{n-1} + \alpha R_h(p_{n-1})) \chi_i \right]$$

y sea

$$F_i = \min\{0, s_i\}$$

Construimos así el vector  $\vec{F} = (F_i)_{i \in I_h}$ . El segundo problema auxiliar es:

*Problema 2.-* Hallar  $\vec{u} \in \mathbb{R}^{I_h}$  tal que

$$B\vec{u} = \vec{F}.$$

Puesto que  $B$  es una M-matriz, es inversible y el problema 2 tiene para cada  $\vec{F}$  una única solución.

La solución del problema  $(P_{\tau,h})$  se construye por iteración, utilizando estos dos problemas auxiliares. Se comienza con  $p_0 = p_h^0$  y  $g_0 = g_h^0$ , que son los datos iniciales del problema discreto. Una vez calculados  $p_{n-1}$  y  $g_{n-1}$  se toma:  $p_n = w$  siendo ésta la solución del correspondiente problema 1, y  $g_n = 1 + u$  siendo  $\vec{u}$  la solución del problema 2 y  $u = \sum_{i \in I_h} u_i \chi_i \in L_h$ .

La demostración del teorema se concluye viendo que la familia  $\{(p_n, g_n)\}_{n=0}^M$  así construida verifica (2.5), (2.6) y (2.7).

Sea  $\vec{g}_n = (g_n^i)_{i \in I_h}$ ,  $g_n^i = 1 + u_i \quad \forall i \in I_h$ . Puesto que  $B^{-1} \geq 0$  y  $F_i \leq 0 \quad \forall i \in I_h$  se tiene que  $u_i \leq 0 \quad \forall i \in I_h$  y por tanto  $g_n \leq 1$ .

Para ver que  $0 \leq g_n$  de nuevo por la monotonía de  $B$  es suficiente demostrar que todas las componentes del vector  $B\vec{g}_n$  son no negativas.  $\forall i \in I_h$ ,  $b(g_n, \omega_i) \geq 0$ . Por construcción

$$\sum_{j \in I_h} b_{i,j} g_n^j = \sum_{j \in I_h} b_{i,j} + F_i.$$

Si  $w_i > 0$  podemos tomar como funciones test en el problema 1

$$\xi_1 = w + \frac{w_i}{2} \omega_i \quad \text{y} \quad \xi_2 = w - \frac{w_i}{2} \omega_i$$

obteniendo así que  $F_i = 0$  y por tanto

$$\sum_{j \in I_h} b_{i,j} g_n^j = \sum_{j \in I_h} b_{i,j} \geq 0.$$

Si  $w_i = 0$  por ser  $\phi \geq 0$ ,  $\int_{\Gamma_h^w} \beta(T_h(\phi_n - w)) T_h(\omega_i) \geq 0$ , y por ser

$$\int_{\Omega_h} \left( \nabla \omega_j \nabla \omega_i + \frac{\alpha}{\tau} \chi_j \chi_i \right) \leq 0$$

si  $i \neq j$ , entonces

$$\int_{\Omega_h} \left( \nabla w \nabla \omega_i + \frac{\alpha}{\tau} R_h(w) \chi_i \right) \leq 0;$$

de modo que

$$\sum_{j \in I_h} b_{i,j} g_n^j = \min \left\{ \int_{\Omega_h} \left( D_h(\omega_i) + \frac{1}{\tau} \chi_i \right), \int_{\Gamma_h^w} \beta(T_h(\phi_n - w)) T_h(\omega_i) - \right. \\ \left. \int_{\Omega_h} \left( \nabla w \nabla \omega_i + \frac{\alpha}{\tau} R_h(w) \chi_i \right) + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} (g_{n-1} + \alpha R_h(p_{n-1})) \chi_i \right\} \geq 0.$$

Para ver que se tiene (2.7) no hay más que observar que

$$\int_{\Omega_h} \left[ (1 - g_n) D_h(\omega_i) + \frac{1}{\tau} (1 - g_n) R_h(\omega_i) \right] = - \sum_{j \in I_h} b_{i,j} u_j = -F_i \geq 0$$

y en particular si  $w_i = 0$  ya vimos que  $F_i = 0$ .

Por último se verifica (2.6) ya que  $\forall i \in I_h$

$$\int_{\Omega_h} \left( g_n D_h(\omega_i) + \frac{1}{\tau} g_n R_h(\omega_i) \right) = \sum_{j \in I_h} b_{i,j} (u_n^j + 1) \leq \int_{\Gamma_h^w} \beta(T_h(\phi_n - p_n)) T_h(\omega_i) \\ - \int_{\Omega_h} \left( \nabla p_n \nabla \omega_i + \frac{\alpha}{\tau} R_h(p_n) \chi_i \right) + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} (g_{n-1} + \alpha R_h(p_{n-1})) \chi_i.$$

Además si  $i \in I_h \setminus I_h^D$  entonces  $F_i = s_i$  y se tiene de hecho una igualdad, es decir

$$\int_{\Omega_h} \left( g_n D_h(\omega_i) + \frac{1}{\tau} g_n R_h(\omega_i) \right) = \sum_{j \in I_h} b_{i,j} (u_n^j + 1) = \\ = F_i + \int_{\Omega_h} \left( D_h(\omega_i) + \frac{1}{\tau} R_h(\omega_i) \right) = \int_{\Gamma_h^w} \beta(T_h(\phi_n - p_n)) T_h(\omega_i) \\ - \int_{\Omega_h} \left( \nabla p_n \nabla \omega_i + \frac{\alpha}{\tau} R_h(p_n) \chi_i \right) + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} (g_{n-1} + \alpha R_h(p_{n-1})) \chi_i. \quad \#$$

## 2.2 Acotaciones de la solución discreta

A partir de la solución del problema discreto  $\{(p_n, g_n)\}_{n=0}^M$  construimos las funciones

$$p_h^\tau = \sum_{n=0}^M p_n(x) \psi_n(t) \tag{2.11}$$

$$g_h^\tau = \sum_{n=0}^M g_n(x) \psi_n(t). \tag{2.12}$$

Vamos a utilizar un argumento análogo al que se empleó para pasar al límite en el problema semidiscreto: demostraremos distintas acotaciones a priori de la solución discreta que nos permitirán, mediante argumentos de compacidad, demostrar la convergencia de al menos una subsucesión de  $(p_h^T, g_h^T)$  hacia un par  $(p, g)$ , solución del problema continuo.

Para obtener acotaciones uniformes en  $h$  y en  $\tau$  de la solución discreta comenzamos por demostrar algunas propiedades de los espacios y operadores discretos con los que trabajamos.

**Lema 2.9** *Supongamos que la familia de descomposiciones  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  es regular y de tipo débilmente agudo; entonces existe una constante  $C$  tal que  $\forall h > 0$  y  $\forall \xi \in H_h$*

$$\|D_h(\xi)\|_{L^2(\Omega_h)} \leq C \|\nabla \xi\|_{(L^2(\Omega_h))^N}. \quad (2.13)$$

*Demostración .-* La demostración de que se verifica (2.13) puede encontrarse en [35]. De todas formas es interesante incluirla aquí:

$$\begin{aligned} \forall \xi \in H_h \quad \|D_h(\xi)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 &= \int_{\Omega_h} \left( \sum_{i \in I'_h} \frac{\partial}{\partial x_N} \xi|_{\mathcal{U}_i} \chi_i \right)^2 = \\ &= \sum_{i \in I'_h} |D_i| \left( \frac{\partial}{\partial x_N} \xi|_{\mathcal{U}_i} \right)^2 = \sum_{i \in I'_h} |D_i| \left( \frac{1}{|\mathcal{U}_i|} \int_{\mathcal{U}_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_N} \right)^2 = \\ &= \sum_{i \in I'_h} \frac{|D_i|}{|\mathcal{U}_i|} \int_{\mathcal{U}_i} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x_N} \right)^2 = \sum_{i \in I'_h} \frac{|D_i|}{|\mathcal{U}_i|} \left\| \frac{\partial \xi}{\partial x_N} \right\|_{L^2(\mathcal{U}_i)}^2 \leq \\ &\leq c \left\| \frac{\partial \xi}{\partial x_N} \right\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \end{aligned}$$

y por tanto

$$\|D_h(\xi)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \leq c \|\nabla \xi\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2 \quad \forall \xi \in H_h. \quad \#$$

Con la elección que hemos hecho de las bases  $\{\omega_i\}_{i \in I_h}$  y  $\{\chi_i\}_{i \in I_h}$  se tiene el siguiente resultado clásico de aproximación:

**Lema 2.10** *Supongamos que  $\mathcal{T}_h$  es regular y de tipo débilmente agudo. Sean  $\Pi_h^1$  y  $\Pi_h^0$  los operadores definidos*

$$\begin{aligned} \Pi_h^1(\xi) &= \sum_{i \in I_h} \xi(x_i) \omega_i(x) \\ \Pi_h^0(\xi) &= \sum_{i \in I_h} \xi(x_i) \chi_i(x) \end{aligned}$$

para toda  $\xi \in C^0(\overline{\Omega_h})$ . Se verifica que:

-  $\exists C$  tal que  $\forall h > 0$  y  $\forall \xi \in H^2(\Omega_h) \cap C^0(\overline{\Omega_h})$

$$\|\xi - \Pi_h^1(\xi)\|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch|\xi|_{2,\Omega} \quad (2.14)$$

$$\text{donde } |\xi|_{2,\Omega_h} = \sum_{k,l=1}^N \left\| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_k \partial x_l} \right\|_{L^2(\Omega_h)}^2$$

-  $\exists C$  tal que  $\forall h > 0$  y  $\forall \xi \in H^1(\Omega_h) \cap C^0(\overline{\Omega_h})$

$$\|\xi - \Pi_h^0(\xi)\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch\|\nabla \xi\|_{(L^2(\Omega_h))^N} \quad (2.15)$$

*Demostración.*- Ver [38]. #

**Observación 2.11** Consecuencia inmediata del lema anterior es que existe una constante  $C$  tal que  $\forall h > 0$  y  $\forall \xi \in H_h$

$$\|R_h(\xi) - \xi\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch\|\nabla \xi\|_{(L^2(\Omega_h))^N}$$

ya que  $R_h$  es la restricción a  $H_h$  de  $\Pi_h^0$ .

En el siguiente lema se demuestra que el espacio  $V_h$  aproxima al espacio  $V$ .

**Hipótesis 2.2** existe un sucesión  $\varepsilon_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  tal que

$$\Gamma_h^W \cup \Gamma_h^I \subset B(\Gamma^W \cup \Gamma^I, \varepsilon(h)) \quad \text{y} \quad \Gamma^W \cup \Gamma^I \subset B(\Gamma_h^W \cup \Gamma_h^I, \varepsilon(h))$$

**Lema 2.12** Supongamos que se verifican las hipótesis 2.1 y 2.2; entonces dada una sucesión de funciones  $\xi_h \in V_h$  tal

$$\chi(\Omega_h)\xi_h \longrightarrow \chi(\Omega)\xi \text{ débil en } L^2(\mathbb{R}^N)$$

$$\chi(\Omega_h)\nabla \xi_h \longrightarrow \chi(\Omega)\nabla \xi \text{ débil en } (L^2(\mathbb{R}^N))^N$$

entonces  $\xi \in V$

*Demostración.*- Hemos de demostrar que  $\xi = 0$  en  $\Gamma^D$ . Sea  $x \in \Gamma^D$ . Como  $\Gamma^D$  es un abierto de  $\Gamma$ , podemos tomar  $\varepsilon > 0$  tal que  $d(B(x, \varepsilon), (\Gamma^I \cup \Gamma^W)) \geq \varepsilon_0$  para cierto  $\varepsilon_0 > 0$ ; entonces para  $h$  suficientemente pequeño  $B(x, \varepsilon) \cap (\Gamma_h^I \cup \Gamma_h^W) = \emptyset$ . Sea  $\psi \in \mathcal{D}(B(x, \varepsilon))$  tal que  $\psi = 1$  en  $B(x, \varepsilon/2)$ .



Consideremos las funciones

$$w_h = \psi \xi_h \in H_0^1(\Omega_h \cap B(x, \varepsilon))$$

y

$$w = \psi \xi \in H^1(\Omega \cap B(x, \varepsilon)).$$

Podemos prolongar  $w_h$  del siguiente modo

$$\bar{w}_h = \begin{cases} w_h & \text{en } \Omega_h \\ 0 & \text{en } B(x, \varepsilon) \setminus \Omega_h. \end{cases}$$

Esta función así definida está en el espacio  $H_0^1(B(x, \varepsilon))$ ; además la sucesión  $\bar{w}_h$  está acotada uniformemente en ese espacio de manera que existe una subsucesión, que seguiremos llamando  $\bar{w}_h$ , tal que

$$\bar{w}_h \longrightarrow u \text{ débilmente en } H_0^1(B(x, \varepsilon)).$$

Sea  $\eta \in \mathcal{D}(B(x, \varepsilon))$  tal que  $\eta = 0$  en  $\Omega$ ; se tiene que

$$\int_{B(x, \varepsilon)} \bar{w}_h \eta = \int_{Q_h} w_h \eta = \int_{\Omega_h} \xi_h \psi \eta \longrightarrow \int_{\Omega} \xi \psi \eta$$

por lo tanto  $u = \chi(\Omega)w$  y  $w = u|_{\Omega} \in H_0^1(\Omega)$  de modo que

$$\xi = w = 0 \text{ c.t.p. } (x) \in \Gamma^D \cap B(x, \varepsilon/2).$$

Puesto que este razonamiento es válido para todo  $\varepsilon > 0$  se deduce que efectivamente

$$\xi = 0 \text{ en } \Gamma^D. \quad \#$$

Por último necesitamos tener en el caso discreto, una desigualdad análoga a la de Poincaré. Puesto que

$$V_h \subset \{\xi \in H^1(\Omega_h) \mid \xi = 0 \text{ en } \Gamma_h^D\}$$

para cada  $h > 0$  existe una constante  $C$  tal que para toda  $\xi_h \in V_h$ ,

$$\|\xi_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq C \|\nabla \xi_h\|_{(L^2(\Omega_h))^N}$$

En la siguiente hipótesis se pide que esa constante  $C$  no dependa de  $h$ .

**Hipótesis 2.3** *Existe una constante  $C$  tal que  $\forall h > 0$  y  $\forall \xi \in V_h$*

$$\|\xi\|_{H^1(\Omega_h)} \leq C \|\nabla \xi\|_{(L^2(\Omega_h))^N}$$

Al final de este capítulo damos una condición suficiente para que se verifique esta hipótesis.

Una vez demostrados los lemas anteriores podemos establecer las siguientes acotaciones a priori de la solución discreta.

**Proposición 2.13** *Sea  $\{(p_n, g_n)\}_{n=0}^M$  solución del problema discreto; supongamos que  $T_h$  es regular y de tipo débilmente agudo, que se verifica la hipótesis 2.1, y que  $\alpha\|p_0\|_{H^1(\Omega_h)}$  está uniformemente acotada en  $h$ . Entonces existe una constante  $K$  tal que*

$$\tau \sum_{n=1}^M \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2 \leq K \quad (2.16)$$

$$\tau \sum_{n=1}^M \|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \leq K \quad (2.17)$$

$$\|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \leq K \quad (2.18)$$

*Demostración.*- Para cada  $n = 1, \dots, M$  podemos tomar  $p_n$  como función test en (2.6) y (2.7) de  $(P_{\tau,h})$ . De (2.7) se deduce que

$$\int_{\Omega_h} \left[ (1 - g_n) D_h(p_n) + \frac{1 - g_n}{\tau} R_h(p_n) \right] = 0$$

y, por lo tanto, en (2.6) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \left[ |\nabla p_n|^2 + D_h(p_n) + \frac{1}{\tau} (1 - g_{n-1}) R_h(p_n) + \frac{\alpha}{\tau} R_h(p_n - p_{n-1}) R_h(p_n) \right] = \\ = \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - p_n)) T_h(p_n). \end{aligned}$$

Puesto que  $g_{n-1} \leq 1$  y  $p_n \geq 0$  sucede que

$$\int_{\Omega_h} (1 - g_{n-1}) R_h(p_n) \geq 0$$

y entonces

$$\begin{aligned} \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2 + \frac{\alpha}{\tau} \|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \leq \\ \leq \int_{\Omega_h} \left[ -D_h(p_n) + \frac{\alpha}{\tau} R_h(p_n) R_h(p_{n-1}) \right] + \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - p_n)) T_h(p_n) \leq \\ \leq |\Omega_h|^{1/2} \|D_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)} + \frac{\alpha}{\tau} \|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)} \|R_h(p_{n-1})\|_{L^2(\Omega_h)} + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - p_n))T_h(p_n)$$

Como  $\beta$  es monótona y  $\phi$  es positiva se verifica que

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - p_n))T_h(p_n) = \\ &= \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - p_n))T_h(\phi_n) - \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - p_n))T_h(\phi_n - p_n) \leq \\ & \leq \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - p_n))T_h(\phi_n) \leq \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n))T_h(\phi_n) \leq C \end{aligned}$$

puesto que  $\phi \in C^{0,1}(\overline{Q})$ .

Haciendo uso del lema 2.9 y teniendo en cuenta que  $\phi \geq 0$  se tiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2 + \frac{\alpha}{\tau} \|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 &\leq \frac{K'}{2} + \frac{1}{2} \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2 + \\ &+ \frac{\alpha}{2\tau} (\|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \|R_h(p_{n-1})\|_{L^2(\Omega_h)}^2) + C \end{aligned}$$

y por tanto

$$\left. \begin{aligned} \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2 + \frac{\alpha}{\tau} \|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 &\leq \\ K' + \frac{\alpha}{\tau} \|R_h(p_{n-1})\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + 2C & \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Multiplicando por  $\tau$  y sumando en  $n$

$$\tau \sum_{n=1}^M \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2 \leq TK' + \alpha \|R_h(p_0)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + 2TC \leq K$$

Utilizando la hipótesis 2.3 y la observación 2.11 tenemos:

$$\begin{aligned} \tau \sum_{n=1}^M \|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 &\leq \tau \sum_{n=1}^M (\|R_h(p_n) - p_n\|_{L^2(\Omega_h)} + \|p_n\|_{L^2(\Omega_h)})^2 \leq \\ &\leq \tau \sum_{n=1}^M [(hC + C) \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2] \leq (hC + C)^2 K = K. \end{aligned}$$

Si  $\alpha \neq 0$  de la desigualdad 2.19 se deduce

$$\begin{aligned} \|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 &\leq \|R_h(p_{n-1})\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \frac{\tau}{\alpha} (K' + 2C) \leq \\ &\leq \|R_h(p_0)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + T \frac{K' + 2C}{\alpha} \leq K \end{aligned}$$

Si  $\alpha = 0$  la desigualdad 2.19 es

$$\|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2 \leq K' + 2C$$

por tanto

$$\begin{aligned} \|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 &\leq \|R_h(p_n) - p_n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \|p_n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \leq \\ &\leq (Ch + C)\|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2 \leq (Ch + C)(K' + 2C) \leq K \quad \# \end{aligned}$$

La siguiente estimación se refiere a la derivada en tiempo de  $g_h^T + \alpha R_h(p_h^T)$ . Vamos a acotar esa derivada en el espacio  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_h))$  y para ello necesitamos que las funciones de  $H_0^1(\Omega_h)$  se puedan aproximar bien mediante funciones de los espacios de dimensión finita con los que estamos trabajando. En concreto se tiene el siguiente resultado:

**Lema 2.14** *Existe una constante  $C$  tal que para todo  $h > 0$  y para todo  $\xi \in H_0^1(\Omega_h)$  existe una función  $\xi_h \in \{\zeta \in H_h \mid \zeta = 0 \text{ en } \Gamma_h\}$  tal que*

$$\|\xi - R_h(\xi_h)\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch\|\xi\|_{H^1(\Omega_h)} \quad (2.20)$$

$$\|\xi_h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq C\|\xi\|_{H^1(\Omega_h)} \quad (2.21)$$

*Demostración.*- Dada  $\xi \in H_0^1(\Omega_h)$  sea  $\xi_h \in H_h$  tal que  $\xi_h = 0$  en  $\Gamma_h$  y verifica

$$\int_{\Omega_h} (\nabla \xi_h \nabla \zeta + \xi_h \zeta) = \int_{\Omega_h} (\nabla \xi \nabla \zeta + \xi \zeta)$$

para toda función  $\zeta \in H_h$  tal que  $\zeta = 0$  en  $\Gamma_h$ . Tomando  $\zeta = \xi_h$

$$\|\xi_h\|_{H^1(\Omega_h)}^2 = \int_{\Omega_h} (|\nabla \xi_h|^2 + \xi_h^2) = \int_{\Omega_h} (\nabla \xi \nabla \xi_h + \xi \xi_h) \leq \|\xi\|_{H^1(\Omega_h)} \|\xi_h\|_{H^1(\Omega_h)}$$

y por tanto

$$\|\xi_h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq \|\xi\|_{H^1(\Omega_h)}$$

lo que demuestra (2.21).

Para demostrar (2.20) utilizaremos un argumento clásico de dualidad (ver por ejemplo [40]). Dada  $\phi \in L^2(\Omega_h)$  sea  $\psi \in H_0^1(\Omega_h) \cap H^2(\Omega_h)$  solución de

$$-\Delta \psi + \psi = \phi \text{ en } \Omega_h \quad \psi = 0 \text{ en } \Gamma_h$$

(Para la demostración de que efectivamente  $\psi$  está en  $H^2(\Omega_h)$  ver [28] y [29]) Según hemos definido  $\xi_h$  y  $\psi$ , y haciendo uso del lema 2.10 y de la desigualdad (2.21) ya demostrada tenemos

$$\int_{\Omega_h} (\xi_h - \xi) \phi = \int_{\Omega_h} \nabla (\xi_h - \xi) \nabla \psi + \int_{\Omega_h} (\xi_h - \xi) \psi =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega_h} \nabla(\xi_h - \xi) \nabla(\psi - \Pi_h^1(\psi)) + \int_{\Omega_h} (\xi_h - \xi)(\psi - \Pi_h^1(\psi)) \leq \\
&\leq \|\xi_h - \xi\|_{H^1(\Omega_h)} \|\psi - \Pi_h^1(\psi)\|_{H^1(\Omega_h)} \leq \|\xi_h - \xi\|_{H^1(\Omega_h)} Ch |\psi|_{2, \Omega_h} \leq \\
&\leq Ch \|\xi\|_{H^1(\Omega_h)} \|\phi\|_{L^2(\Omega_h)}.
\end{aligned}$$

Se deduce de aquí y de la observación 2.11 que

$$\|\xi - R_h(\xi_h)\|_{L^2(\Omega_h)} \leq \|\xi - \xi_h\|_{L^2(\Omega_h)} + \|\xi_h - R_h(\xi_h)\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch \|\xi\|_{H^1(\Omega_h)} + Ch \|\nabla \xi_h\|_{(L^2(\Omega_h))^N}$$

y por tanto efectivamente se verifica (2.20). #

**Proposición 2.15** Sean  $p_h^\tau$  y  $g_h^\tau$  las funciones definidas en (2.11) y (2.12). Supongamos que se verifican las hipótesis de la proposición 2.13 y que existe una constante positiva  $C$  tal que  $h \leq C\tau$ . Entonces existe una constante  $K$ , independiente de  $h$  y de  $\tau$  tal que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (g_h^\tau + \alpha R_h(p_h^\tau)) \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_h))} \leq K.$$

*Demostración.*- Comenzamos por escribir  $\frac{\partial}{\partial t} (g_h^\tau + \alpha R_h(p_h^\tau))$  de forma más explícita.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (g_h^\tau + \alpha R_h(p_h^\tau)) &= \sum_{n=0}^M (g_n(x) + \alpha R_h(p_n)(x)) \psi_n'(t) = \\
&\sum_{n=1}^{M-1} (g_n + \alpha R_h(p_n))(x) \frac{\gamma_n(t) - \gamma_{n+1}(t)}{\tau} - \\
&-\frac{1}{\tau} (g_0 + \alpha R_h(p_0))(x) \gamma_1(t) + \frac{1}{\tau} (g_M + \alpha R_h(p_M))(x) \gamma_M(t) = \\
&= \sum_{n=1}^M \left( \frac{g_n - g_{n-1}}{\tau} + \alpha R_h \left( \frac{p_n - p_{n-1}}{\tau} \right) \right) (x) \gamma_n(t).
\end{aligned}$$

Para estimar la norma de esta función en  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_h))$  vamos a acotar el producto de dualidad con funciones de  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega_h))$ . Dada  $\xi \in H_0^1(\Omega_h)$  tomemos  $\xi_h \in H_h$  que verifique (2.20) y (2.21).

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_h} \left[ \frac{g_n - g_{n-1}}{\tau} + \alpha R_h \left( \frac{p_n - p_{n-1}}{\tau} \right) \right] \xi = \\
&= \int_{\Omega_h} \left[ \frac{g_n - g_{n-1}}{\tau} + \alpha R_h \left( \frac{p_n - p_{n-1}}{\tau} \right) \right] R_h(\xi_h) + \\
&+ \int_{\Omega_h} \left[ \frac{g_n - g_{n-1}}{\tau} + \alpha R_h \left( \frac{p_n - p_{n-1}}{\tau} \right) \right] (\xi - R_h(\xi_h)).
\end{aligned}$$

Usando la inecuación (2.6), el lema 2.9 y la observación 2.11

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_h} \left[ \frac{g_n - g_{n-1}}{\tau} + \alpha R_h \left( \frac{p_n - p_{n-1}}{\tau} \right) \right] \xi \leq \\
& \leq - \int_{\Omega_h} [\nabla p_n \nabla \xi_h + g_n D_h(\xi_h)] + \\
& + \int_{\Omega_h} \left[ \frac{g_n - g_{n-1}}{\tau} + \alpha R_h \left( \frac{p_n - p_{n-1}}{\tau} \right) \right] (\xi - R_h(\xi_h)) \leq \\
& \leq \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N} \|\nabla \xi_h\|_{(L^2(\Omega_h))^N} + |\Omega_h|^{1/2} \|D_h(\xi_h)\|_{L^2(\Omega_h)} + \\
& + \frac{1}{\tau} \left( |\Omega_h|^{1/2} + \alpha \|R_h(p_n - p_{n-1})\|_{L^2(\Omega_h)} \right) \|\xi - R_h(\xi_h)\|_{L^2(\Omega_h)} \leq \\
& \leq C_1 \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N} \|\xi\|_{H^1(\Omega_h)} + |\Omega_h|^{1/2} C_2 \|\xi\|_{H^1(\Omega_h)} + \\
& + \frac{1}{\tau} (C_3 + \alpha \|R_h(p_n - p_{n-1})\|_{L^2(\Omega_h)}) C_4 h \|\xi\|_{H^1(\Omega_h)}.
\end{aligned}$$

Si ahora tomamos  $\xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_h))$  se tiene para casi todo  $t \in (t_{n-1}, t_n)$ ,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega_h} \frac{\partial}{\partial t} (g_h^\tau + \alpha R_h(p_h^\tau))(t, x) \xi(t, x) dx \right| = \\
& = \left| \int_{\Omega_h} \left[ \frac{g_n - g_{n-1}}{\tau} + \alpha R_h \left( \frac{p_n - p_{n-1}}{\tau} \right) \right] (x) \xi(t, x) dx \right| \leq \\
& \leq (C \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N} + |\Omega_h|^{1/2} C + \\
& + \frac{1}{\tau} (C + \alpha \|R_h(p_n - p_{n-1})\|_{L^2(\Omega_h)}) C h \|\xi(t)\|_{H^1(\Omega_h)}).
\end{aligned}$$

Llamaremos  $L(t)$  a la función

$$\sum_{n=1}^M [(C \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N} + |\Omega_h|^{1/2} C + \frac{1}{\tau} (C + \alpha \|R_h(p_n - p_{n-1})\|_{L^2(\Omega_h)}) C h] \gamma_n(t)$$

Al hacer el producto de dualidad de  $\frac{\partial}{\partial t} (g_h^\tau + \alpha R_h(p_h^\tau))$  con una función  $\xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_h))$  se obtiene

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{Q_h} \frac{\partial}{\partial t} (g_h^\tau + \alpha R_h(p_h^\tau))(t, x) \xi(t, x) dx \right| \leq \\
& \leq \int_0^T L(t) \|\xi(t)\|_{H^1(\Omega_h)} dt \leq \|L\|_{L^2(0, T)} \|\xi\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega_h))}.
\end{aligned}$$

La demostración se concluye viendo que  $\|L\|_{L^2(0,T)}$  está acotada independientemente de  $h$  y  $\tau$

$$\begin{aligned} \|L(t)\|_{L^2(0,T)}^2 &= \tau \sum_{n=1}^M \left[ C \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N} + |\Omega_h|^{1/2} C + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\tau} (C + \alpha \|R_h(p_n - p_{n-1})\|_{L^2(\Omega_h)}) C h \right]^2 \leq \\ &\leq C\tau \sum_{n=1}^M \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2 + TC + TC \frac{h}{\tau} + C \frac{h}{\tau} \tau \sum_{n=1}^M \|R_h(p_n - p_{n-1})\|_{L^2(\Omega_h)}^2. \end{aligned}$$

Por la proposición 2.13

$$\tau \sum_{n=1}^M \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2 \leq K_1 \quad \text{y} \quad \tau \sum_{n=1}^M \|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \leq K_2$$

y finalmente la hipótesis  $h \leq C\tau$  permite acotar  $\|L\|_{L^2(0,T)}^2$ . #

## 2.3 Estudio de la convergencia

Sean  $H_{h,\tau}$  el espacio

$$H_{h,\tau} = \left\{ \xi_h^\tau = \sum_{n=0}^M \xi_n(x) \psi_n(t) \mid \xi_n(x) \in H_h, \xi_n \geq 0 \text{ en } \Gamma^D \forall n = 0, \dots, M \right\}$$

y  $S_\tau$  el operador lineal definido del siguiente modo:  $\forall \xi_h^\tau = \sum_{n=0}^M \xi_n \psi_n(t) \in H_{h,\tau}$

$$S_\tau(\xi_h^\tau) = \sum_{n=1}^M \xi_n \gamma_n(t).$$

Para simplificar la notación usaremos el convenio que se usa en [3]: escribiremos, por ejemplo,

$$p_h \longrightarrow p \text{ en } L^2$$

en vez de

$$\chi(\Omega_h)p_h \longrightarrow \chi(\Omega)p \text{ en } L^2(\mathbb{R}^N).$$

## Condiciones de contorno

En  $\Sigma^D$  tenemos para el problema continuo condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas. Esto se traduce en el problema discreto en que buscamos soluciones en  $L^2(0, T; V_h)$ . Ya vimos (lema 2.12) que el límite débil de funciones de  $V_h$  es una función de  $V$ . El mismo argumento que se empleó en ese caso sirve para demostrar el siguiente resultado:

**Lema 2.16** *Supongamos que se verifican las hipótesis 2.1 y 2.2. Sea  $\{\xi_h^\tau\}_{h, \tau > 0} \subset L^2(0, T; V_h) \cap H_{h, \tau}$  tal que*

$$\begin{aligned} S_\tau(\xi_h^\tau) &\longrightarrow \xi \text{ débil en } L^2 \\ S_\tau(\nabla \xi_h^\tau) &\longrightarrow \nabla \xi \text{ débil en } (L^2)^N \end{aligned}$$

entonces

$$\xi \in L^2(0, T; V).$$

*Demostración.*- Ver lema 2.12 #

Para estudiar la convergencia de las condiciones de contorno en  $\Sigma^W$  necesitamos una hipótesis relativa a la continuidad de la aplicación traza.

Puesto que  $H_h \subset H^1(\Omega_h)$  para cada  $h$  existe una constante  $C$  tal que para toda función  $\xi_h \in H_h$ ,

$$\|\xi_h\|_{L^2(\Gamma_h)} \leq C \|\xi_h\|_{H^1(\Omega_h)}$$

En la siguiente hipótesis se pide que esta constante  $C$  no dependa de  $h$ .

**Hipótesis 2.4** *Existe una constante independiente de  $h$  tal que para toda función  $\xi \in H_h$*

$$\|\xi\|_{L^2(\Gamma_h)} \leq C \|\xi\|_{H^1(\Omega_h)}$$

Al final de este capítulo damos una condición suficiente para que se verifique esta hipótesis.

Supuesto que se verifica esta hipótesis se tiene el siguiente resultado de continuidad del operador  $T_h$ .

**Lema 2.17** *Existe una constante  $C > 0$  tal que para todo  $h > 0$  y para toda función  $\xi \in H_h$*

$$\|T_h(\xi)\|_{L^2(\Gamma_h)} \leq C \|\xi\|_{H^1(\Omega_h)}.$$



*Demostración.*- Haremos la demostración para el caso  $N = 3$  pero la misma es válida para cualquier dimensión  $N \geq 2$ .

