Trivialidad definible de familias de aplicaciones definibles en estructuras o-minimales.

por

Jesús Escribano Martínez

Licenciado en Ciencias Matemáticas
por la Universidad Complutense de Madrid

Presentada al Departamento de Geometría y Topología
para optar al grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

por la

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Julio del 2000

Dirigida por los profesores
Michel Coste (U. de Rennes I, Francia) y
Jesús M. Ruiz Sancho (U. Complutense de Madrid).

Índice General

Introducción

En esta Memoria pretendemos estudiar un problema típico de la Topología Diferencial como es la trivialidad de sumersiones entre variedades diferenciables. Un método habitual para atacar este tipo de problemas es la integración de campos de vectores. Sin embargo, si nuestro datos de partida son *algebraicos*, la integración de campos de vectores no nos asegura que los datos finales (los difeomorfismos que encontramos) sigan teniendo esta calidad algebraica.

Este el caso en que las variedades de partida son semialgebraicas (es decir, descritas por medio igualdades y desigualdades polinomiales) y las aplicaciones diferenciables consideradas tienen grafo semialgebraico. Este tipo de variedades y aplicaciones se llaman *de Nash*. En su trabajo [6], Coste y Shiota estudian la trivialidad de funciones de Nash sobre variedades de Nash. En concreto, si $X \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad de Nash y $f : X \to \mathbb{R}$ es una sumersión de Nash propia, se demuestra que esta función es trivial en la categoría Nash, es decir, que existe un difeomorfismo de Nash $h = (h_0, f) : X \to f^{-1}(0) \times \mathbb{R}$.

Para demostrar este resultado se necesita una herramienta que sustituya la integración de campos de vectores. Este herramienta es el *espectro real*. En general, dado un conjunto semialgebraico X y una aplicación semialgebraica $f : X \to \mathbb{R}^l$, podemos ver f como una familia de conjuntos semialgebraicos $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^l}$, donde X_t no es más que $f^{-1}(t)$. Podemos asociar al espacio de parámetros $\mathbb{R}^l$ un nuevo espacio $\widetilde{\mathbb{R}^l}$, una compactificación cuyos puntos se pueden ver como ultrafiltros de subconjuntos semialgebraicos de $\mathbb{R}^l$. Dado un elemento $\alpha \in \widetilde{\mathbb{R}^l}$ (un *punto genérico*), podemos definir la *fibra genérica* X_α de X en α. La fibra X_α es un subconjunto semialgebraico de $k(\alpha)^n$, donde $k(\alpha)$ es un cuerpo real cerrado asociado a α. En general, el cuerpo $k(\alpha)$ contiene estrictamente a $\mathbb{R}$. Por tanto, aunque nuestros datos de partida estén definidos en $\mathbb{R}$, nos vemos llevados de una forma natural a trabajar con objetos definidos en cuerpos reales cerrados R arbitrarios.

De esta forma, debemos establecer nuestros resultados no sólo para variedades y funciones de Nash definidas sobre $\mathbb{R}$, sino para variedades y funciones definidas sobre un cuerpo real cerrado R. Repetimos que esto no se hace únicamente por la generalidad en si misma, sino porque es necesario para encontrar resultados sobre $\mathbb{R}$.

La idea detrás de la utilización del espectro real es la siguiente. La fibra X_α verifica una cierta propiedad (expresada mediante fórmulas de primer orden del lenguaje de los cuerpos ordenados) si y sólo si existe un subconjunto definible $S \subset R^l$ tal que todas las fibras X_t, con $t \in S$, verifican la misma propiedad.

El espectro real tiene la virtud de ser compacto (aunque no Hausdorff). Esto nos permite pasar propiedades de las fibras genéricas a propiedades de la familia sobre un número finito de subconjuntos "grandes" del espacio de parámetros.

El uso del espectro real se combina con otra técnica muy importante, la *construcción de modelos* de conjuntos semialgebraicos. Dada $R' \subset R$ una extensión de cuerpos reales cerrados, y dada una variedad de Nash X definida sobre R, podemos encontrar otra variedad de Nash X' definida sobre R' de modo que su *extensión* a R es difeomorfa a X. El uso combinado de estas dos técnicas nos permite sustituir la integración de campos de vectores y encontrar trivializaciones que respeten las condiciones de algebraicidad.

En esta memoria mejoramos y ampliamos el resultado de Coste y Shiota, estudiando *familias de aplicaciones semialgebraicas*. Si X, Y y Z son conjuntos semialgebraicos, y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ son aplicaciones semialgebraicas, podemos ver el par (f, g) como una familia de aplicaciones semialgebraicas $\{f_t : X_t \to Y_t\}_{t \in Z}$, siendo $X_t = (g \circ f)^{-1}(t)$, $Y_t = g^{-1}(t)$ y f_t la restricción de f a X_t. Demostramos entonces que si $f : X \to Y$ y $g : Y \to R^l$ son aplicaciones de Nash propias, entonces el par (f, g) es trivial, es decir, todas las fibras f_t de la familia son "Nash difeomorfas" a una fibra tipo f_0.

Como antes, en la demostración resultan esenciales dos construcciones. La primera es el estudio de la fibra genérica f_α en un punto $\alpha \in \widetilde{R^l}$. En la memoria veremos resultados que nos permitirán trasladar propiedades de f_α a propiedades de las fibras f_t para t perteneciente a un subconjunto "grande" del espacio de parámetros.

La segunda técnica utilizada es la contrucción de *modelos* para sumersiones propias. Es decir, si $R' \subset R$ es una extensión de cuerpos reales cerrados, y $f : X \to Y$ es una sumersión propia (definida sobre R), podemos encontrar una sumersión propia $f' : X' \to Y'$, definida sobre R', cuya extensión a R es "Nash difeomorfa" a f. De nuevo el estudio de la fibra genérica de familias de aplicaciones junto con la construcción de modelos semialgebraicos nos permite deducir resultados de trivialidad para familias (o pares) de sumersiones de Nash propias.

Ya hemos mencionado anteriormente que establecemos nuestros resultados para variedades y aplicaciones definidas sobre cuerpos reales cerrados arbitrarios. De hecho, esta memoria se sitúa en un contexto más general. Van den Dries observa que numerosos resultados de geometría semialgebraica se deducen a partir de una serie de axiomas simples. La colección $\{\mathcal{S}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde cada $\mathcal{S}_n$ es el conjunto de los subconjuntos de R^n que verifican dichos axiomas, constituye una *estructura o-minimal*, y un conjunto perteneciente a $\mathcal{S}_n$ se llama definible. Este es un concepto que viene de la Teoría de Modelos y que entronca con la idea de estudiar objetos con "topología moderada" que aparece en el trabajo de Grothendiek [10] y en el de Brumfiel [3]. El resultado de Wilkie [19] de que $(\mathbb{R}, \exp)$ (básicamente, la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, para cada n, para cuya definición se utilizan igualdades y desigualdades que involucran combinaciones de polinomios y la función exponencial) es una estructura o-minimal, impulsa de manera decisiva la investigación en esta campo. Un modelo de lo que es la geometría o-minimal es la geometría semialgebraica.

Para establecer nuestros resultados en esta categoría más amplia, hay algunas construcciones que debemos extender al caso o-minimal. Coste, en [4], extiende el espectro real a lo que llamaremos *espectro definible*. Se definen las fibras genéricas de familias de conjuntos y aplicaciones definibles en puntos del espectro definible y se estudian sus propiedades más importantes.

Estudiamos las variedades y aplicaciones definibles de clase C^r, que llamaremos $\mathcal{D}^r$. Nos centramos en el caso $r < \infty$, ya que la categoría $\mathcal{D}^\infty$ no tiene un buen comportamiento.

Para poder demostrar nuestros teoremas de trivialidad en el caso definible, probamos un teorema de aproximación de aplicaciones definibles por aplicaciones definibles de clase de diferenciabilidad más alta. Este teorema hace el papel del teorema de aproximación en el caso Nash establecido por Shiota en [17], y nos permite establecer una equivalencia entre la categoría $\mathcal{D}^r$ y la categoría $\mathcal{D}^{r+1}$. Este teorema es necesario porque para algunas de nuestras construcciones (por ejemplo, la construcción de entornos tubulares) necesitamos utilizar aplicaciones de clase más pequeña. El teorema de aproximación nos permite volver a nuestra clase original.

A continuación estudiamos la construcción de modelos definibles de variedades y funciones definibles sobre estructuras o-minimales más pequeñas. En concepto adecuado en este caso es el de *extensión elemental* de estructuras o-minimales. Como antes, si $(R', \mathcal{S}) \prec (R, \mathcal{S})$ es una extensión elemental, podemos construir modelos sobre R' de objetos definidos sobre R. Todas estas construcciones nos permiten demostrar nuestros teoremas de trivialidad en el caso $\mathcal{D}^r$.

Observamos que nuestros resultados también nos permiten demostrar los teoremas de trivilidad en el caso Nash (es decir, C^∞ y semialgebraico; el primero ya estaba demostrado por Coste y Shiota en [6], la demostración del segundo aparece por primera vez en esta memoria), por la equivalencia entre las categorías Nash y C^r Nash ([17]).

La estructura de la memoria es la siguiente. Los tres primeros capítulos son introductorios y siguen el trabajo de M. Coste [5], que a su vez se basa en el libro de van den Dries [8] y en el trabajo de Coste [4].

En el Capítulo 1 definimos con precisión la noción de estructura o-minimal y estudiamos las propiedades topológicas más importantes. Establecemos resultados sobre descomposición en celdas de conjuntos definibles y sobre continuidad a trozos de funciones definibles. También estudiamos la dimensión y las componentes conexas de los conjuntos definibles, a través del importante Teorema de Elección Definible. Acabamos el capítulo enunciando un teorema sobre triangulación de conjuntos definibles.

El Capítulo 2 estudiamos el espectro definible. Construimos la estructura o-minimal asociada a un punto del espectro definible y estudiamos las fibras en estos puntos genéricos de familias de conjuntos y aplicaciones definibles.

El Capítulo 3 está dedicado a las variedades y aplicaciones de clase $\mathcal{D}^k$. Estudiamos la descomposición de conjuntos definibles en celdas de clase $\mathcal{D}^k$ y damos un importante teorema sobre existencia de entorno tubulares de clase $\mathcal{D}^{k-1}$. Acabamos el capítulo con un teorema sobre existencia de particiones de la unidad de clase $\mathcal{D}^k$, que hasta ahora no estaba enunciado en la literatura.

El Capítulo 4 se centra en nuestro teorema de aproximación para estructuras o-minimales. Definimos una topología en el espacio de aplicaciones $\mathcal{D}^k$ y desgranamos la demostración del teorema de aproximación a través de distintos casos particulares. En este proceso demostramos un teorema de existencia de entornos tubulares *inclinados* de clase $\mathcal{D}^k$. Finalizamos el capítulo con un resultado sobre eliminación definible de *esquinas*.

En el Capítulo 5 demostramos el teorema de trivialidad para sumersiones definibles propias. Estudiamos las familias de variedades definibles y mostramos la equivalencia de nuestro teorema con la existencia de modelos definibles. La demostración de este resultado implica la utilización de una cierta *teoría de Morse* definible. Acabamos el capítulo con dos resultados sobre variedades definibles *con borde*.

Por fin, en el Capítulo 6 damos la demostración del Teorema de Trivialidad de Pares de sumersiones propias. Estudiamos las familias definibles de aplicaciones y construimos un modelo definible para sumersiones propias. Como en el capítulo anterior, la existencia de este modelo resulta equivalente al teorema de trivialidad de pares.

En el último Capítulo 7, mostramos una aplicación de los resultados precedentes a la teoría de singularidades. En [12] se establece que el conjunto de puntos de bifurcación de una función definible sobre un abierto de R^n es definible. Sin embargo, no se dice nada de si las trivializaciones que obtenemos fuera de estos conjuntos de bifurcación son de clase $\mathcal{D}^k$. Utilizando nuestros resultados demostramos que efectivamente tales trivializaciones son de clase $\mathcal{D}^k$.

Capítulo 1

Estructuras o-minimales

En este capítulo introducimos el concepto de estructura o-minimal y estudiamos sus principales propiedades, sobre todo de tipo geométrico. Esta introducción a la geometría o-minimal se basa esencialmente en el trabajo de M. Coste [5].

Después de dar la definición de estructura o-minimal sobre un cuerpo real cerrado, estudiamos sus propiedades básicas. A continuación pasamos a estudiar algunas propiedades topológicas de los conjuntos y las aplicaciones definibles. Para ello necesitamos dos importantes resultados, el teorema de descomposición en celdas y el teorema de continuidad a trozos. Usándolos se introduce la dimensión de los conjuntos definibles y su descomposición en componentes conexas. Finalmente estudiamos la triangulación de conjuntos y aplicaciones definibles.

1.1 Definición de una estructura o-minimal

Sea R un cuerpo real cerrado. Un *intervalo abierto* en R será siempre un intervalo de la forma (a, b) (para $a < b$) o bien $(a, +\infty)$ o bien $(-\infty, b)$. Remarcamos que un intervalo siempre tiene sus extremos en $R \cup \{-\infty, +\infty\}$. Por ejemplo, si R es el cuerpo de los números reales algebraicos (que es el cuerpo real cerrado más pequeño), el conjunto de los x en R tales que $0 < x < \pi$ ($\pi = 3.14\ldots$) no es un intervalo, ya que su extremo derecho no está en R. Utilizaremos la notación $[a, b]$ para intervalos cerrados.

El cuerpo R tiene una topología para la que los intervalos abiertos forman una base. A los espacios afines R^n les hacemos corresponder la topología producto. Las *cajas abiertas*, es decir, los productos cartesianos de intervalos abiertos $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ forman una base para esta topología. Los polinomios son continuos para esta topología.

Dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ en R^n, denotamos $\|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$. Dado $r > 0$ en R, definimos las bolas abiertas y cerradas

$$B(x, r) = \{z \in R^n : \|z - x\| < r\},$$
$$\overline{B}(x, r) = \{z \in R^n : \|z - x\| \leq r\}.$$

La bolas abiertas $B(x,r)$ forman una base de entornos de x para esta topología.

Definición 1.1.1 *Una* estructura que expande el cuerpo real cerrado R *es una colección* $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *donde cada* $\mathcal{S}_n$ *es un conjunto de subconjuntos del espacio afín* R^n *que satisfacen los siguientes axiomas:*

1. *Todos los conjuntos algebraicos de* R^n *están en* $\mathcal{S}_n$.
2. *Para cada* n, $\mathcal{S}_n$ *es una subálgebra booleana del conjunto de subconjuntos de* R^n.
3. *Si* $A \in \mathcal{S}_m$ *y* $B \in \mathcal{S}_n$ *entonces* $A \times B \in \mathcal{S}_{m+n}$.
4. *Si* $p : R^{n+1} \to R^n$ *es la proyección sobre las primeras* n *coordenadas y* $A \in \mathcal{S}_{n+1}$ *entonces* $p(A) \in \mathcal{S}_n$.

Llamaremos a los elementos S_n *los subconjuntos* definibles *de* R^n. *Diremos que la estructura* $\mathcal{S}$ *es* o-minimal *si además satisface*

5. *Los elementos de* $\mathcal{S}_1$ *son justamente las uniones finitas de puntos e intervalos abiertos, cerrados y semiabiertos.*

En todo lo que sigue, trabajaremos sobre una estructura o-minimal (que expande un cuerpo real cerrado R).

Definición 1.1.2 *Sea* A *un subconjunto de* R^n *y* $f : A \to R^p$ *una aplicación. Diremos que* f *es* definible *si su grafo es un subconjunto definible de* $R^n \times R^p$.

Obsérvese que si f es definible, aplicando el axioma 4 p veces, podemos deducir que A es definible.

Proposición 1.1.3 *La imagen de un conjunto definible por una aplicación definible es definible.*

Demostración. Sea $f : A \to R^p$ una aplicación definible, donde $A \subset R^n$, y sea B un subconjunto definible de A. Denotemos por

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset R^{n+p}$$

el grafo de f. Sea Δ el subconjunto algebraico (de hecho lineal) de R^{p+n+p} formado por los puntos $(z, x, y) \in R^p \times R^n \times R^p$ tales que $z = y$. Entonces $C = \Delta \cap (R^p \times \Gamma_f) \cap (R^p \times B \times R^p)$ es un subconjunto definible de R^{p+n+p}. Sea $\pi_{p+n+p,p} : R^{p+n+p} \to R^p$ la proyección sobre las primeras p coordenadas. Tenemos que $\pi_{p+n+p,p}(C) = f(B)$ y aplicando el axioma 4 $n+p$ veces tenemos que $f(B)$ es definible. □

Obsérvese que las aplicaciones polinomiales son definibles, ya que su grafo es un conjunto algebraico. Observamos también que si $f = (f_1, \ldots, f_p)$ es una aplicación entre

$A \subset R^n$ y R^p, entonces f es definible si y sólo si cada una de sus funciones coordenadas $f_1, \ldots, f_p$ son definibles. Además se tiene que la composición de dos funciones definibles es definible y que las funciones definibles $A \to R$ forman una R-álgebra.

En esta memoria denotaremos mediante $\overline{A}$ a la clausura de un conjunto A.

Proposición 1.1.4 *La clausura y el interior de un subconjunto definible de R^n son definibles.*

Demostración. Basta demostrar que la clausura de un subconjunto definible es definible. El caso del interior se sigue tomando el complementario. Sea A un subconjunto definible de R^n. La clausura de A es

$$\overline{A} = \{x \in R^n : \forall \epsilon \in R, \epsilon > 0, \exists y \in R^n, y \in A \text{ y } \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 < \epsilon^2\}$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$. La clausura de A se puede describir también como

$$\overline{A} = R^n \setminus (\pi_{n+1,n}(R^{n+1} \setminus \pi_{2n+1,n+1}(B)))$$

donde

$$B = (R^n \times R \times A) \cap \left\{ (x, \epsilon, y) \in R^n \times R \times R^n : \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 < \epsilon^2 \right\},$$

$\pi_{n+1,n}(x, \epsilon) = x$ y $\pi_{2n+1,n+1}(x, \epsilon, y) = (x, \epsilon)$. Basta entonces observar que B es definible.

□

El ejemplo anterior nos muestra que habitualmente es muy laborioso escribir proyecciones para demostrar que un subconjunto es definible. Estamos más habituados a escribir fórmulas. Precisemos qué es lo que queremos decir con una *fórmula de primer orden* (del lenguaje de una estructura o-minimal). Una fórmula de primer orden se construye de acuerdo a las siguientes reglas.

1. Si $P \in R[X_1, \ldots, X_n]$ entonces $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ y $P(x_1, \ldots, x_n) > 0$ son fórmulas de primer orden.

2. Si A es un subconjunto definible de R^n, entonces $x \in A$ (donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$) es una fórmula de primer orden.

3. Si $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ y $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ son fórmulas de primer orden, entonces "Φ y Ψ", "Φ o Ψ", "no Φ", $\Phi \Rightarrow \Psi$ son fórmulas de primer orden.

4. Si $\Phi(y, x)$ es una fórmula de primer orden (donde $y = (y_1, \ldots, y_p)$ y $x = (x_1, \ldots, x_n)$) y A es un subconjunto definible de R^n, entonces $\exists x \in A\ \Phi(y, x)$ y $\forall x \in A\ \Phi(y, x)$ son fórmulas de primer orden.

Teorema 1.1.5 *Si $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de primer orden, el conjunto de los puntos $(x_1, \ldots, x_n)$ en R^n que satisfacen $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ es definible.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre la construcción de las fórmulas. La Regla 1 produce los conjuntos semialgebraicos, que son definibles. La Regla 2 obviamente produce conjuntos definibles. La Regla 3 también genera conjuntos definibles porque S_n es cerrado por operaciones booleanas. La Regla 4 refleja el hecho de que la proyección de un conjunto definible es definible. De hecho, si $B = \{(y, x) \in R^{p+n} : \Phi(y, x)\}$ es definible y $\pi_{p+n,p} : R^{p+n} \to R^p$ denota la proyección sobre las p primeras coordenadas, tenemos que

$$\{y \in R^p : \exists x \in A\ \Phi(y, x)\} = \pi_{p+n,p}((R^p \times A) \cap B),$$

$$\{y \in R^p : \forall x \in A\ \Phi(y, x)\} = R^p \setminus \pi_{p+n,p}((R^p \times A) \cap (R^{p+n} \setminus B))$$

lo que muestra que ambos conjuntos son definibles. □

Obsérvese que las variables cuantificadas deben variar a lo largo de conjuntos definibles. Por ejemplo

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists n \in \mathbb{N}\ y = nx\}$$

no es definible: si este conjunto fuese definible, su intersección con la recta $x = 1$ sería definible. Pero esta intersección es el conjunto $\{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{N}\}$, que no es definible por el axioma de o-minimalidad. El problema, claro está, es que $\mathbb{N}$ no es definible en R.

Observaciones 1.1.6 *(i) Si $f : A \to R$ es una función definible, entonces el conjunto $\{x \in A : f(x) > 0\}$ es definible. Por tanto, podemos aceptar desigualdades que involucren funciones definibles en fórmulas que definen conjuntos definibles.*

(ii) Sea A un subconjunto definible no vacío de R^n. Para $x \in R^n$ definimos $dist(x, A)$ como el ínfimo del conjunto de los $\|y - x\| = \sqrt{\Sigma_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$ cuando y recorre A. Tenemos entonces que $dist(x, A)$ es un número bien definido y que $x \mapsto dist(x, A)$ es una función definible continua sobre R^n.

Una buena referencia sobre las propiedades de las fórmulas de primer orden y sobre teoría de modelos en general es [15].

1.2 Descomposición en celdas

En esta sección demostramos la existencia de una descomposición en celdas para conjuntos definibles, que generaliza la descomposición cilíndrica de conjuntos semialgebraicos. Este resultado resulta ser crucial para el estudio de la geometría o-minimal.

En primer lugar vemos un teorema que estudia la monotonía de las funciones definibles.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Monotonía) *Sea $f : (a, b) \to R$ una función definible. Existe una subdivisión finita $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ de forma que, sobre cada intervalo (a_i, a_{i+1}), f es continua y, o bien constante, o bien estrictamente monótona.*

La clave en la demostración del Teorema de Monotonía es el siguiente

Lema 1.2.2 *Sea $f : (a,b) \to R$ una función definible. O bien existe un subintervalo de (a,b) sobre el que f es constante, o bien existe un subintervalo de (a,b) sobre el que f es estrictamente monótona y continua.*

Demostración. Supongamos que no existe ningún intervalo de (a,b) sobre el que f sea constante.

Primer paso: existe un subintervalo sobre el cual f es inyectiva. De la suposición anterior se sigue que, para todo y en R, el conjunto definible $f^{-1}(y)$ es finito. En caso contrario, $f^{-1}(y)$ contendría un intervalo sobre el cual $f = y$. De esta forma el conjunto definible $f((a,b))$ es infinito y contiene un intervalo J. La función $g : J \to (a,b)$ definida por $g(y) = \min(f^{-1}(y))$ es definible y satisface $f \circ g = \mathrm{Id}_J$. Como g es inyectiva, $g(J)$ es infinito y contiene un subintervalo I de (a,b). Tenemos entonces que $g \circ f_{|I} = \mathrm{Id}_I$ y f es inyectiva sobre I.