Dada  $\xi \in H_h$

$$\|\xi\|_{L^2(\Gamma_h)} \leq C \|\xi\|_{H^1(\Omega_h)}.$$

Por otra parte sea  $\{K_l\}_{l \in L}$  el conjunto de las caras de  $\Omega_h$

$$\|\xi\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 = \int_{\Gamma_h} \left| \sum_{i \in J_h} \xi^i \omega_i|_{\Gamma_h} \right|^2 = \sum_{l \in L} \int_{K_l} \left| \sum_{i \in J_h} \xi^i \omega_i|_{\Gamma_h} \right|^2$$

Las caras de  $\Omega_h$  son uniones de triángulos. En cada uno de estos triángulos hay únicamente tres funciones  $\omega_i$  no nulas. Llamemos  $\omega_{K,l}$   $l = 1, 2, 3$  a las tres funciones no nulas en el triángulo  $K$  y llamemos  $\bar{\omega}_{K,l}$  a la restricción a  $K$  de esas funciones. Tomemos un triángulo de referencia  $T$ , por ejemplo el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ . Para cada  $K$  existe una aplicación afín  $x' = Ax + b$  que transforma  $T$  en  $K$ . Sean  $P_1(x, y) = 1 - x - y$ ,  $P_2(x, y) = x$ ,  $P_3(x, y) = y$

$$\sum_{l \in L} \int_{K_l} \left| \sum_{i \in J_h} \xi^i \omega_i|_{\Gamma_h} \right|^2 = \sum_{l \in L} \int_{K_l} \left| \sum_{n=1}^3 \xi^i \bar{\omega}_{K_l, i} \right|^2$$

En cada triángulo  $K$  se tiene:

$$\begin{aligned} \int_K \left| \sum_{n=1}^3 \xi^i \bar{\omega}_{K, i} \right|^2 &= |A| \int_T \left| \sum_{n=1}^3 \xi^i P_i \right|^2 \geq \\ &\geq |A| \left[ (\xi^1)^2 \int_T (P_1^2 - \frac{1}{2} P_1 P_2 - \frac{1}{2} P_1 P_3) + \right. \\ &+ (\xi^2)^2 \int_T (P_2^2 - \frac{1}{2} P_2 P_1 - \frac{1}{2} P_2 P_3) + (\xi^3)^2 \int_T (P_3^2 - \frac{1}{2} P_3 P_1 - \frac{1}{2} P_3 P_2) \left. \right] \geq \\ &\geq \frac{1}{2} |A| \sum_{n=1}^3 (\xi^i)^2 \int_T \chi(B_i) \end{aligned}$$

siendo  $\chi(B_i)$  la función característica del dominio baricéntrico correspondiente al nodo  $i$  en el triángulo de referencia. Es decir, se verifica

$$2 \int_K \left| \sum_{i \in J_h} \xi^i \bar{\omega}_{K, i} \right|^2 \geq \int_K \left| \sum_{i \in J_h} \xi^i k_i \right|^2$$

y por tanto

$$2 \|\xi\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 \geq \|T_h(\xi)\|_{L^2(\Gamma_h)}^2.$$

De este modo

$$\|T_h(\xi)\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 \leq \frac{C}{2} \|\xi\|_{H^1(\Omega_h)} \quad \#$$

Imponemos la siguiente hipótesis sobre la descomposición del dominio:

**Hipótesis 2.5**  $\Gamma_h^W$  es una interpolación lineal a trozos de  $\Gamma^W$  y los puntos de  $J_h^W$  son los puntos en los que se interpola.

Definimos una familia de funciones auxiliares del siguiente modo: a cada  $i \in J_h^W$  le asociamos un subconjunto de  $\Gamma$  abierto y conexo  $M_i \subset \Gamma$  de modo que

- $x_i \in M_i$ .
- $\overline{\Gamma^W} = \cup_{i \in J_h^W} \overline{M_i}$ .
- $M_i \cap M_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ .
- $\max_{i \in J_h^W} \left( \frac{|M_i|}{|L_i|} - 1 \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

Sea  $\hat{\kappa}_i$  la función característica de  $M_i$ ; tenemos así definida la familia de funciones  $\{\hat{\kappa}_i\}_{i \in J_h^W}$ .

Consideremos el operador  $\hat{T}_h$  que a cada  $\xi \in H_h$  asocia  $\hat{T}_h(\xi) = \sum_{i \in J_h^W} \xi^i \hat{\kappa}_i$ .

**Proposición 2.18** Sea  $\beta$  continua, monótona creciente, que verifica  $\beta(0) = 0$  y para dos constantes  $a$  y  $b$  verifica

$$|\beta(s)| \leq a|s| + b \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Existe  $\hat{\beta} \in L^2(\Sigma^W)$  tal que para todo  $\xi \in H^1(Q)$  y para toda sucesión  $\xi_h^\tau$  tal que

$$S_\tau(\hat{T}_h(\xi_h^\tau)) \longrightarrow \xi|_{\Sigma^W} \text{ en } L^2(\Sigma^W)$$

se verifica que

$$\int_{\Sigma^W} \beta(S_\tau(T_h(\phi^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(T_h(\xi_h^\tau)) \xrightarrow{h, \tau \rightarrow 0} \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} \xi.$$

*Demostración.*- Consideremos la función  $\beta(S_\tau(\hat{T}_h(\phi^\tau - p_h^\tau)))$ . Haciendo uso de la hipótesis sobre el crecimiento de  $\beta$  se tiene

$$\|\beta(S_\tau(\hat{T}_h(\phi^\tau - p_h^\tau)))\|_{L^2(\Sigma^W)}^2 = \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Gamma^W} |\beta(\hat{T}_h(\phi_n - p_n))|^2 \leq$$

$$\leq \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Gamma^W} (a|\hat{T}_h(\phi_n - p_n) + b|^2) \leq \tau \sum_{n=1}^M \left[ c_1 \int_{\Gamma^W} |\hat{T}_h(\phi_n - p_n)|^2 + c_2 \right]$$

Como la función  $\phi$  está acotada podemos mayorar

$$\|\beta(S_\tau(\hat{T}_h(\phi^\tau - p_h^\tau)))\|_{L^2(\Sigma^W)}^2 \leq \tau \sum_{n=1}^M \left[ c_3 + c_4 \int_{\Gamma^W} |\hat{T}_h(p_n)|^2 \right].$$

Puesto que

$$\|\hat{T}_h(\xi)\|_{L^2(\Gamma^W)}^2 = \sum_{i \in J_h^W} (\xi^i)^2 \int_{\Gamma^W} \hat{\kappa}_i = \sum_{i \in J_h^W} (\xi^i)^2 \frac{|M_i|}{|L_i|} \int_{\Gamma^W} \kappa_i \leq C \|T_h(\xi)\|_{L^2(\Gamma_h^W)}^2$$

haciendo uso del lema 2.17 se deduce que

$$\|\beta(S_\tau(\hat{T}_h(\phi^\tau - p_h^\tau)))\|_{L^2(\Sigma^W)}^2 \leq T c_3 + \tau \sum_{n=1}^M c_5 \|p_n\|_{H^1(\Omega_h)}^2 \leq K.$$

Por lo tanto existe una subsucesión de  $p_h^\tau$  y existe  $\hat{\beta} \in L^2(\Sigma^W)$  tal que

$$\beta(S_\tau(\hat{T}_h(\phi^\tau - p_h^\tau))) \rightharpoonup \hat{\beta} \text{ en } L^2(\Sigma^W)$$

Si la sucesión  $\xi_h^\tau$  verifica  $S_\tau(\hat{T}_h(\xi_h^\tau)) \rightarrow \xi$  en  $L^2(\Sigma^W)$  entonces

$$\int_{\Sigma^W} \beta(S_\tau(\hat{T}_h(\phi^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(\hat{T}_h(\xi_h^\tau)) \xrightarrow{h, \tau \rightarrow 0} \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} \xi$$

para concluir la demostración veremos que

$$\int_{\Sigma_h^W} \beta(S_\tau(T_h(\phi^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(T_h(\xi_h^\tau)) - \int_{\Sigma^W} \beta(S_\tau(\hat{T}_h(\phi^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(\hat{T}_h(\xi_h^\tau))$$

tiende a cero cuando  $h$  y  $\tau$  tienden a cero.

Sea  $P_h : \Gamma^W \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida

$$P_h(x) = \frac{|L_i|}{|M_i|} \text{ si } x \in M_i.$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \tau \sum_{n=1}^M \left[ \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - p_n)) T_h(\xi_n) - \int_{\Gamma^W} \beta(\hat{T}_h(\phi_n - p_n)) \hat{T}_h(\xi_n) \right] = \\ & = \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Gamma^W} \beta(\hat{T}_h(\phi_n - p_n)) \hat{T}_h(\xi_n) (P_h - 1) \leq \\ & \leq \|P_h - 1\|_{L^\infty(\Gamma)} \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Gamma^W} \beta(\hat{T}_h(\phi_n - p_n)) \hat{T}_h(\xi_n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

dado que  $P_h \rightarrow 1$  uniformemente.  $\#$

## Dato inicial

Veamos un resultado de aproximación de funciones de  $L^2(\Omega)$  por funciones de  $L_h$ .

**Lema 2.19** Para toda función  $f \in L^2(\Omega)$  tal que  $f \geq 0$  existe una sucesión de funciones  $f_h \in L_h$ ,  $f_h \geq 0$  tal que

$$\chi(\Omega_h)f_h \longrightarrow \chi(\Omega)f \quad \text{débil en } L^2(\mathbb{R}^N).$$

*Demostración.*- Dada  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $f \geq 0$  sea  $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $f_\varepsilon \geq 0$  tal que

$$f_\varepsilon \longrightarrow f \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

La construimos de manera que  $\|f - f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Fijado  $\varepsilon$  para  $h$  suficientemente pequeño  $\text{Sop}(f_\varepsilon) \subset \Omega_h$ . Sea  $f_{\varepsilon,h} = \sum_{i \in I_h} f_\varepsilon \chi_i$ . Para cada  $\varepsilon$  existe  $h_\varepsilon$  tal que para todo  $h < h_\varepsilon$ ,  $\|f_\varepsilon - f_{\varepsilon,h}\|_{L^2(\Omega_h)} < \frac{\varepsilon}{2}$ ; de este modo es posible construir una sucesión de funciones  $f_{h'}$  tal que

$$\|f - f_{h'}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f - f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|f_\varepsilon - f_{h'}\|_{L^2(\Omega_h)} \leq \varepsilon \quad \#$$

**Observación 2.20** Si es  $0 \leq f \leq 1$  es posible tomar  $f_{h'}$  tal que  $0 \leq f_{h'} \leq 1$ .

Sea  $g^0 + \alpha p^0$  el dato inicial del problema continuo. Tomemos  $f_h^0 \in L_h$  tal que

$$\chi(\Omega_h)f_h^0 \longrightarrow \chi(\Omega)(g^0 + \alpha p^0) \quad \text{débil en } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Si  $\alpha = 0$  entonces se toma  $f_h^0$  de modo que sea  $0 \leq f_h^0 \leq 1$  y hacemos  $g_0 = f_h^0$  dato inicial del problema discreto.

Si  $\alpha \neq 0$  entonces será:

$$g_0 = \min\{1, f_h^0\},$$
$$R_h(p_0) = \frac{(f_h^0 - 1)^+}{\alpha}.$$

## Aproximación de las funciones test

En el siguiente lema se demuestra que podemos aproximar las funciones test por funciones del espacio de dimensión finita  $H_h$  en el que trabajamos.

**Lema 2.21** Para toda función  $\xi \in \{\zeta \in H^1(Q) \mid \xi \geq 0 \text{ en } \Sigma^D\}$  existe una sucesión  $\xi_h^\tau$  tal que

$$S_\tau(\xi_h^\tau) \longrightarrow \xi \text{ en } L^2, \quad (2.22)$$

$$S_\tau(\nabla \xi_h^\tau) \longrightarrow \nabla \xi \text{ en } (L^2)^N, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} R_h(\xi_h^\tau) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \xi \text{ en } L^2, \quad (2.24)$$

$$S_\tau(D_h(\xi_h^\tau)) \longrightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x_N} \text{ en } L^2 \quad (2.25)$$

y

$$S_\tau(\hat{T}_h(\xi_h^\tau)) \longrightarrow \xi|_{\Sigma^W} \text{ en } L^2(\Sigma^W). \quad (2.26)$$

*Demostración.*- Sea  $\xi \in H^1(Q)$  tal que  $\xi \geq 0$  en  $\Sigma^D$  y sea  $\hat{\xi}$  una prolongación de  $\xi$ ,  $\hat{\xi} \in H^1((0, T) \times \mathbb{R}^N)$ . Sean  $\hat{\xi}^+ = \max(\hat{\xi}, 0)$  y  $\hat{\xi}^- = \min(\hat{\xi}, 0)$ . Existe una sucesión  $\xi_\varepsilon^+ \in C^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N)$ , tal que  $\xi_\varepsilon^+ \geq 0$  y  $\xi_\varepsilon^+ \rightarrow \hat{\xi}^+$  en  $H^1((0, T) \times \mathbb{R}^N)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , y otra sucesión  $\xi_\varepsilon^- \in C^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N)$ , tal que  $\xi_\varepsilon^- = 0$  en  $\Sigma^D$ ,  $\xi_\varepsilon^- \leq 0$  y  $\xi_\varepsilon^- \rightarrow \hat{\xi}^-$  en  $H^1((0, T) \times \mathbb{R}^N)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Construimos entonces la sucesión  $\xi_h^\tau$  del siguiente modo:

$$\xi_h^\tau = \sum_{n=0}^M \sum_{i \in I_h} \xi_{n,i} \omega_{i,h}(x) \psi_{n,\tau}(t)$$

donde

$$\xi_{\varepsilon(h,\tau)}(x, t) = \xi_{\varepsilon(h,\tau)}^+(x, t) + \xi_{\varepsilon(h,\tau)}^-(x, t)$$

y  $\xi_{n,i} = \xi_{\varepsilon(h,\tau)}(x_i, t_n)$ ,  $\varepsilon(h, \tau) \rightarrow 0$  cuando  $h, \tau$  tienden a cero.

$\{\xi_{h,\tau}\}_{h,\tau>0}$  verifica claramente (2.22)-(2.24) y (2.26); hemos de demostrar que verifica (2.25):

$$\begin{aligned} & \|\chi(\Omega_h) S_\tau(D_h(\xi_h^\tau)) - \chi(\Omega) \frac{\partial \xi}{\partial x_N}\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{R}^N)} \leq \\ & \leq \|S_\tau(D_h(\xi_h^\tau)) - D_h(\xi_{\varepsilon(h,\tau)})\|_{L^2(Q_h)} + \|D_h(\xi_{\varepsilon(h,\tau)}) - \frac{\partial}{\partial x_N} \xi_{\varepsilon(h,\tau)}\|_{L^2(Q_h)} + \\ & + \|\chi(\Omega_h) \frac{\partial}{\partial x_N} \xi_{\varepsilon(h,\tau)} - \chi(\Omega) \frac{\partial \xi}{\partial x_N}\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Trivialmente el último sumando tiende a cero cuando  $h$  y  $\tau$  tienden a cero. Teniendo en cuenta que  $\|D_h(\xi)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \leq c \|\nabla \xi\|_{L^2(\Omega_h)}^2$  para toda función de  $H^1(\Omega_h)$  también se ve fácilmente que  $\|D_h(S_\tau(\xi_h^\tau) - \xi_{\varepsilon(h,\tau)})\|_{L^2(Q_h)}$  tiende a cero cuando  $h$  y  $\tau$  tienden a cero. Por último

$$\|D_h(\xi_{\varepsilon(h,\tau)}) - \frac{\partial}{\partial x_N} \xi_{\varepsilon(h,\tau)}\|_{L^2(Q_h)}^2 = \int_{Q_h} \left( D_h(\xi_{\varepsilon(h,\tau)}) - \frac{\partial}{\partial x_N} \xi_{\varepsilon(h,\tau)} \right)^2 =$$

$$= \int_0^T \sum_{i \in I'_h} \int_{D_i} \left( D_h^i(\xi_{\varepsilon(h,\tau)}) - \frac{\partial}{\partial x_N} \xi_{\varepsilon(h,\tau)} \right)^2 + \int_0^T \sum_{i \in I_h \setminus I'_h} \int_{D_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_N} \xi_{\varepsilon(h,\tau)} \right)^2.$$

El segundo sumando tiende a cero cuando  $h$  y  $\tau$  tienden a cero; respecto del primer sumando

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_{i \in I'_h} \int_{D_i} \left( D_h^i(\xi_{\varepsilon(h,\tau)}) - \frac{\partial}{\partial x_N} \xi_{\varepsilon(h,\tau)} \right)^2 = \\ &= \int_0^T \sum_{i \in I'_h} \int_{D_i} \left( \frac{\partial \xi_{\varepsilon(h,\tau)}}{\partial x_N}(a_i, t) - \frac{\partial \xi_{\varepsilon(h,\tau)}}{\partial x_N}(x, t) \right)^2 = \\ &= \int_0^T \sum_{i \in I'_h} \int_{D_i} \left( \frac{\frac{\partial \xi_{\varepsilon(h,\tau)}(a_i, t) - \frac{\partial \xi_{\varepsilon(h,\tau)}(x, t)}{\partial x_N}}{a_i - x} \right)^2 (a_i - x)^2 \end{aligned}$$

siendo  $a_i$  un punto cualquiera de  $\mathcal{U}_i$ , que en particular podemos tomar en  $\mathcal{U}_i \cap D_i$ . La función  $\xi_{\varepsilon(h,\tau)}$  está en el espacio  $C^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N)$  por tanto el cociente

$$\frac{\frac{\partial \xi_{\varepsilon(h,\tau)}(a_i, t) - \frac{\partial \xi_{\varepsilon(h,\tau)}(x, t)}{\partial x_N}}{a_i - x}}$$

está acotado. Además, la sucesión  $\varepsilon(h, \tau)$  puede tomarse de manera que la norma  $L^\infty$  de este cociente sea menor o igual que  $1/h$ . Haciéndolo de este modo

$$\|D_h(\xi_{\varepsilon(h,\tau)}) - \frac{\partial}{\partial x_N} \xi_{\varepsilon(h,\tau)}\|_{L^2(Q_h)}^2 \leq c|Q_h|h \longrightarrow 0$$

cuando  $h$  y  $\tau$  tienden a cero. #

Haciendo uso de estos resultados de convergencia previos podemos demostrar el resultado fundamental de este capítulo, que es la convergencia de la solución discreta hacia una solución del problema continuo.

**Teorema 2.22** Sean  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ), localmente lipschitziano y  $\{\Omega_h\}_{h>0}$  una familia de abiertos poliédricos que aproxima a  $\Omega$ . Para cada  $h$  tomemos  $\mathcal{T}_h$ , descomposición en  $N$ -simplices de  $\Omega_h$  de modo que  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  sea regular y de tipo débilmente agudo y se verifiquen las hipótesis 2.1 2.2 y 2.5. Supongamos que se verifican también las hipótesis 2.3 y 2.4.

Sea  $\beta$  una función continua, monótona creciente, tal que  $\beta(0) = 0$  y que para dos constantes  $a, b$  verifica

$$|\beta(s)| \leq a|s| + b \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Elijamos  $\tau$  de modo que  $\tau < \frac{h}{3c}$  siendo  $c$  una constante tal que  $c \geq \max_{i \in I'_h} \left( \frac{|D_i|}{|U_i|} \right)$  y  $h < C\tau$  para cierta constante positiva  $C$ . Entonces dados los pares  $(p_h^\tau, g_h^\tau)$  definidos como en (2.11) y (2.12), existe una subsucesión tal que

$$\begin{aligned}\chi(Q_h)S_\tau(p_h^\tau) &\longrightarrow \chi(Q)p \quad \text{en } L^2(\mathbf{R}^{N+1}), \\ \chi(Q_h)S_\tau(\nabla p_h^\tau) &\longrightarrow \chi(Q)\nabla p \quad \text{en } (L^2(\mathbf{R}^{N+1}))^N, \\ \chi(Q_h)S_\tau(g_h^\tau) &\longrightarrow \chi(Q)g \quad \text{débil en } L^2(\mathbf{R}^{N+1}),\end{aligned}$$

siendo  $(p, g)$  una solución de  $(P_{\beta, \phi, g^0 + \alpha p^0})$ .

*Demostración.*- Sea  $\xi \in H^1(Q)$  tal que  $\xi \geq 0$  en  $\Sigma^D$  y  $\xi(T) = 0$ ; sea  $\xi_h^\tau = \sum_{n=0}^M \xi_n(x)\psi_n(t) \in H_{h,\tau}$  una sucesión que converge a  $\xi$  como en la hipótesis 2.21. Para cada  $n = 1, \dots, M$  se verifica

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_h} [\nabla p_n \nabla \xi_n + g_n D_h(\xi_n)] + \int_{\Omega_h} \left[ \frac{g_n - g_{n-1}}{\tau} + \alpha R_h \left( \frac{p_n - p_{n-1}}{\tau} \right) \right] R_h(\xi_n) &\leq \\ &\leq \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - p_n)) T_h(\xi_n).\end{aligned}$$

Multiplicando por  $\tau$  y sumando en  $n$  tenemos

$$\begin{aligned}\tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega_h} [\nabla p_n \nabla \xi_n + g_n D_h(\xi_n)] - \tau \sum_{n=1}^{M-1} \int_{\Omega_h} (g_n + \alpha R_h(p_n)) R_h \left( \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{\tau} \right) \\ - \int_{\Omega_h} (g_0 + \alpha R_h(p_0)) R_h(\xi_1) \leq \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - p_n)) T_h(\xi_n).\end{aligned}$$

Llamemos

$$\beta_h^\tau = \tau \sum_{n=1}^M \beta(T_h(\phi_n - p_n))(x) \gamma_n(t).$$

En términos de  $p_h^\tau$ ,  $g_h^\tau$  y  $\beta_h^\tau$  la anterior inecuación se escribe:

$$\left. \begin{aligned} &\int_{Q_h} [S_\tau(\nabla p_h^\tau) S_\tau(\nabla \xi_h^\tau) + S_\tau(g_h^\tau) S_\tau(D_h(\xi_h^\tau))] \\ &- \int_{Q_h} S_\tau(g_h^\tau + \alpha R_h(p_h^\tau)) \frac{\partial}{\partial t} R_h(\hat{\xi}_h^\tau) - \int_{\Omega_h} (g_0 + \alpha R_h(p_0)) R_h(\xi_1) \leq \\ &\int_{\Sigma_h^W} \beta_h^\tau S_\tau(T_h(\xi_h^\tau)) \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

donde

$$\hat{\xi}_h^\tau = \sum_{n=0}^M \xi_{n+1}(x) \psi_n(t)$$

con  $\xi_{M+1} = \xi_M$ .

De las acotaciones de la proposición 2.13 se deduce que existe una función  $p \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  y existe una subsucesión de  $\{p_h^\tau, g_h^\tau\}$  tal que

$$\begin{aligned} S_\tau(p_h^\tau) &\longrightarrow p && \text{débil en } L^2, \\ S_\tau(\nabla p_h^\tau) &\longrightarrow \nabla p && \text{débil en } (L^2)^N. \end{aligned}$$

Además como  $\{\xi \in L^2(Q) \mid \xi \geq 0\}$  es cerrado y convexo también se verifica  $p\chi(Q) \geq 0$ .

Por el lema 2.16 sabemos también que  $p \in L^2(0, T; V)$ .

Por ser  $0 \leq g_h^\tau \leq 1$ , podemos tomar la subsucesión de  $\{(p_h^\tau, g_h^\tau)\}$  de modo que  $g_h^\tau$  sea débilmente convergente en  $L^2$  hacia un límite  $g$  y por un argumento análogo al anterior  $g$  verifica

$$0 \leq g \leq 1 \quad \text{c.t.p. } (x, t) \in Q.$$

De la proposición anterior se deduce la subsucesión  $\{(p_h^\tau, g_h^\tau)\}$  puede tomarse de modo que también verifique

$$\int_{\Sigma_h^w} \beta_h^\tau S_\tau(T_h(\xi_h^\tau)) \longrightarrow \int_{\Sigma^w} \hat{\beta} \xi.$$

Pasando al límite en (2.27) vemos que el par  $(p, g)$  verifica la inecuación

$$\int_Q \left[ \nabla p \nabla \xi + g \frac{\partial \xi}{\partial x_N} \right] - \int_Q (g + \alpha p) \xi_t - \int_\Omega (g^0 + \alpha p^0) \xi(0) \leq \int_{\Sigma^w} \hat{\beta} \xi$$

$\forall \xi \in H^1(Q)$  tal que  $\xi \geq 0$  en  $\Sigma^D$  y  $\xi(T) = 0$ .

Hemos de demostrar que el par  $(p, g)$  es solución de  $(P_{\beta, \phi, g^0 + \alpha p^0})$ . Para ello nos falta comprobar que verifica  $\int_Q (1 - g)p = 0$  y que  $\hat{\beta} = \beta(\phi - p)$ .

**Demostración de la igualdad  $\int_Q (1 - g)p = 0$**

Sea  $\Omega'$  un subconjunto abierto de  $\Omega$  tal que  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ . Sea

$$\hat{W} = \left\{ \xi \mid \xi \in L^2(0, T; L^2(\Omega')) \text{ y } \frac{\partial \xi}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega')) \right\}.$$

Para  $h$  suficientemente pequeño  $\overline{\Omega'} \subset \Omega_h$ . Por las proposiciones 2.13 y 2.15 existe una constante  $K$  tal que

$$\|g_h^\tau + \alpha R_h(p_h^\tau)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq K.$$



Puesto que  $L^2(\Omega')$  está contenido en  $H^{-1}(\Omega')$  con inyección compacta, también el espacio  $\hat{W}$  está contenido en  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega'))$  con inyección compacta, de modo que la acotación anterior es suficiente para asegurar la existencia de una subsucesión fuertemente convergente en  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega'))$ .

Sea  $\xi \in \mathcal{D}(\Omega')$ ,  $\xi \geq 0$ . Para  $h$  suficientemente pequeño  $\bar{\Omega}' \subset \Omega_h$  y por tanto  $\xi \in H_0^1(\Omega_h)$ .

Paso 1:

$$\int_{Q_h} (1 - g_h^\tau) S_\tau(p_h^\tau) \xi \xrightarrow{h, \tau \rightarrow 0} 0.$$

Descomponemos

$$\begin{aligned} & \int_{Q_h} (1 - g_h^\tau) S_\tau(p_h^\tau) \xi = \\ & = \int_{Q_h} (1 - g_h^\tau) S_\tau(p_h^\tau - R_h(p_h^\tau)) \xi + \int_{Q_h} (1 - g_h^\tau) S_\tau(R_h(p_h^\tau)) \xi. \end{aligned}$$

Por el lema 2.14 podemos acotar el primer sumando del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_h} (1 - g_h^\tau) S_\tau(p_h^\tau - R_h(p_h^\tau)) \xi \right| & \leq 2\tau \sum_{n=1}^M \|\xi\|_{L^2(\Omega')} \|p_n - R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)} \leq \\ & \leq 2\tau \|\xi\|_{L^2(\Omega')} C_3 h \sum_{n=1}^M \|p_n\|_{H^1(\Omega_h)} \xrightarrow{h, \tau \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Demostraremos ahora que

$$\|(1 - g_h^\tau) S_\tau(R_h(p_h^\tau))\|_{L^1(Q_h)} \xrightarrow{h, \tau \rightarrow 0} 0.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \int_{Q_h} (1 - g_h^\tau) S_\tau(R_h(p_h^\tau)) & = \int_{Q_h} \left( \sum_{n=0}^M (1 - g_n) \psi_n(t) \right) \left( \sum_{n=1}^M R_h(p_n) \gamma_n(t) \right) = \\ & = \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega_h} \left( 1 - \frac{g_n + g_{n-1}}{2} \right) R_h(p_n) \end{aligned}$$

y acotamos por separado  $\int_{\Omega_h} (1 - g_n) R_h(p_n)$  y  $\int_{\Omega_h} (1 - g_{n-1}) R_h(p_n)$ .

Tomando  $p_n$  como función test en (2.7) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} (1 - g_n) R_h(p_n) & = -\tau \int_{\Omega_h} (1 - g_n) D_h(p_n) \leq \\ & \leq \tau (\hat{C}^2 + C \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2). \end{aligned}$$

Multiplicando por  $\tau$  y sumando en  $n$

$$\tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega_h} (1 - g_n) R_h(p_n) \leq \tau (T\hat{C}^2 + C\tau \sum_{n=1}^M \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2) \leq \tau C.$$

Tomando también  $p_n$  como función test, pero ahora en (2.6), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} (1 - g_{n-1}) R_h(p_n) &= \frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} (g_n - g_{n-1}) R_h(p_n) + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} (1 - g_n) R_h(p_n) = \\ &= -\|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2 - \frac{\alpha}{\tau} \left( \|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega_h} R_h(p_n) R_h(p_{n-1}) \right) \\ &\quad - \int_{\Omega_h} g_n D_h(p_n) + \int_{\Gamma_h} \beta(T_h(\phi_n - p_n)) T_h(p_n) + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} (1 - g_n) R_h(p_n) \leq \\ &\leq \hat{C} + C\|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2 + \frac{\alpha}{2\tau} (\|R_h(p_{n-1})\|_{L^2(\Omega_h)}^2 - \|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)}^2) \end{aligned}$$

donde hemos usado la monotonía de  $\beta$  y la acotación anterior. Multiplicando por  $\tau$  y sumando en  $n$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \left( \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega_h} (1 - g_{n-1}) R_h(p_n) \right) &\leq \\ &\leq T\hat{C} + C\tau \sum_{n=1}^M \|\nabla p_n\|_{(L^2(\Omega_h))^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|R_h(p_0)\|_{L^2(\Omega_h)} \leq C, \end{aligned}$$

es decir, también

$$\tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega_h} (1 - g_{n-1}) R_h(p_n) \leq \tau C$$

Se tiene por tanto que

$$\|(1 - g_h^\tau) S_\tau(R_h(p_h^\tau))\|_{L^1(Q_h)} \leq \tau C$$

de modo que para toda función  $\xi \in \mathcal{D}(\Omega')$

$$\int_{Q_h} (1 - g_h^\tau) S_\tau(R_h(p_h^\tau)) \xi \xrightarrow{h, \tau \rightarrow 0} 0.$$

Paso 2:

$$\limsup \left( -\alpha \int_{Q_h} R_h(p_h^\tau) S_\tau(p_h^\tau) \xi \right) \leq -\alpha \int_Q p^2 \xi.$$

Del mismo modo que se hizo para demostrar el primer paso descomponemos

$$\begin{aligned} & \int_Q R_h(p_h^\tau) S_\tau(p_h^\tau) \xi = \\ & \int_Q R_h(p_h^\tau) S_\tau(R_h(p_h^\tau)) \xi + \int_Q R_h(p_h^\tau) S_\tau(p_h^\tau - R_h(p_h^\tau)) \xi. \end{aligned}$$

Nuevamente por el lema 2.14

$$\begin{aligned} & \left| \int_Q R_h(p_h^\tau) S_\tau(p_h^\tau - R_h(p_h^\tau)) \xi \right| \leq \\ & \leq \tau \sum_{n=1}^M \|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)} \|\xi\|_{L^\infty(\Omega')} \|p_n - R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)} \leq \\ & \leq \tau \|\xi\|_{L^\infty(\Omega')} \sum_{n=1}^M \|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)} C_3 h \|p_n\|_{L^2(\Omega_h)} \xrightarrow{h, \tau \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} & \int_Q R_h(p_h^\tau) S_\tau(R_h(p_h^\tau)) \xi = \\ & = \int_Q \left( \sum_{n=0}^M R_h(p_n) \psi_n(t) \right) \left( \sum_{n=1}^M R_h(p_n) \gamma_n(t) \right) \xi = \\ & = \sum_{n=1}^M \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_\Omega \left[ R_h(p_n) \left(1 - \frac{t_n - t}{\tau}\right) + R_h(p_{n-1}) \frac{t_n - t}{\tau} \right] R_h(p_n) \xi = \\ & = \frac{\tau}{2} \sum_{n=1}^M \int_\Omega R_h(p_n + p_{n-1}) R_h(p_n) \xi = \\ & = \frac{1}{4} \int_Q [S_\tau(R_h(p_h^\tau + \check{p}_h^\tau))]^2 \xi \end{aligned}$$

siendo

$$R_h(\check{p}_h^\tau) = \sum_{n=1}^M p_{n-1} \gamma_n.$$

Ahora bien

$$S_\tau(R_h(p_h^\tau + \check{p}_h^\tau)) \longrightarrow 2p \quad \text{débil en } L^2$$

por lo tanto

$$4 \int_Q p^2 \xi \leq \liminf \int_Q [S_\tau(R_h(p_h^\tau + \check{p}_h^\tau))]^2 \xi$$

y entonces

$$\liminf \int_Q R_h(p_h^\tau) S_\tau(p_h^\tau) \xi \geq \int_Q p^2 \xi$$

lo que termina la demostración del paso dos puesto que

$$\limsup \left( -\alpha \int_Q R_h(p_h^\tau) S_\tau(p_h^\tau) \xi \right) = -\alpha \liminf \int_Q R_h(p_h^\tau) S_\tau(p_h^\tau) \xi.$$

### Paso 3: Conclusión

En virtud del lema anterior existe una subsucesión de  $g_h^\tau + \alpha R_h(p_h^\tau)$  fuertemente convergente en  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega'))$ , por tanto

$$\begin{aligned} & \int_Q (1 - (g + \alpha p)) p \xi = \\ &= \lim_{h, \tau \rightarrow 0} \langle 1 - (g_h^\tau + \alpha R_h(p_h^\tau)), S_\tau(p_h^\tau) \xi \rangle_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega')) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega'))} = \\ &= \lim_{h, \tau \rightarrow 0} \int_{Q_h} (1 - (g_h^\tau + \alpha R_h(p_h^\tau))) S_\tau(p_h^\tau) \xi = \\ &= \lim_{h, \tau \rightarrow 0} \left[ -\alpha \int_{Q_h} R_h(p_h^\tau) S_\tau(p_h^\tau) \xi \right] \leq \\ &\leq -\alpha \int_Q p^2 \xi. \end{aligned}$$

Se deduce entonces que

$$\int_Q (1 - g) p \xi \leq 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega') \quad \xi \geq 0.$$

Ahora bien, sabemos además que  $0 \leq g \leq 1$  y que  $p \geq 0$  de modo que ha de ser  $(1 - g)p = 0$  c.t.p. en  $(0, T) \times \Omega'$ . Como este razonamiento es válido para cualquier abierto  $\Omega'$  tal que  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$  deducimos que

$$(1 - g)p = 0 \text{ c.t.p. en } Q.$$

### **Demostración de la igualdad $\hat{\beta} = \beta(\phi - p)$ .**

Paso 1: La solución discreta verifica

$$\begin{aligned} & \int_{Q_h} \left[ |S_\tau(\nabla p_h^\tau)|^2 + S_\tau(D_h(p_h^\tau)) \right] + \frac{\alpha}{2} \left[ \|R_h(p_M)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 - \|R_h(p_0)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \right] \leq \\ &\leq \int_{\Sigma_h^W} \beta(S_\tau(T_h(\phi_h^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(T_h(p_h^\tau)). \end{aligned}$$

Para cada  $n$  tomando  $p_n$  como función test en 2.6 obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} [|\nabla p_n|^2 + D_h(p_n) + \frac{1}{\tau}(1 - g_{n-1})R_h(p_n) + \frac{\alpha}{\tau}R_h(p_n - p_{n-1})R_h(p_n)] &= \\ &= \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - p_n))T_h(p_n). \end{aligned}$$

Puesto que  $\frac{1 - g_{n-1}}{\tau}R_h(p_n) \geq 0$  y

$$\int_{\Omega_h} R_h(p_n)R_h(p_{n-1}) \leq \frac{1}{2} [\|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \|R_h(p_{n-1})\|_{L^2(\Omega_h)}^2]$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \|\nabla p_n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \int_{\Omega_h} D_h(p_n) + \frac{\alpha}{2\tau}\|R_h(p_n)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 &\leq \\ &\leq \frac{\alpha}{2\tau}\|R_h(p_{n-1})\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - p_n))T_h(p_n). \end{aligned}$$

Multiplicando por  $\tau$  y sumando en  $n$

$$\begin{aligned} \tau \sum_{n=1}^M \left[ \|\nabla p_n\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \int_{\Omega_h} D_h(p_n) \right] + \frac{\alpha}{2}\|R_h(p_M)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 &\leq \\ &\leq \frac{\alpha}{2}\|R_h(p_0)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 + \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Gamma_h^W} \beta(T_h(\phi_n - p_n))T_h(p_n) \end{aligned}$$

con lo que se tiene el resultado que buscábamos.

Paso 2: La solución continua verifica

$$\int_Q \left[ |\nabla p|^2 + \frac{\partial p}{\partial x_N} \right] + \frac{\alpha}{2} [\|p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|p(0)\|_{L^2(\Omega)}^2] = \int_{\Sigma^W} \hat{\beta}p.$$

Sea  $\tau_0 > 0$  y  $\xi_{\tau_0}$  la función definida:

$$\xi_{\tau_0} = \xi_{\tau_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in (0, \tau_0) \\ \frac{t - \tau_0}{\tau_0} & \text{si } t \in (\tau_0, 2\tau_0) \\ 1 & \text{si } t \in (2\tau_0, T - 2\tau_0) \\ \frac{T - \tau_0 - t}{\tau_0} & \text{si } t \in (T - 2\tau_0, T - \tau_0) \\ 0 & \text{si } t \in (T - \tau_0, T) \end{cases}$$

Según el lema 1.4, tomando  $F(s_1, s_2) = s_1$  tenemos que:

$$\begin{aligned} & \int_Q (\nabla p + g\vec{e}) \nabla p \xi_{\tau_0} - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} p \xi_{\tau_0} = \alpha \int_Q \frac{p^2}{2} \frac{d\xi_{\tau_0}}{dt} = \\ & = \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_0}^{2\tau_0} \|p(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt - \frac{1}{\tau_0} \int_{T-2\tau_0}^{T-\tau_0} \|p(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right]. \end{aligned}$$

Puesto que  $\alpha p \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ , pasando al límite cuando  $\tau_0$  tiende a cero tenemos

$$\int_Q \left[ |\nabla p|^2 + \frac{\partial p}{\partial x_N} \right] - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} p = \frac{\alpha}{2} \|p(x, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\alpha}{2} \|p(x, T)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Paso 3: Se verifica la desigualdad

$$\begin{aligned} & \lim_{h, \tau \rightarrow 0} \left[ \int_{Q_h} |S_\tau(\nabla p_h^\tau)|^2 + \frac{\alpha}{2} \|R_h(p_M)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \right. \\ & \left. - \int_{\Sigma_h^W} \beta(S_\tau(R_h(\phi_h^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(R_h(p_h^\tau)) \right] \leq \int_Q |\nabla p|^2 + \frac{\alpha}{2} \|p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} p. \end{aligned}$$

Como  $\int_{Q_h} S_\tau(D_h(p_h^\tau)) \rightarrow \int_Q \frac{\partial p}{\partial x_N}$  y  $\|R_h(p_0)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \rightarrow \|p^0\|_{L^2(\Omega)}^2$  tenemos

$$\begin{aligned} & \lim_{h, \tau \rightarrow 0} \left[ \int_{Q_h} |S_\tau(\nabla p_h^\tau)|^2 + \frac{\alpha}{2} \|R_h(p_M)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \right. \\ & \left. - \int_{\Sigma_h^W} \beta(S_\tau(R_h(\phi_h^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(R_h(p_h^\tau)) \right] \leq \\ & \leq \int_Q \frac{\partial p}{\partial x_N} + \frac{\alpha}{2} \|p^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Consideremos la función  $(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_{N-1}}, \frac{\partial p}{\partial x_M} + g, -(g + \alpha p))$ . Esta función está en el conjunto

$$L_{div}^2(Q) = \{\xi \in L^2(Q) \mid \text{div } \xi \in L^2(Q)\}.$$

Usando el teorema de la divergencia para esta función se demuestra que  $g^0 + \alpha p^0$  es de hecho  $(g + \alpha p)(0)$ . De aquí no se deduce directamente que coincidan  $p^0$  y  $p(0)$ , pero si consideramos la función  $G(z) = (z - 1)^+$  podemos despejar, para  $\alpha \neq 0$

$$\|p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega \left( \frac{G(g^0 + \alpha p^0)}{\alpha} \right)^2 =$$

$$= \int_{\Omega} \left( \frac{G(g(0) + \alpha p(0))}{\alpha} \right)^2 \leq \int_{\Omega} (p(0))^2 = \|p(0)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

por tanto

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{\partial p}{\partial x_N} + \frac{\alpha}{2} \|p^0\|_{L^2(\Omega_h)}^2 &\leq \int_Q \frac{\partial p}{\partial x_N} + \frac{\alpha}{2} \|p(0)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 = \\ &= - \int_Q |\nabla p|^2 + \frac{\alpha}{2} \|p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} p. \end{aligned}$$

Paso 4: Se verifica que

$$\limsup \left( - \int_{\Sigma^W} \beta(S_{\tau}(\hat{T}_h(\phi_h^{\tau} - p_h^{\tau}))) S_{\tau}(\hat{T}_h(p_h^{\tau})) \right) \leq - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} p.$$

Por una parte, como  $S_{\tau}(\nabla p_h^{\tau}) \rightarrow \nabla p$  débilmente en  $L^2$  se tiene que:

$$\int_{Q_h} |\nabla p_h^{\tau}|^2 \leq \liminf \int_Q |S_{\tau}(\nabla p_h^{\tau})|^2. \quad (2.28)$$

Por otra parte también

$$\|p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \liminf \|R_h(p_M)\|_{L^2(\Omega_h)}^2. \quad (2.29)$$

En efecto,  $\|p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|p(T - \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Si  $\alpha \neq 0$ , como la función  $G$  que definimos en el paso anterior es convexa, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|p(T - \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| \frac{G(g + \alpha p)(T - \varepsilon)}{\alpha} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ &= \left\| \frac{G((g + \alpha p)(T))}{\alpha} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

De la proposición 2.13 se deduce que existe una subsucesión de  $g_M + \alpha R_h(p_M)$  débilmente convergente en  $L^2$  hacia un límite  $\chi + \alpha q$ . Usando el teorema de la divergencia para la función  $(\nabla_{x'} p, \frac{\partial p}{\partial x_M} + g, -(g + \alpha p))$  se demuestra que  $\chi + \alpha q$  es de hecho  $(g + \alpha p)(T)$ . De esta convergencia débil obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{G((g + \alpha p)(T))}{\alpha} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \liminf \left\| \frac{G(g_M + \alpha R_h(p_M))}{\alpha} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \liminf \|R_h(p_M)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

De las desigualdades (2.28) y (2.29), y del paso 3 se deduce que efectivamente

$$\limsup \left( - \int_{\Sigma_h^W} \beta(S_\tau(T_h(\phi_h^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(T_h(p_h^\tau)) \right) \leq - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} p.$$

Puesto que

$$\left| \int_{\Sigma^W} \beta(S_\tau(\hat{T}_h(\phi^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(\hat{T}_h(p^\tau)) - \int_{\Sigma_h^W} \beta(S_\tau(T_h(\phi^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(T_h(p^\tau)) \right|$$

tiende a cero cuando  $h$  y  $\tau$  tienden a cero, se tiene la desigualdad deseada

### Paso 5: Conclusión

Llamemos  $\pi_h^\tau = S_\tau(\hat{T}_h(p_h^\tau))$ ,  $\phi_{h,\tau} = S_\tau(\hat{T}_h(\phi^\tau))$ . Por la monotonía de  $\beta$  se verifica que

$$0 \leq - \int_{\Sigma_h^W} (\beta(\phi_{h,\tau} - \xi) - \beta(\phi_{h,\tau} - \pi_h^\tau)) (\xi - \pi_h^\tau)$$

para cualquier  $\xi \in L^2(\Sigma^W)$ . Calculando el límite superior de este producto se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq - \int_{\Sigma^W} \beta(\phi - \xi) \xi + \int_{\Sigma^W} \beta(\phi - \xi) p + \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} \xi + \limsup \left( - \int_{\Sigma^W} \beta(\phi_{h,\tau} - \pi_h^\tau) \pi_h^\tau \right) &\leq \\ &\leq - \int_{\Sigma^W} (\beta(\phi - \xi) - \hat{\beta}) (\xi - p). \end{aligned}$$

Como  $\beta : L^2(\Sigma^W) \rightarrow L^2(\Sigma^W)$  es maximal monótono

$$0 \leq \int_{\Sigma^W} (\beta(\phi - \xi) - \hat{\beta}) (\phi - \xi - (\phi - p)) \quad \forall \xi \implies \hat{\beta} = \beta(\phi - p)$$

como queríamos demostrar.

Para concluir la demostración del teorema veamos que efectivamente se tiene convergencia fuerte de  $S_\tau(p_h^\tau)$  y  $S_\tau(\nabla p_h^\tau)$ .

Puesto que

$$0 \leq - \int_{\Sigma^W} (\beta(\phi_{h,\tau} - \xi) - \beta(\phi_{h,\tau} - \pi_h^\tau)) (\xi - \pi_h^\tau)$$

para cualquier  $\xi \in L^2(\Sigma^W)$ , tomado en particular  $\xi = p$  tenemos

$$0 \leq - \int_{\Sigma^W} (\beta(\phi_{h,\tau} - p) - \beta(\phi_{h,\tau} - \pi_h^\tau)) (p - \pi_h^\tau).$$

Como ya vimos que  $\hat{\beta} = \beta(\phi - p)$  calculando el límite inferior tenemos

$$0 \leq \liminf \left( - \int_{\Sigma^W} \beta(S_\tau(\hat{T}_h(\phi^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(\hat{T}_h(p_h^\tau)) \right) + \int_{\Sigma^W} \hat{\beta} p +$$



$$+ \int_{\Sigma^W} \hat{\beta}p - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta}p$$

es decir

$$\liminf \left( - \int_{\Sigma^W} \beta(S_\tau(\hat{T}_h(\phi^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(\hat{T}_h(p^\tau)) \right) \geq - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta}p.$$

Puesto que

$$\left| \int_{\Sigma^W} \beta(S_\tau(\hat{T}_h(\phi^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(\hat{T}_h(p^\tau)) - \int_{\Sigma_h^W} \beta(S_\tau(T_h(\phi^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(T_h(p^\tau)) \right|$$

tiende a cero cuando  $h$  y  $\tau$  tienden a cero se tiene

$$\liminf \left( - \int_{\Sigma_h^W} \beta(S_\tau(T_h(\phi^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(T_h(p^\tau)) \right) \geq - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta}p$$

y como ya vimos que

$$\limsup \left( - \int_{\Sigma_h^W} \beta(S_\tau(T_h(\phi^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(T_h(p^\tau)) \right) \leq - \int_{\Sigma^W} \hat{\beta}p$$

es de hecho

$$\int_{\Sigma^W} \hat{\beta}p = \lim \left( - \int_{\Sigma_h^W} \beta(S_\tau(T_h(\phi^\tau - p_h^\tau))) S_\tau(T_h(p^\tau)) \right).$$

De este modo

$$\lim_{h, \tau \rightarrow 0} \left[ \int_{Q_h} |S_\tau(\nabla p_h^\tau)|^2 + \frac{\alpha}{2} \|R_h(p_M)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 \right] \leq \int_Q |\nabla p|^2 + \frac{\alpha}{2} \|p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

A la vista de las desigualdades (2.28) y (2.29) ha de ser

$$\|\nabla p\|_{(L^2(Q))^N} = \lim \|S_\tau(\nabla p_h^\tau)\|_{(L^2(Q_h))^N}$$

y puesto que

$$\chi(Q_h) S_\tau(\nabla p_h^\tau) \rightharpoonup \chi(Q) \nabla p \quad \text{en } (L^2(\mathbb{R}^{N+1}))^N$$

se deduce la convergencia fuerte.  $\#$

### Condición suficiente para que se verifiquen las hipótesis sobre la desigualdad de Poincaré y la continuidad de la traza

Las hipótesis 2.3 y 2.4 dependen esencialmente de la posibilidad de prolongar las funciones de  $H_h$  a funciones de  $H^1(\mathbb{R}^N)$ .

**Lema 2.23** Sean  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ), localmente lipschitciano y  $\{\Omega_h\}_{h>0}$  una familia de abiertos poliédricos que aproxima a  $\Omega$ . Para cada  $h$  tomemos  $\mathcal{T}_h$ , descomposición en  $N$ -simplices de  $\Omega_h$  de modo que todos los vértices de  $\partial\Omega_h$  estén en  $\partial\Omega$ . Para cada  $h > 0$  sea  $H_h$  el espacio de funcional

$$H_h = \{\xi \in C^0(\overline{\Omega_h}) \mid \xi|_T \in P_1 \forall T \in \mathcal{T}_h\};$$

entonces existe para cada  $h > 0$  un operador de prolongación continuo

$$P_h : H_h \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$$

de modo que

$$\|P_h(\xi_h)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\xi_h\|_{H^1(\Omega_h)}$$

para todo  $h > 0$  con  $C$  independiente de  $h$ .

*Demostración.*- Por ser  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^N$  localmente lipschitciano existe un familia finita de abiertos abiertos de modo que

$$\Omega \cap B_i = \{(x', x_N) \mid x_N > g_i(x')\}$$

para cierta función  $g_i$  lipschitciana y para cierto sistema de referencia (que no tiene por qué ser aquél en el que estamos trabajando)

Supongamos que todos los nodos de  $\Gamma_h$  están en  $\Gamma$ .

Para  $h$  suficientemente pequeño

$$\partial\Omega_h \cap B_i = \{(x', x_N) \mid x_N = g_{i,h}(x')\}$$

donde  $g_{i,h}$  es una interpolación lineal a trozos de  $g_i$

Podemos recubrir  $\overline{\Omega}$  por un número finito de abiertos  $\{B_i\}_{i=0}^{\mathcal{I}}$  de modo que  $\overline{B_0} \subset \Omega$  y para  $h$  suficientemente pequeño  $\overline{B_0} \subset \Omega_h$ . Asociamos a cada  $i = 1, \dots, \mathcal{I}$  una aplicación inversible

$$\varphi_{i,h}(x', x_N) = (x', x_N - g_{i,h}(x'))$$

$$\varphi_{i,h}^{-1}(x', y_N) = (x', y_N + g_{i,h}(x'))$$

De este modo  $\partial\Omega_h \cap B_i$  se transforma en un subconjunto del hiperplano  $x_N = 0$  y es posible prolongar la función por reflexión. Llamemos

$$\tilde{B}_{i,h} = \varphi_{i,h}(B_i), \quad \tilde{B}_{i,h}^+ = \varphi_{i,h}(B_i) \cap \mathbb{R}_+^N$$

Sea  $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\mathcal{I}}$  una partición de la unidad subordinada al recubrimiento  $\{B_i\}_{i=0}^{\mathcal{I}}$  es decir

$$\alpha_i \in \mathcal{D}(B_i) \quad 0 \leq i \leq \mathcal{I}; \quad \sum_{i=0}^{\mathcal{I}} \alpha_i = 1 \quad \text{en } \overline{\Omega}.$$

Dada  $\xi_h \in H_h$  escribimos

$$\xi_h = \sum_{i=0}^{\mathcal{I}} \alpha_i \xi_h$$

Para cada  $i = 0, \dots, \mathcal{I}$  construiremos la prolongación  $P_h(\alpha_i \xi_h)$  y será

$$P_h(\xi_h) = \sum_{i=0}^{\mathcal{I}} P_h(\alpha_i \xi_h)$$

En primer lugar tomaremos

$$P_h(\alpha_0 \xi_h) = \widetilde{\alpha_0 \xi_h} \text{ prolongación por cero;}$$

puesto que  $\overline{B_0} \subset \Omega_h$ , esta primera prolongación no depende de  $h$ . Para  $i = 1, \dots, \mathcal{I}$  consideramos la función

$$\zeta_{i,h} = (\alpha_i \xi_h) \circ (\varphi_{i,h}^{-1}|_{\tilde{B}_{i,h}^+})$$

Esta función  $\zeta_{i,h}$  pertenece a  $H^1(\tilde{B}_{i,h}^+)$  y es nula en un entorno de  $\{y \in \partial \tilde{B}_{i,h}^+ \mid y_N > 0\}$ . Puede prolongarse por cero a  $\mathbb{R}_+^N$  obteniendo así la función  $\tilde{\zeta}_{i,h}$ .  $\bar{\zeta}_{i,h}$  es la prolongación por reflexión a todo  $\mathbb{R}^N$  de  $\tilde{\zeta}_{i,h}$ .

$\bar{\zeta}_{i,h} \in H^1(\mathbb{R}^N)$  tiene soporte compacto en  $\tilde{B}_{i,h}$  de modo que  $\overline{\bar{\zeta}_{i,h} \circ \varphi_{i,h}}$ , prolongación de  $\tilde{\zeta}_{i,h} \circ \varphi_{i,h}$  por cero fuera de  $B_i$  es una función de  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Tomaremos

$$P_h(\alpha_i \xi_h) = \overline{\bar{\zeta}_{i,h} \circ \varphi_{i,h}} \quad i = 0, \dots, \mathcal{I}$$

De este modo tenemos un operador de prolongación para cada espacio  $H_h$  que verifica

$$\|P_h(\xi_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq c \|\xi_h\|_{L^2(\Omega_h)}$$

y

$$\|\nabla P_h(\xi_h)\|_{(L^2(\mathbb{R}^N))^N} \leq c \|\nabla \xi_h\|_{(L^2(\Omega_h))^N}$$

donde la constante  $c$  depende únicamente de las funciones  $\alpha_i$  y  $g_{i,h}$ . Ahora bien, cada  $g_{i,h}$  es una interpolación lineal a trozos de  $g_i$  y ésta es lipschitciana, de modo que en cada uno de los trozos  $T$  donde  $g_{i,h}$  es lineal podemos acotar

$$\begin{aligned} |g_i(x') - g_{i,h}(x')| &= |g_i(x') - g_{i,h}(x'_T) + g_{i,h}(x'_T) - g_{i,h}(x')| = \\ &= |g_i(x') - g_i(x'_T) + g_{i,h}(x'_T) - g_{i,h}(x')| \end{aligned}$$

donde  $x'_T$  es un punto de interpolación. Si llamamos  $L$  a la constante de lipschitcianidad de  $g_i$  y puesto que  $g_{i,h}$  es una interpolación lineal de  $g_i$  en  $T$  tenemos

$$|g_i(x') - g_{i,h}(x')| \leq 2L\|x' - x'_T\| \leq 2Lch$$

( $\|x' - y'\|$  distancia euclidea) y

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (g_i(x') - g_{i,h}(x')) \right| &\leq \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (g_i(x') - g_{i,h}(x'_T)) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (g_{i,h}(x'_T) - g_{i,h}(x')) \right| = \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (g_i(x') - g_i(x'_T)) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (g_{i,h}(x'_T) - g_{i,h}(x')) \right| \leq 2L \end{aligned}$$

es decir  $\|g_i - g_{i,h}\|_{L^\infty}$  y  $\|\nabla_{x'}(g_i - g_{i,h})\|_{(L^\infty)^{N-1}}$  están acotados uniformemente en  $h$ . Esto nos permite acotar independientemente de  $h$  la norma en  $W^{1,\infty}$  de cada  $\varphi_i$  y  $\varphi_i^{-1}$ ; por lo tanto, es posible obtener una constante  $c$  independiente de  $h$ . #

Consecuencia inmediata de esta construcción es que la constante de continuidad de la aplicación traza sobre  $\Gamma_h$  de las funciones de  $H_h$ , no depende de  $h$ .

**Lema 2.24** Sean  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ), localmente lipschitziano y  $\{\Omega_h\}_{h>0}$  una familia de abiertos poliédricos que aproxima a  $\Omega$ . Para cada  $h$  tomemos  $\mathcal{T}_h$ , descomposición en  $N$ -simplices de  $\Omega_h$  de modo que todos los vértices de  $\partial\Omega_h$  estén en  $\partial\Omega$ . Entonces existe una constante independiente de  $h$  tal que para toda función  $\xi \in H_h$

$$\|\xi\|_{L^2(\Gamma_h)} \leq C \|\xi\|_{H^1(\Omega_h)}$$

*Demostración.*- Dada  $\xi_h \in H_h$  construimos  $\zeta_{i,h} = (\alpha_i \xi_h) \circ \varphi_{i,h}^{-1}$ , entonces

$$\|\tilde{\zeta}_{i,h}(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \|\tilde{\zeta}_{i,h}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}$$

de las propiedades de  $\alpha_i$  y  $\varphi_{i,h}$  deducimos la existencia de constantes  $C_i > 0$  independientes de  $h$  tales que

$$\|\tilde{\zeta}_{i,h}\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)} \geq c_i \|\xi_h\|_{H^1(\Omega_h)}$$

por tanto

$$\|\tilde{\zeta}_{i,h}(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})} \geq c_i \|\xi_h\|_{H^1(\Omega_h)}$$

Ahora bien,

$$\|\xi_h\|_{L^2(\Gamma_h)} = \left( \int_{\Gamma_h} |\xi_h(x)|^2 d\sigma \right)^{1/2}$$

y

$$\xi_h \longrightarrow \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{I}} \overline{\|(\alpha_i \xi_h) \circ \varphi_{i,h}^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})}^2} \right)^{1/2}$$

son normas equivalentes y podemos obtener, por la construcción de las  $g_{i,h}$  constantes de equivalencia independientes de  $h$ . #

Otra consecuencia de la construcción que hemos hecho del operador de prolongación es que se verifica la desigualdad de Poincaré en los subespacios  $V_h$  con una constante independiente de  $h$ .

**Lema 2.25** Sean  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ), localmente lipschitziano y  $\{\Omega_h\}_{h>0}$  una familia de abiertos poliédricos que aproxima a  $\Omega$ . Para cada  $h$  tomemos  $\mathcal{T}_h$ , descomposición en  $N$ -simplices de  $\Omega_h$  de modo que todos los vértices de  $\partial\Omega_h$  estén en  $\partial\Omega$ . Entonces existe una constante  $C$  tal que  $\forall h > 0$  y  $\forall \xi \in V_h$

$$\|\xi\|_{H^1(\Omega_h)} \leq C \|\nabla \xi\|_{(L^2(\Omega_h))^N}$$

*Demostración.*- Supongamos que no fuera cierto; en ese caso, para todo número natural  $M$  existe  $h > 0$  y existe  $\xi_h \in V_h$  tal que

$$\|\xi_h\|_{H^1(\Omega_h)} > M \|\nabla \xi_h\|_{(L^2(\Omega_h))^N}$$

Además podemos tomar  $h$  de manera que la sucesión formada por ellas tienda a cero. Sea

$$\eta_h = \frac{\xi_h}{\|\xi_h\|_{H^1(\Omega_h)}}$$

Esta sucesión tiene una subsucesión a la que seguiremos llamando  $\{\eta_h\}_{h>0}$  tal que

$$\chi(\Omega_h)\eta_h \longrightarrow \chi(\Omega)\eta \quad \text{débil en } L^2(\mathbb{R}^N)$$

$$\chi(\Omega_h)\nabla\eta_h \longrightarrow \chi(\Omega)\nabla\eta \quad \text{débil en } (L^2(\mathbb{R}^N))^N$$

y  $\eta \in V$ . Además  $\|\nabla\eta_h\|_{L^2(\Omega_h)} < \frac{1}{M}$  de modo que

$$\|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

y por tanto  $\eta = 0$ .

Consideremos ahora un abierto  $\tilde{\Omega}$  que contenga a todos los  $\Omega_h$  y la sucesión  $\{P_h(\eta_h)|_{\tilde{\Omega}}\}_{h>0}$ . Se verifica que

$$\|P_h(\eta_h)\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \|P_h(\eta_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq c\|\eta_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq c$$

$$\|\nabla P_h(\eta_h)\|_{(L^2(\tilde{\Omega}))^N} \leq \|\nabla P_h(\eta_h)\|_{(L^2(\mathbb{R}^N))^N} \leq c\|\nabla\eta_h\|_{(L^2(\Omega_h))^N} \rightarrow 0$$

por lo tanto  $P_h(\eta_h)|_{\tilde{\Omega}}$  converge fuertemente en  $L^2$  a una constante y esa constante debe ser cero. Sin embargo por otra parte

$$\|P_h(\eta_h)\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \geq \|P_h(\eta_h)\|_{L^2(\Omega_h)} = \|\eta_h\|_{L^2(\Omega_h)} \rightarrow 1$$

lo que nos lleva a una contradicción.  $\#$

# Capítulo 3

## El algoritmo

### 3.1 Descripción del algoritmo

Analizaremos en esta sección el algoritmo utilizado para el cálculo efectivo de la solución del problema discreto.

Sean  $A$  y  $B$  las matrices de coeficientes

$$A = (a_{i,j})_{i,j \in I_h} \quad a_{i,j} = \int_{\Omega_h} \left( \nabla \omega_j \nabla \omega_i + \frac{\alpha}{\tau} \chi_j \chi_i \right)$$
$$B = (b_{i,j})_{i,j \in I_h} \quad b_{i,j} = \int_{\Omega_h} \left( \chi_j D_h(\omega_i) + \frac{1}{\tau} \chi_j \chi_i \right)$$

Sea  $j : \mathbb{R}^{I_h} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida

$$j(x) = \sum_{i \in I_h^W} B(\phi_n^i - x^i) c_i$$

siendo  $c_i$  la constante

$$c_i = \int_{\Gamma_h} k_i(\sigma) d\sigma$$

Dado  $g_n + \alpha p_n \in \mathbb{R}^{I_h}$  sea  $L_n$  el vector  $\mathbb{R}^{I_h}$  de coordenadas

$$L_n^i = \frac{1}{\tau} (g_n^i + \alpha p_n^i) \int_{\Omega_h} \chi_i$$

Sea  $U \in \mathbb{R}^{I_h}$  el vector de coordenadas 1, es decir  $U^i = 1 \forall i \in I_h$ . Por último sea  $K$  el conjunto

$$K = \{x \in \mathbb{R}^{I_h} \mid x^i = 0 \forall i \in I_h^D, x^i \geq 0 \forall i \in I_h \setminus I_h^D\}$$

El algoritmo para resolver  $(P_{h,\tau})$  es el siguiente:

### Algoritmo base

#### Paso inicial.-

$$g_0 + \alpha p_0 = g_h^0 + \alpha p_h^0$$

#### Pasos sucesivos.-

**P.1.-** Conocidos los vectores  $p_n$  y  $g_n$  calcular  $L_n \in \mathbb{R}^{I_h}$

**P.2.-** Hallar  $p_{n+1} \in K$  tal que  $J_n(p_{n+1}) = \min_{x \in K} J_n(x)$  siendo

$$J_n(x) = \frac{1}{2}x^T A x + (BU - L_n)^T x + j(x)$$

**P.3.-** Calcular el vector  $F_n \in \mathbb{R}^{I_h}$  de coordenadas

$$F_n^i = \min\{0, -\nabla J_n(p_{n+1})\}$$

**P.4.-** Resolver el sistema

$$B u_{n+1} = F_n$$

**P.5.-** Calcular  $g_{n+1} = u_{n+1} + U$  es decir

$$g_{n+1}^i = u_{n+1}^i + 1$$

La resolución del sistema lineal del paso 4 no tienen dificultad ya que es posible ordenar los nodos de manera que la matriz  $B$  sea triangular. El paso más delicado es la minimización del funcional  $J_n$ . Hemos probado dos algoritmos distintos: el gradiente con proyección y el gradiente conjugado.

### 3.1.1 Gradiente con proyección

Este método es una generalización directa del método del gradiente: en cada paso se proyecta el nuevo valor obtenido sobre el conjunto en el que se está minimizando. Sea  $K$  el conjunto sobre el que se desea minimizar un funcional  $J$ . Sea  $P_K$  el operador de proyección sobre  $K$  y sea  $\rho$  una constante positiva suficientemente pequeña; el algoritmo resulta:

### Algoritmo GP

### Paso inicial.-

$$x_0 \in K \text{ arbitrario}$$

### Pasos sucesivos.-

$$x_{k+1} = P_K(x_k - \rho \nabla J(x_k))$$

Si  $J$  es convexo y diferenciable, y su gradiente es lipschitciano con constante  $L$  en  $K$  entonces tomado  $0 < \rho < 2/L$  el método del gradiente con proyección (GP) es convergente. Si  $\nabla J$  no es lipschitciano, es posible elegir una sucesión  $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  que tiende a cero cuando  $k$  tiende a infinito, de modo que la sucesión.

$$x_{k+1} = P_K(x_k - \rho_k \nabla J(x_k))$$

converja al mínimo.