Segundo paso: existe un subintervalo sobre el que f es estrictamente monótona. Sabemos que f es inyectiva sobre un subintervalo I de (a,b). Tomemos $x \in I$. Los conjuntos

$$I_+(x) = \{y \in I : f(y) > f(x)\}$$

$$I_-(x) = \{y \in I : f(y) < f(x)\}$$

forman una partición definible de $I \setminus \{x\}$. Por tanto, existe un $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x)$ (resp. $(x, x+\epsilon)$) está contenido en $I_+(x)$ o en $I_-(x)$. Tenemos por tanto cuatro posibilidades $\Phi_{+,+}(x)$, $\Phi_{+,-}(x)$, $\Phi_{-,+}(x)$ y $\Phi_{-,-}(x)$ que inducen una partición definible de I. Por ejemplo, $\Phi_{+,-}(x)$ es la fórmula

$$\exists \epsilon\, \forall y \in I \ \ ((x-\epsilon < y < x \Rightarrow f(y) > f(x)) \text{ y } (x < y < x+\epsilon \Rightarrow f(y) < f(x)))$$

Sea $\Phi_{+,+} = \{x \in I : \Phi_{+,+}(x)\}$; de forma análoga se definen los conjuntos $\Phi_{+,-}$, $\Phi_{-,+}$ y $\Phi_{-,-}$. Afirmamos que $\Phi_{+,+}$ y $\Phi_{-,-}$ son finitos. Basta demostrar esta afirmación para $\Phi_{+,+}$ (para $\Phi_{-,-}$ reemplazamos f por $-f$). Si $\Phi_{+,+}$ no es finito, contiene un subintervalo de I, que llamaremos también I. Definamos

$$B = \{x \in I : \forall y \in I \ y > x \Rightarrow f(y) > f(x)\}.$$

Si B contiene un intervalo entonces f es estrictamente creciente en este intervalo, lo que contradice que esté contenido en $\Phi_{+,+}$. Por tanto B es finito. Sustituyendo I por $(\max(B), +\infty) \cap I$ si $B \neq \emptyset$, podemos suponer que

$$(*) \qquad \forall x \in I \ \exists y \in I \ (y > x \text{ y } f(y) < f(x)).$$

Tomemos $x \in I$. El conjunto definible $C_x = \{y \in I : y > x \text{ y } f(y) < f(x)\}$ es no vacío. Si C_x fuese finito, su máximo sería un elemento de I que contradice la propiedad $(*)$. Por tanto, C_x contiene un intervalo. Sea z el ínfimo del interior de C_x. Tenemos que $z > x$

ya que $f > f(x)$ sobre cierto intervalo $(x, x+\epsilon)$. Tenemos también que $f > f(x)$ sobre cierto intervalo $(z-\epsilon, z)$ y $f < f(x)$ sobre cierto intervalo $(z, z+\epsilon)$. Por tanto se verifica la siguiente fórmula $\Psi_{+,-}(z)$:

$$\exists \epsilon > 0\ \forall t \in I\ \forall u \in I\ (z-\epsilon < t < z < u < z+\epsilon \Rightarrow f(t) > f(u)).$$

De esta forma hemos demostrado

$$(**) \qquad \forall x \in I\ \exists z \in I\ (x < z \text{ y } \Psi_{+,-}(z)).$$

El conjunto definible de elementos de I que satisfacen $\Psi_{+,-}$ es no vacío y no es finito: en caso contrario, su máximo no verificaría $(**)$. Entonces podemos suponer, reemplazando I por un subintervalo más pequeño, que $\Psi_{+,-}$ se verifica sobre I. Consideremos la función definible $h : -I \to R$ definida como $h(x) = f(-x)$. La propiedad $\Phi_{+,+}$ para h se verifica sobre $-I$. Por tanto, por el argumento anterior, hay un subintervalo de $-I$ sobre el que se verifica $\Psi_{+,-}$ para h. Esto significa que existe un subintervalo de I sobre el que se verifica $\Psi_{-,+}$ para f (intercámbiese izquierda y derecha). Sobre este subintervalo se verifican simultáneamente $\Psi_{+,-}$ y $\Psi_{-,+}$, lo que es una contradicción. Esto demuestra nuestra afirmación inicial.

Así, como $\Phi_{+,+}$ y $\Phi_{-,-}$ son finitos, reemplazando I por un subintervalo más pequeño, podemos suponer que $\Phi_{-,+} = I$ o bien $\Phi_{+,-} = I$. Digamos que $\Phi_{-,+} = I$. Entonces f es estrictamente creciente sobre I. De hecho, para todo $x \in I$, el conjunto definible $\{y \in I : y > x \text{ y } f > f(x) \text{ sobre } (x,y)\}$ es no vacío y su supremo es necesariamente el extremo derecho de I (en caso contrario, este supremo no verificaría $\Phi_{-,+}$). De forma similar, si $\Phi_{+,-} = I$, entonces f es estrictamente decreciente sobre I.

Último paso: hay un subintervalo sobre el que f es estrictamente monótona y continua. Recordemos que f es estrictamente monótona sobre I. El conjunto definible $f(I)$ es infinito y contiene un intervalo J. La imagen inversa $f^{-1}(J)$ es el intervalo $(\inf(f^{-1}(J)), \sup(f^{-1}(J)))$. Reemplazando I por este intervalo, podemos suponer que f es una biyección estrictamente monótona entre el intervalo I y el intervalo J. Como la imagen inversa de un subintervalo de J es un subintervalo de I, f es continua.

□

Demostración del Teorema de Monotonía. Definimos $X_=$ (resp. $X_\nearrow$, $X_\searrow$) como el conjunto definible de los $x \in (a,b)$ tales que f es constante (resp. continua y estrictamente creciente, continua y estrictamente decreciente) sobre un intervalo que contiene a x. Entonces

$$(a,b) \setminus (X_= \cup X_\nearrow \cup X_\searrow)$$

es finito. En caso contrario, contendría un intervalo, lo que sería una contradicción con el anterior Lema 1.2.2. Por tanto, existe una subdivisión $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ de forma que cada (a_i, a_{i+1}) está contenido en $X_=$ o en $X_\nearrow$ o en $X_\searrow$. Claramente f es continua sobre cada (a_i, a_{i+1}). Tomemos $x \in (a_i, a_{i+1})$. Si (a_i, a_{i+1}) está contenido en $X_=$

(resp. $X_{\nearrow}$, $X_{\searrow}$), sea D_x el conjunto de los $y \in (a_i, a_{i+1})$ tales que $x < y$ y $f = f(x)$ (resp. $f > f(x)$, $f < f(x)$) sobre (x, y). El conjunto D_x es definible, no vacío y su supremo es necesariamente a_{i+1}. Se sigue entonces que f es constante o estrictamente monótona sobre (a_i, a_{i+1}). □

A continuación vamos a establecer tres teoremas que están muy relacionados: el teorema de finitud uniforme, el teorema sobre descomposición en celdas y el teorema de continuidad a trozos.

En primer lugar, digamos qué es para nosotros una descomposición en celdas. La noción de *descomposición en celdas definible cilíndrica (dcdc) de R^n* es una generalización de la descomposición en celdas cilíndrica algebraica. Definimos la dcdc por inducción sobre n.

Definición 1.2.3 *Una dcdc de R^n es una partición finita de R^n en conjuntos definibles $\{C_i\}_{i\in I}$ que verifican las propiedades siguientes. Los C_i se llaman las* celdas *de la cdcd.*

$n = 1$: *Una dcdc de R está dada por una subdivisión finita $a_1 < \ldots < a_l$ de R. Las celdas de R son los conjuntos unitarios $\{a_i\}$, $1 \le i \le l$, y los intervalos (a_i, a_{i+1}), $0 \le i \le l$, donde $a_0 = -\infty$ y $a_{l+1} = +\infty$.*

$n > 1$: *Una dcdc de R^n está dada por una dcdc de R^{n-1} y, para cada celda D de R^{n-1}, funciones continuas definibles*

$$\zeta_{D,1} < \ldots < \zeta_{D,l(D)} : D \to R.$$

Las celdas de R^n son los grafos

$$\{(x, \zeta_{D,i}(x)) : x \in D\}, \quad 0 < i < l(D),$$

y las bandas

$$(\zeta_{D,i}, \zeta_{D,i+1}) = \{(x, y) : x \in D \text{ y } \zeta_{D,i}(x) < y < \zeta_{D,i+1}(x)\}$$

para $0 \le i \le l(D)$, donde $\zeta_{D,0} = -\infty$ y $\zeta_{D,l(D)+1} = +\infty$.

Nótese que el hecho de que una celda de una dcdc es definible se sigue de forma inmediata de la definición y de los axiomas de estructura o-minimal. Nótese también que si $\pi_{n,m} : R^n \to R^m$, $m < n$, es la proyección en las primeras m coordenadas, las imágenes por $\pi_{n,m}$ de las celdas de una dcdc de R^n son las celdas de un dcdc de R^m.

Definimos por inducción la *dimensión de una celda*. La dimensión de un conjunto unitario es 0 y la dimensión de un intervalo es 1. Si C es una celda de R^n, la dimensión de C es $\dim(\pi_{n,n-1}(C))$ si C es un grafo y $\dim(\pi_{n,n-1}(C)) + 1$ si C es una banda.

Proposición 1.2.4 *Para cada celda C de una dcdc de R^n existe un homeomorfismo definible $\theta_C : C \to R^{\dim(C)}$.*

Demostración. Sea $D = \pi_{n,n-1}(C)$ y supongamos que $\theta_D : D \to R^{\dim(D)}$ está ya definida. Sea $(x, y) \in C$, donde $x \in D$. Definimos $\theta_C(x, y)$ como $\theta_D(x)$ si C es un grafo, y como

$$\left(\theta_D(x), \frac{1}{\zeta_{D,i}(x) - y} + y + \frac{1}{\zeta_{D,i+1}(x) - y}\right)$$

si C es la banda $(\zeta_{D,i}, \zeta_{D,i+1})$ (evidentemente debemos omitir aquellas fracciones en las que en el denominador aparezcan funciones infinitas). □

La noción de conexión no se comporta bien si $R \neq \mathbb{R}$. Por esta razón debe ser sustituida por la noción de conexión definible.

Definición 1.2.5 *Un conjunto definible A se dice que es* definiblemente conexo *si, para todo par de subconjuntos definibles abiertos disjuntos U y V de A tales que $A = U \cup V$, se tiene $A = U$ o $A = V$. Un conjunto definible A se dice que es* definiblemente conexo por caminos *si, para todo par de puntos a y b en A, existe una aplicación definible continua $\gamma : [0, 1] \to A$ tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$.*

Es fácil ver que el segmento $[0, 1]$ es definiblemente conexo, que la conexión definible por arcos implica la conexión definible, que cada caja $(0, 1)^d$ es definiblemente conexa y que cada celda en una dcdc es definiblemente conexa.

A continuación establecemos los tres teoremas importantes de los que hablamos anteriormente. En lo que sigue, denotaremos por $\#S$ el número de elementos de un conjunto finito S.

Teorema 1.2.6 (Finitud Uniforme FU_n) *Sea A un subconjunto definible de R^n tal que, para cada $x \in R^{n-1}$, el conjunto*

$$A_x = \{y \in R : (x, y) \in A\}$$

es finito. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\#A_x \leq k$ para todo $x \in R^{n-1}$.

Teorema 1.2.7 (Descomposición en Celdas $DCDC_n$) *Sean $A_1, \ldots, A_k$ subconjuntos definibles de R^n. Existe una dcdc de R^n de forma que cada A_i es una unión de celdas.*

Una dcdc de R^n que satisface la propiedad del teorema anterior se dice *adaptada a* $A_1, \ldots, A_k$.

Teorema 1.2.8 (Continuidad a Trozos CT_n) *Sea A un subconjunto definible de R^n y $f : A \to R$ una función definible. Entonces existe una dcdc de R^n adaptada a A tal que, para cada celda C contenida en A, $f_{|C}$ es continua.*

Demostramos estos tres teoremas simultáneamente por inducción sobre n. Para $n = 1$, FU_1 es trivial (R^0 es un único punto), DCDC_1 se obtiene inmediatamente de los axiomas de o-minimalidad y CT_1 es una consecuencia del Teorema de Monotonía 1.2.1. Por lo tanto podemos suponer que $n > 1$ y que FU_m, DCDC_m y CT_m se verifican para todo entero m tal que $0 < m < n$.

Demostración de FU_n. En primer lugar, podemos suponer que, para todo $x \in R^{n-1}$, el conjunto A_x está contenido en $(-1,1)$. Sea $\mu : R \to (-1,1)$ el homeomorfismo semialgebraico definido por $\mu(y) = y/\sqrt{1+y^2}$. Podemos reemplazar A por su imagen por $(x,y) \mapsto (x,\mu(y))$ que satisface la suposición anterior.

Para $x \in R^{n-1}$ e $i = 1, 2, \ldots$ definimos $f_i(x)$ como el i-ésimo elemento de A_x, si éste existe. Nótese que la función f_i es definible. Llamaremos a $a \in R^{n-1}$ *bueno* si $f_1, \ldots, f_{\#(A_a)}$ están definidas y son continuas sobre una caja abierta que contiene a a y a no pertenece a la clausura del dominio de $f_{\#(A_a)+1}$. En otras palabras, a es bueno si y sólo si está en una caja abierta $B \subset R^{n-1}$ de forma que $(B \times R) \cap A$ es la unión de grafos de funciones definibles continuas

$$\zeta_1 < \ldots < \zeta_{\#(A_a)} : B \to (-1,1) \qquad (\zeta_i = f_{i|B}).$$

Llamaremos a $a \in R^{n-1}$ *malo* si no es bueno.

Primer paso: el conjunto de los puntos buenos es definible. Sea a un punto de R^{n-1}. Si b pertenece a $[-1,1]$, decimos que $(a,b) \in R^n$ es *normal* si existe una caja abierta $C = B \times (c,d) \subset R^n$ que contiene el punto (a,b) y de forma que $A \cap C$ es o bien vacío o bien el grafo de una función definible continua $B \to (c,d)$.

Claramente, si a es bueno, (a,b) es normal para cada $b \in [-1,1]$. Si a es malo y f_l es la primera función f_i tal que a está en la clausura del dominio de f_i y f_i no está definida de forma continua en una caja abierta que contiene a a, sea $\beta(a) = \liminf_{x\to a} f_l(x) \in [-1,1]$. Afirmamos que $(a,\beta(a))$ no es normal. Supongamos que lo es. Existe entonces una caja abierta $B \times (c,d)$ que contiene a $(a,\beta(a))$ y cuya intersección con A es el grafo de una función definible continua $g : B \to (c,d)$. Supongamos que $f_{l-1}(x) > c$ para todo $x \in B$ tal que $f_{l-1}(x)$ está definido. Si $l > 1$ y $\beta(a) = f_{l-1}(a)$, tendríamos que $g = f_{l-1|B}$ ya que B es definiblemente conexo. Pasaría entonces que $f_l(x) \geq d$ para todo $x \in B$ tal que $f_l(x)$ está definido, lo que contradiría $\beta(a) < d$. De esta forma, podemos suponer que $l = 1$ o que $f_{l-1} < c$ sobre B. Se deduce entonces que $g = f_{l|B}$, lo que contradice la definición de l. Por tanto hemos demostrado la afirmación anterior.

Hemos mostrado de esta forma que $a \in R^{n-1}$ es bueno si y sólo si, para todo $b \in [-1,1]$, (a,b) es normal. De esto se deduce fácilmente que el conjunto de puntos buenos es definible.

Segundo paso: el conjunto de puntos buenos es denso. En caso contrario, existe una caja abierta $B \subset R^{n-1}$ contenida en el conjunto de puntos malos. Consideremos la función definible $\beta : B \to [-1,1]$ definida como en el primer paso. Por CT_{n-1} podemos suponer que β es continua. Para $x \in B$ definimos $\beta_-(x)$ (respectivamente $\beta_+(x)$) como el máximo (respectivamente el mínimo) de los $y \in A_x$ tales que $y < \beta(x)$ (respectivamente $y > \beta(x)$), si tal y existe. Utilizando de nuevo CT_{n-1} y reduciendo la caja B, podemos suponer que β_- (respectivamente β_+) o bien no está definida para ningún punto de B o bien es continua sobre B. De esta forma el conjunto de puntos $(x, y) \in A \cap (B \times R)$ tales que $y \neq \beta(x)$ es abierto y cerrado en $A \cap (B \times R)$. Reduciendo aún más la caja B, podemos suponer que el grafo de β es o bien disjunto de A o bien está contenido en A. El primer caso contradice la definición de β. En el segundo caso, $(x, \beta(x))$ sería un punto normal para cada $x \in B$, lo que contradice lo que fue probado en el primer paso. De esta forma hemos demostrado que el conjunto de puntos buenos es denso.

Tercer paso. Por DCDC_{n-1}, existe una dcdc de R^{n-1} adaptada al conjunto de los puntos buenos. Sea C una celda de dimensión $n-1$ de R^{n-1}. Como los puntos buenos son densos, cada $x \in C$ es bueno. Tomemos $a \in C$. El conjunto de los $x \in C$ tales que $\#(A_x) = \#(A_a)$ es definible, abierto y cerrado en C. Por la conexión definible de C, tal conjunto es igual a C. Si D es una celda de R^{n-1} de dimensión más pequeña, podemos utilizar el homeomorfismo definible $\theta_D : D \to R^{\dim D}$ y la suposición de que $\mathrm{FU}_{\dim D}$ se verifica para demostrar que $\#(A_x)$ está uniformemente acotado para $x \in D$. Como hay un número finito de celdas, hemos completado la demostración de FU_n. □

Demostración de DCDC_n. Sea A el conjunto de los $(x, y) \in R^{n-1} \times R$ tales que y pertenece a la frontera de uno de los $A_{1,x}, \ldots, A_{k,x}$ (la frontera de S en R es $\overline{S} \setminus \mathrm{int}(S)$). Claramente A es definible y satisface las hipótesis de FU_n. Por tanto $\#(A_x)$ tiene un máximo l para todo $x \in R^{n-1}$, y A es la unión de los grafos de las funciones $f_1, \ldots, f_l$ definidas al principio de la demostración de FU_n. Definimos el *tipo* de $x \in R^{n-1}$ como el conjunto de los siguientes datos:

- $\#(A_x)$,
- los conjuntos de los $j \in \{1, \ldots, k\}$ tales que $f_i(x) \in A_{j,x}$, para $i = 1, \ldots, \#(A_x)$,
- los conjuntos de los $j \in \{1, \ldots, k\}$ tales que $(f_i(x), f_{i+1}(x)) \subset A_{j,x}$, para $i = 0, \ldots, \#(A_x)$ (donde $f_0 = -\infty$ y $f_{\#(A_x)+1}(x) = +\infty$).

Como hay un número finito de tipos posibles y el conjunto de puntos en R^{n-1} con un tipo dado es definible, deducimos de DCDC_{n-1} que existe una dcdc de R^{n-1} tal que dos puntos de la misma celda de R^{n-1} tienen el mismo tipo. Es más, utilizando CT_{n-1}, podemos suponer que la dcdc de R^{n-1} es tal que, para cada celda C y cada $i = 1, \ldots, l$, o bien f_i no está definida para ningún punto de C, o bien f_i está definida y es continua sobre C. La dcdc de R^{n-1} que hemos obtenido, junto con las restricciones de las funciones f_i a las celdas de esta dcdc, definen una dcdc de R^n adaptada a $A_1, \ldots, A_k$. □

Demostración de CT_n.

Primer paso. Supongamos que A es una caja abierta $B \times (a, b) \subset R^{n-1} \times R$. Afirmamos que existe una caja abierta $A' \subset A$ tal que $f_{|A'}$ es continua.

Para cada $x \in B$, tomemos $\lambda(x)$ como el supremo del conjunto de los $y \in (a, b)$ tales que $f(x, \cdot)$ es continua y monótona sobre (a, y). El Teorema de Monotonía 1.2.1 implica que $\lambda(x) > a$ para todo $x \in B$. La función λ es definible. Aplicando CT_{n-1} a λ y reemplazando B por una subcaja abierta más pequeña, podemos suponer que λ es continua. Reemplazando de nuevo B por una subcaja más pequeña, podemos suponer que existe $c > a$ tal que $\lambda > c$. Reemplazando finalmente b por c, podemos suponer que, para cada $x \in B$, $f(x, \cdot)$ es continua y monótona sobre (a, b).

Ahora consideremos el conjunto C de puntos $(x, y) \in B \times (a, b)$ tales que $f(\cdot, y)$ es continua en x. El conjunto C es definible. Se sigue de CT_{n-1} que, para cada $y \in (a, b)$, el conjunto de x tales que $f(\cdot, y)$ es continua en x es denso en B. Por tanto C es denso en A. Aplicando DCDC_n deducimos que C contiene una subcaja abierta de A. Reemplazando A por esta subcaja más pequeña, podemos suponer que para cada $y \in (a, b)$, $f(\cdot, y)$ es continua.

Por tanto basta considerar el caso en el que $f(x, \cdot)$ es continua y monótona sobre (a, b) para todo $x \in B$ y $f(\cdot, y)$ es continua sobre B para cada $y \in (a, b)$. En esta situación, f es continua sobre $B \times (a, b)$. De hecho, tomemos $(x^0, y^0) \in B \times (a, b)$ y sea I un intervalo que contiene a $f(x^0, y^0)$. Por la continuidad de $f(x^0, \cdot)$, encontramos $y^1 < y^0 < y^2$ tales que $f(x^0, y^i) \in I$ para $i = 1, 2$. Por la continuidad de $f(\cdot, y^i)$, encontramos una caja abierta $B' \subset B$ que contiene a x^0, tal que $f(B' \times \{y^i\}) \subset I$ para $i = 1, 2$. Se sigue de la monotonía de $f(x, \cdot)$ que $f(B' \times (y^1, y^2)) \subset I$. Esto prueba la continuidad de f y completa la demostración de nuestra afirmación.

Segundo paso. Ahora podemos probar CT_n. Consideremos el conjunto D de puntos de A donde f es continua. El conjunto D es definible. Por DCDC_n, existe una dcdc de R^n adaptada a A y a D. Si E es una celda abierta contenida en A, el primer paso prueba que $E \cap D$ es no vacío, por lo que $E \subset D$ y f es continua en E. Si F es una celda de dimensión $d < n$ contenida en A, hay un homeomorfismo definible $\theta_F : F \to R^d$. Componiendo f con θ_D^{-1} y aplicando CT_d, obtenemos una partición finita de F en subconjuntos definibles F_i tales que $f_{|F_i}$ es continua. Por tanto, existe una partición finita de A en subconjuntos definibles $A_1, \ldots, A_k$ tal que $f_{|A_i}$ es continua para $i = 1, \ldots, k$. Utilizando DCDC_n, obtenemos una dcdc de R^n adaptada a $A_1, \ldots, A_k$. De esta forma podemos suponer que los A_i son celdas de un dcdc de R^n. □

1.3 Componentes conexas y dimensión

Comenzamos esta sección con un resultado tan importante como el Lema de selección de curvas. Antes de ver este lema, vamos a dar un resultado de gran utilidad. Dice que si se verifica una fórmula "$\forall x \in X \ \exists y \in Y \ (x, y) \in Z$", donde X, Y y Z son conjuntos definibles, entonces y puede ser elegido como una función definible de $x \in X$.