En nuestro caso concreto

$$\nabla J_n(x) = Ax + (BU - L_n) + \nabla j(x)$$

y  $\nabla j(x)$  es el vector de coordenadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial j}{\partial x^i}(x) &= 0 && \text{si } i \notin I_h^W \\ \frac{\partial j}{\partial x^i}(x) &= -\beta(\phi_n^i - x^i)c_i && \text{si } i \in I_h^W \end{aligned}$$

por tanto la lipschitcianidad de  $\nabla J_n$  depende de que  $\beta$  sea o no lipschitciana. En las pruebas realizadas hemos tomado  $\beta$  lipschitciana y hemos elegido

$$\rho = \frac{2}{\|A\|_\infty + \varepsilon}$$

siendo  $\varepsilon$  la constante de lipschitcianidad de  $\beta$ .

La gran ventaja del algoritmo del gradiente con proyección es su sencilla programación. En general la mayor dificultad está en el operador de proyección pero en este caso concreto es muy simple pues

$$K = \{x \in \mathbb{R}^{I_h} \mid x^i = 0 \forall i \in I_h^D, x^i \geq 0 \forall i \in I_h \setminus I_h^D\}$$

Además este algoritmo es convergente para una clase muy amplia de operadores  $J$ . Si se elige convenientemente  $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  sólo es necesario  $J$  convexa y continua pues incluso si  $J$  no es diferenciable puede tomarse un subgradiente de la función.



### 3.1.2 Gradiente conjugado

El método del gradiente con proyección tiene el inconveniente de que converge lentamente. Si la función  $J$  es suficientemente regular, métodos como el gradiente conjugado convergen y son mucho más rápidos.

Recordemos primero cual es el algoritmo del gradiente conjugado en el caso más simple de un funcional cuadrático de la forma  $F(z) = c + b^T z + \frac{1}{2} z^T A z$  que se desea minimizar en todo  $\mathbb{R}^N$  (GC)

#### Algoritmo GC

**Paso inicial.-** Tomar  $x_0$  arbitrario y calcular

$$d_0 = r_0 = -F'(z_0) = -b - Az_0$$

**Pasos sucesivos.-** Conocidos  $x_k$ ,  $r_k$  y  $d_k$  calcular  $x_{k+1}$ ,  $r_{k+1}$  y  $d_{k+1}$  según los siguientes pasos:

**P. 1.-**

$$\alpha_k = \frac{\gamma_k}{\delta_k}, \quad \delta_k = d_k^T A d_k, \quad \gamma_k = d_k^T r_k$$

**P. 2.-**

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A d_k$$

**P. 3.-**

$$\beta_k = \frac{|r_{k+1}|^2}{c_k}$$

**P. 4.-**

$$d_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k d_k$$

En general la función  $J_n$  no es una función cuadrática definida positiva, pero supon- gamos que  $\beta$  es  $C^1$ , entonces dado un punto  $x_0 \in K$  podemos aproximar

$$J_n(x) = J_n(x_0 + (x - x_0)) \approx$$

$$\approx F_n(x_0, x) = J_n(x_0) + (x - x_0)^T \nabla J_n(x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T H J_n(x_0) (x - x_0)$$

donde

$$H J_n(x_0) = A + H j(x_0)$$

y  $H_j(x_0)$  es la matriz diagonal de componentes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 j}{\partial x_i \partial x_j} &= 0 && \text{si } i \neq k \\ \frac{\partial^2 j}{\partial x_i^2} &= 0 && \text{si } i \notin I_h^W \\ \frac{\partial^2 j}{\partial x_i^2} &= \beta'(\phi_n^i - x^i)c_i && \text{si } i \in I_h^W \end{aligned}$$

Puesto que  $\beta$  es monótona creciente  $HJ_n(x_0)$  es una matriz simétrica definida positiva, de hecho es una M-matriz, como A.

Ahora utilizamos el método del gradiente conjugado para minimizar la función  $F_n(x_0, \cdot)$  en  $K$ . Una vez calculado este mínimo, al que llamaremos  $x_1$ , es posible desarrollar de nuevo  $J_n(x)$ , pero ahora a partir de  $x_1$  y calcular el mínimo de  $F_n(x_1, \cdot)$  en  $K$ . El proceso se repite hasta obtener una aproximación suficientemente buena del mínimo de  $J_n$  en  $K$ .

El algoritmo para minimizar una función no cuadrática usando el gradiente conjugado (GCNC) resulta:

### Algoritmo GCNC

#### Paso inicial.-

$$x_0 \in K \text{ arbitrario}$$

#### Pasos sucesivos.-

##### P. 1.- Construir la aproximación de Newton

$$F_n(x_k, z) = J_n(x_k) + (z - x_k)^T \nabla J_n(x_k) + \frac{1}{2}(z - x_k)^T HJ_n(x_k)(z - x_k)$$

##### P. 2.- Con $z = x_k$ como paso inicial usar el gradiente conjugado para hallar el punto $x_{k+1}$ donde $F_n(x_k, z)$ alcanza el mínimo en $K$ .

El conjunto sobre el que queremos minimizar  $J$  no es todo  $\mathbb{R}^{I_h}$ . El gradiente conjugado puede adaptarse para hallar el punto donde alcanza el mínimo una función cuadrática en un conjunto de la forma

$$K = \{x \in \mathbb{R}^I \mid x_i \geq 0 \forall i \in I' \subset I\}$$

Esta es la situación en la que nos encontramos al dar el paso 2 del algoritmo GCNC, ya que la condición  $x_i = 0 \forall i \in I_h^D$  nos permite reducir el problema a minimizar un funcional

sobre un subconjunto de  $\mathbb{R}^{I_h \setminus I_k^D}$ : el conjunto de puntos con todas sus coordenadas no negativas ( $I' = I$ ).

Se sabe además que para una función cuadrática  $F(z) = c + b^T z + \frac{1}{2} z^T A z$  con  $A$  definida positiva el gradiente conjugado calcula el mínimo en  $K$  en un número finito de pasos (ver [30]).

El algoritmo del gradiente conjugado cuando las coordenadas han de ser no negativas (GCCNN) es el siguiente

### Algoritmo GCNNC

**Paso 1.-** Tomar  $z_0 \in K$  arbitrario y calcular

$$r_0 = -F(z_0) = -b - Az$$

**Paso 2.-** Sea  $I'$  el conjunto de índices tales que

$$z_0^i = 0 \text{ y } r_0^i \leq 0$$

Si  $r_0^i = 0$  para todos los índices  $i$  que no están en  $I'$  entonces  $x_0$  es el punto donde  $F$  alcanza el mínimo en  $K$  y el algoritmo termina.

**Paso 3.-** Sea  $d_0 = \bar{r}_0$ , donde  $\bar{r}_0$  es el vector de coordenadas

$$\bar{r}_0^i = 0 \text{ si } i \in I', \quad \bar{r}_0^i = r_0^i \text{ si } i \notin I'$$

**Paso 4.- Subrutina GC** Comenzando con  $k = 0$  calcular

**P. 4.1.-**

$$s_k = Ad_k, \quad \gamma_k = d_k^T r_k, \quad \delta_k = d_k^T s_k, \quad \alpha_k = \frac{\gamma_k}{\delta_k}$$

**P. 4.2.-**

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k s_k.$$

Si  $x_{k+1}$  no está en  $K$  ir al paso 5.

Si  $x_{k+1}$  está en  $K$  entonces: si  $r_{k+1}^i = 0$  para todo  $i \notin I'$ , hacer  $x_0 = x_{k+1}$ , calcular  $r_0 = r_{k+1} = -b - Ax_0$  e ir al paso 2; si  $r_{k+1}^i \neq 0$  para algún  $i \notin I'$  calcular  $\bar{r}_{k+1}$  y  $d_{k+1}$  del siguiente modo:

**P. 4.3.-**

$$\bar{r}_{k+1}^i = 0 \text{ si } i \in I', \quad \bar{r}_{k+1}^i = r_{k+1}^i \text{ si } i \notin I'$$

**P. 4.4.-**

$$d_{k+1} = \bar{r}_{k+1} + \beta_k d_k, \quad \beta_k = \frac{|\bar{r}_{k+1}|^2}{\gamma_k}$$

Sustituir  $k$  por  $k + 1$  e ir al paso 4.1

**Paso 5.-** Sea  $i_1, \dots, i_s$  el conjunto de índices  $i$  tales que  $x_{k+1}^i < 0$ . Sea  $\bar{\alpha}_k$  el mínimo de las cantidades

$$\frac{-x_k^i}{d_k^i} \quad (i = i_1, \dots, i_s)$$

Hacer  $x_0 = x_k + \bar{\alpha}_k d_k$ ,  $r_0 = r_k - \bar{\alpha}_k s_k = -b - Ax_0$ . Redefinir  $I$  como el conjunto de índices tales que  $x_0^i = 0$ .

Si  $r_0^i = 0$  para todo  $i \notin I'$  ir al paso 2 (donde vuelve a definirse  $I$ ).

Si  $r_0^i \neq 0$  para algún  $i \notin I'$  ir al paso 3.

Para acelerar la convergencia hemos programado también una versión preconditionada del gradiente conjugado. La matriz  $A$  que tenemos en este problema es diagonal dominante de modo que  $M = D = \text{diag}(A)$  es una matriz de preconditionamiento muy sencilla y que proporciona resultados suficientemente buenos.

El algoritmo del gradiente conjugado con preconditionamiento es:

### Algoritmo GCPC

**Paso inicial.-** Tomar  $x_0 \in K$  arbitrario y calcular

$$r_0 = -b - Ax_0$$

$$d_0 = M^{-1}r_0$$

**Pasos sucesivos.-**

**P. 1.-**

$$\alpha_k = \frac{\gamma_k}{\delta_k}, \quad \delta_k = d_k^T A d_k, \quad \gamma_k = d_k^T r_k$$

**P. 2.-**

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A d_k$$

**P. 3.-**

$$\beta_k = \frac{r_{k+1}^T M^{-1} r_{k+1}}{\gamma_k}$$

**P. 4.-**

$$d_{k+1} = M^{-1} r_{k+1} + \beta_k d_k$$

## 3.2 Pruebas numéricas

Para probar el algoritmo hemos escrito un programa en fortran en el que está implementado el método descrito en la sección anterior. El programa está realizado como un módulo de nombre DAMEV que puede incorporarse a la biblioteca MODULEF. Permite resolver problemas planteados sobre dominios generales de  $\mathbb{R}^2$  con datos en el contorno que pueden depender del tiempo.

Da la posibilidad de utilizar tres métodos de minimización distintos según la elección del parámetro MMIN.

**MMIN=1** Gradiente con proyección y paso constante.

**MMIN=2** Gradiente conjugado.

**MMIN=3** Gradiente conjugado con preconditionamiento.

Cuando la regularidad del problema lo permite, el tercer algoritmo es el más rápido. El primer algoritmo converge con condiciones mínimas de regularidad del problema. El segundo algoritmo se incluye únicamente para comparar con el tercero y poder estudiar la influencia del preconditionamiento.

Al programa debe dársele como entrada un fichero que contenga una triangulación del dominio. Con la notación de MODULEF, la única limitación de la triangulación es que todos los nodos sean vértices ya que se utilizan elementos finitos de tipo uno. El programa modifica la triangulación de entrada para obtener una de tipo débilmente agudo. Para ello utiliza el módulo PIGRA, escrito por L.D. Marini y P. Pietra. Este módulo fue incorporado a la biblioteca MODULEF para obtener las triangulaciones débilmente agudas que utiliza el módulo DAMIAN para resolver el problema estacionario del dique con condiciones de contorno de tipo Dirichlet. En el módulo DAMEV hemos utilizado algunos de los programas utilizados por DAMIAN para el cálculo de los coeficientes correspondientes al operador de “up-wind” y para el cálculo de las matrices elementales.

El programa principal que se incluye en el apéndice, es únicamente un ejemplo de utilización del módulo DAMEV. Además de este programa principal, que hace la llamada a varios módulos de MODULEF, hay que incluir las siguientes funciones que son datos del problema

**FPHI(x,y,t)** Dato de contorno.

**FINIC(x,y,ALPHA)** Dato inicial.

**BETA(s)** Función de permeabilidad de la frontera.

**DBETA(s)** Derivada de la función BETA. (No es necesaria si se utiliza el algoritmo MMIN=1.)

### **PRIMBETA(s)** Una primitiva de BETA.

Para contrastar los resultados obtenidos con el método presentado en esta memoria hemos utilizado los test que aparecen en [32]. En ese artículo se explican los algoritmos utilizados en el módulo DAMIAN para resolver el problema estacionario del dique con condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Las figuras 3.1-3.5 corresponden a la solución obtenida para  $\beta(s) = 10s$  y  $\alpha = 0.0$ , una vez que el problema de evolución llega a una solución estacionaria. Reproducen la geometría del dique y los niveles de fluido en los embalses, de algunos de los test de [32]. Los resultados son comparables a los que se tienen allí pues la permeabilidad  $\beta(s) = 10s$  es suficientemente alta. En la figura 3.1 el fondo es completamente impermeable y las paredes horizontales permeables. En la figura 3.2 el fondo y los dos tercios superiores del lateral izquierdo son impermeables. El lateral derecho y la parte baja del izquierdo son permeables. El agua en el lado izquierdo llega hasta lo alto del dique de modo que el agua entra en el dique por ese lado con mucha presión. En las figuras 3.3-3.5 la parte central del fondo del dique es permeable. Según sea esa franja central permeable los dos frentes de entrada del agua se unen o no.



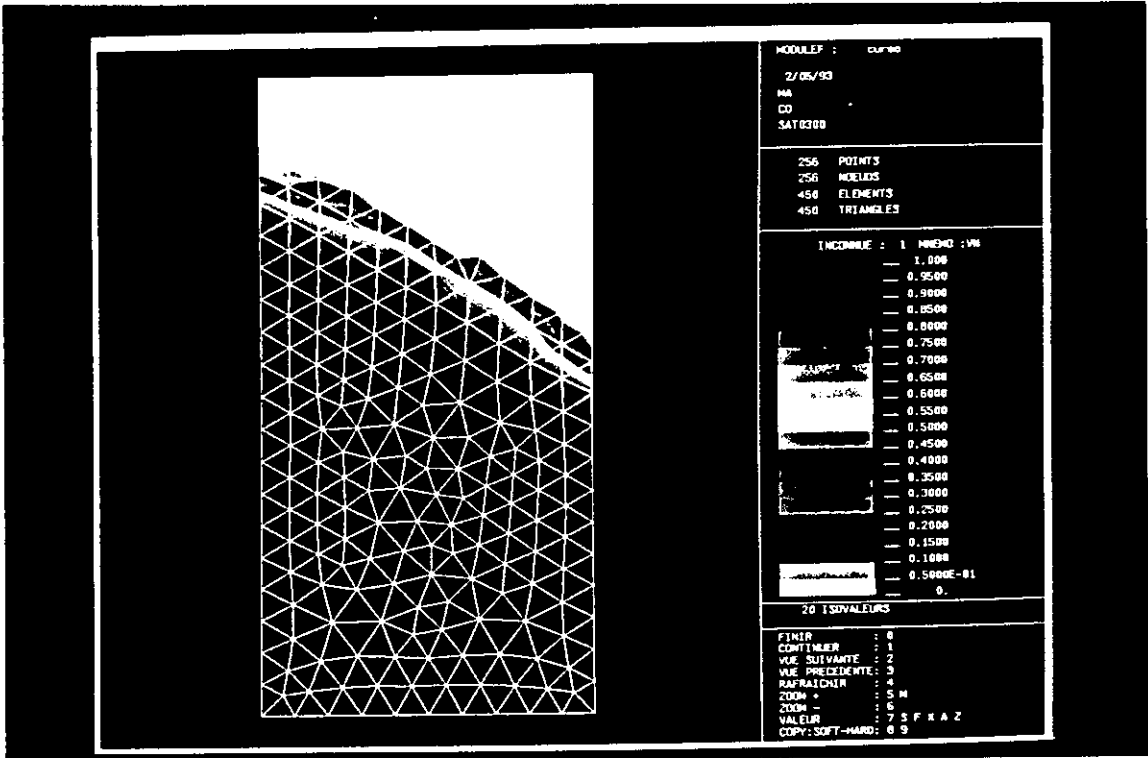
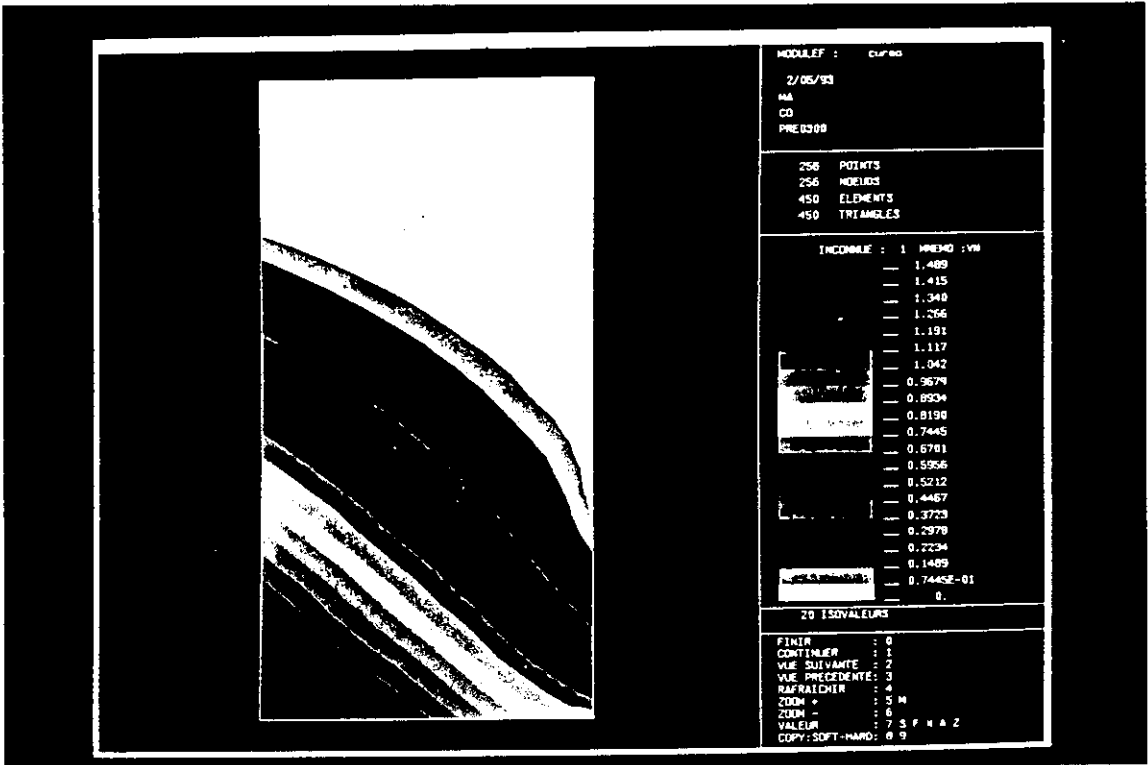


Figura 3.1: Test 1: Presión y saturación



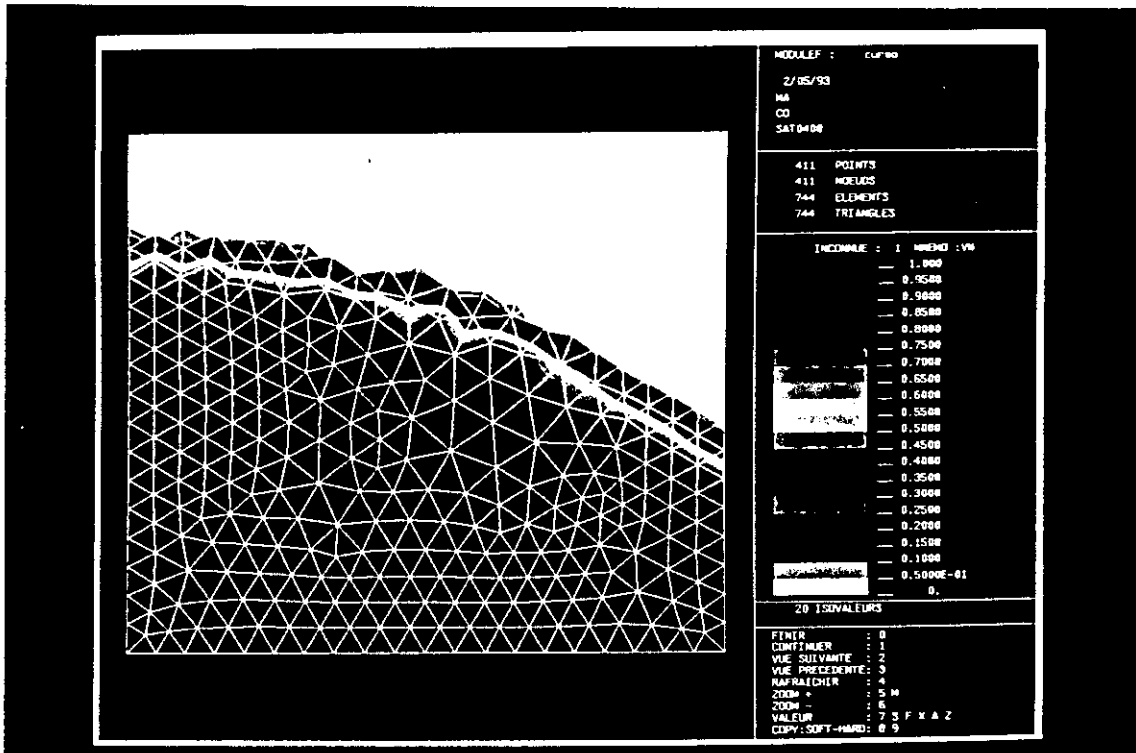
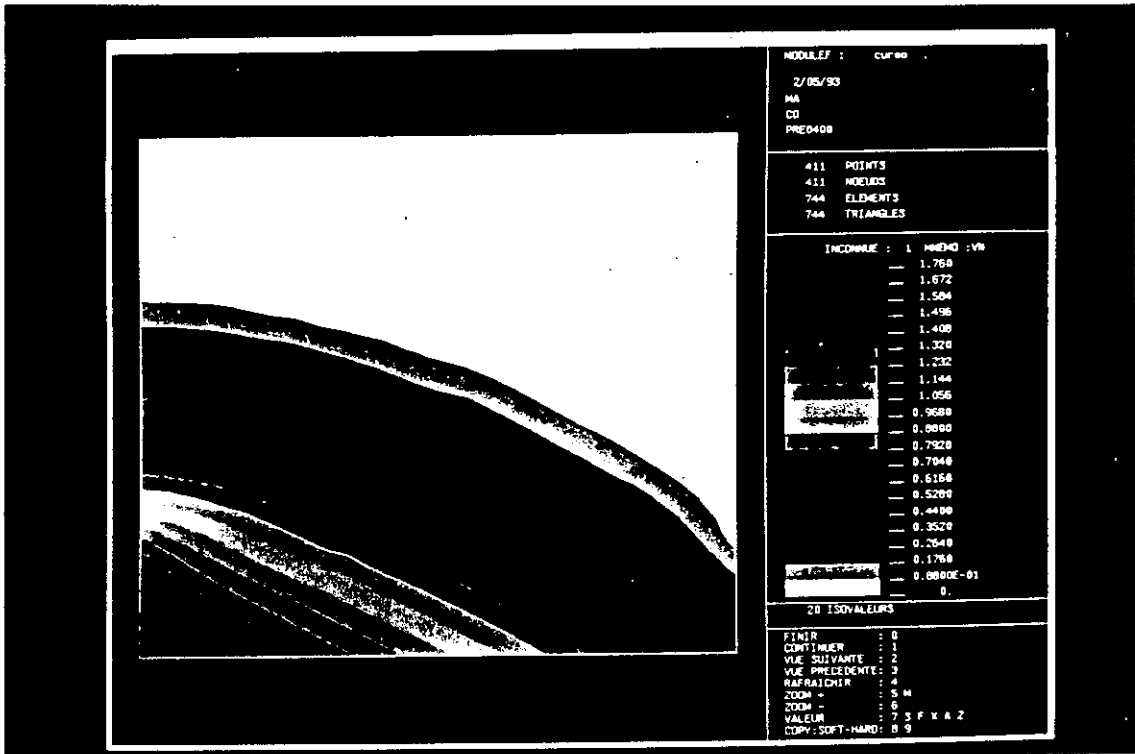


Figura 3.2: Test 2: Presión y saturación

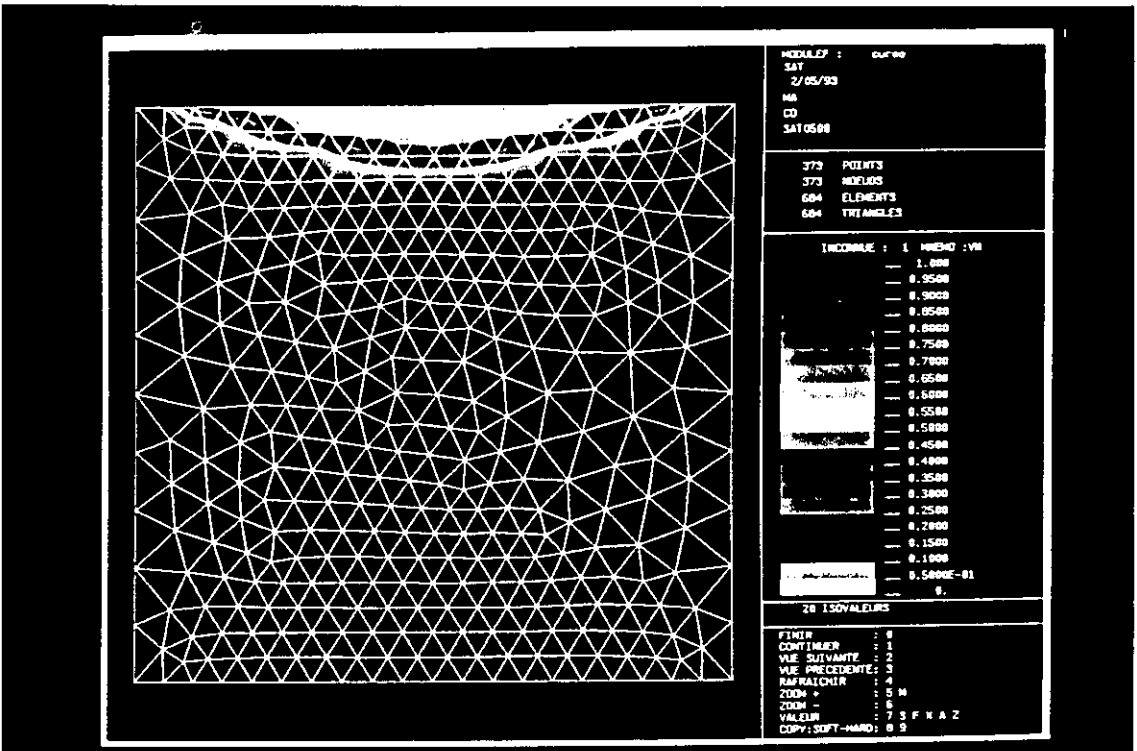
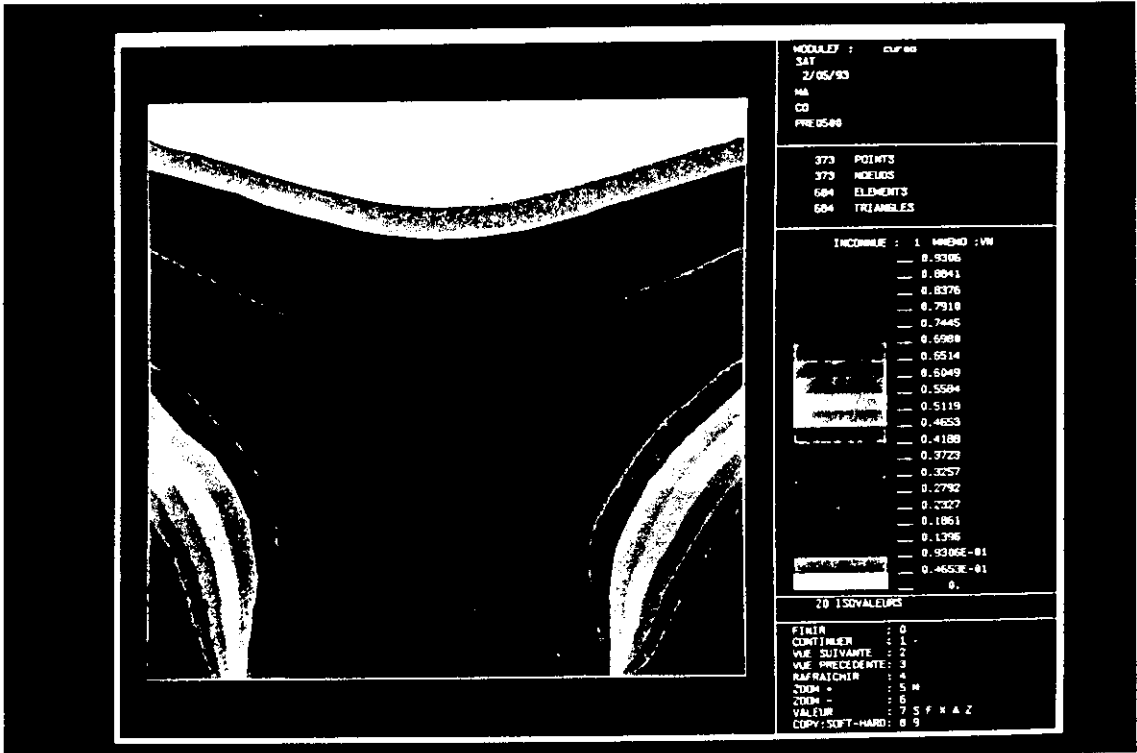


Figura 3.3: Test 3: Presión y saturación

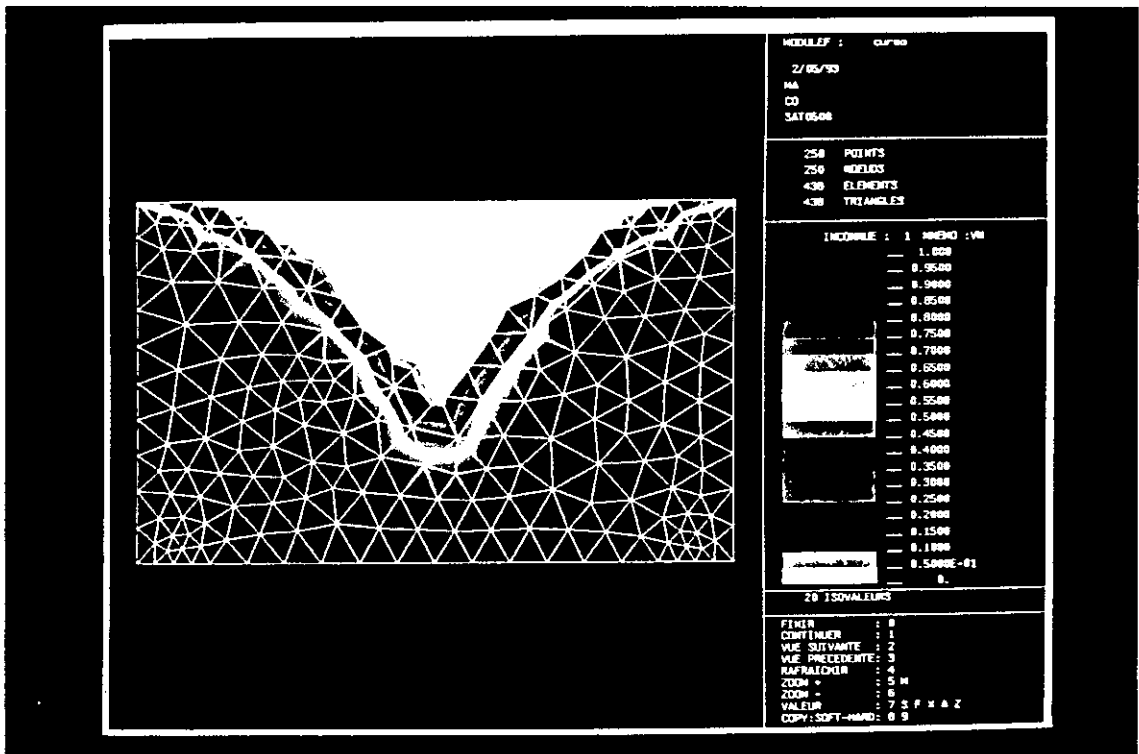
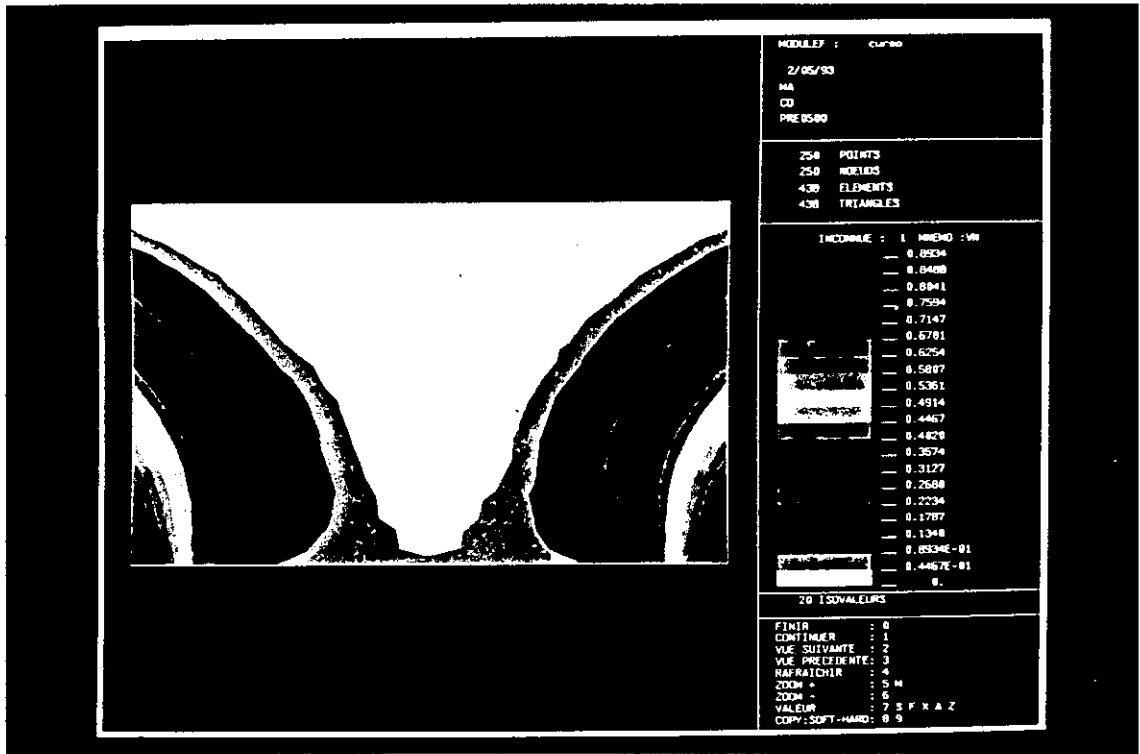