Teorema 1.3.1 (Elección Definible) *Sea A un subconjunto definible de $R^m \times R^n$. Denotemos por $\pi : R^m \times R^n \to R^m$ la proyección sobre las primeras m coordenadas. Existe* *una aplicación definible* $f : \pi(A) \to R^n$ *tal que, para cada* $x \in \pi(A)$, $(x, f(x))$ *pertenece a* A.

Demostración. Basta con considerar el caso $n = 1$. El caso general se sigue descomponiendo la proyección $R^{m+n} \to R^n$ como $R^{m+n} \to R^{m+n-1} \to \ldots \to R^{m+1} \to R^m$.

Consideremos una dcdc de R^{m+1} adaptada a A. La proyección $\pi(A)$ es la unión de las imágenes por π de las celdas contenidas en A. De esta forma, podemos suponer que A es una celda de R^{m+1} y consecuentemente $\pi(A)$ es una celda de R^m. Si A es el grafo de $\zeta_i : A \to R$, podemos tomar $f = \zeta_i$. Si A es una banda (ζ_i, ζ_{i+1}), donde ambas funciones son finitas, tomamos $f = \frac{1}{2}(\zeta_i + \zeta_{i+1})$. Si por ejemplo ζ_i es finita y $\zeta_{i+1} = +\infty$, tomamos $f = \zeta_i + 1$. □

Teorema 1.3.2 (Lema de Selección de Curvas) *Sea* A *un subconjunto definible de* R^n *y* b *un punto de la clausura de* A. *Entonces existe una aplicación definible continua* $\gamma : [0, 1) \to R^n$ *tal que* $\gamma(0) = b$ *y* $\gamma((0, 1)) \subset A$.

Demostración. Sea $X = \{(t, x) \in R \times R^n : x \in A \text{ y } \|x - a\| < t\}$. Sea $\pi : R \times R^n \to R$ la proyección sobre la primera coordenada. Como $a \in \overline{A}$, tenemos que $\pi(X) = \{t \in R : t > 0\}$. Aplicando el Teorema de Elección Definible 1.3.1 y el Teorema de Monotonía 1.2.1, encontramos un $\epsilon > 0$ y una aplicación definible continua $\delta : (0, \epsilon) \to A$ tal que $\|\delta(t) - a\| < t$. Claramente podemos extender δ de forma continua a $\overline{\delta} : [0, \epsilon) \to R^n$ con $\overline{\delta}(0) = a$, y definimos $\gamma : [0, 1) \to R^n$ como $\gamma(t) = \overline{\delta}(t/\epsilon)$. □

El Lema de Selección de Curvas sustituye el uso de sucesiones en muchas situaciones. Por ejemplo, es fácil ver utilizando este lema que una función definible $f : A \to R$ es continua si y sólo si, para cada aplicación definible continua $\gamma : [0, 1) \to A$, $\lim_{t \to 0_+} f(\gamma(t)) = f(\gamma(0))$.

La noción de compacidad es también problemática para cuerpos reales cerrados generales. Por ello sustituimos esta noción por la siguiente. Diremos que un subconjunto $A \subset R^n$ es *cerrado-acotado* si es cerrado y acotado (para nuestra topología definible). Esta definición es compatible con la noción de compacidad definible que aparece en [13]. El siguiente resultado nos muestra que podemos retener las buenas propiedades de la compacidad si trabajamos con objetos definibles cerrados-acotados.

Teorema 1.3.3 *Sea* A *un subconjunto definible de* R^n. *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. A *es cerrado-acotado.*

2. *Cada aplicación definible continua* $(0, 1) \to A$ *se extiende de una manera continua a una aplicación* $[0, 1) \to A$.

3. Para cada función definible continua $f : A \to R$, $f(A)$ es cerrado-acotado.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Una aplicación definible continua $(0,1) \to A$ se extiende de forma continua a una aplicación $[0,1) \to R^n$: cada coordenada de la aplicación tiene un límite cuando $t \to 0_+$ y este límite está en R ya que A está acotado. Como A es cerrado, el valor de la extensión a 0 pertenece a A.

$2 \Rightarrow 3$. Supongamos que $f(A)$ no está acotado. Consideremos

$$X = \{(t,x) \in R \times R^n : x \in A \text{ y } t|f(x)| = 1\}.$$

Entonces la proyección de X sobre la primera coordenada contiene algún intervalo de la forma $(0,\epsilon)$. Utilizando el Teorema de elección definible 1.3.1 y el Teorema de monotonía 1.2.1, y ajustando el intervalo de definición, podemos suponer que existe una aplicación continua $\delta : (0,1) \to A$ tal que $\lim_{t\to 0_+} |f(\delta(t))| = +\infty$. Esto implica que δ no se puede extender de forma continua a una aplicación $[0,1) \to A$, lo que contradice 2. Por tanto, $f(A)$ está acotado. Ahora consideremos b perteneciente a la clausura $\overline{f(A)}$. Consideremos

$$Y = \{(t,x) \in R \times R^n : x \in A \text{ y } |b - f(x)| < t\}.$$

El mismo argumento de antes nos permite encontrar una aplicación continua $\gamma : (0,1) \to A$ que verifica $\lim_{t\to 0_+} f(\gamma(t)) = b$. Por 2, γ se puede extender de forma continua a una aplicación $[0,1) \to A$ y su valor en 0 es un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Esto muestra que $f(A)$ es cerrado.

$3 \Rightarrow 1$. Como la imagen de A por cada función coordenada está acotada, A está acotado. Sea $b \in \overline{A}$. Como la imagen de A por $x \mapsto \|x - b\|$ es cerrada, entonces contiene al 0. Por tanto b pertenece a A, lo que muestra que A es cerrado. □

Corolario 1.3.4 *Sea A un conjunto definible cerrado-acotado. Si B es un conjunto definible definiblemente homeomorfo a A, entonces B es también cerrado-acotado.*

El corolario precedente nos muestra que la propiedad de ser cerrado-acotado, para conjuntos definibles, es intrínseca (en el sentido de que no depende de la inmersión en el espacio afín). La propiedad de ser localmente cerrado es también intrínseca, en el mismo sentido. Recordamos que un subconjunto de R^n es localmente cerrado si es abierto en su clausura.

Proposición 1.3.5 *1) Un conjunto definible $A \subset R^n$ es localmente cerrado si y sólo si cada punto $x \in A$ tiene en A una base de entornos definibles cerrados-acotados.*

2) Si A es un conjunto definible localmente cerrado, y B es un conjunto definible definiblemente homeomorfo a A, entonces B es localmente cerrado.

Demostración. 1) Supongamos en primer lugar que A es localmente cerrado. Tomemos $x \in A$. Existe $r_0 > 0$ tal que la intersección de la bola $B(x, r_0) \subset R^n$ con $\overline{A}$ está contenida en A. De esta forma las intersecciones de $\overline{A}$ con la bolas cerradas $\overline{B}(x,r)$, para $0 < r < r_0$, forman una base de entornos definibles cerrados-acotados de x en A.

Recíprocamente, supongamos que cada punto $x \in A$ tiene un entorno cerrado-acotado $N \subset A$. Tomemos $s > 0$ tal que $B(x,s) \cap A \subset N$. Como N es cerrado-acotado, tenemos que $B(x,s) \cap \overline{A} \subset B(x,s) \cap \overline{N} \subset N \subset A$. Esto muestra que A es localmente cerrado.

2) Se sigue de 1) y del Corolario 1.3.4. □

A partir del resultado anterior es fácil ver que una celda de una dcdc es localmente cerrada y que por tanto cada conjunto definible es una unión finita de conjuntos definibles localmente cerrados.

Fijamos aquí una definición que será de gran importancia en los siguientes capítulos. Sean $X \subset R^m$ e $Y \subset R^n$ dos subconjuntos definibles, y sea $f : X \to Y$ una aplicación definible continua. Diremos que f es *definiblemente propia* si para cada subconjunto definible $K \subset Y$ cerrado-acotado se tiene que $f^{-1}(K) \subset X$ es cerrado-acotado. En [8, Ch. 6.4] podemos encontrar los resultados básicos sobre aplicaciones definiblemente propias.

Estudiamos a continuación las componentes conexas de los conjuntos definibles.

Teorema 1.3.6 *Sea A un subconjunto definible de R^n. Existe una partición de A en un número finito de subconjuntos definibles $A_1, \dots, A_k$ de forma que cada A_i es no vacío, abierto y cerrado en A y definiblemente conexo por caminos. Tal partición es única. Los $A_1, \dots, A_k$ se llaman las* componentes conexas definibles *de A.*

Demostración. Tomemos una dcdc de R^n adaptada a A. Diremos que una celda C es adyacente a una celda D si $C \cap \overline{D} \neq \emptyset$, y denotaremos este hecho por $C \prec D$.

Afirmamos que, si $C \prec D$, cada $x \in C$ se puede unir a cada $y \in D$ mediante un camino definible continuo en $C \cup D$. Tomemos $x \in C \cap \overline{D}$. Por el Lema de Selección de Curvas, existe una aplicación definible continua $\gamma : [0,1) \to C \cup D$ tal que $\gamma(0) = c$ y $\gamma((0,1)) \subset D$. Consideremos $d = \gamma(1/2)$. Los puntos c y d están unidos por un camino definible continuo en $C \cup D$. Como cada celda es definiblemente homeomorfa a un espacio afín, cada punto $x \in C$ puede unirse a c mediante un camino definible continuo en C y cada punto $y \in D$ puede unirse a d mediante un camino definible continuo en D. Esto prueba la afirmación.

Sea $\sim$ la relación de equivalencia más pequeña en el conjunto de celdas contenidas en A que contiene la relación de adyacencia: tenemos que $C \sim D$ si y sólo si existe una cadena $C = C_0 \prec C_1 \succ C_2 \prec \dots \succ C_{2k} = D$ donde todas las celdas C_i están contenidas en A (nótese que podemos tener $C_i = C_{i+1}$). Sean $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k$ las clases de equivalencia de $\sim$, y sea A_i la unión de todas las celdas en $\mathcal{E}_i$. Los A_i forman una partición finita de A en conjuntos definibles. La afirmación demostrada anteriormente y la definición de $\sim$ implican que cada A_i es definiblemente conexo por caminos. Si una celda $C \subset A$ tiene intersección no vacía con $\overline{A_i}$, es adyacente a una celda de $\mathcal{E}_i$, lo que implica que $C \subset A$. Por tanto, cada A_i es cerrado en A. Como los A_i forman una partición finita de A, resulta que son también abiertos.

Supongamos que $A = B_1 \cup \ldots \cup B_l$ es otra partición con las mismas propiedades. Tenemos entonces que $A_i = \bigcup_{j=1}^{l}(A_i \cap B_j)$ y cada $(A_i \cap B_j)$ es definible, abierto y cerrado en A_i. Como A_i es definiblemente conexo, existe exactamente un j tal que $A_i \subset B_j$. Por el mismo argumento, para cada j existe exactamente un i tal que $B_j \subset A_i$. Esto demuestra que las dos particiones coinciden salvo el orden. □

De la demostración se sigue que el número de componentes conexas definibles de A no es más grande que el número de celdas contenidas en A para cualquier dcdc de R^n adaptada a A.

Corolario 1.3.7 *Un conjunto definible definiblemente conexo es definiblemente conexo por caminos.*

Consideremos el caso $R = \mathbb{R}$, es decir, la estructura o-minimal expande el cuerpo de los números reales. Es claro que un conjunto definible conexo es definiblemente conexo. Es también claro que un conjunto definible definiblemente conexo por caminos es conexo por caminos. Por tanto, un conjunto definible es conexo si y sólo si es definiblemente conexo, y las componentes conexas definibles de un conjunto definible son las componentes conexas usuales. Se sigue finalmente que un conjunto definible tiene un número finito de componentes conexas, que son definibles.

A continuación vamos a demostrar que existe una cota uniforme para el número de componentes conexas de una familia definible de subconjuntos de R^n. En primer lugar, damos la noción precisa de familia definible. Sea A un subconjunto definible de $R^p \times R^n$. Para $t \in R^p$, consideramos $A_t = \{x \in R^n : (t, x) \in A\}$. Llamaremos a la familia $(A_t)_{t \in R^p}$ una *familia definible de subconjuntos de R^n parametrizada por R^p.*

El siguiente resultado nos permite ver una dcdc de $R^p \times R^n$ como una "familia definible de dcdc de R^n". Supongamos dada una dcdc de $R^p \times R^n$. Sea $\pi_{p+n,p} : R^p \times R^n \to R^p$ la proyección sobre las primeras p coordenadas. Recordemos que para todas las celdas C de $R^p \times R^n$, las $\pi_{p+n,p}(C)$ son las celdas de una dcdc de R^p.

Proposición 1.3.8 *Sea B una celda de R^p, $a \in B$. Para todas las celdas $C \subset R^p \times R^n$ tales que $\pi_{p+n,p}(C) = B$, consideramos el conjunto $C_a = \{y \in R^n : (a, y) \in C\}$. Entonces estos conjuntos C_a son las celdas de una dcdc de R^n. La dimensión de la celda C_a es igual a $\dim(C) - \dim(B)$.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. El caso $n = 0$ es trivial. Supongamos que $n > 0$ y que la proposición está probada para $n - 1$. La dcdc de $R^p \times R^n$ induce por la proyección $\pi_{p+n,p+n-1} : R^p \times R^n \to R^p \times R^{n-1}$ una dcdc de $R^p \times R^{n-1}$. Para cada celda D de $R^p \times R^{n-1}$, tenemos funciones definibles continuas $\zeta_{D,1} < \ldots < \zeta_{D,l(D)} : D \to R$ y las celdas C de $R^p \times R^n$ tales que $\pi_{p+n,p+n-1}(C) = D$ son o bien grafos de $\zeta_{D,i}$ o bien bandas $(\zeta_{D,i}, \zeta_{D,i+1})$. Por la hipótesis de inducción, las D_a, para todas las celdas D de $R^p \times R^{n-1}$ tales que $\pi_{p+n-1,p}(D) = B$, son las celdas de una dcdc de R^{n-1} y $\dim(D_a) = \dim(D) - \dim(B)$. Para tales celdas D, definimos $(\zeta_{D,i})_a : D_a \to R$ mediante $(\zeta_{D,i})_a(y) = \zeta_{D,i}(a, y)$. Ahora $C \subset R^p \times R^n$ es el grafo de $\zeta_{D,i}$ (respectivamente la banda $(\zeta_{D,i}, \zeta_{D,i+1})$) si y sólo si $C_a \subset R^n$ es el grafo de $(\zeta_{D,i})_a$ (respectivamente la banda $((\zeta_{D,i})_a, (\zeta_{D,i+1})_a)$). Por tanto, las C_a, para todas las celdas C tales que $B = \pi_{p+n,p}(C)$, forman una dcdc de R^n. Si C es un grafo sobre $D = \pi_{p+n,p+n-1}(C)$, tenemos que $\dim(C_a) = \dim(D_a) = \dim(D) - \dim(B) = \dim(C) - \dim(B)$. Si C es una banda, $\dim(C_a) = \dim(D_a) + 1 = \dim(D) - \dim(B) + 1 = \dim(C) - \dim(B)$. □

Teorema 1.3.9 *Sea A un subconjunto definible de $R^p \times R^n$. Existe un $\beta \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $x \in R^p$, el número de componentes conexas definibles de A_x no es más grande que β.*

Demostración. Elegimos una dcdc de $R^p \times R^n$ adaptada a A. Adoptamos la notación de la Proposición 1.3.8 y su demostración. Tomamos $x \in R^p$ y sea B una celda de R^p que contiene a x. La colección de todas las C_x, para una celda C de $R^p \times R^n$ tal que $\pi_{p+n,n}(C) = B$, es una dcdc de R^n adaptada a A_x. Por tanto, el número de componentes conexas definibles de A_x no es más grande que el número de celdas de $R^p \times R^n$. □

Finalmente, estudiamos la dimensión de los conjuntos definibles.

Hemos definido anteriormente la dimensión de una celda de una dcdc. Ahora sea A un subconjunto definible de R^n. Tomemos una dcdc de R^n adaptada a A. Una forma "ingenua" de definir la dimensión de A podría ser el máximo de la dimensión de las celdas contenidas en A. Pero esta definición no es intrínseca. Tenemos que demostrar que la dimensión definida de esta forma no depende de la elección de la dcdc adaptada a A. De hecho vamos a introducir una definición intrínseca de dimensión y veremos que esta definición coincide con la definición "ingenua".

Definición 1.3.10 *La dimensión de un conjunto definible A es el supremo de los d tales que existe una aplicación definible inyectiva $R^d \to A$. Por convención, la dimensión del conjunto vacío es -1.*

Observamos que no es obvio por el momento que la dimensión sea siempre $< +\infty$. Tampoco es claro que esta definición de dimensión coincida con la dada anteriormente para celdas. Estos dos hechos se siguen del siguiente lema.

Lema 1.3.11 *Sea A un subconjunto definible de R^n con interior no vacío. Sea $f : A \to R^n$ una aplicación definible inyectiva. Entonces $f(A)$ tiene interior no vacío.*

Demostración. Demostramos el lema por inducción sobre n. Si $n = 1$, A es infinito, luego $f(A) \subset R$ es infinito y por tanto contiene un intervalo. Supongamos ahora que

$n > 1$ y que el lema está demostrado para todo $m < n$. Utilizando la continuidad a trozos 1.2.8, podemos suponer que f es continua. Tomemos una dcdc de R^n adaptada a $f(A)$. Si $f(A)$ tiene interior vacío, no contiene ninguna celda abierta. Por tanto $f(A)$ es la unión de celdas no abiertas $C_1, \ldots, C_k$ y, para $i = 1, \ldots, k$ hay un homeomorfismo definible $C_i \to R^{m_i}$ con $m_i < n$. Tomemos una dcdc de R^n adaptada a los $f^{-1}(C_i)$. Como $A = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(C_i)$ tiene interior no vacío, uno de los conjuntos $f^{-1}(C_i)$, digamos $f^{-1}(C_1)$, debe contener una celda abierta B. La restricción de f a B nos da una aplicación definible continua inyectiva $B \to C_1$. Como B es definiblemente homeomorfa a R^n y C_1 es definiblemente homeomorfa a R^m con $m < n$, obtenemos una aplicación definible continua inyectiva $g : R^n \to R^m$. Tomemos $a = (0, \ldots, 0) \in R^{n-m}$ y consideremos la aplicación $g_a : R^m \to R^m$ definida por $g_a(x) = g(a, x)$. Podemos aplicar la hipótesis de inducción a g_a. Esto implica que $g_a(R^m)$ tiene interior no vacío en R^m. Tomemos un punto $c = g_a(b)$ en el interior de $g_a(R^m)$. Como g es continua podemos encontrar $x \in R^{n-m}$, $x \neq a$ y cercano a a, tal que $g(x, b) \in g_a(R^m)$. Existe por tanto $y \in R^m$ tal que $g(x, b) = g_a(y) = g(a, y)$, lo que contradice el hecho de que g sea inyectiva. Así, $f(A)$ tiene interior no vacío.

□

Se tiene de esta forma que la dimensión de R^d es d, ya que no existe ninguna aplicación definible inyectiva de R^e a R^d si $e > d$. En caso contrario, la composición de tal aplicación con la inmersión difeomórfica de R^d en $R^e = R^d \times R^{e-d}$ como $R^d \times \{0\}$ contradiría el Lema 1.3.11. Observamos que los conjuntos definibles de dimensión 0 son los conjuntos finitos de puntos.

La dimensión de una celda, tal como la hemos visto aquí, coincide con la noción de dimensión de una celda vista en 1.2.3. Basta observar que la dimensión de un conjunto definible es invariante respecto a biyecciones definibles.

Proposición 1.3.12 *1. Si $A \subset B$ son conjuntos definibles,* $\dim A \leq \dim B$.

2. *Si A y $f : A \to R^n$ son definibles,* $\dim(f(A)) \leq \dim(A)$. *Si además f es inyectiva,* $\dim(f(A)) = \dim(A)$.

3. *Si A y B son subconjuntos definibles de R^n,*

$$\dim(A \cup B) = \max(\dim A, \dim B).$$

4. *Sea A un subconjunto definible de R^n y tomemos una dcdc de R^n adaptada a A. Entonces la dimensión de A es el máximo de las dimensiones de las celdas contenidas en A.*

5. *Si A y B son conjuntos definibles,*

$$\dim(A \times B) = \dim A + \dim B.$$

Demostración. El primer apartado es una consecuencia inmediata de la definición.

2. La segunda parte es obvia ya que la dimensión es invariante por biyecciones definibles. Si f es definible, obtenemos por la elección definible una aplicación definible $g : f(A) \to A$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_{f(A)}$. Por tanto g es inyectiva y $\dim(f(A)) = \dim(g(f(A))) \leq \dim(A)$.

3. La desigualdad $\dim(A \cup B) \geq \max(\dim A, \dim B)$ se sigue de 1. Ahora sea $f : R^d \to A \cup B$ una aplicación definible inyectiva. Tomando una dcdc de R^d adaptada a $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$, vemos que $f^{-1}(A)$ o $f^{-1}(B)$ contiene una celda de dimensión d. Como f es inyectiva, tenemos que $\dim A \geq d$ o que $\dim B \geq d$. Esto demuestra el desigualdad inversa $\dim(A \cup B) \leq \max(\dim A, \dim B)$.

4. Es una consecuencia inmediata de 3.

5. Por 3, es suficiente considerar el caso en el que A y B son celdas, y este caso es trivial ya que $A \times B$ es definiblemente homeomorfo a $R^{\dim A} \times R^{\dim B}$. □

A continuación vamos a estudiar la variación de la dimensión en una familia definible. Recordemos que un subconjunto definible A de $R^p \times R^n$ puede considerarse como una familia definible $(A_x)_{x \in R^p}$ de subconjuntos de R^n, donde $A_x = \{y \in R^n : (x, y) \in A\}$.

Teorema 1.3.13 *Sea A un subconjunto definible de $R^p \times R^n$. Para $d \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, definamos $X_d = \{x \in R^p : \dim(A_x) = d\}$. Entonces X_d es un subconjunto definible de R^p y $\dim(A \cap (X_d \times R^n)) = \dim(X_d) + d$.*

Demostración. Tomemos una dcdc de $R^p \times R^n$ adaptada a A y utilicemos la Proposición 1.3.8. Sea B una celda de R^p. Para cada $x \in B$, A_x es la unión de las celdas $C_x \subset R^n$, para todas las celdas $C \subseteq R^p \times R^n$ contenidas en A tales que $\pi_{p+n,p}(C) = B$. Es más, $\dim(C_x) = \dim C - \dim B$. Se sigue que, para cada $x \in B$, $\dim A_x = \dim(A \cap (B \times R^n)) - \dim B$. Por tanto, cada X_d es la unión de algunas celdas B de R^p. Esto implica que X_d es definible. Como $\dim(A \cap (B \times R^n)) = \dim B + d$ para las celdas $B \subset X_d$, tenemos que $\dim(A \cap (X_d \times R^n)) = \dim X_d + d$. □

Corolario 1.3.14 *Sean A y B subconjuntos definibles de $R^p \times R^n$, con A no vacío. Supongamos que, para cada $x \in R^p$, $\dim(B_x) < \dim(A_x)$ o B_x es vacío. Entonces $\dim B < \dim A$.*

Acabamos este apartado sobre la dimensión mostrando que la dimensión se comporta bien con respecto a la clausura. El siguiente lema nos será de gran utilidad.

Lema 1.3.15 *Sea A un subconjunto definible de $R^p \times R^n$. Sea M el conjunto de los $x \in R^p$ tales que la clausura de A_x en R^n es diferente de $(\overline{A})_x$. Entonces M es definible y $\dim M < p$. En particular, si $p = 1$, M es finito.*

Demostración. Nótese que siempre tenemos $\overline{A_x} \subset (\overline{A})_x$, ya que $(\overline{A})_x$ es cerrado y contiene a A_x.

Es fácil ver que M es definible. Supongamos entonces que $\dim(M) = p$. Entonces M contiene una celda abierta C de una dcdc de R^p. Para cada $x \in C$, podemos encontrar una caja $B = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ tal que $B \cap (\overline{A})_x \neq \emptyset$ y $B \cap A_x = \emptyset$. Por el Teorema de Elección Definible 1.3.1 y el Teorema de Continuidad a Trozos 1.2.8, podemos suponer que las a_i y b_i son funciones definibles continuas de $x \in C$. Sea U el conjunto de los $(x, y_1, \ldots, y_n) \in C \times R^n$ tales que $a_i(x) < y_i < b_i(x)$ para $i = 1, \ldots, n$. El conjunto U es abierto en $R^p \times R^n$, disjunto de A y tiene intersección no vacía con $\overline{A}$. Esto es imposible, por lo que $\dim M < p$. □

Teorema 1.3.16 *Sea A un subconjunto definible no vacío de R^n. Entonces*

$$\dim(\overline{A} \setminus A) < \dim(A).$$

Se sigue entonces que $\dim(\overline{A}) = \dim A$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. El teorema es obvio para $n = 1$. Supongamos que $n > 1$ que el teorema está probado para $n - 1$. Denotamos por $\xi_1, \ldots, \xi_n$ las funciones coordenadas en R^n. Para $i = 1, \ldots, n$, sea $\mathrm{cl}_i(A)$ el conjunto de los $x \in R^n$ tales que x pertenece a la clausura de la intersección de A con el hiperplano $\xi_i^{-1}(\xi_i(x))$.

Primer paso. Afirmamos que $\overline{A} \setminus A$ tiene dimensión no mayor que el máximo de 0 y $\dim(\mathrm{cl}_i(A) \setminus A)$ para $i = 1, \ldots, n$. Tenemos que $\mathrm{cl}_i(A) \subset \overline{A}$. Aplicando el Lema 1.3.15 con $p = 1$, después de una permutación de las coordenadas que lleva el i-ésima coordenada a la primera posición, tenemos que la diferencia $\overline{A} \setminus \mathrm{cl}_i(A)$ está contenida en un número finito de hiperplanos $\xi_i^{-1}(a_{i,j})$, para $j = 1, \ldots, l(i)$. Por tanto, $\overline{A} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_i(A)$ está contenida en el conjunto finito formado por los $\prod_{i=1}^{n} l(i)$ puntos $(a_{1,j_1}, \ldots, a_{n,j_n}) \in R^n$. De aquí se sigue la afirmación.

Segundo paso. Afirmamos que $\dim(\mathrm{cl}_i(A) \setminus A) < \dim A$ para $i = 1, \ldots, n$. Tomemos $a \in R$. Como el hiperplano $\xi_1^{-1}(a)$ tiene dimensión $n - 1$, la hipótesis de inducción implica que $\overline{A \cap \xi_1^{-1}(a)} \setminus (A \cap \xi_1^{-1}(a))$ es vacío o tiene dimensión estrictamente más pequeña que la dimensión de $A \cap \xi_1^{-1}(a)$. Nótese que $\overline{A \cap \xi_1^{-1}(a)} \setminus (A \cap \xi_1^{-1}(a)) = (\mathrm{cl}_1(A) \setminus A) \cap \xi_1^{-1}(a)$. De esta forma, aplicando el Corolario 1.3.14, obtenemos que $\dim(\mathrm{cl}_1(A) \setminus A) < \dim A$. Permutando las coordenadas demostramos la afirmación.

Con esto podemos completar la demostración del teorema. Los pasos 1 y 2 implican que $\dim(\overline{A} \setminus A) \leq 0$ o $\dim(\overline{A} \setminus A) < \dim A$. Si $\dim A = 0$, A es cerrado. Por tanto, para cada A no vacío, $\dim(\overline{A} \setminus A) < \dim A$. □

1.4 Triangulación definible

En esta Sección veremos que la topología de los conjuntos definibles puede ser enteramente codificada en términos finitos. Esto se hará mediante una triangulación. Debido a su dificultad técnica, no demostraremos aquí todos los resultados, haciendo referencia al trabajo de M. Coste [5].

Como vimos en la sección anterior, la dcdc es una herramienta muy poderosa. Pero no nos da suficiente control sobre la posición relativa de las celdas cuando éstas no están contenidas en el mismo cilindro. En particular, uno no puede, en general, reconstruir la topología de un conjunto definible a partir de su descomposición en celdas de una dcdc adaptada. La principal dificultad es que no tenemos control sobre cómo se comporta una función definible continua $\zeta : C \to R$ sobre una celda C cuando uno se aproxima al borde de C. La función ζ, incluso si está acotada, puede que no se extienda a una función continua sobre $\overline{C}$. Por ejemplo, la función definible continua ζ definida sobre el conjunto de los $(x, y) \in R^2$ tales que $x > 0$ y dada por $\zeta(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2)$ no se extiende de forma continua a $(0, 0)$. Todos los puntos de la forma $(0, 0, z)$ con $-1 \leq z \leq 1$ pertenecen a la clausura Γ del grafo de ζ. El conjunto definible $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ tiene dimensión 2, pero la restricción a Γ de la proyección $R^3 \to R^2$ sobre las primeras dos coordenadas no tiene fibras finitas.

Antes de establecer los resultados sobre triangulaciones, vamos a recordar algunas definiciones.

Sean $a_0, \ldots, a_d$ puntos de R^n que son afínmente independientes (es decir, no están contenidos en un subespacio afín de dimensión $d-1$). El *d-símplice* con vértices $a_0, \ldots, a_d$ es

$$[a_0, \ldots, a_d] =$$

$$\{x \in R^n : \exists \lambda_0, \ldots, \lambda_d \in [0, 1] \quad \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1 \text{ y } x = \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_d a_d\}.$$

El correspondiente *símplice abierto* es

$$\{x \in R^n : \exists \lambda_0, \ldots, \lambda_d \in (0, 1] \quad \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1 \text{ y } x = \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_d a_d\}.$$

Denotaremos por σ el símplice abierto correspondiente al símplice $\bar{\sigma}$. Una *cara* del símplice $\bar{\sigma} = [a_0, \ldots, a_d]$ es un símplice $\bar{\tau} = [b_0, \ldots, b_e]$ tal que

$$\{b_0, \ldots, b_e\} \subset \{a_0, \ldots, a_d\}.$$

Un *complejo simplicial finito* en R^n es una colección finita $K = \{\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_p\}$ de símplices $\bar{\sigma}_i \subset R^n$ tales que, para cada $\bar{\sigma}_i, \bar{\sigma}_j \in K$, la intersección $\bar{\sigma}_i \cap \bar{\sigma}_j$ es una cara común a $\bar{\sigma}_i$ y $\bar{\sigma}_j$.

Consideramos el conjunto $|K| = \bigcup_{\bar{\sigma}_i \in K} \bar{\sigma}_i$; éste es un conjunto semialgebraico de R^n. Un *poliedro* en R^n es un subconjunto P de R^n tal que existe un complejo simplicial finito K en R^n con $P = |K|$. Un tal K se llamará una *descomposición simplicial* de P. Nótese que un poliedro es un conjunto definible cerrado y acotado. En lo siguiente, convendremos que si un símplice $\bar{\sigma}$ pertenece a un complejo simplicial finito K, entonces todas las caras de $\bar{\sigma}$ también pertenecen a K. Con este convención, $|K|$ es la unión disjunta de todos los símplices abiertos σ para $\bar{\sigma} \in K$.

También utilizaremos la noción de *cono*. Sea B un poliedro en R^n y $a \in R^n \setminus B$ tal que cada semirrecta que parte de a interseca a B en a lo más un punto (es decir, para cada $x \in B$, $[a, x] \cap B = \{x\}$). El *cono de base B y vértice a* es el poliedro

$$a * B = \{tx + (1-t)a : x \in B \text{ y } t \in [0, 1]\}.$$

Dada una descomposición simplicial de B, obtenemos una descomposición simplicial de $a * B$ tomando todos los $a * \bar{\sigma}$ para cada símplice $\bar{\sigma}$ de la descomposición simplicial de B.

El primer teorema que queremos mostrar nos habla de la existencia de triangulaciones para conjuntos definibles.

Teorema 1.4.1 *Sea A un subconjunto definible cerrado-acotado de R^n, y sean B_i, $i = 1, \ldots, k$, subconjuntos definibles de A. Entonces existe un complejo simplicial finito K con vértices en $\mathbb{Q}^n$ y un homeomorfismo definible $\Phi : |K| \to A$ tal que cada B_i es una unión de imágenes por Φ de símplices abiertos de K.*

El siguiente resultado nos muestra que no sólo podemos encontrar triangulaciones de conjuntos definibles, sino también de funciones definibles.

Teorema 1.4.2 *Sea X un subconjunto definible cerrado-acotado de R^n y $f : X \to R$ una función definible continua. Entonces existe un complejo simplicial finito K en R^{n+1} y un homeomorfismo definible $\rho : |K|_R \to X$ tal que $f \circ \rho$ es una función afín sobre cada símplice de K. Es más, dado un número finito de subconjuntos definibles $B_1, \ldots, B_k$ de X, podemos elegir la triangulación $\rho : |K|_R \to X$ de modo que cada B_i es una unión de imágenes de símplices abiertos de K.*

Podemos reemplazar X por el conjunto $A = \{(f(x), x) \in R \times R^n : x \in X\}$ que es definiblemente homeomorfo a X. Este conjunto es un subconjunto definible de R^{n+1} cerrado-acotado. Sea $\pi = \pi_{n+1,1} : R^{n+1} \to R$ la proyección sobre la primera coordenada. Para demostrar el teorema anterior, basta construir un complejo simplicial finito K en R^{n+1} y un homeomorfismo definible $\Phi : |K| \to A$ tal que $\pi \circ \Phi = \pi|_{|K|}$. De hecho, la composición de π con el homeomorfismo $X \to A$ es f. Por tanto el Teorema 1.4.2 se sigue de la siguiente proposición.

Proposición 1.4.3 *Sea A un subconjunto definible cerrado-acotado de $R \times R^n$ y sean B_i, $i = 1, \ldots, k$, subconjuntos definibles de A. Sea $\pi : R \times R^n \to R$ la proyección sobre* *la primera coordenada. Entonces existe un complejo simplicial finito K con vértices en $R \times \mathbb{Q}^n$ y un homeomorfismo definible $\Phi : |K| \to A$ tal que $\pi \circ \Phi = \pi|_{|K|}$ y cada B_i es la unión de imágenes por Φ de símplices abiertos de K.*

Los vértices del complejo simplicial construido en la proposición anterior tienen todas sus coordenadas racionales salvo la primera. Podemos solucionar esto, es decir, encontrar la primeras coordenadas de los vértices en $\mathbb{Q}$ mediante la Proposición 4.8 de [5].

El resultado anterior de triangulación de funciones definibles continuas con dominio cerrado-acotado no puede generalizarse para todas las aplicaciones definibles continuas. Consideremos por ejemplo la aplicación $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x, xy)$. No es posible encontrar triangulaciones $\Phi : |K| \to [0,1]^2$ y $\Psi : |L| \to f([0,1]^2)$ tales que $\Psi^{-1} \circ f \circ \Phi$ sea afín sobre cada símplice de K.

Podemos deducir de la triangulación de funciones definibles un resultado que habitualmente se demuestra de otras formas (como consecuencia del teorema de Hardt en [8]). Si $a \in R^n$ y $r > 0$, denotamos por $S(a,r)$ la esfera de centro a y radio r.

Teorema 1.4.4 (Estructura Cónica Local) *Sea $A \subset R^n$ un conjunto definible cerrado, a un punto de A. Podemos encontrar un $r > 0$ de forma que existe un homeomorfismo definible h del cono con vértice a y base $S(a,r) \cap A$ en $\overline{B}(a,r) \cap A$, que satisface $h|_{S(a,r)\cap A} = \mathrm{Id}$ y $\|h(x) - a\| = \|x - a\|$ para todo x en el cono.*

Demostración. Consideremos una triangulación de la función $f : A \cap \overline{B}(a,1) \to R : x \mapsto \|x - a\|$. Obtenemos entonces un homeomorfismo definible $\Phi : |K| \to A \cap \overline{B}(a,1)$ tal que $f \circ \Phi$ es afín sobre cada símplice de K. Como f alcanza su mínimo en a, este punto a es la imagen de un vértice w de K. Sea $\nu > 0$ el mínimo de los valores de $f \circ \Phi$ sobre todos los otros vértices de K, y tomemos r tal que $0 < r < \nu$. Tomemos un punto $y \in |K|$ tal que $f \circ \Phi(y) = r$, es decir, $\Phi(y) \in S(a,r) \cap A$. El punto y pertenece a un símplice $[v_0, \ldots, v_d]$ de K. Tenemos que $y = \sum_{i=0}^d \lambda_i v_i$ con $\sum_{i=0}^d \lambda_i = 1$. Como $f \circ \Phi(y) = \sum_{i=0}^d \lambda_i f \circ \Phi(v_i)$, uno de los v_i, digamos v_0, debe ser w. Definamos h sobre el cono con vértice a y base $S(a,r) \cap A$ mediante $h(ta + (1-t)\Phi(y)) = \Phi(tw + (1-t)y)$. Es fácil ver que h tiene las propiedades requeridas. □

Capítulo 2

Fibras genéricas de familias definibles

En este capítulo vamos a describir una construcción que resulta fundamental para el estudio de familias definibles. Vamos a incluir R^m en un espacio más grande $\widetilde{R^m}$. Asociaremos a cada punto $\alpha \in \widetilde{R^m}$ un cuerpo real cerrado $k(\alpha)$ con una estructura o-minimal. Entonces, dada una familia definible $X \subset R^m \times R^n$ y $\alpha \in \widetilde{R^m}$, definiremos la fibra X_α, que será un subconjunto definible de $k(\alpha)^n$. Si α es la imagen por la inclusión de un punto $t \in R^m$, entonces $k(\alpha)$ será R y X_α será la fibra usual X_t. Las cosas interesantes ocurrirán para las "fibras genéricas" X_α que se corresponden con puntos $\alpha \in \widetilde{R^m} \setminus R^m$. Relacionaremos la propiedades de la fibra genérica X_α con propiedades de la familia X sobre subconjuntos "grandes" del espacio de parámetros R^m. Esto nos permitirá deducir resultados sobre trivialidad de familias definibles a partir de los teoremas de triangulación del capítulo anterior.

Las herramientas que vamos a introducir son realmente una reformulación de nociones y resultados clásicos de teoría de modelos. Esta reformulación está sugerida por la teoría del espectro real (ver [2]), y se puede encontrar en [5, Ch. 3].

2.1 El espacio de ultrafiltros de conjuntos definibles

Sea $\mathcal{S}_m$ el álgebra booleana de los subconjuntos definibles de R^m. El contenido de esta sección es la construcción del espacio de Stone del álgebra booleana $\mathcal{S}_m$ (ver [1]).

Recordemos que un *ultrafiltro* de $\mathcal{S}_m$ es un subconjunto α de $\mathcal{S}_m$ tal que

1. $R^m \in \alpha$
2. $A \cap B \in \alpha$ si y sólo si $A \in \alpha$ y $B \in \alpha$
3. $\emptyset \notin \alpha$

4. $A \cup B \in \alpha$ si y sólo si $A \in \alpha$ o $B \in \alpha$.

Diremos que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos definibles de R^m *generan el ultrafiltro* α si α es el conjunto de los conjuntos definibles $A \subset R^m$ tales que existe $B \in \mathcal{F}$ con $B \subset A$. Si $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de subconjuntos definibles de R^m, cerrada por intersecciones finitas, entonces $\mathcal{F}$ genera un ultrafiltro si y sólo si $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y, para cada $A \in \mathcal{S}_m$, o bien A o bien $R^m \setminus A$ contienen un $B \in \mathcal{F}$.

Denotaremos por $\widetilde{R^m}$ al espacio de ultrafiltros de subconjuntos definibles de R^m.

Si t es un punto de R^m, los subconjuntos definibles de R^m que contienen a t forman un ultrafiltro α_t. Llamaremos a este ultrafiltro el *ultrafiltro principal* generado por t. La aplicación $t \mapsto \alpha_t$ nos permite ver R^m como un subconjunto de $\widetilde{R^m}$.

Ejemplo 2.1.1 *Puntos de $\widetilde{R}$. No es difícil ver que las siguientes familias generan ultrafiltros de $\mathcal{S}_1$:*

1. *La familia de todos los intervalos $(x, +\infty)$ para $x \in R$.*

2. *La familia de todos los intervalos $(-\infty, x)$ para $x \in R$.*

3. *Para un punto fijo $a \in R$, la familia de todos los intervalos $(a, a+\epsilon)$ para $\epsilon > 0$.*

4. *Para un punto fijo $a \in R$, la familia de todos los intervalos $(a-\epsilon, a)$ para $\epsilon > 0$.*

Si $R = \mathbb{R}$, se puede ver que de hecho todos los puntos de $\widetilde{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ se corresponden con uno de los cuatro casos anteriores.

Ejemplo 2.1.2 *Construcción de puntos de $\widetilde{R^m}$ por inducción. Sea α un punto de $\widetilde{R^m}$. Entonces la familia de subconjuntos definibles de R^{m+1} de la forma*

$$\{(x,y) \in R^m \times R : x \in A \text{ y } 0 < y < f(x)\}$$

donde $A \in \alpha$ y $f : A \to R$ es una función definible positiva, genera un ultrafiltro $\alpha_\dagger$ de $\mathcal{S}_{m+1}$.

Ejemplo 2.1.3 *Dimensión de un punto de $\widetilde{R^m}$. Para $\alpha \in \widetilde{R^m}$, definimos $\dim \alpha$ como el mínimo de $\dim A$ para $A \in \alpha$. Tenemos que $\dim \alpha = d$ si y sólo si α está generado por una familia de conjuntos definibles de dimensión d. Es fácil ver que existe un ultrafiltro de dimensión m en $\widetilde{R^m}$, y que $\dim A$ es el máximo de $\dim \alpha$ para $\alpha \ni A$.*

Ahora vamos a dar una topología a $\widetilde{R^m}$. Consideramos $\widetilde{R^m}$ como un subconjunto del conjunto potencia $2^{\mathcal{S}_m}$, identificando al ultrafiltro α con su función característica $\mathbf{1}_\alpha : \mathcal{S}_m \to 2 = \{0, 1\}$. Equipamos 2 con la topología discreta y $2^{\mathcal{S}_m}$ con la topología producto. Por el teorema de Tychonoff, $2^{\mathcal{S}_m}$ es compacto y Hausdorff. Tomamos entonces como topología en $\widetilde{R^m}$ la topología inducida por la topología de $2^{\mathcal{S}_m}$.

Proposición 2.1.4 *La topología en $\widetilde{R^m}$ tiene una base de conjuntos abiertos y cerrados que consiste en todos los conjuntos $\widetilde{A} = \{\alpha \in \widetilde{R^m} : \alpha \ni A\}$ para $A \in \mathcal{S}_m$. El espacio $\widetilde{R^m}$ es compacto Hausdorff.*

Demostración. En primer lugar, obsérvese que la operación $A \mapsto \widetilde{A}$ preserva uniones finitas, intersecciones finitas y pasos al complementario.

La topología producto de $2^{\mathcal{S}_m}$ induce sobre $\widetilde{R^m}$ la topología que tiene como base de abiertos los conjuntos de la forma

$$U = \{\alpha \in \widetilde{R^m} : \mathbf{1}_\alpha(A_1) = \cdots = \mathbf{1}_\alpha(A_k) = 1 \text{ y } \mathbf{1}_\alpha(B_1) = \cdots = \mathbf{1}_\alpha(B_l) = 0\},$$

donde $(A_1, \ldots, A_k)$ y $(B_1, \ldots, B_k)$ son familias finitas de elementos de $\mathcal{S}_m$. Nótese que $U = \widetilde{A}$, donde $A = \bigcap_{i=1}^k A_i \cap \bigcap_{j=1}^l (R^m \setminus B_j)$. Esto demuestra la primera afirmación de la proposición.

Finalmente, cada una de las cuatro condiciones de la definición de un ultrafiltro define un subconjunto cerrado de $2^{\mathcal{S}_m}$. Por tanto, $\widetilde{R^m}$ es cerrado en $2^{\mathcal{S}_m}$. Esto prueba la segunda afirmación. $\square$

Es fácil ver que la aplicación $A \mapsto \widetilde{A}$ es una biyección de $\mathcal{S}_m$ sobre el conjunto de subconjuntos abiertos y cerrados de $\widetilde{R^m}$.

2.2 La estructura o-minimal asociada a un ultrafiltro

Si A es un subconjunto definible de R^m, denotamos por $\mathrm{Def}(A, R)$ el anillo de funciones definibles $A \to R$. Dado $\alpha \in \widetilde{R^m}$ definimos $k(\alpha)$ como el límite inductivo de los anillos $\mathrm{Def}(A, R)$ para $A \in \alpha$. Esto significa lo siguiente. Formamos a la unión disjunta $\bigsqcup_{A\in\alpha} \mathrm{Def}(A, R)$. Decimos que dos elementos $f : A \to R$ y $g : B \to R$ de esta unión disjunta son equivalentes si existe $C \in \alpha$, $C \subset A \cap B$, tal que $f_{|C} = g_{|C}$. De esta forma $k(\alpha)$ es el conjunto de clases de equivalencia para esta relación. Denotamos por $f(\alpha) \in k(\alpha)$ la clase de equivalencia de $f : A \to R$. Por definición, $f(\alpha) = g(\alpha)$ si y sólo si f y g coinciden sobre un conjunto definible perteneciente a α. El límite inductivo $k(\alpha)$ tiene una estructura canónica de $R-$álgebra conmutativa: la suma $f(\alpha) + g(\alpha)$ es $(f + g)(\alpha)$, donde $f + g$ está definida sobre la intersección de los dominios de f y de g, que pertenece a α. Tenemos una definición similar para el producto $f(\alpha)g(\alpha)$. La imágenes de elementos de R son las clases de la funciones contantes.

Decimos que $f(\alpha) \in k(\alpha)$ es *positivo* si f es positiva sobre un conjunto definible perteneciente a α. Esta definición no depende de la elección del representante f.