Figura 3.4: Test 4: Presión y saturación

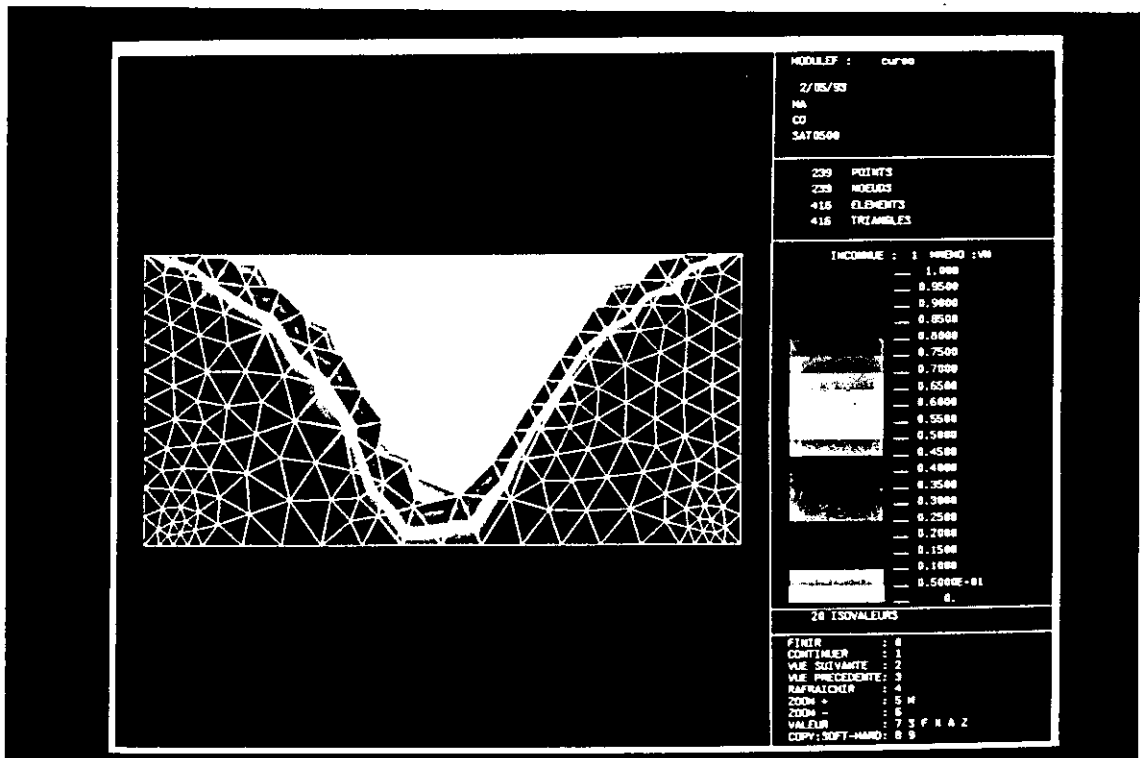


Figura 3.5: Test 5: Presión y saturación

En las figuras 3.6-3.10 se pueden comparar los resultados obtenidos manteniendo fija la geometría del dique, los niveles de los embalses y las condiciones iniciales, pero variando la permeabilidad y la compresibilidad del fluido. Puede observarse como al disminuir la permeabilidad y al aumentar la compresibilidad el fluido entra en el dique más lentamente. En particular, cuando la permeabilidad del borde es muy pequeña, la zona del dique no saturada ( $0 < g < 1$ ) es más grande.

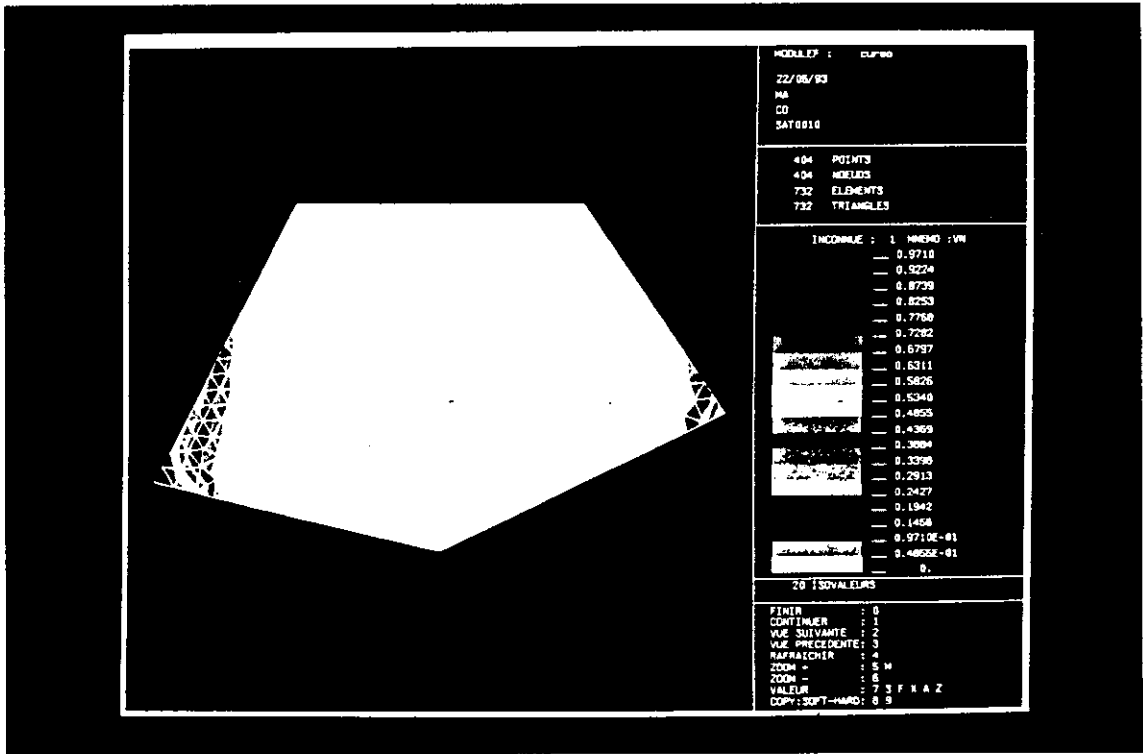
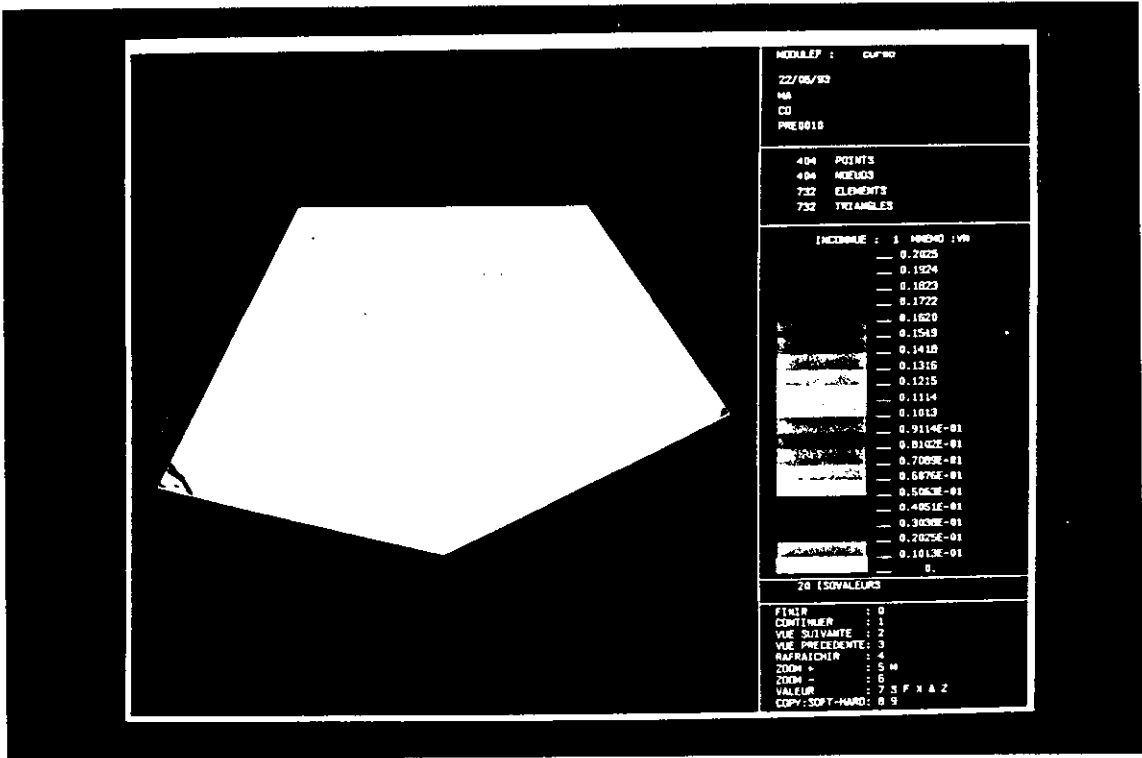


Figura 3.6:  $\beta(s) = 0.1s$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $t = 0.9$  Presión y saturación

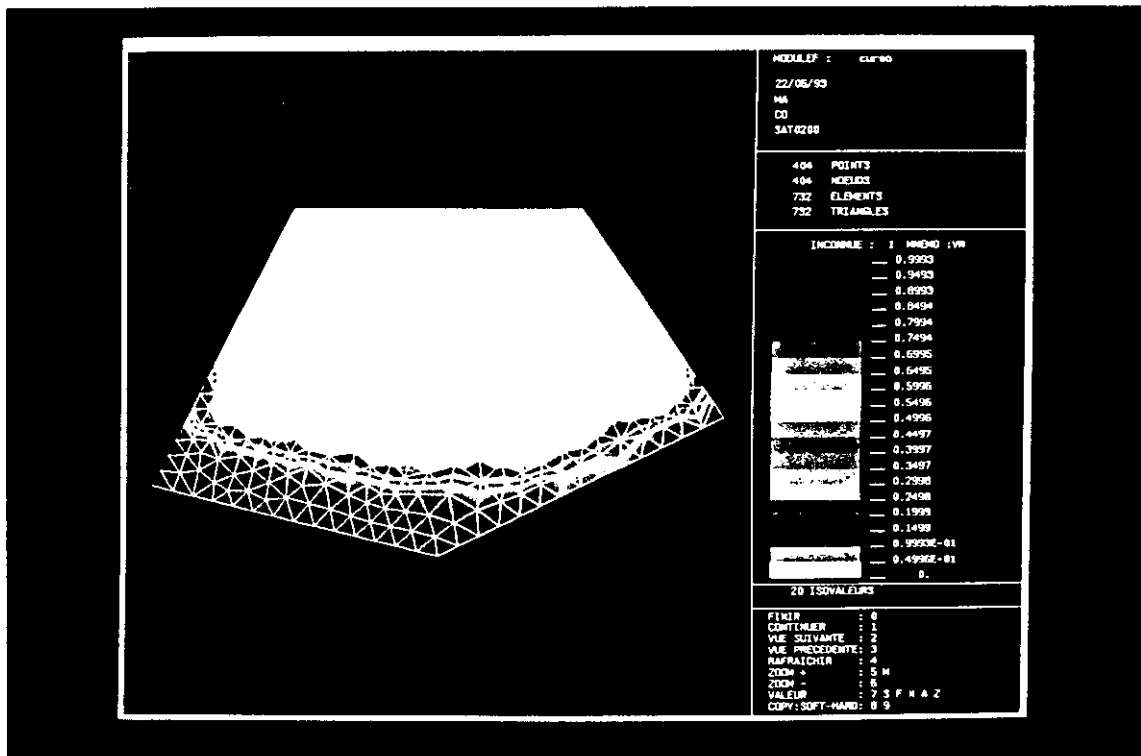
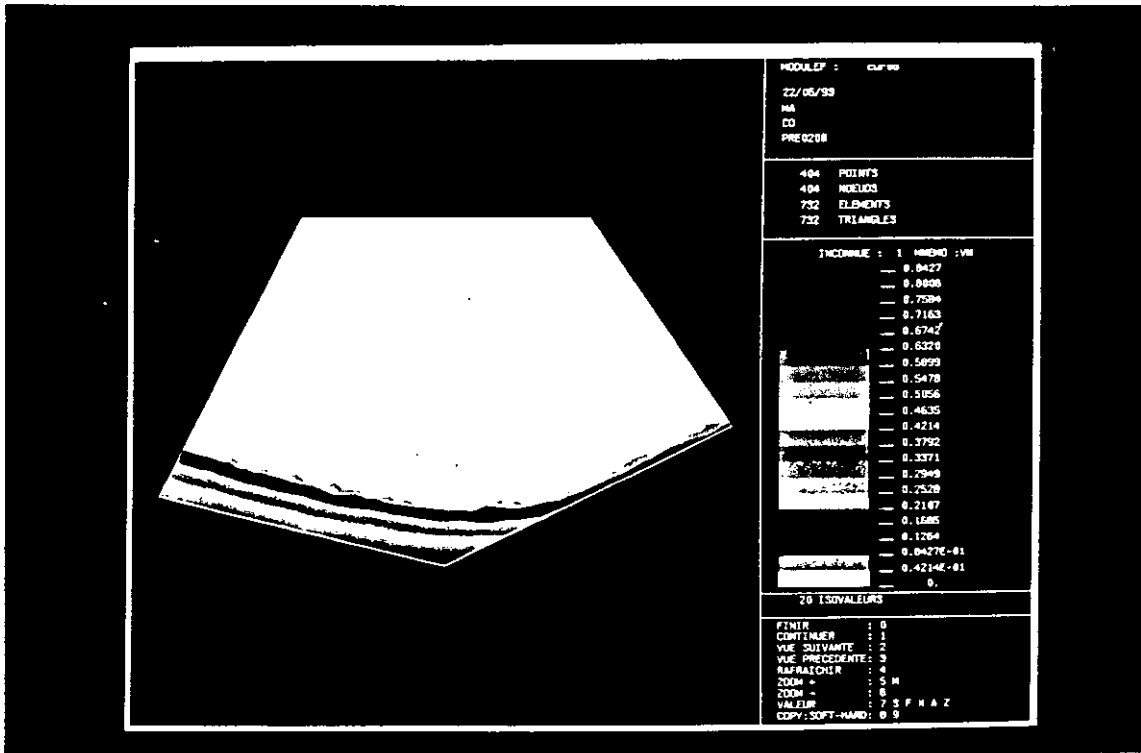


Figura 3.7:  $\beta(s) = 0.1s$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $t = 4.5$  Presión y saturación

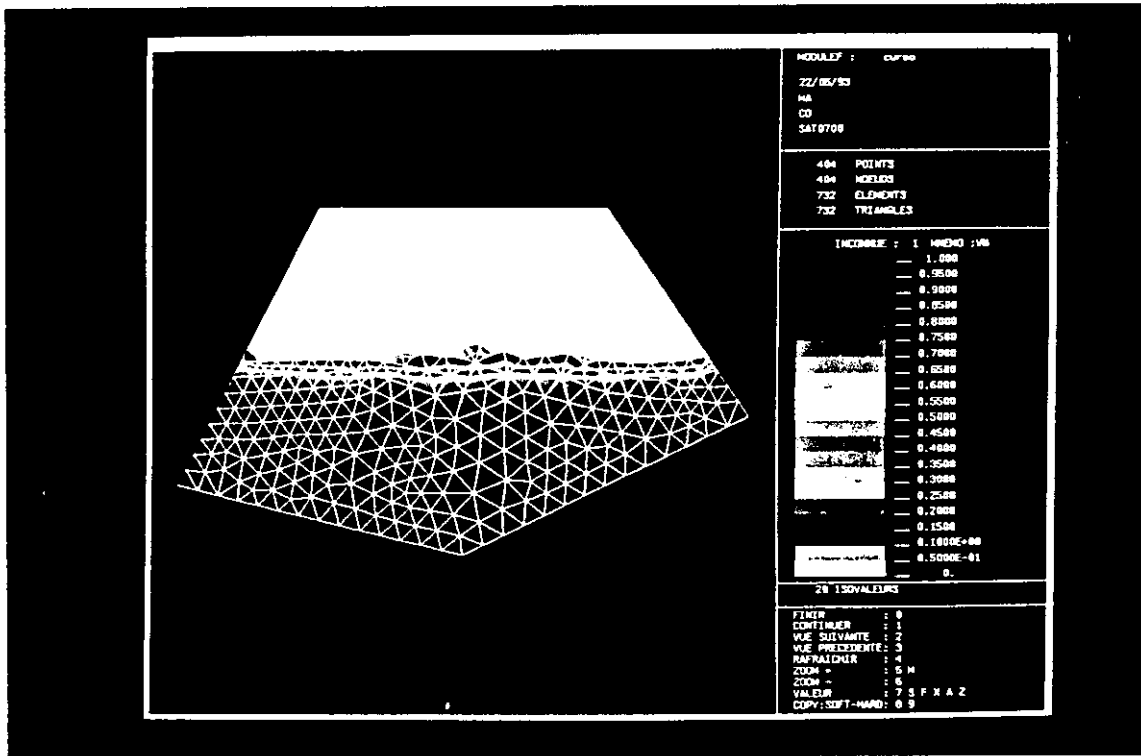
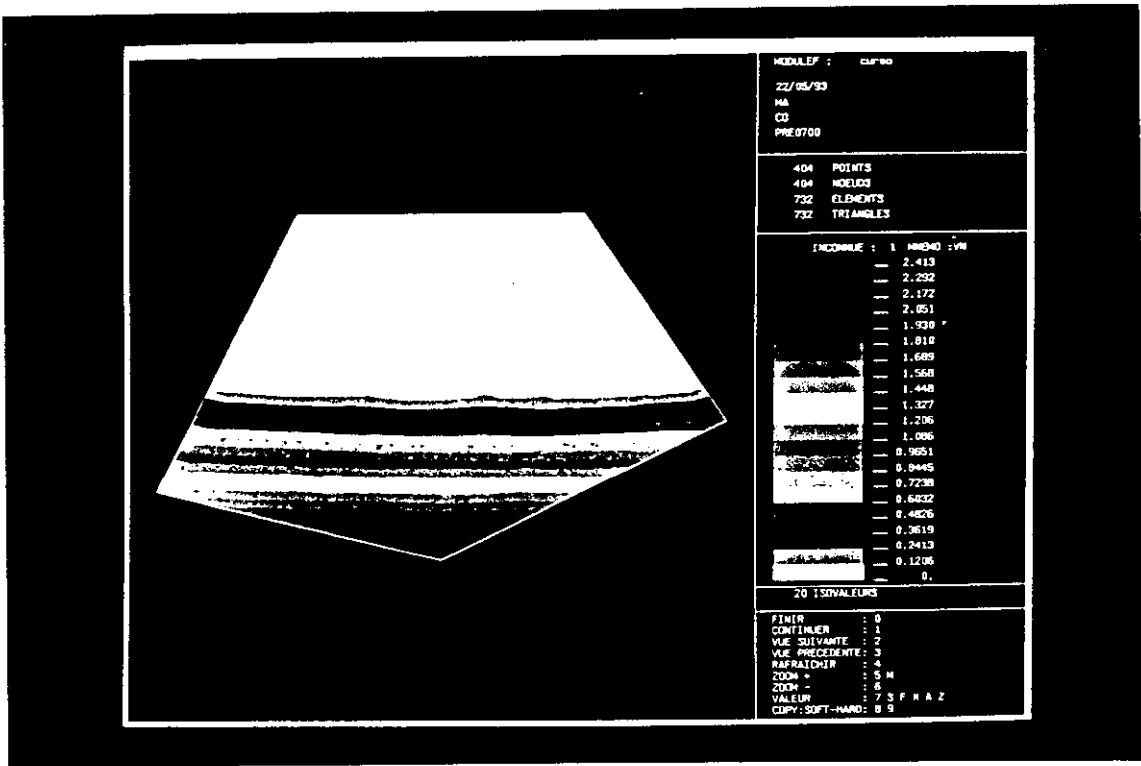


Figura 3.8:  $\beta(s) = 0.1s$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $t = 63$ . Presión y saturación



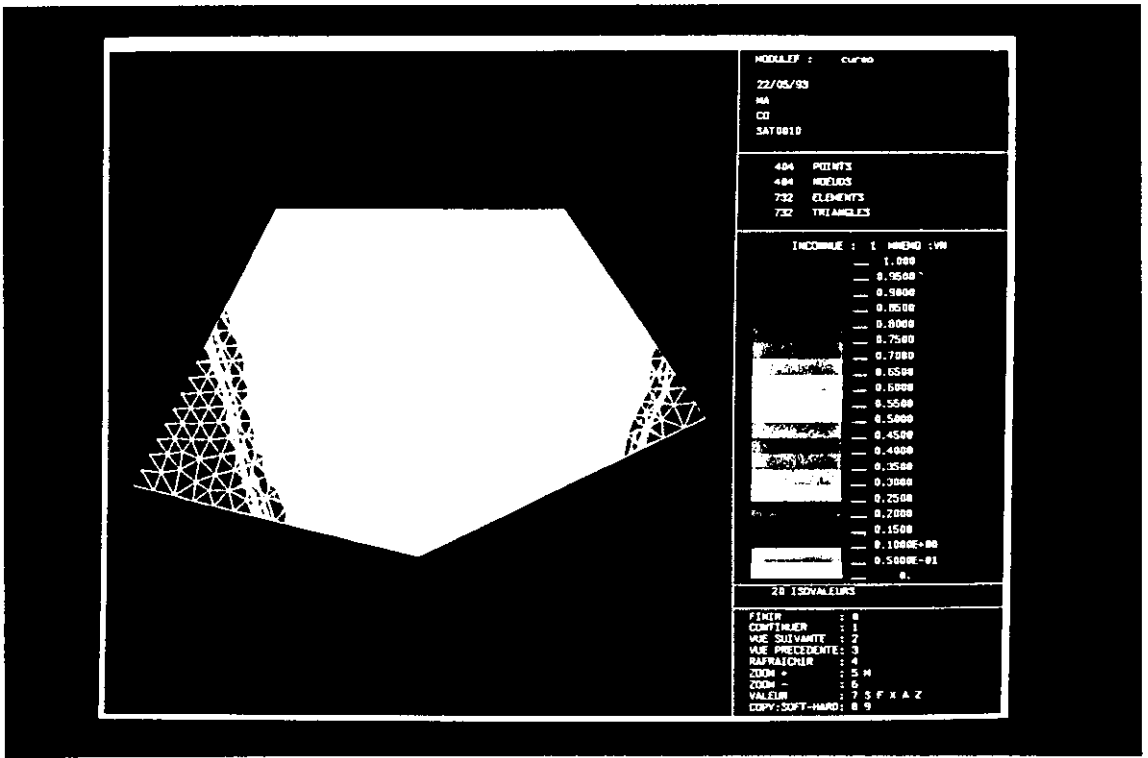
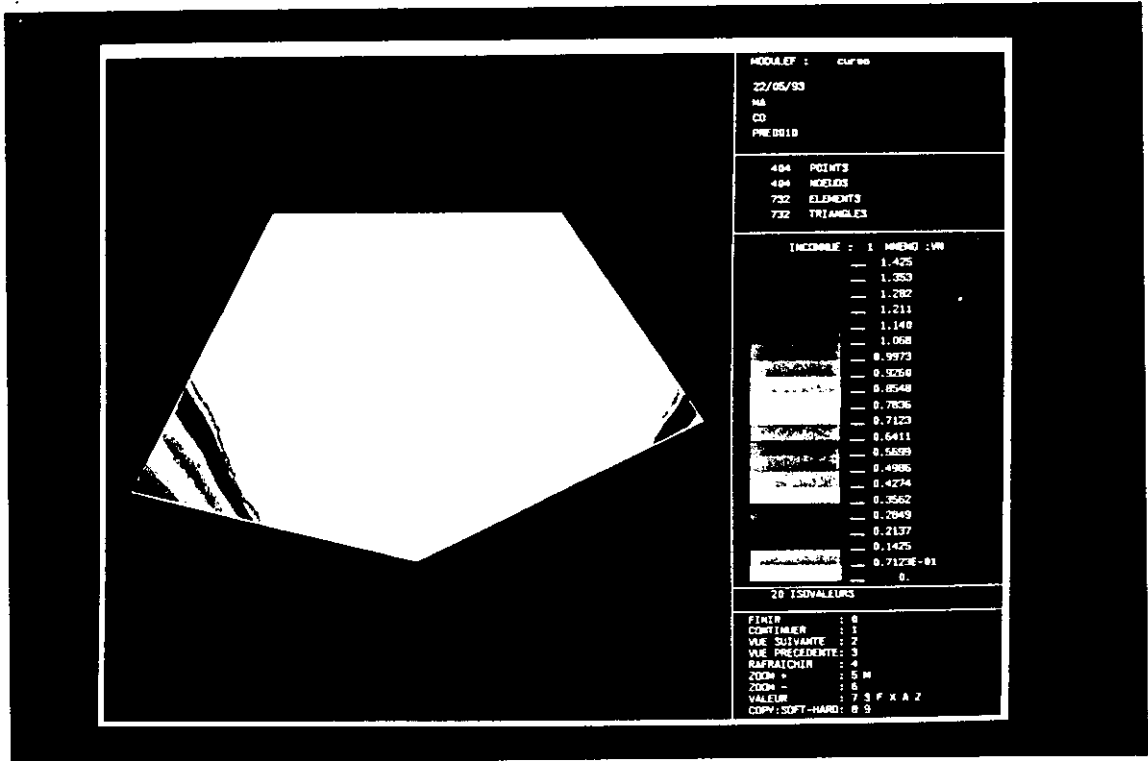


Figura 3.9:  $\beta(s) = s$ ,  $\alpha = 0$ ,  $t = 0.9$  Presión y saturación

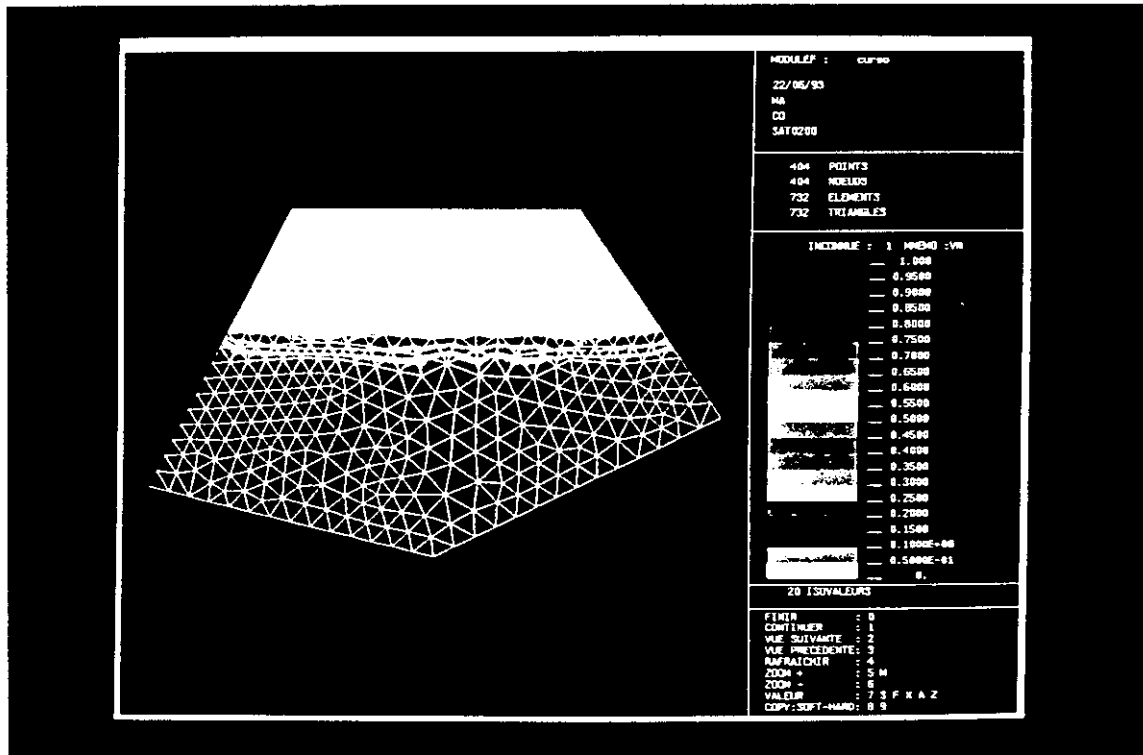
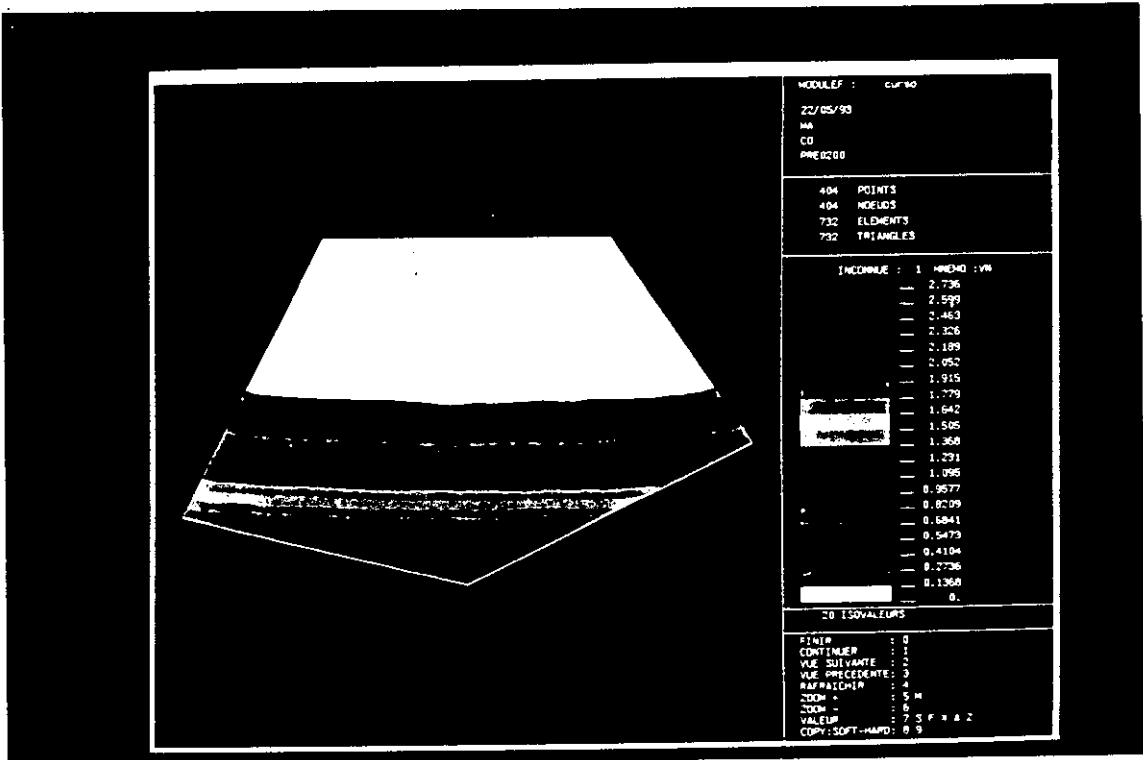


Figura 3.10:  $\beta(s) = s$ ,  $\alpha = 0.$ ,  $t = 18$ . Presión y saturación

En las figuras 3.12-3.17 tenemos varios problemas distintos que evolucionan hacia un mismo problema estacionario. Se ha tomado  $\alpha = 0$  y en todos ellos el nivel del fluido comienza descendiendo con el tiempo y a partir de un cierto instante se estabiliza. El estado inicial y la velocidad con la que desciende el nivel del agua varía de un ejemplo a otro. En las figuras 3.19 y 3.20 el dique está inicialmente lleno de agua hasta el nivel que en ese instante tienen los embalses. En la figura 3.21 el dique está inicialmente vacío. El agua desciende a la misma velocidad que en la figura 3.19 y no llega a saturarse la zona A del dique. En las figuras 3.22-3.24 el nivel en el embalse desciende lentamente y da tiempo a que el agua llegue a mojar la zona A. De este modo obtenemos varias soluciones para un mismo problema estacionario, todas ellas correctas físicamente.