Proposición 2.2.1 *La $R-$álgebra conmutativa $k(\alpha)$, con elementos positivos definidos como arriba, es un cuerpo ordenado que es una extensión ordenada de R.*

Demostración. Comprobamos que, dado un elemento $f(\alpha)$ de $k(\alpha)$, tenemos exactamente una de las tres posibilidades $f(\alpha) > 0$, $f(\alpha) = 0$ y $-f(\alpha) > 0$. Esto es porque el dominio de f puede dividirse en tres conjuntos definibles donde f es positiva, cero o negativa, respectivamente. Exactamente uno de esos tres conjuntos pertenece a α. Es más, si $f(\alpha) \neq 0$, entonces $1/f$ está definida sobre un conjunto definible que pertenece a α. Por tanto, $(1/f)(\alpha)$ es el inverso de $f(\alpha)$ en $k(\alpha)$. La otras verificaciones son sencillas.

□

Vamos a construir una estructura o-minimal sobre $k(\alpha)$. Para realizar esta construcción, necesitamos la noción de fibra de una familia definible $X \subset R^p \times R^n$ en un punto $\alpha \in \widetilde{R^p}$. Si $f = (f_1, \dots, f_n) : A \to R^n$ es una aplicación definible con $A \in \alpha$, denotamos por $f(\alpha)$ el punto $(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) \in k(\alpha)^n$.

Definición 2.2.2 *Sea X un subconjunto definible de $R^p \times R^n$. La* fibra *de X en $\alpha \in \widetilde{R^p}$ es el conjunto X_α de aquellos $f(\alpha)$ en $k(\alpha)^n$ tales que existe $A \in \alpha$ sobre el que f está definida y $(t, f(t)) \in X$ para todo $t \in A$.*

En otras palabras, $f(\alpha)$ pertenece a X_α si y sólo si existe un conjunto $A \in \alpha$ tal que $f(t) \in X_t$ para todo $t \in A$. Esta definición tiene sentido porque si tomamos otro representante g de $f(\alpha)$ (i.e. $g(\alpha) = f(\alpha)$), g y f coinciden sobre algún $B \in \alpha$ y, por tanto, $g(t) \in X_t$ para todo $t \in A \cap B$, con $A \cap B \in \alpha$.

Merece la pena observar lo que nos dan las construcciones y definiciones precedentes en el caso de un ultrafiltro principal α_t correspondiente a un punto $t \in R^p$. Como el ultrafiltro α_t está generado por el conjunto unitario $\{t\}$, el límite inductivo $k(\alpha_t)$ es (canónicamente isomorfo a) $\mathrm{Def}(\{t\}, R) = R$. Es más, si $f : A \to R$ es una función definible y $A \ni t$, entonces $f(\alpha_t) = f(t) \in R$. Finalmente, dado un subconjunto definible $X \subset R^p \times R^n$, su fibra X_{α_t} es simplemente X_t.

Sea $\mathcal{S}_n(\alpha)$ la familia de todas las fibras X_α, siendo X un subconjunto definible de $R^n \times R^p$. Tenemos entonces el siguiente

Teorema 2.2.3 *La colección $(\mathcal{S}_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ es una estructura o-minimal que expande el cuerpo ordenado $k(\alpha)$. En particular, $k(\alpha)$ es real cerrado.*

Demostración. Véase [5, Th. 5.8]. Observamos que en la demostración resulta fundamental es uso del Teorema de Elección Definible y el Teorema de Existencia de DCDC.

□

La demostración del teorema anterior también nos muestra que tomar fibras en α conmuta con las operaciones booleanas y con las proyecciones. Vamos a formalizar esta observación para de esta forma tener una herramienta útil para trasladar propiedades de la fibra X_α a propiedades de las fibras X_t para todos los t pertenecientes a un conjunto definible que pertenece a α. En primer lugar, necesitamos más notación. Consideramos las *familias definibles de fórmulas* $\Phi_t(x)$, donde t recorre R^p, que se construyen de acuerdo a las siguientes reglas:

1. Si $X \subset R^p \times R^n$ es definible, $x \in X_t$ es una familia definible de fórmulas.

2. Una ecuación $P(x) = 0$ o desigualdad $P(x) > 0$ polinomial con coeficientes en R es una familia (constante) definible de fórmulas.

3. Si $\Phi_t(x)$ y $\Psi_t(x)$ son familias definibles de fórmulas, entonces $\Phi_t(x) * \Psi_t(x)$ (donde $*$ es "y", "o", $\Rightarrow$ o $\Leftrightarrow$) y la negación "no $\Phi_t(x)$" son familias definibles de fórmulas.

4. Si $\Phi_t(x, y)$ es una familia definible de fórmulas (con y recorriendo R^m) e $Y \subset R^m \times R^p$ es definible, las cuantificación existencial $\exists y \in Y_t \; \Phi_t(x, y)$ y la cuantificación universal $\forall y \in Y_t \; \Phi_t(x, y)$ son familias definibles de fórmulas.

Dada una familia definible de fórmulas $\Phi_t(x)$ y $\alpha \in \widetilde{R^p}$, definimos la *fórmula fibra* $\Phi_\alpha(x)$ de la siguiente forma:

1. Si $\Phi_t(x)$ es $x \in X_t$, $\Phi_\alpha(x)$ es $x \in X_\alpha$.

2. Si $\Phi_t(x)$ es la familia constante $P(x) = 0$ o $P(x) > 0$, $\Phi_\alpha(x)$ es $P(x) = 0$ o $P(x) > 0$.

3. Si $\Phi_t(x)$ es $\Theta_t(x) * \Psi_t(x)$ o "no $\Theta_t(x)$", $\Phi_\alpha(x)$ es $\Theta_\alpha(x) * \Psi_\alpha(x)$ o "no $\Theta_\alpha(x)$", respectivamente.

4. Si $\Phi_t(x)$ es $\exists y \in Y_t \; \Psi_t(x, y)$ o $\forall y \in Y_t \; \Psi_t(x, y)$, $\Phi_\alpha(x)$ es $\exists y \in Y_\alpha \; \Psi_\alpha(x, y)$ o $\forall y \in Y_\alpha \; \Psi_\alpha(x, y)$, respectivamente.

Nótese que, si $\Phi_\alpha(x)$ es una fórmula fibra con $x = (x_1, \ldots, x_n)$, el conjunto de los $x \in k(\alpha)^n$ tales que $\Phi_\alpha(x)$ se verifica es definible en la estructura o-minimal sobre $k(\alpha)$.

Veamos un ejemplo. A la familia definible de fórmulas

$$\forall x \in X_t \; \exists \epsilon > 0 \; \forall y \in R^n (\|x - y\| < \epsilon \Rightarrow y \in X_t)$$

le corresponde la fórmula fibra

$$\forall x \in X_\alpha \; \exists \epsilon > 0 \; \forall y \in k(\alpha)^n (\|x - y\| < \epsilon \Rightarrow y \in X_\alpha).$$

Nótese que $\|x - y\| < \epsilon$ puede expresarse mediante una desigualdad polinomial. Por supuesto, los fórmulas anteriores expresan el hecho de que un conjunto sea abierto.

Proposición 2.2.4 *Sea X un subconjunto definible de $R^p \times R^n$, y $\Phi_\alpha(x)$ la fórmula fibra de una familia definible de fórmulas $\Phi_t(x)$, con $x = (x_1, \ldots, x_n)$. La igualdad*

$$X_\alpha = \{x \in k(\alpha)^n : \Phi_\alpha(x)\}$$

se verifica si y sólo si existe $A \in \alpha$ tal que la igualdad

$$X_t = \{x \in R^n : \Phi_t(x)\}$$

se verifica para todo $t \in A$. En particular, si $n = 0$ (es decir, no hay variables libres), la fórmula fibra Φ_α se verifica si y sólo si existe $A \in \alpha$ tal que Φ_t se verifica para todo $t \in A$.

Demostración. Ver [5, Prop. 5.9]. □

Ahora necesitamos otra definición. Sea S un subconjunto definible de R^n. Entonces $R^p \times S$ puede verse como una familia definible constante. Denotamos por $S_{k(\alpha)} \subset k(\alpha)^n$ la fibra $(R^p \times S)_\alpha$ y la denominamos la *extensión* de S a $k(\alpha)$. Es fácil ver que $S_{k(\alpha)} \cap R^n = S$.

En términos de teoría de modelos, la estructura o-minimal sobre $k(\alpha)$ es una extensión de la estructura o-minimal sobre R. Toda fórmula de primer orden de la estructura o-minimal sobre R se puede interpretar en la estructura o-minimal sobre $k(\alpha)$, tomando la extensión a $k(\alpha)$ de los conjuntos definibles que aparecen en la fórmula. La Proposición 2.2.4 implica que $k(\alpha)$ es una extensión elemental de R: cada fórmula sin variables libres se verifica sobre R si y sólo si se verifica sobre $k(\alpha)$.

Ejemplo 2.2.5 *Sea (R, S) la estructura o-minimal definida por los subconjuntos semialgebraicos definidos sobre R. Entonces, dado un subconjunto semialgebraico A, la definición usual de extensión de A a un cuerpo real cerrado más grande (ver [2]) y la definición anterior de extensión $A_{k(\alpha)}$ coinciden. En este caso, $\mathcal{S}(\alpha)$ es justamente la colección de los subconjuntos semialgebraicos definidos sobre $k(\alpha)$.*

2.3 Familias definibles de aplicaciones

Sean X e Y dos subconjuntos definibles de $R^p \times R^n$ y $R^p \times R^m$, respectivamente. Vemos estos dos subconjuntos como familias definibles parametrizadas por R^p. Una *familia definible de aplicaciones* de X a Y es una aplicación definible $f : X \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}"'] & & Y \arrow[dl, "\mathrm{proj}"] \\ & R^p & \end{tikzcd}$$

donde la aplicaciones proj son la proyecciones sobre las primeras p coordenadas. Obtenemos de esta forma una familia de aplicaciones $f_t : X_t \to Y_t$ para $t \in R^p$, definida por $f(t, x) = (t, f_t(x))$.

Ejemplo 2.3.1 *Sea A un subconjunto definible de R^n y consideremos el subconjunto $X = R^p \times A$ de $R^p \times R^n$. Entonces X es definible y $X_t = A$ para cada $t \in R^p$. Diremos que X es una* familia constante. *De la misma forma, Si B es un subconjunto definible de R^m y consideramos $Y = R^p \times B$ y una aplicación definible $f' : A \to B$, entonces diremos que la familia*

$$f : X \to Y$$

$$(x, t) \mapsto (t, f'(x))$$

es una familia constante de aplicaciones.

Ejemplo 2.3.2 *Sean A y B conjuntos definibles. La forma habitual de una familia de aplicaciones $R^p \times A \to B$, $(t, x) \mapsto f_t(x)$ de A a B se corresponde aquí a la familia $f : X = R^p \times A \to Y = R^p \times B$, $(t, x) \mapsto (t, f_t(x))$. Habitualmente denotaremos a esta familia como $f_t : A \to B$.*

Dado $\alpha \in \widetilde{R^p}$, vamos a definir $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$, que será una aplicación definible para la estructura o-minimal sobre $k(\alpha)$. Consideremos

$$\Gamma = \{(t, x, y) \in R^p \times R^n \times R^m : (t, x) \in X \text{ y } f(t, x) = (t, y)\}.$$

El conjunto Γ es una familia definible parametrizada por R^p, y para cada $t \in R^p$, Γ_t es el grafo de $f_t : X_t \to Y_t$. Utilizando la Proposición 2.2.4, no es difícil ver que la fibra $\Gamma_\alpha \subset k(\alpha)^n \times k(\alpha)^m$ es el grafo de una aplicación $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$. Como Γ_α es definible, la aplicación f_α es definible para la estructura o-minimal sobre $k(\alpha)$. Llamaremos a f_α la *fibra de la familia f en α*. Obsérvese que, dado $x \in X_\alpha$, se tiene que $f_\alpha(x) = (f \circ h)(\alpha)$ siendo $h : A \to R^n$ una aplicación definible tal que $h(\alpha) = x$, con $A \in \alpha$ y tal que $h(t) \in X_t$ para todo $t \in A$.

La siguiente proposición nos muestra que todas las aplicaciones definibles se obtienen de esta forma. Introducimos alguna notación. Si X es un subconjunto definible de $R^p \times R^n$ y A es un subconjunto definible de R^p, denotamos por $X_{[A]}$ el subconjunto definible $X \cap (A \times R^n)$ de $R^p \times R^n$. En otras palabras, $X_{[A]}$ es la familia definible X restringida a A. Si Y es un subconjunto definible de $R^p \times R^m$ y $f : X \to Y$ es una familia definible de aplicaciones, denotaremos por $f_{[A]}$ la restricción $f_{|X_{[A]}}$; es decir, $f_{[A]} : X_{[A]} \to Y_{[A]}$.

Proposición 2.3.3 *Sean $X \subset R^p \times R^n$ y $Y \subset R^p \times R^n$ dos familias definibles de conjuntos definibles parametrizadas por R^p. Sea $\varphi : X_\alpha \to Y_\alpha$ una aplicación definible para la estructura o-minimal sobre $k(\alpha)$. Entonces existe un conjunto definible $A \in \alpha$ y una familia definible de aplicaciones $f : X_{[A]} \to Y_{[A]}$ tal que $f_\alpha = \varphi$.*

Demostración. (Ver [5, Prop. 5.13].) Basta utilizar la Proposición 2.2.4. □

Proposición 2.3.4 *(a) La fibra $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ de una familia definible de aplicaciones $f : X \to Y$ parametrizada por R^p es inyectiva (resp. sobreyectiva, resp. biyectiva) si y sólo si existe un subconjunto definible S de R^p tal que $S \in \alpha$ y $f_{[S]}$ es inyectiva (resp. sobreyectiva, resp. biyectiva).*

(b) Dos familias definibles de aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ parametrizadas por R^p satisfacen $f_\alpha = g_\alpha$ si y sólo si existe un subconjunto definible S de R^p tal que $S \in \alpha$ y $f_{[S]} = g_{[S]}$.

(c) *Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son dos familias definibles de aplicaciones parametrizadas por R^p, entonces $(g \circ f)_\alpha = g_\alpha \circ f_\alpha$. Si X' es un subconjunto definible de X, entonces $f(X')_\alpha = f_\alpha(X'_\alpha)$.*

Demostración. Para (a), el hecho de que f_α sea inyectiva se puede expresar mediante una fórmula Φ_α que sea la fórmula fibra de una familia de fórmulas Φ_t. Por tanto f_α es inyectiva si y sólo si existe un subconjunto definible $S \subset R^p$, $S \in \alpha$, tal que $f_t : X_t \to Y_t$ es inyectiva para cada $t \in S$. Pero esto significa, por definición de familia de aplicaciones, que $f_{[S]}$ es inyectiva. Los casos sobreyectivo y biyectivo se demuestran de la misma forma.

La parte (b) es clara, pasando al grafo. Para (c), supongamos que $X \subset R^p \times R^n$. Consideremos $x \in X_\alpha$. Entonces $x = h(\alpha)$ para cierta aplicación definible $h : A \to R^n$, $A \in \alpha$, tal que $h(t) \in X_t$ para cada $t \in A$. Por tanto $f_\alpha(x) = (f \circ h)(\alpha)$ y $g_\alpha(f_\alpha(x)) = (g \circ (f \circ h))(\alpha) = ((g \circ f) \circ h)(\alpha) = (g \circ f)_\alpha(x)$. Finalmente, $f_\alpha(X_\alpha) = \{y \in Y_\alpha : y = f_\alpha(x), x \in X_\alpha\}$ y de esta expresión se claramente la última afirmación. □

Utilizando estos resultados, se demuestra de forma bastante sencilla lo siguiente:

Proposición 2.3.5 *Dada una familia definible de aplicaciones $f : X \to Y$, y dado $\alpha \in \widetilde{R^p}$, se tiene que f_α es continua si y sólo si existe $S \in \alpha$ tal que f_t es continua para todo $t \in A$.*

Todos estos resultados expresan cual es la filosofía en torno al uso del espectro definible. La idea general es que, para un punto $\alpha \in \widetilde{R^p}$, *una propiedad de la fibra en α se verifica también sobre algún subconjunto definible $S \subset R^p$, tal que $S \in \alpha$.*

Los resultados y ejemplos anteriores nos muestran que una propiedad se verifica para la fibra en α si y sólo si existe $A \in \alpha$ tal que la misma propiedad se verifica para las fibras en t para todo $t \in A$. Pero para algunas propiedades (topológicas, de diferenciabilidad), podemos ir un poco más lejos y estudiar propiedades que se verifican de forma *global* para toda la familia. Un ejemplo de esta idea lo proporcionan los siguientes resultados.

Proposición 2.3.6 *Sean $X \subset Y$ subconjuntos definibles de $R^p \times R^n$. Sea $\alpha \in \widetilde{R^p}$. La fibra X_α es cerrada (respectivamente abierta) en Y_α si y sólo si existe $A \in \alpha$ tal que $X_{[A]}$ es cerrado (respectivamente abierto) en $Y_{[A]}$.*

Demostración. Ver [5, Prop. 5.18] □

Teorema 2.3.7 *Sea $f : X \to Y$ una familia definible de aplicaciones parametrizada por R^p, y $\alpha \in \widetilde{R^p}$. Entonces f_α es continua si y sólo si existe $A \in \alpha$ tal que $f_{[A]} : X_{[A]} \to Y_{[A]}$ es continua.*

Demostración. Ver [5, Th. 5.19] □

Capítulo 3

Derivabilidad definible

En este capítulo vamos a estudiar los distintas propiedades de diferenciabilidad de aplicaciones definibles sobre una estructura o-minimal que expande un cuerpo real cerrado.

Es posible copiar para un cuerpo real cerrado arbitrario R las nociones habituales de diferenciación sobre $\mathbb{R}$. En [2] se estudian los resultados básicos sobre diferenciabilidad para funciones semialgebraicas definidas sobre R. En el trabajo de L. de van den Dries [8] se estudian este tipo de resultados para funciones definibles sobre una estructura o-minimal que expande el cuerpo real cerrado R. Repasaremos aquí los resultados más importantes sobre este tema. De nuevo seguimos la estructura de [5, Ch. 6].

3.1 Derivabilidad de funciones definibles en una variable

Si A es un subconjunto definible de R^n, diremos que una función $g : A \to R \cup \{-\infty, +\infty\}$ es *definible* si las imágenes inversas de $-\infty$ y de $+\infty$ son subconjuntos definibles de A y la restricción de g a $g^{-1}(R)$ es una función definible con valores en R.

Lema 3.1.1 *Sea $f : I \to R$ una función definible continua sobre un intervalo abierto I de R. Entonces f tiene derivadas a la izquierda y a la derecha en $R \cup \{-\infty, +\infty\}$ en cada punto $x \in I$. Estas derivadas se denotaran respectivamente por $f'_l(x)$ y $f'_r(x)$. Las funciones f'_l y f'_r de I a $R \cup \{-\infty, +\infty\}$ son definibles.*

Demostración. Aplicamos el Teorema de Monotonía a la función $y \mapsto (f(y) - f(x))/(y - x)$ para demostrar que esta función tiene un límite en $R \cup \{-\infty, +\infty\}$ cuando y tiende a x por la izquierda o por la derecha. Es fácil ver entonces la definibilidad de las derivadas por la izquierda y por la derecha. $\square$

Lema 3.1.2 *Sea $f : I \to R$ una función definible continua sobre un intervalo abierto I de R. Si $f'_l > 0$ (respectivamente $f'_r > 0$) en I, f es estrictamente creciente en I.*

Demostración. Aplicamos el Teorema de Monotonía a la función f, más el hecho de que no existe ningún subintervalo de I sobre el que f es constante o f es estrictamente decreciente (en caso contrario, se tendría $f'_l \leq 0$ y $f'_r \leq 0$ en tal subintervalo). □

Teorema 3.1.3 *Sea $f : I \to R$ una función definible continua sobre un intervalo abierto I de R. Entonces para todos los puntos de I, salvo tal vez un número finito, tenemos que $f'_l(x) = f'_r(x) \in R$. Por tanto, f es derivable fuera de un subconjunto finito de I.*

Demostración. En primer lugar, demostramos que no existe ningún subintervalo de I en el que $f'_l(x) = +\infty$, o $f'_l(x) = -\infty$, o $f'_r(x) = +\infty$, o $f'_r(x) = -\infty$. Supongamos por ejemplo que $f'_l(x) = +\infty$ sobre un subintervalo J de I. Tomemos $a < b$ en J y consideremos

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x \quad \text{para } x \in J.$$

Tenemos que $g'_l = +\infty$ sobre J. Por el Lema 3.1.2, g es estrictamente creciente sobre J. Por tanto $g(b) > g(a)$, lo que es claramente imposible. De la misma forma se ve que los otros casos llevan a una contradicción.

Supongamos ahora que existe un subintervalo J de I sobre el que f'_l y f'_r tienen valores en R y $f'_l < f'_r$. Reemplazando J por un intervalo más pequeño, podemos suponer que f'_l y f'_r son continuas. Tomando un subintervalo todavía más pequeño, podemos suponer que existe $c \in R$ tal que $f'_l < c < f'_r$. El Lema 3.1.2 implica que $x \to f(x) - cx$ es al mismo tiempo estrictamente creciente y estrictamente decreciente sobre este subintervalo, lo que es imposible. Podemos demostrar de forma similar que no existe ningún subintervalo sobre el que f'_l y f'_r toman valores en R y $f'_l > f'_r$. La definabilidad de f'_l y f'_r, junto con los hecho que acabamos de demostrar, implican la conclusión del teorema. □

Corolario 3.1.4 *Sea $f : I \to R$ una función definible. Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe un subconjunto finito $M(k)$ de I tal que f es de clase C^k sobre $I \setminus M(k)$.*

Demostración. Por inducción sobre k, utilizando el Teorema 3.1.3, la definibilidad de la derivada y la continuidad a trozos. □

Notación. Dada una función $f : I \to R$ de clase C^k definible en una estructura o-minimal $\mathcal{S}$, diremos que f es de clase $\mathcal{D}^k_{\mathcal{S}}$ (o simplemente $\mathcal{D}^k$ cuando no hay ambigüedad acerca de $\mathcal{S}$). En general, de aquí en adelante, $\mathcal{D}^k$ significará "definible de clase C^k".

Fijemos ahora la noción de *variedad definible sobre un estructura o-minimal* o *variedad de clase $\mathcal{D}^k$*. Esta noción fue introducida en [14]. Sea $X \subset R^n$ un conjunto definible y sea k un entero ≥ 0. Una *carta definible* sobre X es un triple $\overline{\varphi} = (U, \varphi, d)$ donde U es un subconjunto definible abierto de X, $d \geq 0$ y φ es una biyección definible de U en un subconjunto abierto de R^d. Llamaremos a d la dimensión de φ.

Dos cartas definibles $\overline{\varphi} = (U, \varphi, d)$ y $\overline{\varphi'} = (U', \varphi', d')$ son C^k-*compatibles* si, o bien $U \cap U' = \emptyset$, o bien $\varphi(U \cap U')$ es abierto, $\varphi'(U \cap U')$ es abierto, y las dos aplicaciones de transición $\varphi \circ \varphi'$ y $\varphi' \circ \varphi$ son de clase C^k sobre sus dominios; nótese que en este caso $d = d'$.

Un $\mathcal{D}^k$-*atlas* sobre X es un conjunto finito $\mathcal{C}$ de cartas definibles sobre X de forma cada par de ellas es C^k-compatible y sus dominios recubren X. Una *variedad* $\mathcal{D}^k$ $\widehat{X}$ es un par $(X, \mathcal{C})$, donde X es un subconjunto definible y $\mathcal{C}$ es un $\mathcal{D}^k$-atlas sobre X. En esta memoria, en vez de trabajar con un atlas concreto $\mathcal{C}$, dotaremos a X de una clase de atlas *compatibles*, de forma que diremos simplemente que X es una variedad $\mathcal{D}^k$. Definimos de la forma habitual el concepto de aplicación de clase $\mathcal{D}^k$ entre variedades $\mathcal{D}^k$.

Destaquemos que una variedad es siempre un conjunto *localmente cerrado*.

Observamos que, si $k > 0$, el concepto de variedad $\mathcal{D}^k$ (según la definición anterior) es equivalente al de subconjunto definible de R^n que es variedad de clase C^k (en el sentido usual). Esto no es cierto para $k = 0$.

Demostramos a continuación que todos las nociones que involucren un grado finito de derivabilidad sobre objetos definibles se pueden expresar mediante fórmulas de primer orden.

Proposición 3.1.5 *Sea $X \subset R^n$ un subconjunto definible, $r > 0$. El hecho de que X esa una variedad $\mathcal{D}^r$ puede expresarse mediante fórmulas de primer orden. Si $M \subset R^m$ y $N \subset R^n$ son variedades $\mathcal{D}^r$ y $f : M \to N$ es una aplicación definible, el hecho de que f sea una aplicación $\mathcal{D}^r$ puede expresarse mediante fórmulas de primer orden.*

Demostración. Claramente basta considerar el caso $N = R^q$. Supongamos que $X \subset R^n$ es un abierto definible y sea $f : X \to R$ una función definible. Consideremos el conjunto definible

$$A = \{(x, y, a, m) \in R^n \times R^n \times R^n \times R :\ x \neq y,\ m = \frac{f(y) - f(x) - a \cdot (y - x)}{\|y - x\|}\}.$$

De esta forma tenemos que f es derivable si y sólo si

$$\forall x \in X\ \exists a \in R^n\ (x, x, a, 0) \in \overline{A}.$$

Por tanto el hecho de que f sea $\mathcal{D}^1$ (y análogamente $\mathcal{D}^r$) es expresable mediante fórmulas de primer orden.

Supongamos ahora que X es un subconjunto definible. Por la versión definible de [2, Cor. 9.3.10], tenemos que X es una variedad $\mathcal{D}^r$ de dimensión d si y sólo si X es la unión de un número finito de subconjuntos definibles abiertos $\{U_i\}$ tales que, para cada i, la proyección $pi_{i_1,\dots,i_d} : R^n \to R^d : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$ induce un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ entre U_i y un abierto definible de R^d; es decir, podemos escribir $U_i = \operatorname{graf}(\phi_1^i, \dots, \phi_{n-d}^i)$ para ciertas funciones $\mathcal{D}^r$ $\phi_j^i : V_j^i \to R$, donde V_j^i es un subconjunto definible abierto de R^d. Es claro entonces que todo esto es expresable mediante fórmulas de primer orden: la existencia de las funciones ϕ_j^i es un hecho conjuntista y por tanto expresable mediante fórmulas de primer orden, y su derivabilidad es expresable mediante fórmulas de primer orden por el caso anterior.

Utilizando las mismas notaciones, una función definible $f : X \to R$ es de clase $\mathcal{D}^r$ si y sólo si, para todo i, la función $f : U_i \to R : t = (t_1, \ldots, t_d) \mapsto f(t_1, \ldots, t_d, \phi_1^i(t), \ldots, \phi_{n-d}^i(t))$ es de clase $\mathcal{D}^r$. Por tanto, también esto es expresable mediante fórmulas de primer orden. De la misma forma se tiene el caso $f : X \to Y$, siendo $Y \subset R^m$ una variedad $\mathcal{D}^r$. □

3.2 Descomposición en celdas de clase $\mathcal{D}^k$

Una descomposición en celdas definible cilíndrica *de clase* $\mathcal{D}^k$ ($\mathcal{D}^k$ dcdc) de R^n es una dcdc que satisface algunas condiciones extra de diferenciabilidad que implican, en particular, que cada celda es una subvariedad $\mathcal{D}^k$ de R^n.

- Una $\mathcal{D}^k$ dcdc de R es cualquier dcdc de R.
- Si $n > 1$, una $\mathcal{D}^k$ dcdc de R^n viene dada por una $\mathcal{D}^k$ dcdc de R^{n-1} y, para cada celda D de R^{n-1}, funciones definibles de clase $\mathcal{D}^k$

$$\zeta_{D,1} < \ldots < \zeta_{D,l(D)} : D \to R.$$

  Las celdas de R^n son, por supuesto, los grafos de los $\zeta_{D,i}$ y las bandas delimitadas por estos grafos.

Es claro de la descripción por inducción que las celdas de una $\mathcal{D}^k$ dcdc son subvariedades de clase $\mathcal{D}^k$ de R^n. Además, para cada celda C, existe un difeomorfismo de clase $\mathcal{D}^k$ $\theta_C : C \to R^{\dim C}$. Este difeomorfismo θ_C puede ser definido por inducción sobre n, utilizando las mismas fórmulas que en la Proposición 1.2.4.

A continuación establecemos los dos resultado principales de esta sección.

Teorema 3.2.1 (Descomposición en Celdas $\mathcal{D}^k$: $\mathcal{D}^k$ $DCDC_n$) *Dado un número finito de subconjuntos definibles $X_1, \ldots, X_l$ de R^n, existe una $\mathcal{D}^k$ dcdc de R^n adaptada a $X_1, \ldots, X_l$ (es decir, cada X_i es una unión de celdas).*

Teorema 3.2.2 (Diferenciabilidad a Trozos: CT_n^k) *Dada una función definible $f : A \to R$, donde A es un subconjunto definible de R^n, existe una partición finita de A en subvariedades $\mathcal{D}^k$ $C_1, \ldots, C_l$ de forma que cada restricción $f_{|C_i}$ es $\mathcal{D}^k$.*

Demostración. Demostramos los dos teoremas simultáneamente, por inducción sobre n. El caso $n = 1$ está ya demostrado: $\mathcal{D}^k$DCDC$_1$ es obvio, y CT$_1^k$ se sigue del Teorema 3.1.3.

Por tanto podemos suponer que $n > 1$ y que los teoremas anteriores están demostrados para dimensiones más pequeñas.

1) $\mathcal{D}^k$DCDC$_n$. Comencemos con una dcdc de R^n adaptada a $X_1, \ldots, X_l$. Utilizando CT$^k_{n-1}$, podemos dividir las celdas de la dcdc inducida en R^{n-1} para obtener que todas las $\zeta_{C,j}$ sean de clase $\mathcal{D}^k$. Entonces, utilizando $\mathcal{D}^k$DCDC$_{n-1}$, podemos refinar nuestra partición para obtener una $\mathcal{D}^k$ dcdc de R^{n-1}.

2) CT^k_n. Utilizamos el siguiente lema.

Lema 3.2.3 *Sea $g : U \to R$ una función definible, siendo U un subconjunto abierto definible de R^n. Entonces existe un subconjunto abierto definible V de U tal que $g_{|V}$ es $\mathcal{D}^k$ y* $\dim(U \setminus V) < n$.

Demostración. Por inducción sobre k, basta mostrar que el conjunto G_i de los puntos en U donde la derivada parcial $\partial g/\partial x_i$ existe es definible, que su complementario en U tiene interior vacío, y que $\partial g/\partial x_i$ es definible sobre G_i. Demostrar la definibilidad es sencillo. Veamos que $U \setminus G_i$ tiene interior vacío. En caso contrario, existiría una caja abierta no vacía donde $\partial g/\partial x_i$ no existiría. Considerando la restricción de g a un intervalo de una línea paralela al eje x_i contenido en esta caja, obtendríamos una contradicción con el Teorema 3.1.3. □

Volvemos a la demostración de CT^k_n. Elegimos una dcdc de R^n adaptada a A. Por el Lema 3.2.3, para cada celda abierta C_i de R^n contenida en A, existe un subconjunto abierto definible V_i tal que $f_{|V_i}$ es $\mathcal{D}^k$ y $\dim(C_i \setminus V_i) < n$. Por $\mathcal{D}^k$DCDC$_n$, podemos refinar la dcdc para obtener una $\mathcal{D}^k$ dcdc de R^n adaptada a A y a los V_i. Sobre cada celda abierta de esta nueva dcdc contenida en A, f es $\mathcal{D}^k$. Sea D una celda de dimensión $< n$ contenida en A. Utilizando una difeomorfismo de clase $\mathcal{D}^k$ de D a $R^{\dim D}$ y la hipótesis de inducción, podemos partir D en un número finito de subvariedades $\mathcal{D}^k$ sobre las que f es $\mathcal{D}^k$. Esto completa la demostración de los dos teoremas. □

Acabamos esta sección dando una noción que será importante en algunos de nuestros argumentos.

Definición 3.2.4 *Una* estratificación $\mathcal{D}^r$ $\mathcal{E}$ *de un conjunto definible cerrado $X \subset R^m$ es una partición de X en un número finito de celdas $\mathcal{D}^r$, llamadas los estratos de $\mathcal{E}$, tales que para cada estrato $A \in \mathcal{E}$ se tiene que* $\mathrm{Fr}(A)$ *es una unión de estratos de $\mathcal{E}$ (necesariamente de dimensión más pequeña).*

A partir de la existencia de descomposiciones en celdas $\mathcal{D}^r$, es fácil demostrar el siguiente resultado.

Proposición 3.2.5 [8, Prop. 4.1.13] *Sea $X \subset R^m$ un conjunto definible cerrado y $X_1, \ldots, X_k$ subconjuntos definibles de X. Entonces existe una estratificación $\mathcal{D}^r$ de A tal que cada X_i es unión de estratos.*

3.3 Entornos tubulares

Sea $M \subset R^n$ una variedad $\mathcal{D}^k$ (supondremos siempre que $1 \leq k < \infty$). Vamos a introducir los conceptos de fibrado tangente y normal de M.

El *fibrado tangente* $\mathrm{T}M$ es el conjunto de los $(x, v) \in M \times R^n$ tales que v es una vector tangente a M en x. Denotamos por $p : \mathrm{T}M \to M$ la proyección definida por $p(x, v) = x$, y por $\mathrm{T}_x M$ el espacio tangente a M en x, es decir, $\mathrm{T}_x M = p^{-1}(x)$ para $x \in M$. Podemos argumentar de la siguiente manera para demostrar que $\mathrm{T}M$ es un subconjunto definible de $R^n \times R^n$. Consideramos el conjunto S de triples (x, y, v), donde v es una vector paralelo a la línea que une los puntos distintos x e y de M, esto es

$$S = \{(x, y, \lambda(y - x)) \in M \times M \times R^n : x \neq y, \lambda \in R\}.$$

El conjunto S es claramente definible. Su clausura $\overline{S}$ en $M \times M \times R^n$ es también definible. Se tiene entonces que

$$\mathrm{T}M = \{(x, v) \in M \times R^n : (x, x, v) \in \overline{S}\}$$

y esto muestra que $\mathrm{T}M$ es definible.

No es difícil ver (utilizando el argumento estándar de la geometría diferencial) que $\mathrm{T}M$ es una subvariedad de clase C^{k-1}. Si $f : M \to R$ es una función de clase $\mathcal{D}^k$, entonces $df : \mathrm{T}M \to \mathrm{T}R = R \times R$ es una aplicación de clase $\mathcal{D}^{k-1}$.

El *fibrado normal* $\mathrm{N}M$ es el conjunto de los (x, v) en $M \times R^n$ tales que v es ortogonal a $\mathrm{T}_x M$. Es una subvariedad C^{k-1} de $R^n \times R^n$ y es definible ya que $\mathrm{T}M$ es definible.

Ahora introducimos la aplicación de clase $\mathcal{D}^{k-1}$

$$\phi : \mathrm{N}M \to R^n$$

$$(x, v) \mapsto x + v.$$

Esta aplicación ϕ induce el difeomorfismo canónico entre la sección cero $M \times \{0\}$ del fibrado normal y M, y es un difeomorfismo local en cada punto $(x, 0)$. De hecho, la derivada $\mathrm{d}_{(x,0)}\phi : \mathrm{T}_x M \times \mathrm{N}_x M \to R^n$ es el isomorfismo que manda (ξ, v) a $\xi + v$.

En esta sección demostramos el siguiente resultado, que es una versión definible del teorema del entorno tubular.

Teorema 3.3.1 (Entorno Tubular Definible) *Sea M una subvariedad $\mathcal{D}^k$ de R^n. Existe un entorno abierto definible U de la sección cero $M \times \{0\}$ en el fibrado normal $\mathrm{N}M$ tal que la restricción $\phi_{|U}$ es una difeomorfismo definible de clase C^{k-1} cuya imagen es un entorno abierto definible Ω de M en R^n. Es más, podemos tomar U de la forma*

$$U = \{(x, v) \in NM : \|v\| < \epsilon(x)\},$$

donde ϵ es una función positiva $\mathcal{D}^k$ sobre M que llamaremos radio *de Ω.*

Un entorno Ω como en el teorema anterior se llama un *entorno tubular* $\mathcal{D}^{k-1}$ de M. Tenemos sobre Ω una *retracción* $\mathcal{D}^{k-1}$ $\pi : \Omega \to M$ y una función *cuadrado de la distancia* $\mathcal{D}^{k-1}$ $\rho : \Omega \to R$, que quedan definidas mediante

$$\pi(\phi(x, v)) = x$$

$$\rho(\phi(x, v)) = \|v\|^2.$$

Observamos que, para $x \in \Omega$, se verifica $\rho(x) < \epsilon^2(\pi(x))$ y $\rho(x) = \|x - \pi(x)\|^2$.

Para la demostración del Teorema 3.3.1 debemos considerar en primer lugar el caso de las subvariedades definibles cerradas. Empezamos con un lema:

Lema 3.3.2 *Sea M una subvariedad $\mathcal{D}^k$ de R^n, cerrada en R^n. Sea $\psi : M \to R$ una función definible positiva, que está localmente acotada por debajo por constantes positivas (es decir, para cada x en M, existe $c > 0$ y un entorno V de x en M tal que $\psi > c$ sobre V). Entonces existe una función $\mathcal{D}^k$ positiva $\epsilon : M \to R$ tal que $\epsilon < \psi$ sobre M.*

Demostración. Para $r \in R$, consideremos

$$M_r = \{x \in M : \|x\|^2 \leq r\}.$$

Podemos suponer que $M_{r_0} \neq \emptyset$ para algún r_0. Obsérvese que M_r es cerrado-acotado para todo $r \geq r_0$. Para un tal r, definimos $\mu(r)$ como $\mu(r) = \inf\{\psi(x) : x \in M_r\}$. La función $\mu : [r_0, +\infty) \to R$ es definible y no creciente. Es positiva, ya que M_r está recubierta por un número finito de subconjuntos en los que ψ está acotada inferiormente por constantes positivas. Por el Teorema 3.1.3, existe un $a > r_0$ tal que μ es de clase $\mathcal{D}^k$ sobre un intervalo abierto que contiene a $[a, +\infty)$. Supongamos que tenemos una función $\mathcal{D}^k$ $\theta : R \to R$ tal que $\theta = 0$ sobre $(-\infty, a]$, θ crece de 0 a 1 sobre $[a, a+1]$ y $\theta = 1$ sobre $[a+1, +\infty)$. Definamos la función $\mu_1 : R \to R$ como

$$\mu_1(r) = \theta(r)\mu(r) + (1 - \theta(r))\mu(a+1).$$

Observamos que μ_1 es de clase $\mathcal{D}^k$ y satisface $\mu_1 \leq \mu$ sobre $[r_0, +\infty)$. Consideramos entonces $\epsilon(x) = \frac{1}{2}\mu_1(\|x\|^2)$ para $x \in M$. Por construcción, la función ϵ es positiva, $\mathcal{D}^k$ y satisface $\epsilon < \psi$ sobre M.

De esta forma, para acabar nuestra demostración, basta encontrar una función $\theta : R \to R$ con las propiedades enunciadas arriba. Pero la función $\mathcal{D}^k$

$$\theta_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ K\int_0^x t^k(1-t)^k dt & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

(para cierta constante K) verifica las condiciones anteriores (obsérvese que la integral de un polinomio es algo meramente formal). Basta tomar entonces $\theta(x) = \theta_0(x - a)$. □

Nótese que el Lema 3.3.2 también se verifica si suponemos únicamente que existe un difeomorfismo $\mathcal{D}^k$ entre M y una subvariedad cerrada de algún R^m. Más adelante mostraremos que de hecho esto es cierto para toda subvariedad definible.

Lema 3.3.3 *El teorema del entorno tubular definible 3.3.1 se verifica si M es cerrada en R^n, o si M es $\mathcal{D}^k$ difeomorfa a una variedad cerrada en algún R^m (por ejemplo, si M es una celda de una $\mathcal{D}^k$ dcdc).*

Demostración. Queremos evitar las dos siguientes situaciones "malas":

1. ϕ no es un difeomorfismo local en (x, v).

2. existen (x, v) e (y, w) tales que $\phi(x, v) = \phi(y, w)$.

Sea Z el subconjunto de los (x, v) en $\mathrm{N}M$ tales que

$$\mathrm{d}_{(x,v)}\phi : \mathrm{T}_{(x,v)}(\mathrm{N}M) \to R^n$$

no es un isomorfismo. El conjunto Z es definible, cerrado en $\mathrm{N}M$ y disjunto de la sección cero $M \times \{0\}$. Para $x \in M$, sea $\psi(x)$ el mínimo de 1, $\mathrm{dist}((x, 0), Z)$ y el ínfimo de los $r \in R$ tales que

$$\exists (y, w) \in \mathrm{N}M, y \neq x, \quad \exists v \in \mathrm{N}_x M \ \|w\| \leq \|v\| = r \text{ e } y + w = x + v.$$

La función $\psi : M \to R$ es definible.

Afirmamos que esta función está localmente acotada por debajo por constantes positivas. Tomemos $x \in M$. El teorema de la función inversa implica que existe un $c_x > 0$ tal que la restricción de ϕ a la intersección de $\mathrm{N}M$ con la bola abierta $B((x, 0), c_x) \subset R^{2n}$ es un difeomorfismo sobre un entorno de x en R^n. Veamos que $\psi \geq c_x/4$ sobre la intersección de M con la bola abierta $B(x, c_x/4) \subset R^n$. Podemos, por supuesto, tomar $c_x/4 \leq 1$. Como $B((x, 0), c_x)$ es disjunto con Z, tenemos que $c_x/4 \leq \mathrm{dist}((y, 0), Z)$ para cada $y \in M \cap B(x, c_x/4)$. Supongamos ahora que existen (y, v) y (z, w) en $\mathrm{N}M$ tales que $y \in B(x, c_x/4)$, $\|w\| \leq \|v\| < c_x/4$ e $y + v = z + w$. Entonces (y, v) y (z, w) pertenecen ambos a $B((x, 0), c_x)$, y llegamos a una contradicción con el hecho de que ϕ sea inyectiva restringida a la intersección de esta bola con $\mathrm{N}M$. Por tanto hemos demostrado nuestra afirmación.

Podemos aplicar el Lema 3.3.2 a la función ψ. Obtenemos de esta forma una función de clase $\mathcal{D}^k$ positiva $\epsilon : M \to R$ tal que, la aplicación ϕ restringida al subconjunto abierto definible

$$U = \{(x, v) \in \mathrm{N}M : \|v\| < \epsilon(x)\},$$

es un difeomorfismo local inyectivo. Se tiene entonces que $\phi|_U$ es un difeomorfismo sobre un entorno abierto definible Ω de M en R^n. □

Proposición 3.3.4 *Sea M una subvariedad $\mathcal{D}^k$ de R^n $\mathcal{D}^k$ difeomorfa a una subvariedad cerrada de algún R^m. Entonces M tiene una ecuación de clase $\mathcal{D}^{k-1}$ no negativa en el complementario de $\mathrm{Fr}(M) = \overline{M} \setminus M$. Esto significa que existe una función de clase $\mathcal{D}^{k-1}$ no negativa $f : R^n \setminus \mathrm{Fr}(M) \to R$ tal que $M = f^{-1}(0)$; además, podemos elegir $f \leq 1$.*

Demostración. Por el Lema 3.3.3, podemos elegir un entorno tubular definible Ω de M de radio digamos $\epsilon : M \to (0, +\infty)$. Obsérvese que la función cuadrado de la distancia $\rho : \Omega \to [0, +\infty)$ es una ecuación $\mathcal{D}^{k-1}$ no negativa de M en Ω. Vamos a extender esta ecuación a $R^n \setminus \mathrm{Fr}(M)$ utilizando una función igual a la utilizada en la demostración del Lema 3.3.2. Es decir, tomemos una función $\mathcal{D}^{k-1}$ $\theta : R \to [0,1]$ que sea 0 sobre $(-\infty, 0]$, 1 sobre $[1, +\infty)$ y que crezca de 0 a 1 sobre $[0,1]$. Por el Lema 3.3.2, elegimos una función $\mathcal{D}^k$ $\delta : \Omega \to R$ que verifica $0 < \delta \leq \min\{\epsilon \circ \pi, \mathrm{dist}(\cdot, R^n \setminus \Omega)\}$. Para $x \in R^n \setminus \mathrm{Fr}(M)$, sea

$$f(x) = \begin{cases} \theta(2\rho(x)/\delta^2(x)) & \text{si } x \in \Omega \\ 1 & \text{fuera de } \{x \in \Omega : \rho(x) \leq \frac{1}{2}\delta^2(x)\}. \end{cases}$$

La función $f : R^n \setminus \mathrm{Fr}(M) \to R$ es no negativa, definible, y $f^{-1}(0) = M$. Para ver que f es de clase $\mathcal{D}^{k-1}$ basta ver que el conjunto $A = \{x \in \Omega : \underline{\rho(x)} \leq \frac{1}{2}\delta^2(x)\}$ es cerrado en $R^n \setminus \mathrm{Fr}(M)$. Sea $x \in \overline{A}$. Tomemos una curva definible continua $\gamma : [0,1) \to R^n$ que verifique $\gamma((0,1)) \subset A$, $\gamma(0) = x$. Si $x \in \Omega$, se tiene que $\rho(x) \leq \frac{1}{2}\delta^2(x)$ (por la continuidad de las aplicaciones) y entonces $x \in A$. Supongamos que $x \in R^n \setminus \Omega$. Entonces, para todo $t \in (0,1)$, $\mathrm{dist}(\gamma(t), \pi(\gamma(t))^2 = \rho(\gamma(t)) \leq \underline{\frac{1}{2}\delta^2(x) \leq} \frac{1}{2}\mathrm{dist}(\gamma(t), R^n \setminus \Omega)^2$, con lo que $\mathrm{dist}(\gamma(t), \pi(\gamma(t))) \to 0$ cuando $t \to 0$. Como $\mathrm{dist}(\pi(\gamma(t)), x) \leq \mathrm{dist}(\gamma(t), \pi(\gamma(t))) + \mathrm{dist}(\gamma(t), x)$, esto implica que $\mathrm{dist}(\pi(\gamma(t)), x) \to 0$ cuando $t \to 0$, luego $x \in \mathrm{Fr}(M)$. Por tanto A es cerrado en $R^n \setminus \mathrm{Fr}(M)$. □

Teorema 3.3.5 *Sea F un subconjunto definible cerrado de R^n. Para cada entero positivo k, existe una función definible, continua, no negativa, $f : R^n \to R$ tal que $f^{-1}(0) = F$ y la restricción de f a $R^n \setminus F$ es de clase $\mathcal{D}^k$.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre la dimensión de F. Si F es vacío, basta con tomar para f cualquier función constante positiva. Sea entonces $d = \dim F \geq 0$ y supongamos que el teorema se verifica para todo subconjunto definible cerrado de R^n de dimensión $< d$. Tomemos una $\mathcal{D}^{k+1}$ dcdc de R^n adaptada a F. Sea $\mathcal{D}$ el conjunto finito de las celdas de dimensión d contenidas en F. Por la Proposición 3.3.4, cada celda $C \in \mathcal{D}$ tiene una ecuación $\mathcal{D}^k$ no negativa g_C en $R^n \setminus \mathrm{Fr}(C)$. Sea Z la unión de todas las celdas de dimensión $< d$ contenidas en F y todas las $\mathrm{Fr}(C)$, para $C \in \mathcal{D}$. El conjunto Z es definible y cerrado en R^n. El producto de todas las funciones g_C para $C \in \mathcal{D}$ define una función $g : U = R^n \setminus Z \to R$. La función g es de clase $\mathcal{D}^k$ y es una ecuación no negativa de $F \cap U$ en U. Es más, podemos tomar todas las g_C acotadas por 1 y por tanto tenemos que $g \leq 1$. Por la hipótesis de inducción, tenemos una función definible continua no negativa $h : R^n \to R$ tal que $h^{-1}(0) = Z$ y la restricción de h a U es de clase $\mathcal{D}^k$. El producto $f = gh$ está bien definido y es $\mathcal{D}^k$ en U. Este producto puede ser extendido de forma continua a R^n tomando $f = 0$ sobre Z. El conjunto de ceros de f es entonces $Z \cup (F \cap U) = F$. La función f satisface las propiedades del teorema.