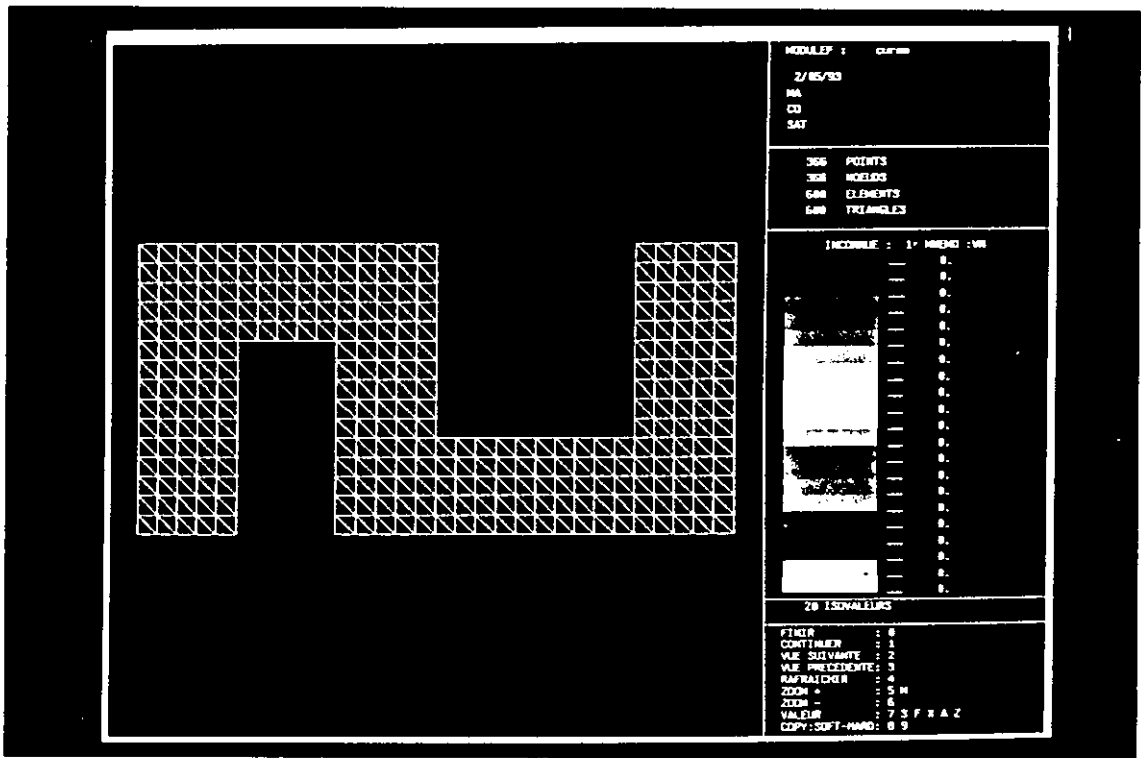


Figura 3.11: Mallado

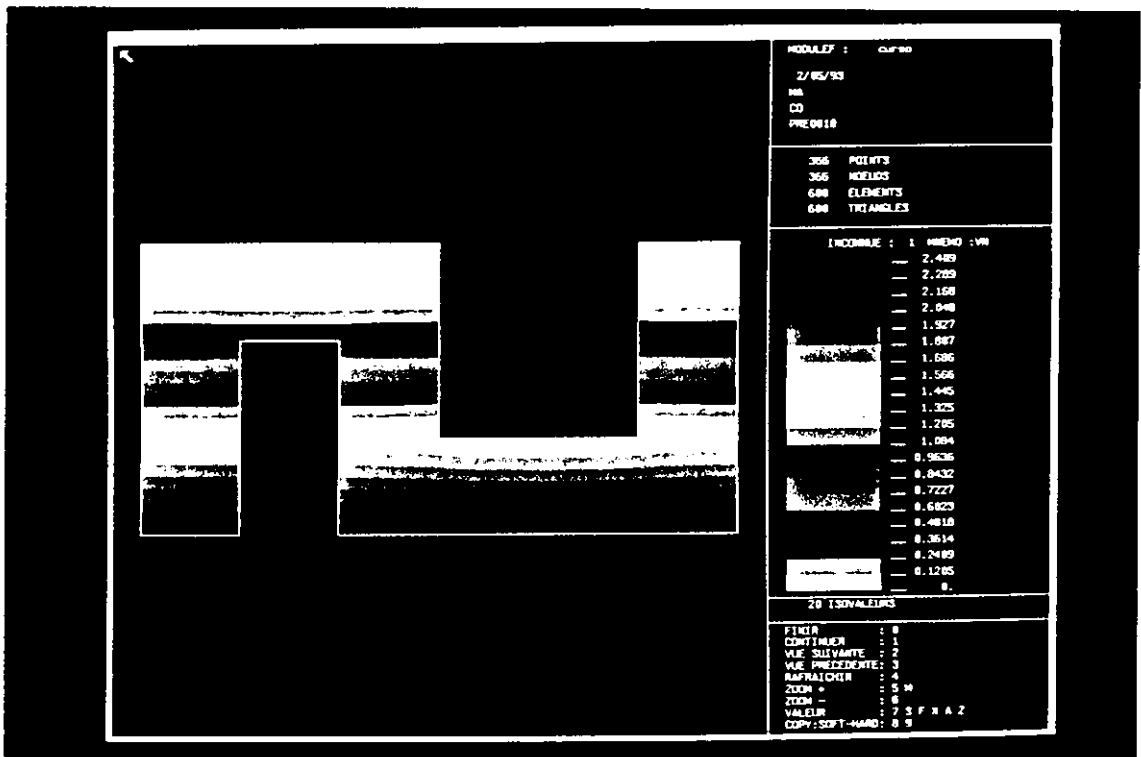


Figura 3.12:  $t = 0.6$

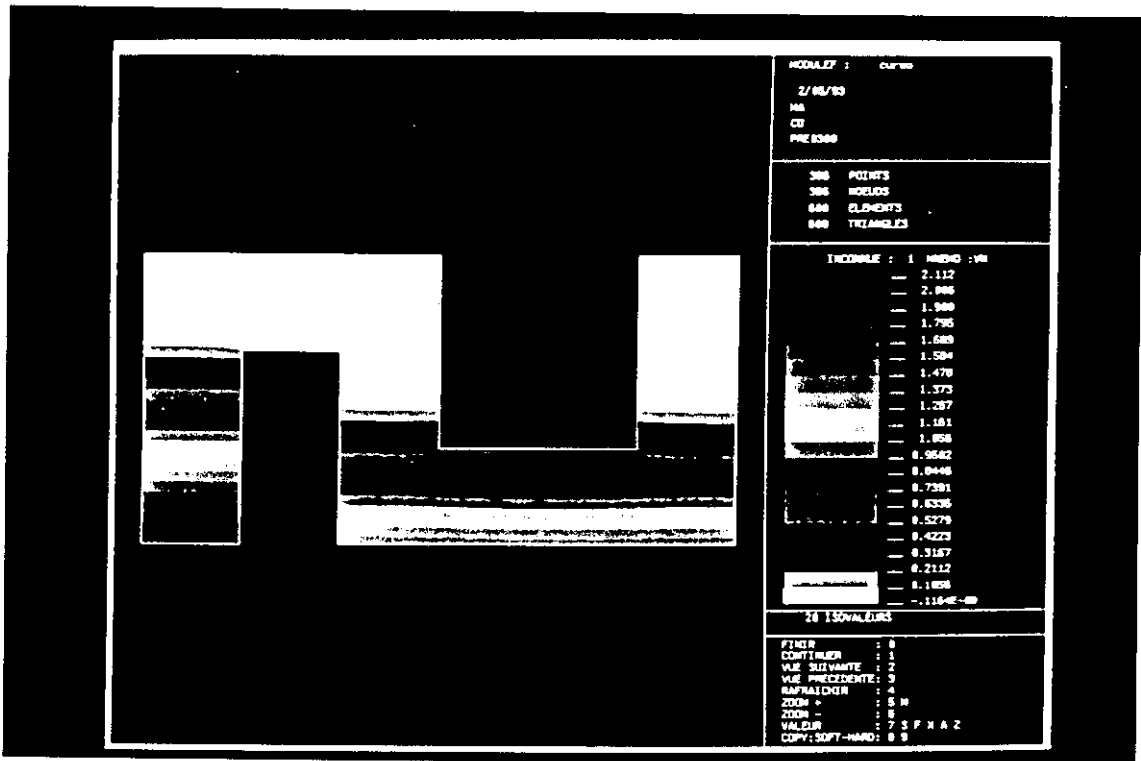
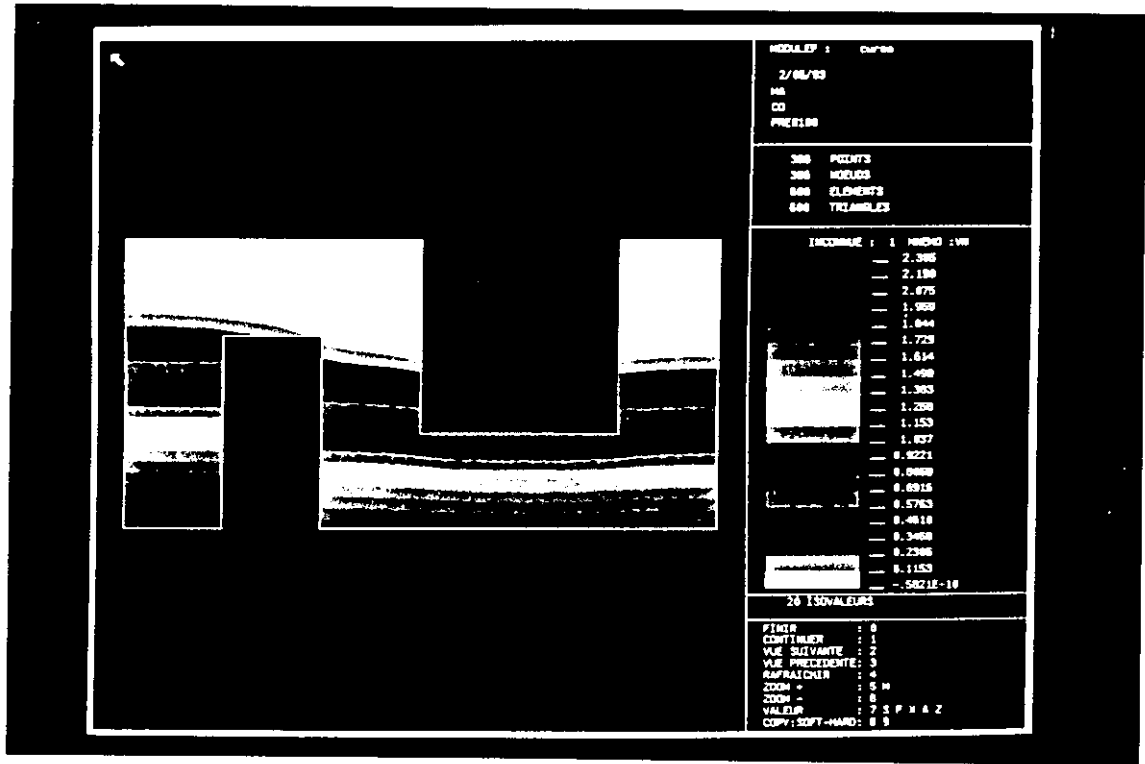


Figura 3.13:  $t = 6$ . y  $t = 18$ .

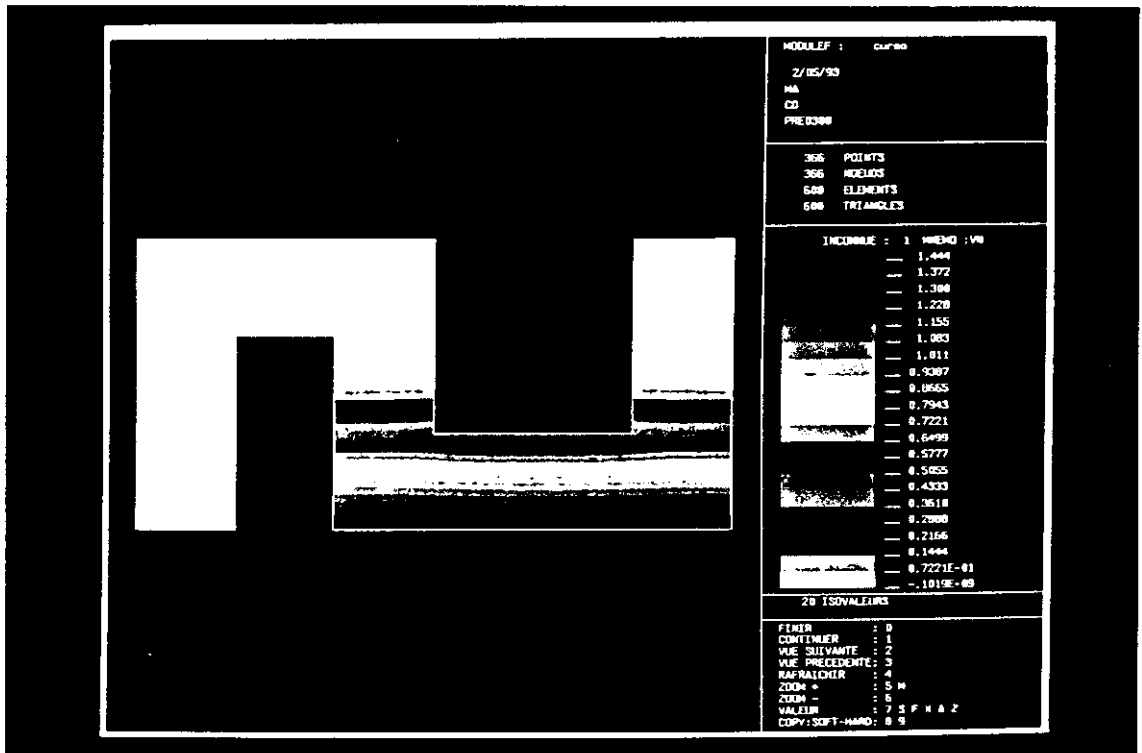
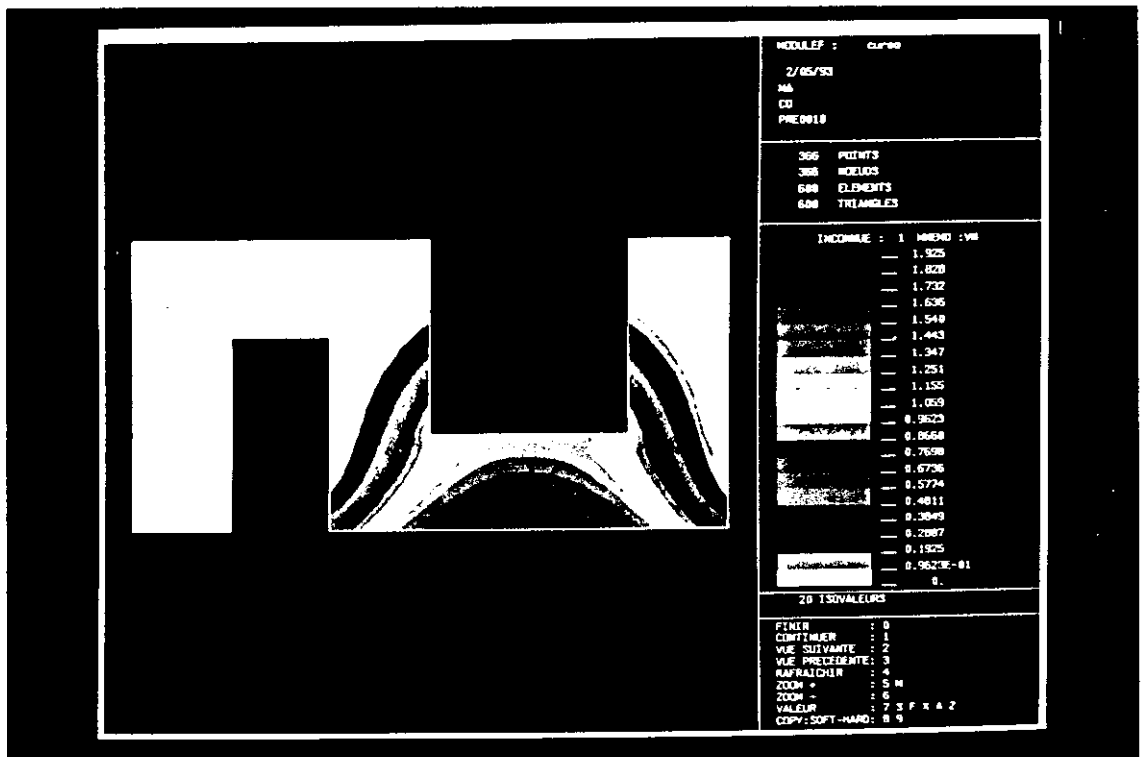


Figura 3.14:  $t = 0.6$  y  $t = 18$ .

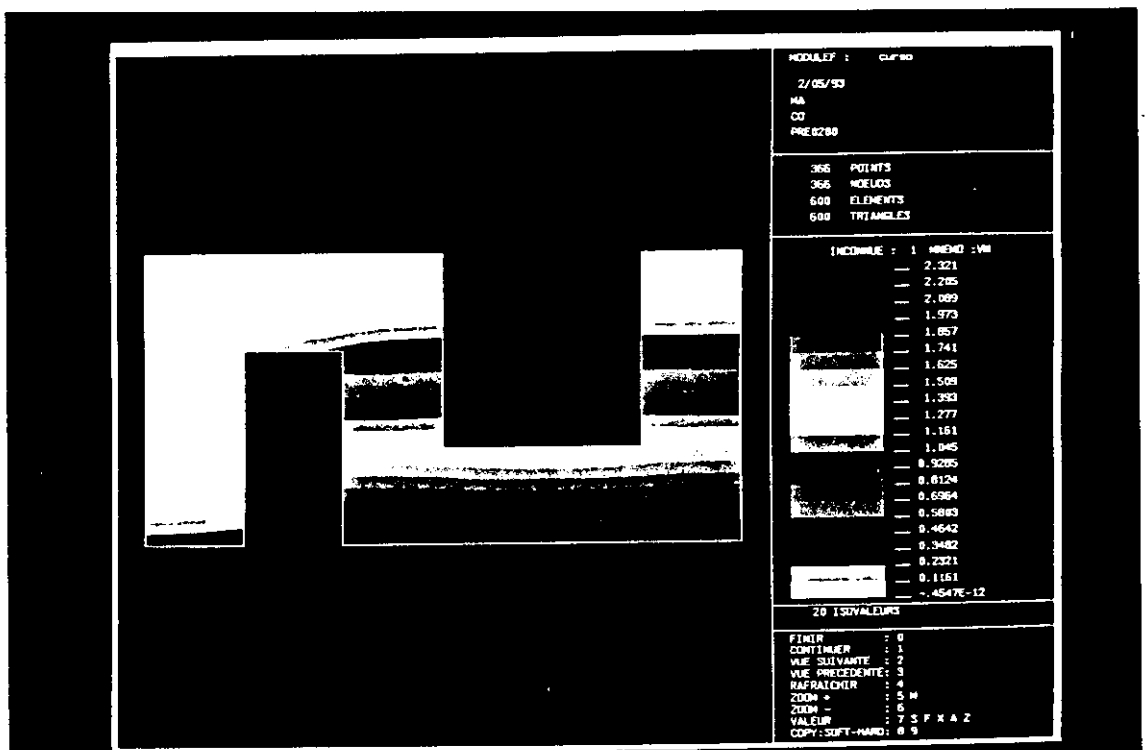
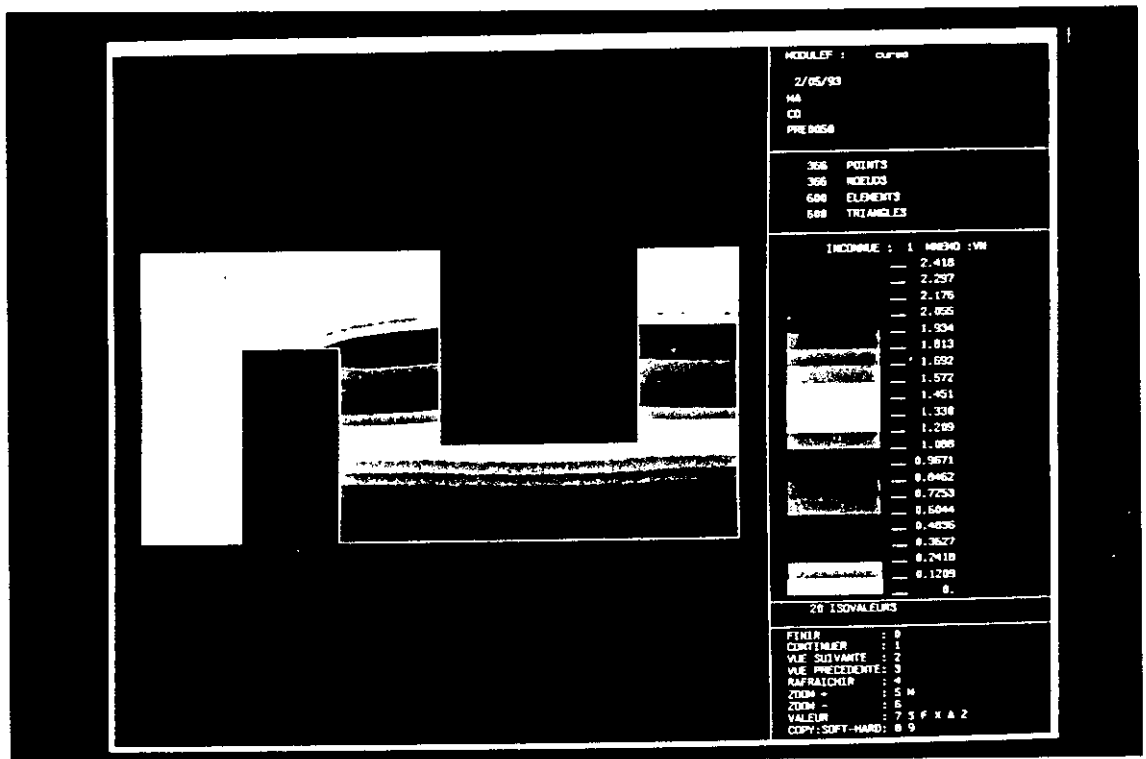


Figura 3.15:  $t = 3$ . y  $t = 12$ .

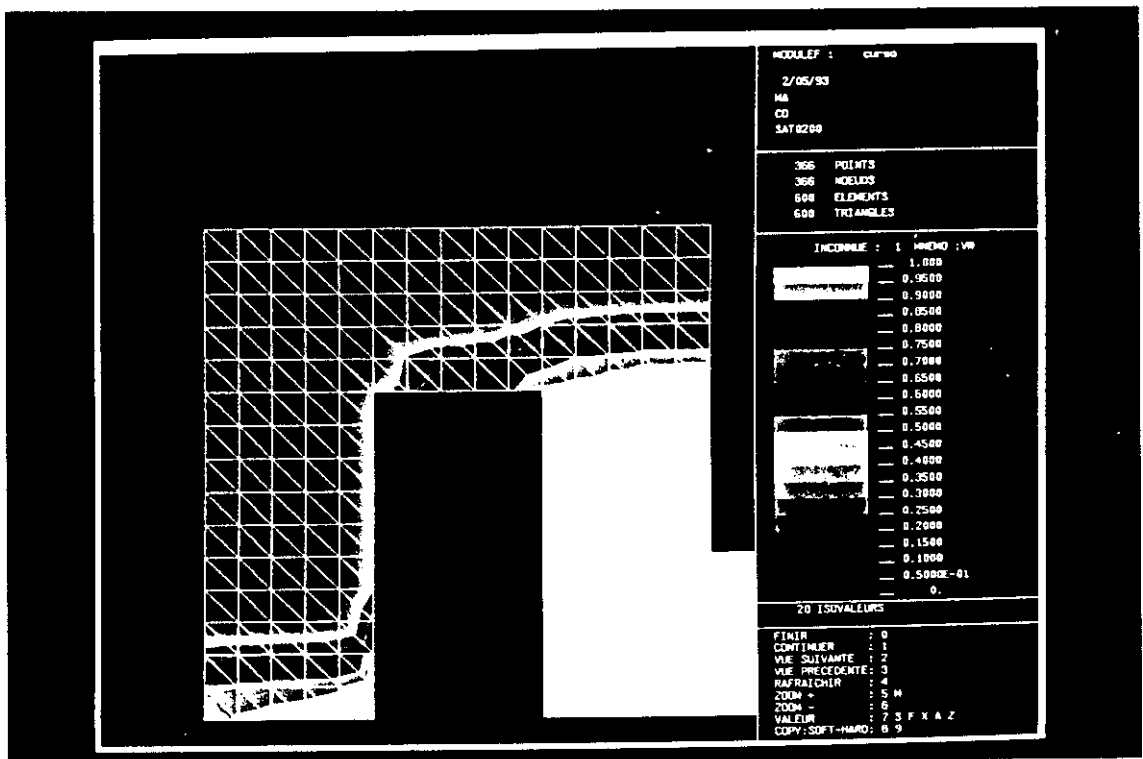


Figura 3.16: Detalle de la saturación en  $t = 12$ .

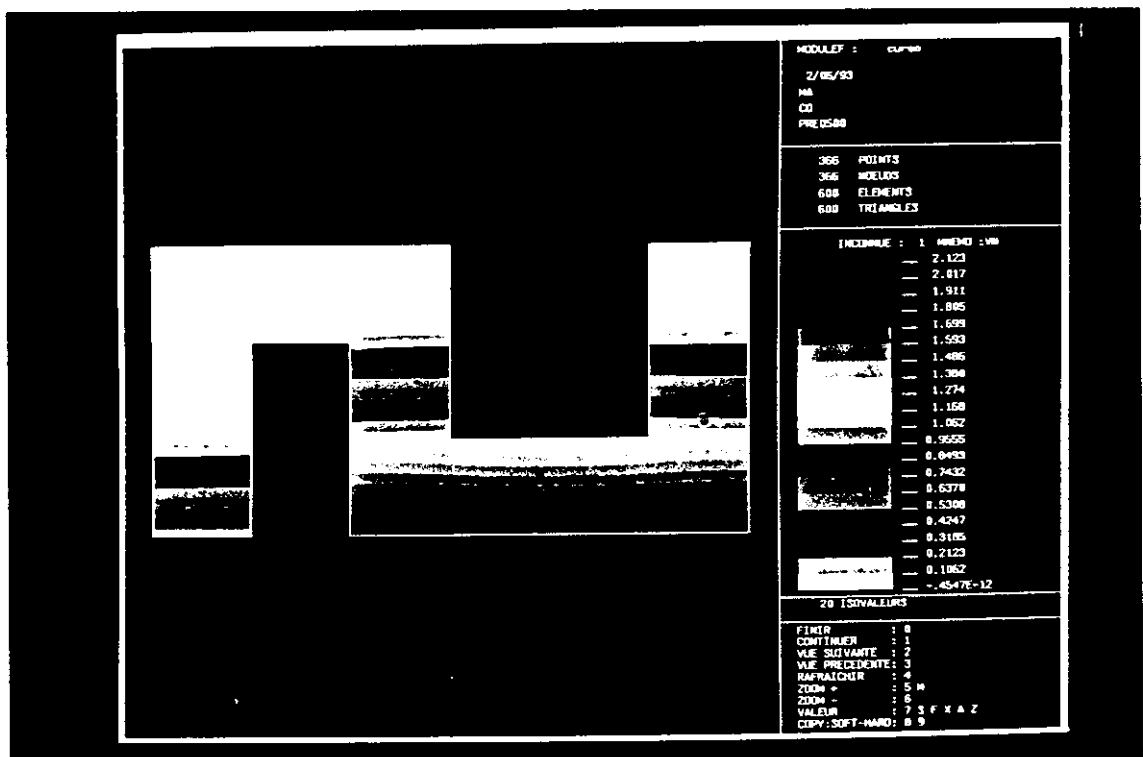


Figura 3.17:  $t = 30$ .



Finalmente las figuras 3.18 y 3.19 corresponde a la solución explícita indicada en [19] para mostrar que la función  $p$  no es necesariamente continua cuando es  $\alpha = 0.0$ . En este caso tres lados del dique son impermeables y el cuarto, el superior, está en contacto con el aire. El dato inicial es una banda de ancho  $d = 0.3$ , situada a una altura  $h = 1.0$  de la base del dique, en la que es  $g = 1.0$ . Mientras es  $t < h$  la presión es cero y la zona saturada ( $g = 1.0$ ) va descendiendo con velocidad constante 1. Cuando  $t = h$  la zona saturada llega al fondo. En ese instante la presión se hace positiva en la franja  $0 \leq x_N \leq 0.3$  e igual a  $p(x', x_N) = (0.3 - y)^+$ . Aunque el resultado final es óptimo, en los pasos intermedios aparece una difusión numérica debida al operador "up-wind".