□

Corolario 3.3.6 *Sea M una subvariedad $\mathcal{D}^k$ de R^n. Entonces existe una subvariedad $\mathcal{D}^k$ N de R^{n+1}, cerrada en R^{n+1}, tal que la proyección $\pi : R^{n+1} \to R^n$ sobre las primeras n*

coordenadas induce un difeomorfismo de N a M. Por tanto, toda subvariedad $\mathcal{D}^k$ de R^n es $\mathcal{D}^k$ difeomorfa a una subvariedad cerrada de R^{n+1}, y el Lema 3.3.2 y la Proposición 3.3.4 se verifican para toda subvariedad definible $\mathcal{D}^k$.

Demostración. Sea M un subvariedad $\mathcal{D}^k$ de R^n. Como M es localmente cerrada, $\mathrm{Fr}(M) = \overline{M} \setminus M$ es cerrado en R^n. Por el Teorema 3.3.5, existe una función definible continua no negativa $f : R^n \to R$ tal que $f^{-1}(0) = \mathrm{Fr}(M)$, y f es de clase $\mathcal{D}^k$ sobre $R^n \setminus \mathrm{Fr}(M)$. Consideremos

$$N = \{(x,t) \in R^{n+1} : x \in M \text{ y } tf(x) = 1\}.$$

Entonces N es una subvariedad $\mathcal{D}^k$, cerrada en R^{n+1}, y la aplicación $x \mapsto (x, 1/f(x))$ es un difeomorfismo $\mathcal{D}^k$ de M a N, que es el inverso de $\pi|_N$. □

El corolario anterior, junto con el Lema 3.3.3, completan la demostración del Teorema del Entorno Tubular Definible 3.3.1.

Para finalizar, enunciamos una propiedad adicional que necesitaremos y cuya demostración es la misma del caso estándar.

Proposición 3.3.7 *Sea $M \subset R^n$ una variedad $\mathcal{D}^r$, y sea (Ω, π, ρ) un entorno tubular $\mathcal{D}^{r-1}$. Existe una función definible $\varepsilon : M \to R$ continua y estrictamente positiva tal que la restricción*

$$\pi_| : \Omega_{\overline{\varepsilon}} = \{x \in \Omega : \rho(x) \leq \varepsilon(\pi(x))\} \to M$$

es propia.

3.4 Particiones de la unidad

En esta sección demostramos la existencia de particiones de la unidad de clase $\mathcal{D}^k$. En el Apéndice C del trabajo de van den Dries y Miller [9] se construyen funciones $\mathcal{D}^k$ $f : R \to R$ que son biyectivas y son *$\mathcal{D}^k$-planas* en 0. Utilizando estas funciones obtienen una cierta desigualdad de Lojasiewicz generalizada ([9, Th. C.9]):

Teorema 3.4.1 *Sean $f, g : R^n \to R$ funciones definibles continuas, de clase $\mathcal{D}^k$ en $R^n \setminus g^{-1}(0)$, con $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$. Entonces existen una biyección $\phi : R \to R$ de clase $\mathcal{D}^k$ y $\mathcal{D}^k$-plana en 0, y una función $h : R^n \to R$ de clase $\mathcal{D}^k$ que verifican $\phi \circ g = hf$.*

A partir de este resultado, y utilizando el Teorema 3.3.5, podemos demostrar la existencia de particiones de la unidad de clase $\mathcal{D}^k$.

Teorema 3.4.2 (Particiones de la Unidad) *Sea $M \subset R^n$ una variedad $\mathcal{D}^k$. Sean $U_1, \ldots, U_s$ subconjuntos definibles de M tales que $M = \bigcup U_i$. Entonces existen funciones $f_1, \ldots, f_s : M \to [0,1]$ de clase $\mathcal{D}^k$ tales que $\mathrm{sop}(f_i) \subset U_i$ para cada $i = 1, \ldots, s$ y $\sum_{i=1}^{s} f_i(x) = 1$ para todo $x \in M$. (Recordamos que el soporte de f_i, $\mathrm{sop}(f_i)$, es la adherencia del conjunto $\{x \in M : f_i(x) \neq 0\}$.)*

Demostración. Como toda variedad $\mathcal{D}^k$ es $\mathcal{D}^k$ difeomorfa a una variedad $\mathcal{D}^k$ cerrada (Corolario 3.3.6) podemos suponer que M es cerrada en R^n. Por [8, Lemma 3.6], existen subconjuntos definible abiertos $V_1, \ldots, V_s$ de M tales que $\overline{V_i} \subset U_i$ para todo $i = 1, \ldots, s$ y $M = \bigcup V_i$. Tenemos que, para todo i, $M \setminus V_i$ es un cerrado de R^n por lo que, aplicando el Teorema 3.3.5, existe una función definible no negativa $g_i : R^n \to R$ tal que $g_i^{-1}(0) = M \setminus V_i$ y g_i es de clase $\mathcal{D}^k$ sobre $R^n \setminus (M \setminus V_i)$. Aplicando el Teorema 3.4.1 con $f = 1$, podemos tomar una biyección $\phi_i : R \to R$ de clase $\mathcal{D}^k$ y $\mathcal{D}^k$-plana en 0 tal que $\phi_i \circ g_i$ es $\mathcal{D}^k$. Por tanto, sustituyendo g_i por $\phi_i \circ g_i$, podemos suponer que g_i es de clase $\mathcal{D}^k$. Entonces $\mathrm{sop}(g_i) \subset U_i$ para todo i. Tomando entonces, para cada i,

$$f_i = \frac{g_i}{\sum_{i=1}^{s} f_i}$$

tenemos el resultado. $\square$

Capítulo 4

Un teorema de aproximación para estructuras o-minimales

En este capítulo demostramos un teorema de aproximación de aplicaciones definibles en una estructura o-minimal por aplicaciones definibles de una clase de diferenciabilidad más alta.

En concreto, dadas dos variedades $\mathcal{D}^k$ $X \subset R^n$ e $Y \subset R^m$, toda aplicación de clase $\mathcal{D}^{k-1}$ $f : X \to Y$ tiene una aproximación $\mathcal{D}^k$ $\widetilde{f} : X \to Y$. En la sección primera introducimos las definiciones necesarias para hacer riguroso el concepto de aproximación, y en las siguientes desgranamos en pasos intermedios la demostración del mencionado teorema de aproximación. En uno de esos pasos obtenemos la existencia de entornos tubulares inclinados. Concluimos el capítulo con un teorema de eliminación de esquinas en variedades definibles.

4.1 Espacios de aplicaciones definibles

Sea $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una estructura o-minimal que expande el cuerpo real cerrado R. Sean X e Y subvariedades de clase $\mathcal{D}^r$ en R^n y R^m respectivamente. Sea $k \leq r$. Denotamos $\mathcal{D}^k_{\mathcal{S}}(X, Y)$ el conjunto de las aplicaciones de clase $\mathcal{D}^k$ $X \to Y$. Escribiremos simplemente $\mathcal{D}^k(X, Y)$ cuando no halla confusión respecto a $\mathcal{S}$, y $\mathcal{D}^k(X)$ cuando $Y = R$.

Vamos a definir una topología sobre $\mathcal{D}^k(X, Y)$. Consideramos en primer lugar el caso $Y = R$, esto es, vamos a definir una topología sobre $\mathcal{D}^k(X)$. Consideramos una familia finita $\{V_1, \dots, V_p\}$ de campos de vectores definibles $\mathcal{D}^{k-1}$ sobre X que generan el espacio tangente a X en cada punto de X, esto es,

$$\langle V_1(x), \dots, V_p(x)\rangle = T_xX \text{ para cada } x \in X.$$

Para cada función continua definible y positiva ε sobre X, sea

$$U_\varepsilon = \{g \in \mathcal{D}^k(X) : |V_{i_1} \cdots V_{i_j} g| < \varepsilon \text{ para } 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq p, j \leq k\}.$$

Eligiendo $\{g + U_\varepsilon\}_\varepsilon$ como una base de entornos de $\mathcal{D}^k(X)$ en g, definimos una topología sobre $\mathcal{D}^k(X)$.

La topología sobre $\mathcal{D}^k(X, R^m)$ se define de forma similar. Para una variedad $Y \subset R^m$ general, basta ver una aplicación definible de clase C^k $g \in \mathcal{D}^k(X, Y)$ como una aplicación $X \to R^m$. De esta forma, $\mathcal{D}^k(X, Y)$ es un subconjunto de $\mathcal{D}^k(X, R^m)$. Así, basta asignar a $\mathcal{D}^k(X, Y)$ la topología relativa.

Para asegurarnos de que ésta es una buena definición, hay dos hechos que debemos comprobar.

(1) *Siempre podemos elegir un conjunto finito $\{V_1, \ldots, V_p\}$ de campos de vectores sobre X que verifican la condición anterior.*

Para ver esto necesitamos en primer lugar un lema que nos será de utilidad más adelante.

Lema 4.1.1 *Sea N una subvariedad $\mathcal{D}^r$ de R^n, definida sobre una estructura o-minimal $(R, \mathcal{S})$. Entonces podemos encontrar un recubrimiento finito de N por subconjuntos definibles abiertos que son $\mathcal{D}^r$ difeomorfos al espacio afín.*

Demostración. Como N es una subvariedad definible $\mathcal{D}^r$ de R^n, podemos escribir N como una unión finita $N_1 \cup \ldots \cup N_k$ de subconjuntos abiertos tales que para cada i la proyección $\pi_{i_1,\ldots,i_d} : R^n \to R^d : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_d})$ induce un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $N_i \to V_i$, donde V_i es un subconjunto abierto de R^d (basta repetir el argumento que aparece en [2, Cor.9.3.10] para el caso semi-algebraico). Por tanto, existe una aplicación $\mathcal{D}^r$ $\phi_i : V_i \subset R^d \to R^{n-d}$ tal que $N_i = \mathrm{graf}(\phi_i)$. De esta forma basta demostrar nuestro resultado para un subconjunto definible abierto $N \subset R^d$.

Consideremos una descomposición en celdas $\mathcal{D}^{r+1}$ de R^d adaptada a N de forma que cada celda C sea $\mathcal{D}^r$ difeomorfa a $R^{\dim C}$ (Teorema 3.2.1). Tomemos una celda C y supongamos que $\dim C < d$. Sea T un entorno tubular $\mathcal{D}^r$ de C en R^d y $\pi : T \to C$ una retracción $\mathcal{D}^r$. Podemos suponer que $T \subset N$.

De la demostración de la Proposición 1.2.4 obtenemos no sólo que cada celda C de una $\mathcal{D}^{r+1}$ dcdc de R^d es $\mathcal{D}^{r+1}$ difeomorfa a $R^{\dim C}$, sino, además, que podemos suponer que el difeomorfismo considerado es de hecho la restricción de un difeomorfismo $\mathcal{D}^{r+1}$ $R^d \to R^d$ que manda C a un subespacio lineal. Esto nos permite ver fácilmente que el fibrado normal a C es $\mathcal{D}^r$ trivial.

Sea T_C un entorno tubular de C. Por lo anterior, T_C es $\mathcal{D}^r$ difeomorfo al conjunto

$$U = \{(x, y) \in R^{\dim C} \times R^{d-\dim C} : \|y\| < \varepsilon(x)\}$$

para cierta función $\mathcal{D}^r$ positiva $\varepsilon : R^{\dim C} \to R$. Pero, para $(x, y) \in W$, la aplicación

$$(x, y) \mapsto (x, \frac{y(2 + (\varepsilon^2(x) - \|y\|^2))}{\varepsilon^2(x) - \|y\|^2}$$

es un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ de W sobre $R^{\dim C} \times R^{d-\dim C} = R^d$. Por tanto, T_C es $\mathcal{D}^r$ difeomorfo a R^d. □

De esta forma podemos escribir $X = \bigcup_{t=1}^{s} U_t$, donde para cada t, U_t es un subconjunto abierto de X que es $\mathcal{D}^r$ difeomorfo a R^d, donde $d = \dim X$. Así, para cada t, es claro que podemos construir un conjunto de campos de vectores de clase $\mathcal{D}^{r-1}$ $\{V_1^t, \ldots, V_d^t\}$, definidos sobre U_t, que verifican la condición anterior. Consideremos ahora $\{\theta_t\}_{t=1,\ldots,s}$ una partición de la unidad de clase $\mathcal{D}^{r-1}$ sobre X subordinada a $\{U_t\}_{t=1,\ldots,s}$. Entonces

$$V = \bigcup_{t=1}^{s} \{\theta_t V_1^t, \ldots, \theta_t V_d^t\}$$

es un conjunto de campos de vectores globales de clase $\mathcal{D}^{r-1}$ que generan el espacio tangente en cada punto de X.

El segundo hecho que debemos comprobar es el siguiente:

(2) *La topología no depende de la elección de* $\{V_1, \ldots, V_p\}$.

Fijamos un conjunto $\{V_1, \ldots, V_p\}$ de campos de vectores de clase $\mathcal{D}^{k-1}$ tales que $\langle V_1(x), \ldots, V_p(x)\rangle = T_x X$ para cada $x \in X$. En primer lugar, consideremos un campo de vectores $\mathcal{D}^{k-1}$ W sobre X. Queremos encontrar funciones $a_1, \ldots, a_p \in \mathcal{D}^{k-1}(X)$ tales que

$$W = \sum_{i=1}^{p} a_i V_i.$$

Para una d-upla $(i_1, \ldots, i_d)$ con $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq p$, definimos

$$U_{(i_1,\ldots,i_d)} = \{x \in X : T_x X = \langle V_{i_1}(x), \ldots, V_{i_d}(x)\rangle\}.$$

Es claro que los $U_{(i_1,\ldots,i_d)}$ son abiertos definibles y $X = \bigcup U_{(i_1,\ldots,i_d)}$. Consideremos la colección $\{U_t\}_{t=1,\ldots,T}$ de los $U_{(i_1,\ldots,i_d)}$ no vacíos. Así, para cada $t = 1, \ldots, T$,

$$U_t = \{x \in X : T_x X = \langle V_{t_1}(x), \ldots, V_{t_d}(x)\rangle\}.$$

De esta forma, para cada campo de vectores definible W, y cada $t = 1, \ldots, T$, existen funciones definibles $a_1^t, \ldots, a_d^t \in \mathcal{D}^{k-1}(U_t)$ tales que

$$W = \sum_{i=1}^{d} a_i^t V_{t_i}$$

sobre U_t. Consideremos una partición de la unidad $\{\theta_t\}$ de clase $\mathcal{D}^{k-1}$ subordinada a $\{U_t\}$. De esta forma tenemos que $\theta_t a_i^t \in \mathcal{D}^{k-1}(X)$ para cada t y cada i, y, para $x \in X$:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{d} \theta_t(x) a_i^t(x) V_{t_i}(x) = \sum_{t=1}^{T} \theta_t(x) W(x) = W(x).$$

Antes de ver que nuestra definición no depende del conjunto $V = \{V_1, \ldots, V_p\}$, deberemos escribir U_ε^V en vez de U_ε. Sea $W = \{W_1, \ldots, W_q\}$ otro conjunto de campos de vectores de clase $\mathcal{D}^{k-1}$ tales que

$$\langle W_1(x), \ldots, W_q(x)\rangle = T_x X$$

para cada $x \in X$. Con este nuevo conjunto podemos definir otra topología sobre $\mathcal{D}^k(X)$ mediante el correspondiente U_ε^W. Veamos que ambas topologías son de hecho la misma.

Podemos escribir

$$W_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} V_j$$

para ciertas funciones $a_{ij} \in \mathcal{D}^{k-1}(X)$, para cada $i = 1, \ldots, q$. Así, para cada $g \in \mathcal{D}^k(X)$ y cada $i, k = 1, \ldots, q$, tenemos que

$$W_i g = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} V_j g,$$

$$\begin{aligned} W_k W_i g &= \sum_{j=1}^{p} a_{kj} V_j(W_i g) = \sum_{j=1}^{p} a_{kj} V_j(\sum_{t=1}^{p} a_{it} V_t g) \\ &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{t=1}^{p} a_{kj}(V_j(a_{it})V_t(g) + a_{it}V_i V_t(g)), \end{aligned}$$

y en el caso general podemos escribir

$$W_{i_1} \cdots W_{i_j} g = \sum_{t \leq j} \Phi_{i_1,\ldots,i_j}^{j_1,\ldots,j_t} V_{j_1} \cdots V_{j_t} g$$

donde las $\Phi_{i_1,\ldots,i_j}^{j_1,\ldots,j_t}$ son funciones definibles bien determinadas.

De esta forma, por las relaciones anteriores, es claro que para cada ε podemos encontrar ε' de forma que

$$U_{\varepsilon'}^V \subset U_\varepsilon^W.$$

Como podemos repetir el mismo razonamiento escribiendo los V_i's en función de los W_j's, obtenemos que ambas topologías son la misma.

Llamaremos a esta topología la *topología* $\mathcal{D}^k$.

Proposición 4.1.2 *Sea* $X \subset R^n$ *una subvariedad* $\mathcal{D}^r$ *e* $Y \subset X$ *una subvariedad* $\mathcal{D}^r$ cerrada. *Entonces la aplicación restricción*

$$\mathrm{res} : \mathcal{D}^r(X) \to \mathcal{D}^r(Y)$$

$$f \mapsto f_{|Y}$$

es continua para la topología $\mathcal{D}^k$.

Demostración. En primer lugar, construimos una determinada familia $\{V_1, \ldots, V_q\}$ de campos de vectores $\mathcal{D}^{r-1}$ sobre X que generan el espacio tangente a X en cada punto de x.

Por el Lema 4.1.1, podemos escribir $X = \bigcup_{t=1}^{s} U_t$, donde para cada t, U_t es un subconjunto abierto de X que es $\mathcal{D}^r$ difeomorfo a R^d, donde $d = \dim X$. Tal vez reduciendo los U_t, podemos tomar el anterior recubrimiento de forma que cada abierto sea el dominio de una carta $\mathcal{D}^r$. Para cada U_t, podemos construir un conjunto $\{V_1^t, \ldots, V_d^t\}$ de campos de vectores de clase $\mathcal{D}^{r-1}$, definidos sobre U_t, que generan el espacio tangente en cada punto de U_t. Además, al ser Y una subvariedad, podemos tomar estos campos de vectores de forma que, si $U_t \cap Y \neq \emptyset$, el conjunto $\{V_1^t, \ldots, V_{\dim Y}^t\}$ genera el espacio tangente a Y para cada punto en $U_t \cap Y$.

Consideremos ahora $\{\theta_t\}_{t=1,\ldots,s}$ una partición de la unidad de clase $\mathcal{D}^{r-1}$ sobre X subordinada a $\{U_t\}_{t=1,\ldots,s}$. Entonces

$$V = \bigcup_{t=1}^{s} \{\theta_t V_1^t, \ldots, \theta_t V_d^t\} = \{V_1, \ldots, V_q\}$$

es un conjunto de campos de vectores globales de clase $\mathcal{D}^{r-1}$ que generan el espacio tangente en cada punto de X y, reordenándolos, podemos suponer que los p primeros, $p \leq q$, generan el espacio tangente a Y en cada punto de Y.

Tomemos $0 \in \mathcal{D}^r(Y)$. Un entorno de 0 es

$$U_\varepsilon = \{g \in \mathcal{D}^r(Y) : |V_{i_1} \cdots V_{i_j} g| < \varepsilon \text{ para } 1 \leq i_1, \ldots, i_j \leq p, j \leq r\}$$

para cierta función definible continua $\varepsilon : Y \to R$.

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \mathrm{res}^{-1}(U_\varepsilon) &= \{g \in \mathcal{D}^r(X) : g_{|Y} \in U_\varepsilon\} \\ &= \{g \in \mathcal{D}^r(X) : |V_{i_1} \underline{\cdots V_{i_j} g_{|Y}| < \varepsilon \text{ para } 1 \leq i_1, \ldots, i_j \leq p, j \leq} r\}. \end{aligned}$$

Veamos que $\mathrm{res}^{-1}(U_\varepsilon)$ es un entorno de $0 \in \mathcal{D}^r(X)$. Consideremos una función continua definible positiva $\bar{\varepsilon} : X \to R$ tal que $\bar{\varepsilon}_{|Y} = \varepsilon$. (Veremos más adelante que una tal $\bar{\varepsilon}$ siempre se puede construir.) Entonces

$$U_{\bar{\varepsilon}} = \{g \in \mathcal{D}^r(X) : |V_{i_1} \cdots V_{i_t} g| < \bar{\varepsilon} \text{ para } 1 \leq i_1, \ldots, i_t \leq q, t \leq r\}$$

es un entorno de $0 \in \mathcal{D}^r(X)$ y $U_{\bar{\varepsilon}} \subset \mathrm{res}^{-1}(U_\varepsilon)$.

Veamos finalmente cómo construir $\bar{\varepsilon}$. Sea T un entorno tubular definible abierto de Y en X, con retracción $\pi : T \to Y$ de clase $\mathcal{D}^{r-1}$. Sea $\{\theta, 1-\theta\}$ una partición de la unidad $\mathcal{D}^{r-1}$ de X subordinada al recubrimiento $\{T, X \setminus Y\}$. Entonces

$$\bar{\varepsilon} = \theta(\varepsilon \circ \pi) + (1-\theta) : X \to R$$

es una función definible continua positiva, y $\bar{\varepsilon}(y) = \epsilon(y)$ para todo $y \in Y$.