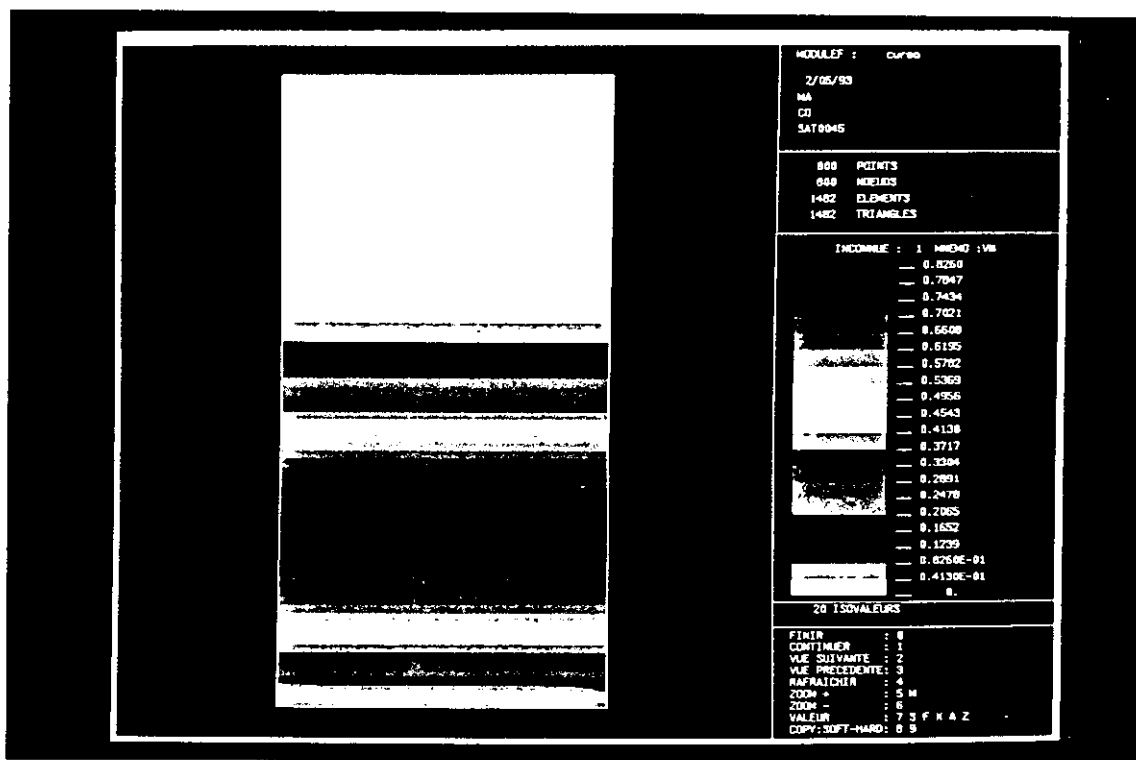
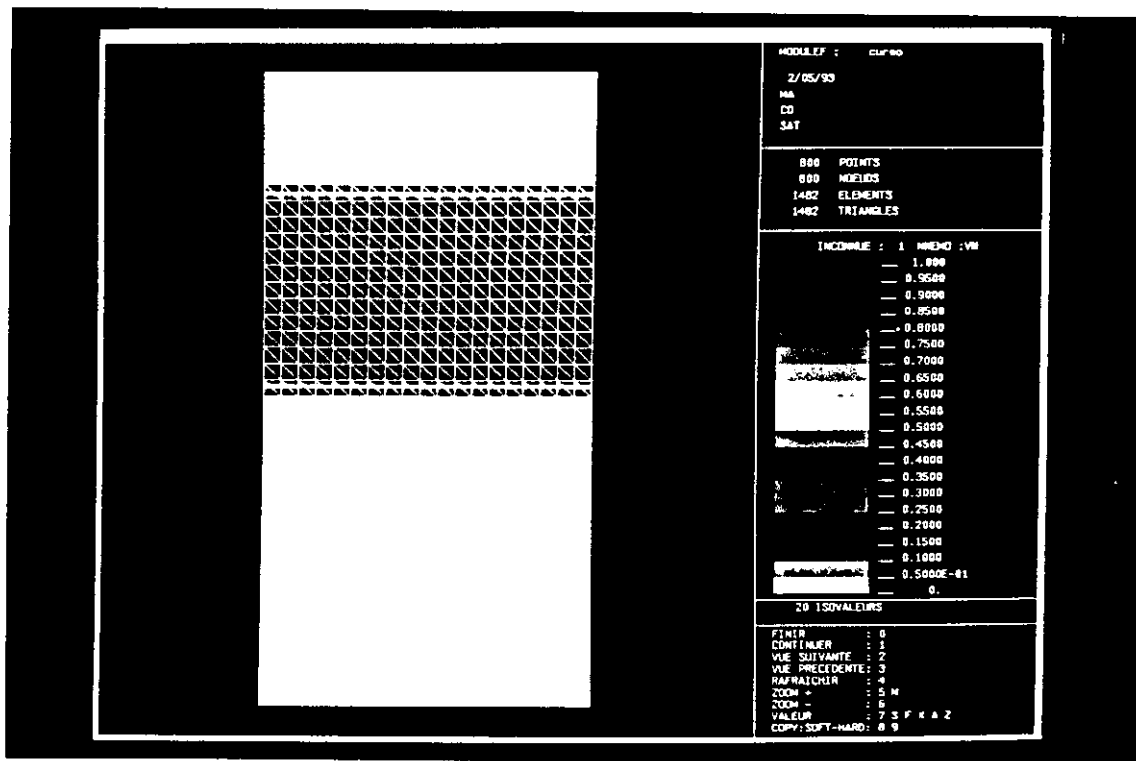


Figura 3.18: Saturación  $t = .0$  y  $t = 0.38$

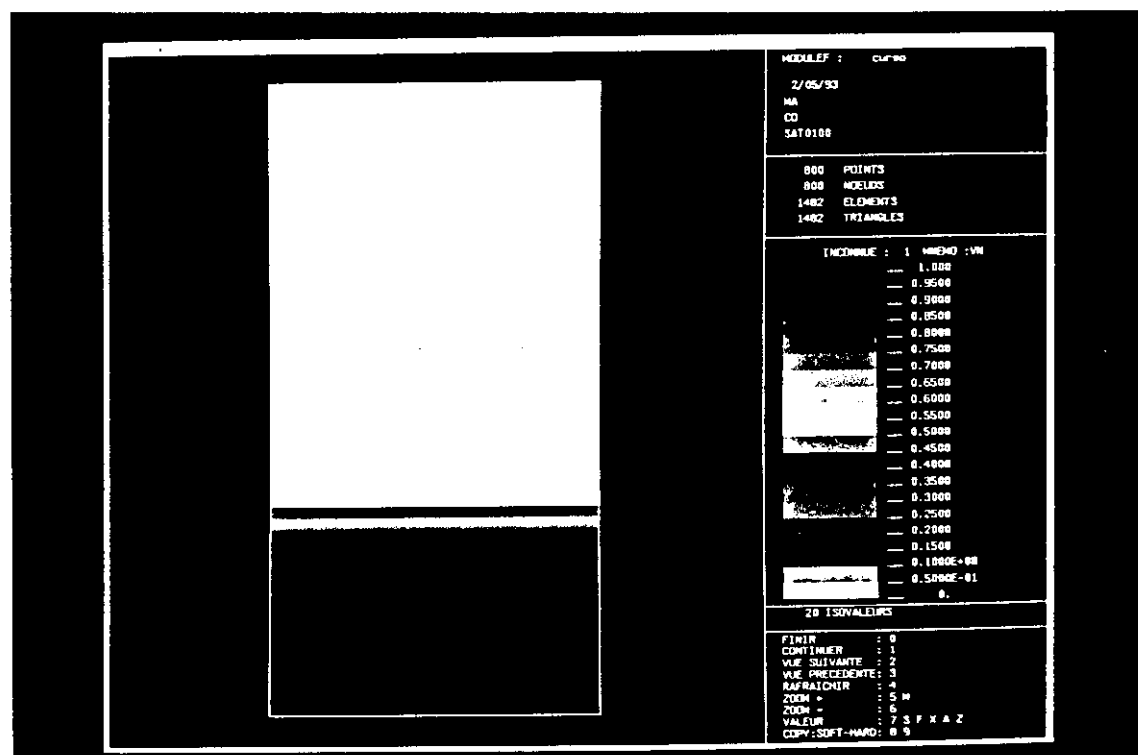
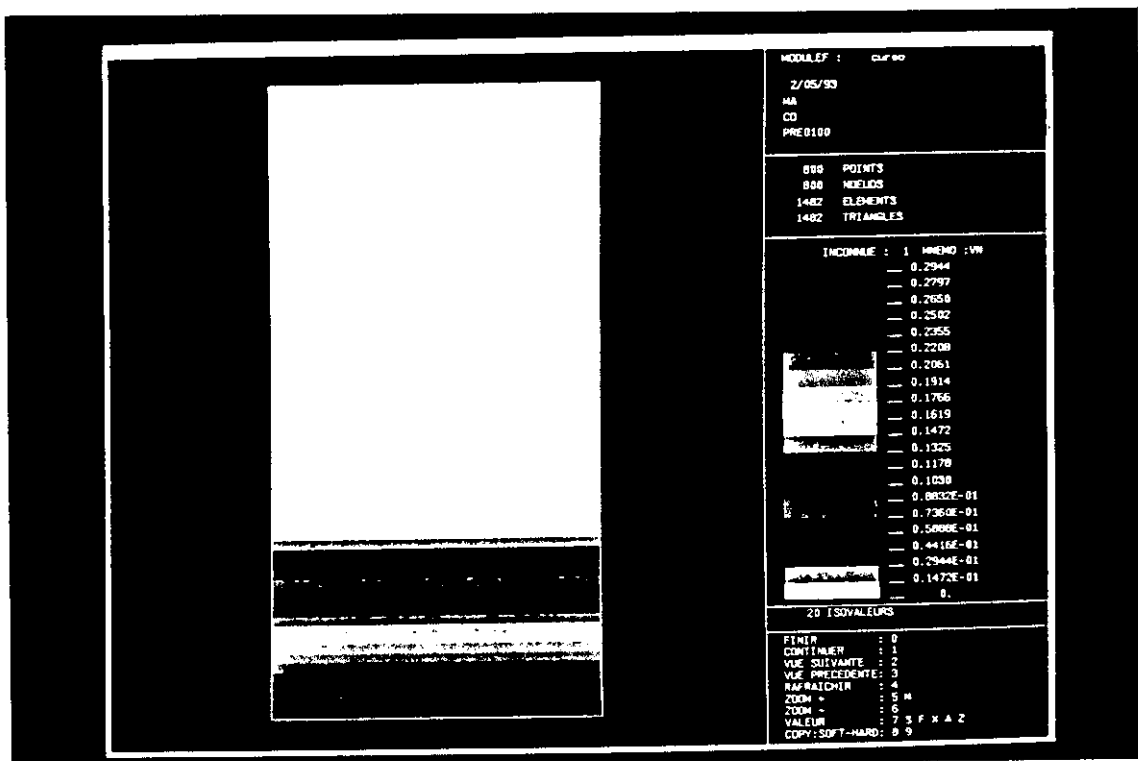


Figura 3.19: Presión y saturación en  $t = 0.85$ .

Todas las pruebas numéricas se han realizado en una máquina SPARCstation IPX de SUN.

# Apéndice A

## El módulo DAMEV

En este apéndice se incluye un ejemplo de utilización del módulo DAMEV: el programa “principal” y la funciones que lo acompañan. También hemos incluido las fuentes del módulo DAMEV y de los subprogramas a los que llama ese módulo que no están en la biblioteca MODULEF.

Para ejecutar estos programas son necesarias las bibliotecas NOP2, UTSD, UTIL, UTILSUN de MODULEF.

También es necesario un fichero que contenga la triangulación con las siguientes referencias para las distintas regiones del borde:

- 1: Zona semipermeable.
- 2: Zona permeable.
- 3: Zona impermeable.



```

PROGRAM PRINCIPAL
C *****
C RESOLUCION DE PROBLEMA DE EVOLUCION RELATIVO A LA FILTRACION
C DE UN FLUIDO ATRAVES DE UN MEDIO POROSO
C
C M:      TABLERO DE TRABAJO DE LONGITUD LM DONDE ESTAN CONTENIDOS
C        TODOS LOS VECTORES
C
C DATOS QUE PIDE EL PROGRAMA
C
C ALPHA:  COEFICIENTE DE COMPRESIBILIDAD DEL FLUIDO
C EPS:    PARAMETRO DE PERMEABILIDAD DE LA FRONTERA
C MALLADO: FICHERO QUE CONTIENE EL MALLADO (S.D. NOPO)
C MMIN:   METODO DE MINIMIZACION ELEGIDO
C 1 - GRADIENTE CON PROYECCION (PASO FIJO)
C 2 - GRADIENTE CONJUGADO
C 3 - GRADIENTE CONJUGADO PRECONDICIONADO
C
C EL PROGRAMA PIDE TAMBIEN EL NUMERO DE PASOS EN LA VARIABLE TIEMPO
C
C EL RESULTADO ES:
C - UN FICHERO SALIDA CON LA ESTRUCTURA DE DATOS TIPO NOPO MODIFICADA
C - UNA FAMILIA DE ESTRUCTURAS DE DATOS TIPO B QUE CONTIENEN LA
C   PRESION Y LA SATURACION EN DISTINTOS TIEMPOS.
C *****
C PARAMETER(LM=1000000)
C COMMON M(LM)
C DOUBLE PRECISION DM
C EQUIVALENCE(M(1),DM)
C
C CHARACTER*6 MALLADO
C INTEGER MMIN, NTAU, FRE
C REAL EPS, ALPHA, TAU
C
C INICIALIZO EL TABLERO DE TRABAJO
C
C CALL INITI(M,LM,0,0)
C
C LEO UNOS PARAMETROS
C
C OPEN(UNIT=7, FILE='datos')
C CALL INPA1(ALPHA, MALLADO, MMIN, EPS)
C
C LEO EL MALLADO Y LO CONVIERTO EN "DEBILMENTE AGUDO"
C
C CALL TRUNIT(NFNOPE)
C CALL OUVRIS(NFNOPE,MALLADO,'OLD,UNFORMATTED',0)
C CALL TRUNIT(NFNOPS)
C CALL OUVRIS(NFNOPS,'SALIDA','UNFORMATTED',0)
C CALL PIGRA(M,NFNOPE,1,NFNOPS,1)
C CLOSE(NFNOPE)

```

```

C   FALSA LLAMADA PARA QUE DAMEV DEVUELVA TAU MAXIMO

      TAU = 0.
      CALL DAMEV(M, LM, NFNOPS, 1, ALPHA, EPS, MMIN, TAU, NTAU, FRE)

C   LEO LOS DEMAS PARAMETROS

      CALL INPA2(TAU, NTAU, FRE)

C   VERDADERA LLAMADA DE DAMEV

      CALL DAMEV(M, LM, NFNOPS, 1, ALPHA, EPS, MMIN, TAU, NTAU, FRE)

      CLOSE(7)
      STOP
      END

C   *****

C   DATO DE CONTORNO

      REAL FUNCTION FPHI(X,Y,T)
      DOUBLE PRECISION X,Y
      REAL T
      IF (X.GT.1.5) THEN
         FPHI=AMAX1(0.,1.-REAL(Y))
      ELSE
         FPHI=AMAX1(0.,1.5-REAL(Y))
      END IF
      RETURN
      END

C   FUNCION DE PERMEABILIDAD

      REAL FUNCTION BETA(S)
      REAL S
      BETA=5.*S
      RETURN
      END

C   UNA PRIMITIVA DE BETA

      REAL FUNCTION PRIMBETA(S)
      REAL S
      FB=2.5*S*S
      RETURN
      END

C   LA DERIVADA DE BETA

```



```
REAL FUNCTION DBETA(S)
REAL S
DBETA=5.
RETURN
END
```

C    DATO INICIAL

```
REAL FUNCTION FINIC(X,Y,ALPHA)
DOUBLE PRECISION X,Y
REAL ALPHA,TOL
TOL =1.E-6
FINIC=0.
RETURN
END
```

```

SUBROUTINE DAMEV(M,LM,NFNOPO,NINOPO,ALPHA,EPS,MMIN,TAU,NTAU,FRE)
C *****
C RESOLUCION DE UN PROBLEMA DE EVOLUCION RELATIVO A LA FILTRACION
C DE UN FLUIDO A TRAVES DE UN MEDIO POROSO.
C
C PARAMETROS DE ENTRADA
C M:          TABLERO DE TRABAJO DONDE ESTAN CONTENIDOS
C            TODOS LOS VECTORES
C LM:         DE LONGITUD DE M
C NFNOPO:     FICHERO DONDE SE ENCUENTRA LA S.D. NOPO
C NINOPO:     NIVEL DE LA S.D. NOPO
C ALPHA:      COEFICIENTE DE COMPRESIBILIDAD DEL FLUIDO
C EPS:        PARAMETRO DE PERMEABILIDAD DE LA FRONTERA
C            (UTILIZADO SOLAMENTE POR EL METODO 1
C MMIN:       METODO DE MINIMIZACION ELEGIDO
C            1 - GRADIENTE CON PROYECCION (PASO FIJO)
C            2 - GRADIENTE CONJUGADO
C            3 - GRADIENTE CONJUGADO PRECONDICIONADO
C *****
C DIMENSION M(*)
C REAL ALPHA, EPS, TAU
C INTEGER MMIN, NTAU, FRE
C
C CHARACTER*3 SAT, PRE
C CHARACTER*4 CHAR4
C CHARACTER*4 CUENTA
C CHARACTER*7 NOMBRE
C REAL T
C
C COMMON/ALNOPO/NENOPO,
+   NOPO, IANOPO, LENOPO,  NOP1, IANOP1, LENOP1,
+   NOP2, IANOP2, LENOP2,  NOP3, IANOP3, LENOP3,
+   NOP4, IANOP4, LENOP4,  NOP5, IANOP5, LENOP5
C COMMON/ALB/NEB,
+   NBO, IABO, LBO,  NB1, IAB1, LB1,
+   NB2, IAB2, LB2,  NB3, IAB3, LB3,
+   NB4, IAB4, LB4
C DIMENSION NZNOPO(19), NZB(16)
C EQUIVALENCE(NENOPO, NZNOPO(1)), (NEB, NZB(1))
C
C SAT='SAT'
C PRE='PRE'
C
C CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ B
C SI TAU <= 0, SOLO SE QUIERE CALCULAR EL VALOR MINIMO DE TAU
C
C IF (TAU.LE.0.) THEN
C   INCLUDE 'damev.ini'      ! Inicializacion de la matriz de trabajo
C   CALL  CALCULAB(NE, M(IANOP5), M(IANOP4), NBAND, NOE, M(IAIUW),
+   M(IASUP), M(IAINDB), M(IABB), M(IAPRB), TAU)
C   RETURN

```

```

ELSE
  CALL  CALCULAB(NE,M(IANOP5),M(IANOP4),NBAND,NOE,M(IAIUW),
+         M(IASUP),M(IAINDB),M(IABB),M(IAPRB),TAU)
  END IF

C   CALCULO DE LA MATRIZ A

  CALL  CALCULA(NE,M(IANOP5),M(IANOP4),M(IAA),M(IAKIM),NBAND,
+         NOE,ALPHA,TAU)

C   CALCULO LOS COEFICIENTES DE LA PARTE NO LINEAL

  CALL  NOLINEAL(M(IANOP4),M(IAKIM),NBAND,NOE,M(IANF),M(IATNL))

C   CALCULO LAS CONDICIONES INICIALES

  CALL  CALCINI(M(IANOP4),NOE,M(IAP),M(IAG),M(IANF),ALPHA,M(IAPH))

  CALL  TRUNIT(NFB)
  NOMBRE=SAT
  CALL  OUVRIS(NFB,NOMBRE,'NEW,UNFORMATTED',0)
  DO I=1,NOE
    M(IAB4+I-1)=M(IAG+I-1)
  END DO
  CALL  SDSAUV(M,CHAR4(NOMSD),NFB,NIB,NZB,LZ,NCB,NOPT,NMOT)
  WRITE(NFB)LB4,(M(IAB4+I-1),I=1,LB4)
  CLOSE(NFB)
  IF (ALPHA.GT.1.D-6) THEN
    CALL  TRUNIT(NFB)
    NOMBRE=PRE
    CALL  OUVRIS(NFB,NOMBRE,'NEW,UNFORMATTED',0)
    DO I=1,NOE
      M(IAB4+I-1)=M(IAP+I-1)
    END DO
    CALL  SDSAUV(M,CHAR4(NOMSD),NFB,NIB,NZB,LZ,NCB,NOPT,NMOT)
    WRITE(NFB)LB4,(M(IAB4+I-1),I=1,LB4)
    CLOSE(NFB)
  END IF

C   CALCULO EL PARAMETRO RO (UTILIZADO SOLO POR EL METODO 1)

  IF (MMIN.EQ.1) CALL  CRO(M(IAA),NBAND,NOE,RO,EPS)

C
C   BUCLE PRINCIPAL (EN TIEMPO)
C
  DO N=1,NTAU
    PRINT*,'***** NT=',N,' *****'
    WRITE(7,*) 'NT=',n
    T=TAU*N

```

```

C   ACTUALIZO LA PRESION EN EL FONDO DE LOS EMBALSES
C   Y EL TERMINO LINEAL

      CALL DATO(M(IANOP4),M(IATL),M(IAP),M(IAG),M(IASUP),NOE,M(IAPH),
+      T,ALPHA,TAU)

C   ELIJO EL METODO DE RESOLUCION

      IF (MMIN.EQ.1) THEN
      CALL GRPCONS(M(IAP),M(IAGP),M(IANF),NBAND,NOE,M(IAA),
+      M(IAKIM),M(IAPH),M(IATNL),M(IATL),M(IAPRB),RO)
      ELSE
      CALL GRCONJ(M(IAP),M(IAGP),M(IANF),NBAND,NOE,M(IAA),
+      M(IAKIM),M(IAPH),M(IATNL),M(IATL),M(IAPRB),
+      M(IADV),M(IASS),M(IAR),M(IAD),
+      M(IAAA),M(IABBB),M(IAIND),MMIN)
      END IF

C   CALCULO LA SATURACION G

      CALL CALCULG(M(IAP),M(IAG),NBAND,NOE,M(IAA),M(IAKIM),
+      M(IABB),M(IAINDB),M(IAPH),
+      M(IATNL),M(IATL),M(IAPRB),M(IAS),M(IAIN),N)

C   SALVO LOS RESULTADOS (PRESION Y SATURACION) EN FICHEROS
C   LOS FICHEROS SE LLAMAN "PREXXXX" y "SATXXXX" DONDE
C   XXXX CORRESPONDE AL NUMERO DE ITERACION CORRIENTE "N"

      IF (MOD(N,FRE).EQ.0) THEN
      CALL INT2CHA(N,CUENTA) ! Convierte "N" en cadena

      NOMBRE=SAT//CUENTA ! Saturacion
      CALL TRUNIT(NFB)
      CALL OUVRIS(NFB,NOMBRE,'NEW,UNFORMATTED',0)
      DO I=1,NOE
      M(IAB4+I-1)=M(IAG+I-1)
      END DO
      CALL SDSAUV(M,CHAR4(NOMSD),NFB,NIB,NZB,LZ,NCB,NOPT,MMOT)
      WRITE(NFB)LB4,(M(IAB4+I-1),I=1,LB4)
      CLOSE(NFB)

      NOMBRE=PRE//CUENTA ! Presion
      CALL TRUNIT(NFB)
      CALL OUVRIS(NFB,NOMBRE,'NEW,UNFORMATTED',0)
      DO I=1,NOE
      M(IAB4+I-1)=M(IAP+I-1)
      END DO
      CALL SDSAUV(M,CHAR4(NOMSD),NFB,NIB,NZB,LZ,NCB,NOPT,MMOT)
      WRITE(NFB)LB4,(M(IAB4+I-1),I=1,LB4)
      CLOSE(NFB)
      END IF

```

END DO

! Bucle en tiempo

RETURN

END

```

C FICHERO damev.ini
C *****
C INICIALIZACION DE LA MATRIZ DE TRABAJO
C *****
CALL SDREST(M, 'NOPO', MFNOPO, NINOPO, NZNOPO, 19, NCMOPO, ICMOPO)
NE=M(IANOP2+4)
NOE=M(IANOP2+14)
NNF=ICHAR4('IFRO')
LNF=NOE+1
CALL TROUVE(NTT, CHAR4(NNF), IANF, LNF, NUMC, M)
NBAND=M(IANF)+1
DO I=1, NOE
    M(IANF+I-1)=M(IANF+I)
END DO
LA=NBAND*NOE
NTY=1
NKIM=ICHAR4(':KIM')
IAKIM=0
CALL READRE(NTY, CHAR4(NKIM), IAKIM, LA, M, NN)
NINDB=ICHAR4(':IEB')
IAINDB=0
CALL READRE(NTY, CHAR4(NINDB), IAINDB, LA, M, NN)
NIN=ICHAR4(':IIN')
IAIN=0
CALL READRE(NTY, CHAR4(NIN), IAIN, LA, M, NN)
NIND=ICHAR4(':IID')
IAIND=0
CALL READRE(NTY, CHAR4(NIND), IAIND, LA, M, NN)
NIUW=ICHAR4(':IUW')
IAIUW=0
CALL READRE(NTY, CHAR4(NIUW), IAIUW, LA, M, NN)
NTY=2
NOMR=ICHAR4(': R')
IAR=0
CALL READRE(NTY, CHAR4(NOMR), IAR, NOE, M, NN)
NGP=ICHAR4(': GP')
IAGP=0
CALL READRE(NTY, CHAR4(NGP), IAGP, NOE, M, NN)
NDD=ICHAR4(': D')
IAD=0
CALL READRE(NTY, CHAR4(NDD), IAD, NOE, M, NN)
NDV=ICHAR4(': DV')
IADV=0
CALL READRE(NTY, CHAR4(NDV), IADV, NOE, M, NN)
NOMP=ICHAR4(': P')
IAP=0
CALL READRE(NTY, CHAR4(NOMP), IAP, NOE, M, NN)
NOMG=ICHAR4(': G')
IAG=0
CALL READRE(NTY, CHAR4(NOMG), IAG, NOE, M, NN)
NPHI=ICHAR4(': PHI')

```

```

IAPH=0
CALL READRE(NTY,CHAR4(NPHI),IAPH,NOE,M,NN)
NTL=ICHAR4(' : TL ')
IATL=0
CALL READRE(NTY,CHAR4(NTL),IATL,NOE,M,NN)
NOMS=ICHAR4(' : S ')
IAS=0
CALL READRE(NTY,CHAR4(NOMS),IAS,NOE,M,NN)
NSS=ICHAR4(' : SS ')
IASS=0
CALL READRE(NTY,CHAR4(NSS),IASS,NOE,M,NN)
NTY=5
LL=2*NOE
NSUP=ICHAR4(' : SUP ')
IASUP=0
CALL READRE(NTY,CHAR4(NSUP),IASUP,LL,M,NN)
NTNL=ICHAR4(' : TNL ')
IATNL=0
CALL READRE(NTY,CHAR4(NTNL),IATNL,LL,M,NN)
NPRB=ICHAR4(' : PRB ')
IAPRB=0
CALL READRE(NTY,CHAR4(NPRB),IAPRB,LL,M,NN)
LLA=2*LA
NOMA=ICHAR4(' : A ')
IAA=0
CALL READRE(NTY,CHAR4(NOMA),IAA,LLA,M,NN)
NOAA=ICHAR4(' : AA ')
IAAA=0
CALL READRE(NTY,CHAR4(NOAA),IAAA,LLA,M,NN)
NBBB=ICHAR4(' : BBB ')
IABBB=0
CALL READRE(NTY,CHAR4(NBBB),IABBB,LLA,M,NN)
NOMB=ICHAR4(' : BB ')
IABB=0
CALL READRE(NTY,CHAR4(NOMB),IABB,LLA,M,NN)
NOMSD = ICHAR4(' B ')
CALL INICSD(M,CHAR4(NOMSD),NIB,NZB,16,NCB,ICB)
LBO=32
NTY=1
CALL READRE(NTY,CHAR4(NBO),IABO,LBO,M,NN)
NTASD=0
CALL INTABO(CHAR4(NOMSD),NIB,NTASD,M(IABO))
LB2=11
NTY=1
CALL READRE(NTY,CHAR4(NB2),IAB2,LB2,M,NN)
LB3=2
NTY=1
CALL READRE(NTY,CHAR4(NB3),IAB3,LB3,M,NN)
LB4=NOE
NTY=2
CALL READRE(NTY,CHAR4(NB4),IAB4,LB4,M,NN)

```

M(IAB2)=2  
M(IAB2+1)=2  
M(IAB2+2)=1  
M(IAB2+3)=LB4  
M(IAB2+4)=1  
M(IAB2+5)=1  
M(IAB2+6)=NOE  
M(IAB2+7)=1  
M(IAB2+8)=1  
M(IAB2+9)=LB4  
M(IAB2+10)=-2  
M(IAB3)=0  
M(IAB3+1)=LB4  
LZ=16  
NOPT=0



```

SUBROUTINE INPA1(ALPHA, MALLADO, MMIN, EPS)
C *****
C ENTRADA DE PARAMETROS
C *****
REAL ALPHA
CHARACTER*6 MALLADO
INTEGER MMIN
REAL EPS

WRITE(*,100)
READ (*,101) ALPHA
WRITE(7,100)
WRITE(7,102) ALPHA

WRITE(*,200)
READ (*,201) MALLADO
WRITE(7,200)
WRITE(7,201) MALLADO

WRITE(*,300)
WRITE(*,301)
WRITE(*,302)
WRITE(*,303)
WRITE(*,304)
READ (*,305) MMIN

WRITE(7,300)
WRITE(7,301)
WRITE(7,302)
WRITE(7,303)
WRITE(7,304)
WRITE(7,305) MMIN

IF (MMIN.LT.1 .OR. MMIN.GT.3) THEN
    WRITE (*,900) MMIN
    STOP
END IF

IF (MMIN.EQ.1) THEN
    WRITE(*,400)
    READ (*,401) EPS
    WRITE(7,400)
    WRITE(7,402) EPS
END IF

100 FORMAT ('Coeficiente de compresibilidad:')
101 FORMAT (F8.6)
102 FORMAT ('ALPHA=',F8.6)
200 FORMAT ('Fichero que contiene la S.D. NOPO:')
201 FORMAT (A6)
300 FORMAT ('Metodo de minimizacion elegido:')

```

```
301 FORMAT ('MMIN=1 Gradiente con proyeccion, paso constante')
302 FORMAT ('MMIN=2 Gradiente conjugado')
303 FORMAT ('MMIN=3 Gradiente conjugado precondicionado')
304 FORMAT ('MMIN:')
305 FORMAT (I1)
400 FORMAT ('Permeabilidad del borde:')
401 FORMAT (F8.6)
402 FORMAT ('EPS=',F8.6)
900 FORMAT ('Error al elegir el metodo de minimizacion igual a ',I1)

RETURN
END
```

```

SUBROUTINE INPA2(TAU, NTAU, FRE)
C *****
C ENTRADA DE PARAMETROS
C *****
REAL TAU
INTEGER NTAU
INTEGER FRE
CHARACTER*2 MODIF

C  CONTRATACION DE TAU

WRITE(*,100) TAU
WRITE(*,110)
READ (*,120) MODIF
WRITE(7,100) TAU
WRITE(7,110)
WRITE(7,120) MODIF

IF (MODIF.EQ.'si') THEN
    WRITE(*,200)
    READ (*,210) TAU
    WRITE(7,200)
    WRITE(7,210) TAU
END IF

WRITE(*,300)
READ (*,310) NTAU
WRITE(7,300)
WRITE(7,310) NTAU
WRITE(*,320)
READ (*,330) FRE
WRITE(7,320)
WRITE(7,330) FRE

100 FORMAT ('La longitud maxima del paso de tiempo es TAU= ',F7.4)
110 FORMAT ('Modificarla?')
120 FORMAT (A2)
200 FORMAT ('Nuevo TAU: ')
210 FORMAT (F7.4)
300 FORMAT ('Numero de pasos de tiempo: ')
310 FORMAT (I2)
320 FORMAT ('Cada cuantos pasos salvar los resultados: ')
330 FORMAT (I4)

RETURN
END

```

```

SUBROUTINE CALCULAB(NE,NOP5,COOR,NBAND,NP,IUW,SUPP,INDE,
+   E,PRB,TAU)
C *****
C   CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ B PARA EL MODULO DAMEV
C   CADA ELEMENTO TIENE DOS CONTRIBUCIONES:
C   - UNA RELATIVA A LA DERIVADA ESPACIAL (SOLO EN LA COORDINADA "Y")
C     QUE CALCULA LA RUTINA BELEM
C   - OTRA RELATIVA A LA DERIVADA EN TIEMPO QUE ES LA PARTE "UPWIND"
C *****
DIMENSION NOP5(*),E(NP,*),INDE(NP,*),PRB(*),
+   X(3),Y(3),IAFF(3),COOR(*),DY(3),
+   IUW(*),SUPP(*)
DOUBLE PRECISION AA3,DY,X,Y,AMAX,TOL,DIFF,XUW,PRB,
+   SUPP,E,EE,TAA

TOL=1.D-6
DO I=1,NP
  SUPP(I)=0.DO
  IUW(I)=0
  DO L=1,NBAND
    E(I,L)=0.DO
    INDE(I,L)=0
  END DO
  INDE(I,1)=I
END DO
IA=0
DO 2 IE=1,NE
  NMAE=NOP5(IA+2)
  DO J=1,3
    IAFF(J)=NOP5(IA+4+J)
    I=IAFF(J)
    X(J)=DBLE(COOR(2*I-1))
    Y(J)=DBLE(COOR(2*I))
  END DO
  IA=IA+7+NMAE
  CALL BELEM(X,Y,AA3,DY)
  DO J=1,3
    I=IAFF(J)
    SUPP(I)=SUPP(I)+AA3
  END DO
C
C   COLOCA LOS NODOS DE MAYOR A MENOR ALTURA
C
  IMAX=1
  J1=2
  J2=3
  AMAX=Y(1)
  DIFF=Y(2)-AMAX
  IF(DIFF.LE.TOL) GO TO 17
  AMAX=Y(2)
  IMAX=2

```

```

      J1=1
      J2=3
17    DIFF=Y(3)-AMAX
      IF(DIFF.LE.TOL) GO TO 18
      AMAX=Y(3)
      IMAX=3
      J1=1
      J2=2
C
C    MIRA SI EL ELEMENTO EL ES TRIANGULO UPWIND DE IMAX
C
18    XUW=(X(J2)-X(IMAX))*(X(J1)-X(IMAX))
      IF(XUW.GT.TOL) GO TO 2 ! IE no es triangulo upwind de IMAX
      I=IAFF(IMAX)
      IF(IUW(I).NE.0) GO TO 2
      IUW(I)=IE           ! El triangulo upwind del nodo I
                        ! es el elemento IE

      E(I,1)=DY(IMAX)
      JJ=IAFF(J1)
      JK=IAFF(J2)
      DO 21 L=2,NBAND
        K=INDE(JJ,L)
        IF(K.NE.0) GO TO 21 ! Habia dos posibles triangulos up-wind
                        ! y ya sea escogido uno

        INDE(JJ,L)=I
        E(JJ,L)=DY(J1)
        GO TO 22
21    CONTINUE
22    CONTINUE
      DO 23 L=2,NBAND
        K=INDE(JK,L)
        IF(K.NE.0) GO TO 23
        INDE(JK,L)=I
        E(JK,L)=DY(J2)
        GO TO 2
23    CONTINUE
2    CONTINUE

      DO 24 L=1,NBAND
        DO 25 I=1,NP
          J=INDE(I,L)
25    IF (J.NE.0) E(I,L)=E(I,L)*SUPP(J)
24    CONTINUE
      IF (TAU.LE.0.) THEN
        TAU=1.DO
        DO I=1,NP
          EE=0.DO
          DO J=1,NBAND
            EE=EE+E(I,J)
          END DO
          IF (ABS(EE).LT.1.D-6) EE=0.DO

```

```

      IF (EE.NE.O.DO) THEN
        TAA=DABS(SUPP(I)/EE)
        TAU=DMIN1(TAU,TAA)
      END IF
    END DO
  END IF

DO I=1,NP
  E(I,1)=E(I,1)+SUPP(I)/TAU
  PRB(I)=O.DO
  DO J=1,NBAND
    PRB(I)=PRB(I)+E(I,J)
  END DO
END DO
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE BELEM(X,Y,AA3,DY)
C *****
C CALCULA LA MATRIZ ELEMENTAL PARA LA MATRIZ B
C *****
DIMENSION X(*),Y(*),DY(*)
DOUBLE PRECISION X, Y, AA3, DY
DOUBLE PRECISION X12,X23,Y23,X31,DET

X12=X(2)-X(1)
X23=X(3)-X(2)
Y23=Y(3)-Y(2)
X31=X(1)-X(3)
DET = X31 * (Y(2)-Y(1)) - X12 * (Y(1)-Y(3))

DY(1)=X23/DET
DY(2)=X31/DET
DY(3)=X12/DET

IF (DABS(DY( 1 ))).LT.1.D-6) DY( 1 ) = 0.DO
IF (DABS(DY( 2 ))).LT.1.D-6) DY( 2 ) = 0.DO
IF (DABS(DY( 3 ))).LT.1.D-6) DY( 3 ) = 0.DO

AA3=DET/6.           ! Valor para devolver
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE CALCULA(NE,NOP5,COOR,A,IND,NBAND,NP,ALPHA,TAU)
C *****
C CALCULO DE LA MATRIZ A PARA EL MODULO DAMEV
C *****
DOUBLE PRECISION A
DIMENSION NOP5(*),COOR(*),A(NP,*),IND(NP,*)

DOUBLE PRECISION X,Y,AE,AA3,PARAM
DIMENSION X(3),Y(3),AE(3,3),IAFF(3)

PARAM=ALPHA/TAU

DO I=1,NP
  A(I,1)=0.DO
  IND(I,1)=I
  DO L=2,NBAND
    A(I,L)=0.DO
    IND(I,L)=0
  END DO
END DO

IA=0
DO IE=1,NE
  DO J=1,3
    IAFF(J)=NOP5(IA+4+J)
    I=IAFF(J)
    X(J)=DBLE(COOR(2*I-1))
    Y(J)=DBLE(COOR(2*I))
  END DO
  IA=IA+7+NOP5(IA+2)
  CALL AELEM(X,Y,AE,AA3)
  CALL INDICE(IND,IAFF,NBAND,NP)
  CALL ENSAMA(AE,A,IND,IAFF,NBAND,NP,AA3,PARAM)
END DO
RETURN
END

```



```

SUBROUTINE AELEM(X,Y,AE,AA3)
C *****
C CALCULA LA MATRIZ ELEMENTAL PARA LA MATRIZ A
C *****
DIMENSION X(*),Y(*),AE(3,3)
DOUBLE PRECISION X, Y, AE, AA3
DOUBLE PRECISION X12,Y12,X23,Y23,X31,Y31,DET,AA4

X12 = X(2) - X(1)
Y12 = Y(2) - Y(1)
X23 = X(3) - X(2)
Y23 = Y(3) - Y(2)
X31 = X(1) - X(3)
Y31 = Y(1) - Y(3)
DET = X31 * Y12 - X12 * Y31
AA4 = DET * 2.

AA3 = DET / 6.

AE(1,1) = (X23 * X23 + Y23 * Y23) / AA4
AE(1,2) = (X23 * X31 + Y23 * Y31) / AA4
AE(1,3) = (X12 * X23 + Y12 * Y23) / AA4
AE(2,2) = (X31 * X31 + Y31 * Y31) / AA4
AE(2,3) = (X31 * X12 + Y31 * Y12) / AA4
AE(3,3) = (X12 * X12 + Y12 * Y12) / AA4
AE(2,1) = AE(1,2)
AE(3,1) = AE(1,3)
AE(3,2) = AE(2,3)

DO I = 1,3
  DO J = 1,3
    IF ( DABS(AE(I,J)) .LE. 1.D-6 ) THEN
      AE(I,I) = AE(I,I) + AE(I,J)
      AE(I,J) = 0.DO
    END IF
  END DO
END DO
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE INDICE(IND,IAFF,NBAND,NP)
C *****
C CALCULA EL VECTOR IND
C IND SIRVE PARA HACER LA CORRESPONDENCIA ENTRE LOS ELEMENTOS
C DE LA MATRIZ "A" Y LOS PARES DE FUNCIONES DE LA BASE
C *****
DIMENSION IND(NP,*),IAFF(*)
DO K1=1,3
  I=IAFF(K1)
  DO K2=1,3
    J=IAFF(K2)
    IF (J.NE.I) THEN
      L=2
      MARC=0
      DO WHILE ((L.LE.NBAND).AND.(MARC.EQ.0))
        K=IND(I,L)
        IF (K.EQ.0) THEN
          IND(I,L)=J
          MARC=1
        ELSE
          IF (K.EQ.J) MARC=1
        END IF
        L=L+1
      END DO
    END IF
  END DO
END DO
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ENSAMA(AE,A,IND,IAFF,NBAND,NP,AA3,PARAM)
C *****
C ENSAMBLA LA MATRIX A
C *****
DOUBLE PRECISION AE,A,AA3,PARAM
DIMENSION AE(3,*),A(NP,*),IND(NP,*),IAFF(*)
DOUBLE PRECISION COE
COE=AA3*PARAM
DO K1=1,3
  I=IAFF(K1)
  DO K2=1,3
    J=IAFF(K2)
    IF (J.EQ.I) THEN
      A(I,1) = A(I,1) + AE(K1,K2) + COE
    ELSE
      DO L=2,NBAND
        IF (IND(I,L).EQ.J) A(I,L) = A(I,L) + AE(K1,K2)
      END DO
    END IF
  END DO
END DO
END DO
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE NOLINEAL(COOR,IND,NBAND,NP,IFRO,TNL)
C *****
C CALCULA LOS COEFICIENTES DE LA PARTE NO LINEAL
C PARA EL MODULO DAMEV
C *****
DIMENSION IND(NP,*),COOR(*),IFRO(*),TNL(*)
DOUBLE PRECISION TNL,X1,Y1,X,Y

DO I=1,NP
  TNL(I)=0.
  IF (IFRO(I).EQ.1) THEN
    X1 = DBLE(COOR(2*I-1))
    Y1 = DBLE(COOR(2*I))
    DO J=1,NBAND
      L=IND(I,J)
      IF (L.NE.0) THEN
        IF (IFRO(L).EQ.1) THEN
          X = X1 - DBLE(COOR(2*L-1))
          Y = Y1 - DBLE(COOR(2*L))
          TNL(I)=TNL(I)+SQRT(X*X + Y*Y)/2.
        END IF
      END IF
    END DO
  END IF
END DO
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE DATO(COOR,TL,P,G,SUPP,NP,PHI,T,ALPH,TA)
C *****
C ACTUALIZA LA PRESION EN EL FONDO DE LOS EMBALSES
C Y EL TERMINO LINEAL
C *****
DIMENSION COOR(*),TL(*),PHI(*),P(*),G(*),SUPP(*)
DOUBLE PRECISION X1,Y1,SUPP
DO I=1,NP
  X1=DBLE(COOR(2*I-1))
  Y1=DBLE(COOR(2*I))
  PHI(I)=FPHI(X1,Y1,T)
  TL(I)=(G(I)+ALPH*P(I))*REAL(SUPP(I))/TA
END DO
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE CALCINI(COOR,NP,P,G,IFRO,ALPHA,PHI)
C *****
C CALCULO DE LAS CONDICIONES INICIALES PARA EL MODULO DAMEV
C *****
DIMENSION COOR(*),P(*),G(*),IFRO(*),PHI(*)
REAL ALPHA
INTEGER IFRO
DOUBLE PRECISION X1,Y1

PRINT*,'***** NT=0 *****'
DO I=1,NP
  P(I)=0.
  X1=DBLE(COOR(2*I-1))
  Y1=DBLE(COOR(2*I))
  PHI(I)=FPHI(X1,Y1,0)
  IF (ALPHA.EQ.0.DO) THEN
    G(I)=FINIC(X1,Y1,ALPHA)
  ELSE
    IF (IFRO(I).EQ.2) THEN
      P(I)=0.
    ELSE
      Q=AMAX1(0.,FINIC(X1,Y1,ALPHA)-1.)
      P(I)=Q/ALPHA
    END IF
    G(I)=FINIC(X1,Y1,ALPHA)-Q
  END IF
END DO
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE CRO(A,NBAND,NP,RO,EPS)
C *****
C CALCULA EL PARAMETRO RO UTILIZADO POR EL METODO 1
C *****
DIMENSION A(NP,*)
DOUBLE PRECISION A
REAL RA,RA1,RO,EPS

RA=0.
DO I=1,NP
  RA1=0.
  DO L=1,NBAND
    RA1=RA1+ABS(REAL(A(I,L)))
  END DO
  IF(RA1.GE.RA) RA=RA1
END DO
RO=2./(RA+EPS)
PRINT*,'RO=',RO
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE CGRAD(V,GV,NBAND,NP,A,INDA,PHI,TNL,TL,PRB)
C *****
C CALCULA EL GRADIENTE DEL FUNCIONAL J QUE SE ESTA MINIMIZANDO
C ESTA RUTINA VIENE LLAMADA EN CADA ITERACION DEL METODO ITERATIVO
C *****
DIMENSION V(*),GV(*),A(NP,*),INDA(NP,*),
+   PHI(*),TNL(*),TL(*),PRB(*)
DOUBLE PRECISION A,PRB,TNL
REAL V,GV,PHI,PRA

DO I=1,NP
  PRA = 0.
  DO L = 1,NBAND
    PRA = PRA + REAL(A(I,L)) * V(INDA(I,L))
  END DO
  IF (TNL(I).GT.1.D-6) THEN
    GV(I) = PRA + REAL(PRB(I)) - TL(I) -
+     BETA(PHI(I)-V(I)) * REAL(TNL(I))
  ELSE
    GV(I) = PRA + REAL(PRB(I)) - TL(I)
  END IF
END DO
RETURN
END

SUBROUTINE CJ(V,JV,NBAND,NP,A,INDA,PRB,PHI,TNL,TL)
C *****
C CALCULA EL VALOR DEL FUNCIONAL J QUE SE ESTA MINIMIZANDO
C SU VALOR NO ES NECESARIO PARA EL ALGORITMO DE SOLUCION
C SOLO SIRVE PARA INFORMACION
C *****
DIMENSION V(*),A(NP,*),INDA(NP,*),PRB(*),
+   PHI(*),TNL(*),TL(*)
DOUBLE PRECISION A,PRB,TNL
REAL V,PHI,PRA,JV

JV = 0.
DO I = 1,NP
  PRA = 0.
  DO L = 1,NBAND
    PRA = PRA + REAL(A(I,L)) * V(INDA(I,L))
  END DO
  JV = JV + (PRA/2. - TL(I) + REAL(PRB(I))) * V(I) +
+   REAL(TNL(I)) * PRIMBETA(PHI(I)-V(I))
END DO
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE GRPCONS(P,GP,IFRO,NBAND,NP,A,INDA,PHI,TNL,TL,PRB,RO)
C *****
C ALGORITMO DE RESOLUCION -
C GRADIENTE CON PROYECCION Y PASO CONSTANTE
C *****
DIMENSION P(*),GP(*),IFRO(*),A(NP,*),INDA(NP,*),PHI(*),TNL(*),
+ TL(*),PRB(*)
DOUBLE PRECISION A,PRB,TNL
REAL TOL,RO,JV,PP
INTEGER ITER,ITMAX
LOGICAL SIGUE

TOL=1.E-6

ITER=0
ITMAX=1000
SIGUE=.TRUE.
DO WHILE ((ITER.LT.ITMAX).AND.SIGUE)
  SIGUE=.FALSE.
  ITER=ITER+1
  CALL CGRAD(P,GP,NBAND,NP,A,INDA,PHI,TNL,TL,PRB)
  DO I=1,NP
    IF (IFRO(I).EQ.2) THEN
      P(I)=0.
    ELSE
      PP=P(I)
      P(I)=AMAX1(0.,P(I)-RO*GP(I))
      IF (P(I).LT.TOL) P(I)=0.
      IF (ABS(PP-P(I)).GT.TOL) SIGUE=.TRUE.
    END IF
  END DO
END DO

RETURN
END

```



```

SUBROUTINE GRCONJ(P,GP,IFRO,NBAND,NP,A,INDA,PHI,TNL,TL,PRB,
+   DV,S,R,D,AA,BBB,IND,MMIN)
C *****
C ALGORITMO DE RESOLUCION - GRADIENTE CONJUGADO
C *****
DIMENSION P(*),GP(*),IFRO(*),A(NP,*),INDA(NP,*),PHI(*),TNL(*),
+   TL(*),PRB(*),DV(*),S(*),R(*),D(*),AA(NP,*),BBB(*),
+   IND(*)
DOUBLE PRECISION A,PRB,TNL
REAL TOL,DIFF,JV,PP
INTEGER ITER,ITMAX,IND
LOGICAL SIGUE

ITMAX=1000
TOL=1.E-6
ITER=0
SIGUE=.TRUE.

C CALCULO EL GRADIENTE DEL FUNCIONAL J

CALL CGRAD(P,GP,NBAND,NP,A,INDA,PHI,TNL,TL,PRB)

DO I=1,NP
  IF (IFRO(I).EQ.1) THEN
    DV(I)=DBETA(PHI(I)-P(I))*REAL(TNL(I))
  ELSE
    DV(I)=0.
  END IF
END DO
DO I=1,NP
  IF (IFRO(I).EQ.2) THEN
    DO J=1,NBAND
      AA(I,J)=0.
    END DO
  ELSE
    AA(I,1)=REAL(A(I,1))+DV(I)
    DO J=2,NBAND
      IF (IFRO(INDA(I,J)).EQ.2) THEN
        AA(I,J)=0.
      ELSE
        AA(I,J)=REAL(A(I,J))
      END IF
    END DO
  END IF
END DO
DO I=1,NP
  IF (IFRO(I).EQ.2) THEN
    BBB(I)=0.
  ELSE
    PP=0.
  END IF
END DO

```

```
      DO J=1,NBAND
        PP=PP+AA(I,J)*P(INDA(I,J))
      END DO
      BBB(I)=GP(I)-PP
    END IF
  END DO
```

C ELIJO EL METODO DE RESOLUCION

```
IF (MMIN.EQ.2) THEN
  CALL BILINEAL(AA,BBB,P,NBAND,NP,INDA,D,R,S,IFRO,IND)
ELSE
  CALL PRECOND(AA,BBB,P,NBAND,NP,INDA,D,R,S,IFRO,IND)
END IF
```

DIFF=0.

```
RETURN
END
```

```

SUBROUTINE BILINEAL(A,B,Z,NBAND,NP,INDA,D,R,S,IFRO,IND)
C *****
C METODO DE RESOLUCION - GRADIENTE CONJUGADO
C *****
DIMENSION A(NP,*),B(*),Z(*),D(*),INDA(NP,*),R(*),S(*),
+ IFRO(*),IND(*)
REAL A,B,Z,D,R,S
INTEGER IND,INDA,ITER,ITMAX,IFRO
LOGICAL VOLVER,NOK,LLEGO,OTROI

TOL=1.E-6
ITMAX=1000
ITER=0

C
C Inicializo R
C
100 CONTINUE
DO I=1,NP
  PP=0.
  DO J=1,NBAND
    PP=PP+A(I,J)*Z(INDA(I,J))
  END DO
  R(I)=-B(I)-PP
END DO

C
C Miro donde minimizar
C
VOLVER=.TRUE.
DO I=1,NP
  IF ((ABS(Z(I)).LT.TOL).AND.(R(I).LT.TOL)) THEN
    IND(I)=1
  ELSE
    IND(I)=0
    IF (ABS(R(I)).GT.TOL) VOLVER=.FALSE.
  END IF
  IF (IFRO(I).EQ.2) IND(I)=1
END DO
IF (VOLVER) GO TO 500

C
C Inicializo el gradiente conjugado
C
200 CONTINUE
DO I=1,NP
  IF (IND(I).EQ.1) THEN
    D(I)=0.
  ELSE
    D(I)=R(I)
  END IF
END DO

C
C Comienza el gradiente conjugado

```

```

C
300 CONTINUE
ITER=ITER+1
IF (ITER.GT.ITMAX) GO TO 500
ZC=0.
ZD=0.
DO I=1,NP
  S(I)=0.
  DO J=1,NBAND
    S(I)=S(I)+A(I,J)*D(INDA(I,J))
  END DO
  ZC=ZC+D(I)*R(I)
  ZD=ZD+D(I)*S(I)
END DO
ZA=ZC/ZD
NOK=.FALSE.           ! Sigo en K
LLEGO=.TRUE.          ! He llegado al minimo
DO I=1,NP
  Z(I)=Z(I)+ZA*D(I)
  IF (Z(I).LT.-TOL) NOK=.TRUE.
  R(I)=R(I)-ZA*S(I)
  IF ((IND(I).EQ.0).AND.(ABS(R(I)).GT.TOL)) LLEGO=.FALSE.
END DO
IF (NOK) GO TO 400      ! Proyectar
IF (LLEGO) GO TO 100   ! Actualizo el conjunto donde minimizo
ZE=0.
DO I=1,NP
  IF (IND(I).EQ.1) R(I)=0.
  ZE=ZE+R(I)*R(I)
END DO
ZG=ZE/ZC
DO I=1,NP
  IF (IFRO(I).EQ.2) THEN
    D(I)=0.
  ELSE
    D(I)=R(I)+ZG*D(I)
  END IF
END DO
GO TO 300              ! Termina el gradiente
400 CONTINUE
ZF=10000.
DO I=1,NP
  IF (Z(I).LT.-TOL) ZF=AMIN1(ZF,ZA-Z(I)/D(I))
END DO
DO I=1,NP
  IND(I)=0
  Z(I)=Z(I)+(ZF-ZA)*D(I)
  IF (ABS(Z(I)).LT.TOL) IND(I)=1
END DO

DO I=1,NP

```

```

PP=0.
DO J=1,NBAND
  PP=PP+A(I,J)*Z(INDA(I,J))
END DO
R(I)=-B(I)-PP
END DO
OTROI=.TRUE.
DO I=1,NP
  IF ((IND(I).EQ.0).AND.(ABS(R(I)).GT.TOL)) OTROI=.FALSE.
END DO
IF (OTROI) THEN
  GO TO 100          ! Actualizo el conjunto donde minimizo
ELSE
  GO TO 200          ! Reinicializo el gradiente conjugado
END IF
500 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE PRECOND(A,B,Z,NBAND,NP,INDA,D,R,S,IFRO,IND)
C *****
C ALGORITMO DE MINIMIZACION
C METODO DEL GRADIENTE CONJUGADO PRECONDICIONADO
C MATRIZ DE PRECONDICIONAMIENTO: INVERSA DE LA DIAGONAL
C *****
DIMENSION A(NP,*),B(*),Z(*),INDA(NP,*),D(*),R(*),S(*),
+ IFRO(*),IND(*)
REAL A,B,Z,D,R,S
INTEGER INDA,IFRO,IND

INTEGER ITER,ITMAX
LOGICAL VOLVER,NOK,LLEGO

TOL=1.E-6
ITMAX=1000
ITER=0

C
C Inicializo R
C
100 CONTINUE
DO I=1,NP
R(I) = -B(I)
DO J=1,NBAND
R(I) = R(I) - A(I,J)*Z(INDA(I,J))
END DO
END DO

C
C Miro donde minimizar
C
VOLVER=.TRUE.
DO I=1,NP
IF ( (IFRO(I).EQ.2) .OR.
+ ((ABS(Z(I)).LT.TOL) .AND. (R(I).LT.TOL)) ) THEN
IND(I)=1
ELSE
IND(I)=0
IF (ABS(R(I)).GT.TOL) VOLVER=.FALSE.
END IF
END DO
IF (VOLVER) GO TO 500

C
C Inicializo el gradiente conjugado
C
200 CONTINUE
DO I=1,NP
IF ((IND(I).EQ.1).OR.(A(I,1).EQ.0)) THEN
D(I)=0.
ELSE
D(I)=R(I)/A(I,1)
END IF

```

```

END DO
C
C Comienza el gradiente conjugado
C
300 CONTINUE
ITER=ITER+1
IF (ITER.GT.ITMAX) GO TO 500
ZC=0.
ZD=0.
DO I=1,NP
  S(I)=0.
  DO J=1,NBAND
    S(I)=S(I)+A(I,J)*D(INDA(I,J))
  END DO
  ZC=ZC+D(I)*R(I)
  ZD=ZD+D(I)*S(I)
END DO
ZA=ZC/ZD

NOK=.FALSE.           ! Sigo en K
LLEGO=.TRUE.          ! He llegado al minimo
DO I=1,NP
  Z(I)=Z(I)+ZA*D(I)
  IF (Z(I).LT.-TOL) NOK=.TRUE.
  R(I)=R(I)-ZA*S(I)
  IF ((IND(I).EQ.0).AND.(ABS(R(I)).GT.TOL)) LLEGO=.FALSE.
END DO
IF (NOK) GO TO 400      ! Proyectar
IF (LLEGO) GO TO 100   ! Actualizo el conjunto donde minimizo

ZE=0.
DO I=1,NP
  IF (IND(I).EQ.1) THEN
    R(I)=0.
  ELSE
    IF (A(I,1).NE.0.) ZE=ZE+R(I)*R(I)/A(I,1)
  END IF
END DO
ZG=ZE/ZC

DO I=1,NP
  IF ((IFRO(I).EQ.2).OR.(A(I,1).EQ.0)) THEN
    D(I)=0.
  ELSE
    D(I)=R(I)/A(I,1)+ZG*D(I)
  END IF
END DO
GO TO 300              ! Termina el gradiente
400 CONTINUE

ZF=10000.

```

```

DO I=1,NP
  IF (Z(I).LT.-TOL) ZF=AMIN1(ZF,ZA-Z(I)/D(I))
END DO
DO I=1,NP
  Z(I)=Z(I)+(ZF-ZA)*D(I)
  IF (ABS(Z(I)).LT.TOL) THEN
    IND(I)=1
  ELSE
    IND(I)=0
  END IF
END DO

DO I=1,NP
  R(I) = -B(I)
  DO J=1,NBAND
    R(I) = R(I) - A(I,J)*Z(INDA(I,J))
  END DO
END DO

DO I=1,NP
  IF ((IND(I).EQ.0).AND.(ABS(R(I)).GT.TOL))
+   GOTO 200          ! Reinicializo el gradiente conjugado
END DO
GO TO 100           ! Actualizo el conjunto donde minimizo

500 CONTINUE
RETURN
END

```



```

SUBROUTINE CALCULG(P,G,NBAND,NP,A,INDA,B,INDB,PHI,TNL,TL,PRB,
+   S,IN,N)
C   *****
C   CALCULA LA SATURACION G
C   SE RESUELVE EL PROBLEMA "B G = S" DONDE
C   B: MATRIZ TRIANGULAR (A MENOS DE REORDENACION)
C   G: SATURACION INCOGNITA
C   S: MINIMO ENTRE CERO Y EL GRADIENTE DEL FUNCIONAL J
C   *****
DIMENSION P(*),G(*),A(NP,*),INDA(NP,*),B(NP,*),INDB(NP,*),
+   PHI(*),TNL(*),TL(*),PRB(*),S(*),IN(NP,*)
DOUBLE PRECISION A,PRB,TNL,B

REAL SS
INTEGER CONT

DO I=1,NP
  SS=0.
  DO L=1,NBAND
    SS = SS - REAL(A(I,L))*P(INDA(I,L))
    IN(I,L)=INDB(I,L)
  END DO
  SS = SS - REAL(PRB(I)) + TL(I) + BETA(PHI(I)-P(I))*REAL(TNL(I))
  IF (ABS(SS).LT.1.E-6) SS=0.
  S(I)= AMIN1(0.,SS)
  G(I)=0.
END DO

CONT=0
DO WHILE (CONT.LT.NP)
  DO I=1,NP
    L=0
    DO J=2,NBAND
      IF (B(I,J).EQ.0.) IN(I,J)=0
      L=L+IN(I,J)
    END DO
    IF ((L.EQ.0).AND.(IN(I,1).EQ.I)) THEN
      IN(I,1)=0
      CONT=CONT+1
      G(I)=S(I)/REAL(B(I,1))
      DO II=1,NP
        DO JJ=2,NBAND
          IF (IN(II,JJ).EQ.I) THEN
            IN(II,JJ)=0
            S(II)=S(II)-REAL(B(II,JJ))*G(I)
          END IF
        END DO
      END DO
    END DO
  END DO
END DO
END DO

```

```

DO I=1,NP
  G(I)=G(I)+1.
  IF (ABS(G(I)).LE.1.E-6) G(I)=0.
END DO
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE INT2CHA(INT,CHA)

```

```

C *****
C CONVIERTE UN ENTERO DE CUATRO DIGITOS
C EN LA CADENA DE CARACTERES CORRESPONDIENTE
C *****

```

```

INTEGER INT
CHARACTER*4 CHA
INTEGER A, B, C, D
INTEGER OFF, TEM

```

```

OFF=48
TEM=INT

```

```

A=TEM/1000
TEM=TEM-A*1000
B=TEM/100
TEM=TEM-B*100
C=TEM/10
TEM=TEM-C*10
D=TEM

```

```

CHA=CHAR(A+OFF)//CHAR(B+OFF)//CHAR(C+OFF)//CHAR(D+OFF)

```

```

RETURN
END

```

# Bibliografía

- [1] R. Adams. **Sobolev Spaces**. Academic Press (1975).
- [2] H.W. Alt. *Strömungen durch inhomogene poröse Medien mit freiem Rand*. J. Reine Angew. Math., 305 (1979), 89-115
- [3] H.W. Alt. *Numerical solution of steady-state flow free boundary problems*. Numer. Math., 36 (1980), 73-98.
- [4] C. Baiocchi. *Su un problema a frontiera libera connesso a questioni di idraulica*. Ann. Mat. Pura Appl., 92 (1972), 107-127.
- [5] C. Baiocchi, A. Capelo. **Variational and quasivariational inequalities**. Wiley (1984)
- [6] C. Baiocchi, V. Comincioli, L. Guerri, G. Volpi. *Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: a numerical approach*. Calcolo, 10 (1973), 1-82
- [7] J. Bear. **Hydraulics of groundwater**. McGraw-Hill (1979).
- [8] H. Brezis. **Análisis funcional**. Alianza Editorial (1984).
- [9] H. Brezis. **Operateurs maximaux monotones**. North-Holland (1973).
- [10] H. Brezis, D. Kinderlehrer, G. Stampacchia. *Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue*. C. R. Acad. Sci. Paris, 287 (1978), 711-714.
- [11] L. Caffarelli. *The smoothness of the free surface in a filtration problem*. Arch. Rational Mech. Anal., 63 (1976), 77-86.
- [12] L. Caffarelli, G. Gilardi. *Monotonicity of the free boundary in the two-dimensional dam problem*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4), 7 (1980), 523-537.
- [13] J. Carrillo. *An evolution free boundary problem: filtrations of a compressible fluid in a porous medium*. Research Notes in Mathematics, 89 (1982), 97-110, Pitman, Londres.

- [14] J. Carrillo. *On the uniqueness of the solution of the evolution dam problem*. Nonlinear Analysis. Por aparecer.
- [15] J. Carrillo. *A Numerical Method for the nonsteady free boundary problem related to the filtration of a fluid through a porous medium*. Por aparecer
- [16] J. Carrillo, M. Chipot. *Sur l'unicité de la solution du problème de l'écoulement à travers une digue*. C.R. Acad. Sc. Paris, 292 (1981), 191-194.
- [17] J. Carrillo, M. Chipot. *On the dam problem*. Journ. of Diff. Equ., 45 (1982), 234-271.
- [18] J. Carrillo, M. Chipot. *The dam problem with leaky boundary conditions*. Appl. Math. and Optimization. Por aparecer.
- [19] J. Carrillo, G. Gilardi. *La vitesse de propagation dans le problème de la digue*. Ann. Fac. Sc. de Toulouse, Vol. XI, 3 (1990), 7-28.
- [20] P.G. Ciarlet. **Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimization**. Masson (1982).
- [21] P.G. Ciarlet **The finite element method for elliptic problems**. North-Holland (1978).
- [22] P.G. Ciarlet, P.A. Raviart. *Maximum principle and uniform convergence for the finite element method*. Comput. Methods. Appl. Engrg., 2 (1973), 17-31.
- [23] C.W. Cryer. *On the approximate solution of free boundary problems using finite differences* J. Assoc. Comput. Mach., 17 (1970), 397-411.
- [24] E. Di Benedetto, A. Friedman. *Periodic behaviour for the evolutionary dam problem and related boundary problems*. Comm. in P.D.E., 11 (1986), 1297-1377.
- [25] R. Glowinski, J.L. Lions, R. Tremolières. **Numerical analysis of variational inequalities**. North-Holland (1981).
- [26] G. Gilardi. *A new approach to evolution free boundary problems*. Comm. in P.D.E., 4 (1979), 1099-1122.
- [27] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. **Elliptic partial differential equations of second order**. Springer-Verlag (1977).
- [28] P. Grisvard *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Monographs and Studies in Mathematics, 24 Pitman (1985) Londres.
- [29] M.S. Hanna, K.T. Smith. *Some remarks on the Dirichlet Problem in Piecewise Smooth Domains*. Comm. in Pure and Appl. Math. XX (1967), 575-593.

- [30] M. Hestenes. **Conjugate direction methods in optimization**. Springer-Verlag (1980).
- [31] J.L. Lions. **Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires**. Dunod Gauthier-Villars (1969) Paris.
- [32] L.D. Marini, P. Pietra. *Solution of filtration problems through porous media. The programs PIGRA, DAMIAN, PLOT DAM*. Rept. IAN-CNR No.395, (1984) Pavia.
- [33] L.D. Marini, P. Pietra. *Fixed-point algorithms for stationary flow in porous media*. Comput. Meths. Appl. Mech. Engr., 56 (1986), 17-45.
- [34] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt. **Iterative solution of nonlinear equations in several variables**. Academic Press (1970) Nueva York.
- [35] P. Pietra. *An up-wind method for a filtration problem*. RAIRO Anal. Numér., 16 (1982), 463-481.
- [36] B.T. Polyak. **Introduction to optimization**. Optimization Software Inc. (1987).
- [37] J.F. Rodrigues. *On the dam problem with boundary leaky condition*. Portugaliae Mathematica, 39 (1980), 399-411.
- [38] P.A. Raviart, J.M. Thomas. **Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles**. Masson (1983) Paris.
- [39] M. Tabata. *Uniform convergence of the up-wind finite element approximation for semilinear parabolic problems*, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 327-351.
- [40] V. Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*. Lecture Notes in Mathematics, 1054, Springer-Verlag (1984) Berlin.
- [41] A. Torelli. *Su un problema non lineare con una condizione di evoluzione sulla frontiera*. Ann. Mat. Pura Appl., 112 (1977), 91-106.
- [42] A. Torelli. *On a free boundary value problem connected with a non steady filtration phenomenon*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 4 (1977), 33-59.