Si Y no es cerrada obtenemos la continuidad de

$$\mathrm{res} : \mathcal{D}^r(U) \to \mathcal{D}^r(Y)$$

en un entorno abierto definible U de Y en X (de hecho podemos tomar $U = X \setminus \mathrm{Fr}(Y)$).

Una propiedad importante de esta topología, y que merece la pena resaltar, es que *los difeomorfismos $\mathcal{D}^k$ forman un abierto de $\mathcal{D}^k(X,Y)$ para la topología $\mathcal{D}^k$*. Para ver esto, basta repetir el argumento de [17, Lemma II.1.7]. Se tiene además ([17, Lemma II.1.8]) que también *las inmersiones difeomórficas $\mathcal{D}^k$ forman un abierto.*

En las siguientes secciones enunciaremos diferentes versiones del teorema de aproximación y veremos las demostraciones de los distintos casos.

4.2 Aproximación de funciones de una variable

Empezamos por discutir el siguiente caso particular.

Teorema 4.2.1 *Sea $f : R \to R$ una función $\mathcal{D}^r$ Supongamos que $f_{|R\setminus\{0\}}$ es $\mathcal{D}^{r+1}$. Dado una función definible continua $\delta : R \to R$, $\delta > 0$, existe una función $\mathcal{D}^{r+1}$ $\widetilde{f} : R \to R$ tal que la diferencia entre las derivadas $|(f - \widetilde{f})^{(\alpha)}(x)| < \delta(x)$ para todo $x \in R$ y para todo $\alpha = 0, \dots, r$. Es decir, $\widetilde{f}$ aproxima a f en la topología $\mathcal{D}^r$.*

Demostración. Queremos aproximar f (junto con sus derivadas) por una función $\mathcal{D}^{r+1}$. Para ello vamos a utilizar la fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}(0)x^{r-1} + \frac{1}{r!}f^{(r)}(\xi)x^r \\ &= f(0) + \cdots + \frac{1}{r!}f^{(r)}(0)x^r + \frac{1}{r!}\left(f^{(r)}(\xi) - f^{(r)}(0)\right)x^r \end{aligned}$$

para cierto $\xi \in [0, x]$. De esta forma, si definimos

$$\theta(x) = f(0) + \cdots + \frac{1}{r!}f^{(r)}(0)x^r$$

y

$$Q(x,\xi) = \frac{1}{r!}\left(f^{(r)}(\xi) - f^{(r)}(0)\right)x^r,$$

tenemos que

$$f(x) = \theta(x) + Q(x,\xi)$$

para cierto $\xi \in [0, x]$. Pero como $Q(x, \xi) = f(x) - \theta(x)$, de hecho no depende de ξ, con lo que podemos escribir

$$f(x) = \theta(x) + Q(x)$$

para cierta función Q de clase $\mathcal{D}^r$ que es de clase $\mathcal{D}^{r+1}$ fuera del 0 y que verifica $Q^{(k)}(0) = 0$ para $k = 0, \ldots, r$.

Consideremos una función $\mu : R \to R$ de clase $\mathcal{D}^{r+1}$ tal que $\mu \equiv 1$ en un entorno de 0 y $\mu \equiv 0$ fuera del intervalo $[-1, 1]$. Esta última condición implica que existe $C > 0$ tal que $|\mu^{(k)}(x)| < C$ para todo $x \in R$ y $k = 0, \ldots, r$.

Dado $\epsilon > 0$, definimos

$$\lambda_\epsilon : R \to R$$

$$\lambda_\epsilon(x) = \mu\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Esta función verifica que $|\lambda_\epsilon^{(k)}(x)| \leq \frac{C}{\epsilon^k}$ para todo $x \in R$ y $k = 0, \ldots, r$.

Consideremos

$$\widetilde{f}(x) = \theta(x) + (1 - \lambda_\epsilon(x))Q(x).$$

La función $\widetilde{f}$ coincide con f fuera de $[-\epsilon, \epsilon]$, es de clase $\mathcal{D}^{r+1}$ fuera de $\{0\}$ (al serlo Q) y coincide con Q en un entorno de $\{0\}$. Por tanto, $\widetilde{f}$ es de clase $\mathcal{D}^{r+1}$.

Evidentemente $\widetilde{f}$ es una aproximación de f fuera de $[-\epsilon, \epsilon]$, por lo que únicamente hay que demostrar que $\widetilde{f}$ aproxima f en $[-\epsilon, \epsilon]$. En primer lugar tenemos que $Q^{(k)}(0) = 0$ para todo $k = 0, \ldots, r$. Consideramos ahora $M_\epsilon = \max_{x \in [-\epsilon, \epsilon]} |Q^{(r)}(x)|$ y afirmamos que

$$|Q^{(k)}(x)| \leq \epsilon^{r-k} M_\epsilon$$

para $x \in [-\epsilon, \epsilon]$ y $k = 0, \ldots, r$. En efecto, podemos demostrar esta afirmación por inducción inversa. Para $k = r$, $|Q^{(r)}(x)| \leq \epsilon^0 M_\epsilon$ por definición. Tomemos ahora un k tal que $0 \leq k < r$. Entonces, $|Q^{(k)}(x)| = |Q^{(k)}(x) - Q^{(k)}(0)| = |Q^{(k+1)}(c)||x - 0|$ para cierto $c \in (0, x)$, y por hipótesis de inducción resulta $\leq \epsilon^{r-k-1} M_\epsilon \epsilon = \epsilon^{r-k} M_\epsilon$.

Así se obtiene que

$$|f(x) - \widetilde{f}(x)| = |\lambda_\epsilon(x)||Q(x)| \leq \epsilon^r M_\epsilon \text{ para } x \in [-\epsilon, \epsilon],$$

y para $0 < k \leq r$ es

$$|(f - \widetilde{f})^{(k)}(x)| = |\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda_\epsilon^{(l)}(x) Q^{(k-l)}(x)|.$$

De esta forma tenemos que $|\lambda_\epsilon^{(l)}(x) R^{(k-l)}(x)| \leq \frac{C}{\epsilon^l} \epsilon^{r-k+l} M_\epsilon = C M_\epsilon \epsilon^{r-k}$. Pero como $M_\epsilon \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$, tenemos que la diferencia $|(f - \widetilde{f})^{(k)}|$ se puede hacer tan pequeña como queramos en $[-\epsilon, \epsilon]$. □

4.3 Aproximación de funciones de varias variables, I

Antes de enunciar el teorema principal de esta sección, fijemos una cierta notación. Escribiremos $(x, y) \in R^{m+n}$ para el punto $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \in R^{m+n}$. Dados $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{N}^m$ y $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}^n$, escribiremos $|a| = a_1 + \cdots + a_m$, $|b| = b_1 + \cdots + b_n$ y

$$\frac{\partial^{|a|+|b|} f}{\partial x^a \partial y^b} = \frac{\partial^{|a|+|b|} f}{\partial x^{a_1} \cdots \partial x^{a_m} \partial y^{b_1} \cdots \partial y^{b_n}}.$$

Teorema 4.3.1 *Sea $f : R^{m+n} \to R$ una función $\mathcal{D}^r$. Supongamos que f es de clase C^{r+1} fuera de $\{0\} \times R^n$ y que $f_{|\{0\}\times R^n}$ es C^{r+1}. Supongamos además que las funciones*

$$R^n \ni y \mapsto \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x^a}(0, y)$$

son de clase C^{r+1} para cada $a \in \mathbb{N}^m$, $0 \le |a| \le r$. Sea $\delta : R^{m+n} \to R$ una función definible positiva continua. Entonces existe una función $\widetilde{f} : R^{m+n} \to R$ de clase $\mathcal{D}^{r+1}$ tal que

$$\left| \frac{\partial^{|a|+|b|}}{\partial x^a \partial y^b}(f - \widetilde{f}) \right| < \delta$$

para todo $0 \le |a| + |b| \le r$.

Demostración. Utilizando la formula de Taylor tenemos que

$$f(x, y) = f(0, y) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, y) x_i + \cdots + \sum_{|a|=r-1} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{r-1} f}{\partial x^a}(0, y) x^a$$

$$+ \sum_{|a|=r} \frac{1}{a!} \frac{\partial^r f}{\partial x^a}(\xi, y) x^a$$

para cierto ξ en el segmento $[0, x]$. Ahora, si definimos

$$\theta(x, y) = f(0, y) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, y) x_i + \cdots + \sum_{|a|=r} \frac{1}{a!} \frac{\partial^r f}{\partial x^a}(0, y) x^a$$

y

$$Q(x, z, y) = \sum_{|a|=r} \frac{1}{a!} \left(\frac{\partial^r f}{\partial x^a}(z, y) - \frac{\partial^r f}{\partial x^a}(0, y) \right) x^a,$$

tenemos que para cada x e y existe $\xi \in [0, x]$ tal que

$$f(x, y) = \theta(x, y) + Q(x, \xi, y).$$

Observamos que Q es un polinomio en x cuyos coeficientes son funciones continuas

$$\Phi_a(z,y) = \frac{1}{a!}\left(\frac{\partial^r f}{\partial x^a}(z,y) - \frac{\partial^r f}{\partial x^a}(0,y)\right).$$

Consideremos el conjunto

$$A = \{(x,y,\xi) \in R^m \times R^n \times R^m : f(x,y) = \theta(x,y) + Q(x,\xi,y),\ \xi \in [0,x]\}.$$

Este conjunto es definible y no vacío. Por tanto, por el Teorema de Elección Definible 1.3.1, existe una función definible $\zeta : R^m \times R^n \to R^m$ tal que para cada $x \in R^m$ $y \in R^n$ $(x,y,\zeta(x,y)) \in A$. Es más, como $\xi \in [0,x]$, se tiene que $\zeta(0,y) = 0$ y $\zeta(x,y) \to 0$ cuando $(x,y) \to (0,y_0)$. (Nótese que en general no podemos suponer que ζ sea continua.) De esta forma, si definimos $\chi_a(x,y) = \Phi_a(\zeta(x,y),y)$, obtenemos que

$$f(x,y) = \theta(x,y) + \sum_{|a|=r} \frac{1}{a!}\chi_a(x,y)x^a$$

donde los χ_a son funciones definibles tales que $\chi_a(0,y) = 0$ y $\chi_a(x,y) \to 0$ cuando $(x,y) \to (0,y_0)$. Ahora redefinimos

$$Q(x,y) = \sum_{|a|=r} \frac{1}{a!}\chi_a(x,y)x^a.$$

Sea entonces $\epsilon_1 : R \to R$ una función definible de clase C^{r+1}, positiva y *suficientemente pequeña*, que podemos encontrar por el Lema 3.3.2, y definamos $\epsilon : R^n \to R$ como $\epsilon(y) = \epsilon_1(|y|^2)$. Podemos elegir ϵ_1 con la condición adicional de que las derivadas

$$\frac{\partial^{|a|}\epsilon}{\partial y^a} = \sum_{q \le [a/2]} \epsilon_1^{(|a|-|q|)}(|y|^2)y^{a-2q}$$

estén acotadas por constantes. Consideremos

$$U_\epsilon = \{(x,y) \in R^{m+n} : |x| < \epsilon(y)\}.$$

Podemos definir

$$\lambda(x,y) = \mu\left(\frac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right),$$

donde $\mu : R \to R$ es una función de clase $\mathcal{D}^{r+1}$ tal que $\mu \equiv 1$ en un entorno de 0 y $\mu \equiv 0$ fuera del intervalo $[-1,1]$. Con esto definimos la función

$$\widetilde{f}(x,y) = \theta(x,y) + (1-\lambda(x,y))Q(x,y).$$

La función $\widetilde{f}$ es $\mathcal{D}^{r+1}$ fuera de $\{0\} \times R^n$, al serlo todas las funciones implicadas en su definición. Pero, en un entorno de $\{0\} \times R^n$, $\widetilde{f} = \theta$ y por tanto es de clase $\mathcal{D}^{r+1}$. Así, $\widetilde{f}$ es de clase $\mathcal{D}^{r+1}$.

Como antes,

$$f - \widetilde{f} = \lambda Q.$$

Comprobemos que $\widetilde{f}$ es una buena aproximación. Como $\widetilde{f} = f$ fuera de U_ϵ, basta estudiar lo que pasa en U_ϵ.

En primer lugar tenemos que $|f(x,y) - \widetilde{f}(x,y)| = |\lambda(x,y)||Q(x,y)| \leq |Q(x,y)|$. Pero si tomamos $(x,y) \in U_\epsilon$, y como $Q(0,y) = 0$, podemos hacer $|Q(x,y)|$ tan pequeño como queramos, tomando ϵ suficientemente pequeño. A continuación, estudiamos las derivadas.

Utilizando la notación previamente establecida, tenemos que

$$\frac{\partial^{|a|+|b|}(f - \widetilde{f})}{\partial x^a \partial y^b} = \sum_{p \leq a} \sum_{q \leq b} \mathcal{A}_{p,q} \frac{\partial^{|p|+|q|}\lambda}{\partial x^p \partial y^q} \frac{\partial^{|a-p|+|b-q|}Q}{\partial x^{a-p} \partial y^{b-q}}$$

donde $p = (p_1, \dots, p_m)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$ y las $\mathcal{A}_{p,q}$ son constantes. Estudiemos en primer lugar las derivadas de λ.

Aserto 1:

$$\frac{\partial^{|a|}\lambda}{\partial x^a} = \left(\frac{1}{\epsilon(y)}\right)^{|a|} \sum_{q \leq [a/2]} \mathcal{C}_{a,q}\, \mu^{(|a|-|q|)} \left(\frac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right) x^{a-2q} \left(\frac{1}{\epsilon(y)}\right)^{|a|-2|q|}$$

donde las $\mathcal{C}_{a,q}$ son constantes.

Demostración del Aserto 1. Es suficiente con probarlo para $m = 1$. El caso $a = 1$ es trivial. Si $a > 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial^{|a|}\lambda}{\partial x^a} &= \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\textstyle\sum_{q \leq [(a-1)/2]} \mathcal{C}_{a-1,q} \mu^{(a-1-q)} \left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right) x^{a-1-2q} \left(\tfrac{1}{\epsilon(y)}\right)^{|2(a-1)-2q|}\right) \\
&= \textstyle\sum_{q \leq [(a-1)/2]} \mathcal{C}_{a-1,q} \left(\tfrac{1}{\epsilon(y)}\right)^{|2(a-1)-2q|} \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu^{(a-1-q)}\left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right) x^{a-1-2q}\right) \\
&= \textstyle\sum_{q \leq [(a-1)/2]} \mathcal{C}_{a-1,q} \left(\tfrac{1}{\epsilon(y)}\right)^{|2(a-1)-2q|} \Big[\mu^{(a-q)}\left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right) \tfrac{2x}{\epsilon^2(y)} x^{a-1-2q} \\
&\quad + \mu^{(a-1-q)}\left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)(a-1-2q)x^{a-2-2q}\Big] \\
&= \textstyle\sum_{q \leq [(a-1)/2]} \mathcal{C}_{a-1,q} \Big[2\mu^{(a-q)}\left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)\left(\tfrac{1}{\epsilon(y)}\right)^{|2a-2q|} x^{a-2q} \\
&\quad + (a-1-2q)\mu^{(a-(q+1))}\left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)\left(\tfrac{1}{\epsilon(y)}\right)^{|2a-2(q+1)|} x^{a-2(q+1)}\Big].
\end{aligned}$$

□

De esta forma, para estudiar $\frac{\partial^{|a|+|b|}\lambda}{\partial x^a \partial y^b}$ debemos analizar las derivadas con respecto a y de las expresiones

$$\mu^{(\gamma)}\left(\frac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)\left(\frac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2\gamma}.$$

Aserto 2: $\frac{\partial^{|k|}}{\partial y^k}\left(\mu^{(\gamma)}\left(\frac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)\right)$ se puede expresar como una suma de términos de la forma

$$\mu^{(\gamma+|s|)}\left(\frac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)|x|^{2|s|}\left(\frac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2|s|+|\alpha|+|\beta|}\Phi_{\alpha,\beta,s}$$

donde $\alpha_i + \beta_i \le k_i$, $1 \le s_i \le \alpha_i$ y $\Phi_{\alpha,\beta,s}$ es una expresión polinomial en ϵ y sus derivadas.

Demostración del Aserto 2. Como antes, es suficiente probar el aserto para $n = 1$. El aserto es trivial para $k = 1$. Si $k > 1$, solamente tenemos que observar que

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial}{\partial y}\left(\mu^{(\gamma+|s|)}\left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)|x|^{2|s|}\left(\tfrac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2|s|+|\alpha|+|\beta|}\Phi_{\alpha,\beta,s}\right)\\
&= \mu^{(\gamma+|s|+1)}\left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)\tfrac{-2|x|^2\epsilon'(y)}{\epsilon^3(y)}|x|^{2|s|}\left(\tfrac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2|s|+|\alpha|+|\beta|}\Phi_{\alpha,\beta,s}\\
&\quad+\mu^{(\gamma+|s|)}\left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)|x|^{2|s|}(-(2|s|+|\alpha|+|\beta|))\epsilon'(y)\left(\tfrac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2|s|+|\alpha|+|\beta|+1}\Phi_{\alpha,\beta,s}\\
&\quad+\mu^{(\gamma+|s|)}\left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)|x|^{2|s|}\left(\tfrac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2|s|+|\alpha|+|\beta|}\Phi'_{\alpha,\beta,s}\\
&= \mu^{(\gamma+|s|+1)}\left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)|x|^{2(|s|+1)}\left(\tfrac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2(|s|+1)+|\alpha|+1+|\beta|}(-2\epsilon'(y)\Phi_{\alpha,\beta,s})\\
&\quad+\mu^{(\gamma+|s|)}\left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)|x|^{2|s|}\left(\tfrac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2|s|+|\alpha|+1+|\beta|}(-(2|s|+|\alpha|+|\beta|)\epsilon'(y)\Phi_{\alpha,\beta,s})\\
&\quad+\mu^{(\gamma+|s|)}\left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)|x|^{2|s|}\left(\tfrac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2|s|+|\alpha|+|\beta|}\Phi'_{\alpha,\beta,s}.
\end{aligned}$$

□

Aserto 3:

$$\frac{\partial^{|k|}}{\partial y^k}\left(\frac{1}{\epsilon(y)^a}\right) = \frac{1}{\epsilon(y)^{a+k}}\Lambda_k$$

donde Λ_k es una expresión polinomial en ϵ y sus derivadas.

Demostración del Aserto 3: Por inducción. Para $k = 1$ el aserto es trivial. Por hipótesis de inducción, si $k > 1$, tenemos que

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k}\left(\frac{1}{\epsilon(y)^a}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\epsilon(y)^{a+k-1}}\Lambda_{k-1}\right) = \frac{1}{\epsilon(y)^{a+k}}\left(-(a+k-1)\epsilon'(y)\Lambda_{k-1} + \epsilon(y)\Lambda'_{k-1}\right).$$

□

Es fácil ver que, para funciones A y B que dependen de y, tenemos que

$$\frac{\partial^{|b|}(AB)}{\partial y^b} = \sum_{k\le b}\mathcal{B}_{b,k}\frac{\partial^{|k|}A}{\partial y^k}\frac{\partial^{|b-k|}B}{\partial y^{b-k}}$$

donde las $\mathcal{B}_{b,k}$ son constantes. De esta forma, en nuestro caso,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial^{|b|}}{\partial y^b}\left(\mu^{(\gamma)}\left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)\left(\tfrac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2\gamma}\right)\\
&= \textstyle\sum_{k\le b}\mathcal{B}_{b,k}\tfrac{\partial^{|k|}}{\partial y^k}\left(\mu^{(\gamma)}\left(\tfrac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)\right)\tfrac{\partial^{|b-k|}}{\partial y^{b-k}}\left(\left(\tfrac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2\gamma}\right)
\end{aligned}$$

y cada término de esta suma se puede expresar como una suma de términos de la forma

$$\mu^{(\gamma+|s|)}\left(\frac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right)|x|^{2|s|}\left(\frac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2|s|+|\alpha|+|\beta|+2\gamma+|b-k|}\Xi_{k,\alpha,\beta,s}$$

donde $\alpha_i + \beta_i \leq k_i$, $1 \leq s_i \leq \alpha_i$ y $\Xi_{k,\alpha,\beta,s}$ es una expresión polinomial en ϵ y sus derivadas.

A continuación, estudiamos las derivadas de Q.

Aserto 4:

$$\frac{\partial^{|a+b|} Q}{\partial x^a \partial y^b} = \sum_{|q|=r-(|a|+|b|)} \delta_q(x,y) x^q$$

donde δ_q es una función definible tal que $\delta(0,y) = 0$ y $\delta(x,y) \to 0$ cuando $(x,y) \to (0,y_0)$.

Demostración del Aserto 4. Basta ver $\frac{\partial^{|a+b|} Q}{\partial x^a \partial y^b}$ como el "resto" del desarrollo de Taylor de $\frac{\partial^{|a+b|} f}{\partial x^a \partial y^b}$ con respecto a x en $(0,y)$ de grado $r - (|a| + |b|)$. □

Después de todos estos cálculos, tenemos que cada término

$$\frac{\partial^{|p+q|}\lambda}{\partial x^p \partial y^q} \frac{\partial^{|a-p|+|b-q|} Q}{\partial x^{a-p} \partial y^{b-q}}$$

se puede expresar como una suma de términos de la forma

$$\mu^{(|p|-|\nu|+|s|)} \left(\frac{|x|^2}{\epsilon^2(y)}\right) |x|^{2|s|} x^{p-2\nu} \left(\frac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2|s|+|\alpha|+|\beta|} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2|p|-2|\nu|+|q|-|k|} \Xi_{k,\alpha,\beta,s}(y) \delta_t(x,y) x^t$$

donde $\nu_i \leq [p_i/2]$, $k_i \leq q_i$, $\alpha_i + \beta_i \leq k_i$, $1 \leq s_i \leq \alpha_i$ y $|t| = r - (|a-p| + |b-q|)$.

Queremos acotar la expresión anterior. Pero para ello, basta con acotar

$$|x|^{2|s|} x^{p-2\nu} \left(\frac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2|s|+|\alpha|+|\beta|} \left(\frac{1}{\epsilon(y)}\right)^{2|p|-2|\nu|+|q|-|k|} x^t.$$

Pero como $|x| < \epsilon(y)$, esta expresión está acotada por

$$\epsilon(y)^{2|s|} \epsilon(y)^{|p|-2|\nu|} \frac{1}{\epsilon(y)^{2|s|+|\alpha|+|\beta|}} \frac{1}{\epsilon(y)^{2|p|-2|\nu|+|q|-|k|}} \epsilon(y)^{|t|} =$$

$$\frac{\epsilon(y)^{|p|} \epsilon(y)^{r-|a|+|p|-|b|+|q|}}{\epsilon(y)^{|\alpha|+|\beta|} \epsilon(y)^{2|p|+|q|-|k|}} = \epsilon(y)^{r-(|a|+|b|)} \epsilon(y)^{|k|-(|\alpha|+|\beta|)}$$

y ésta expresión se acota claramente. □

4.4 Aproximación de funciones de varias variables, II

Enunciamos ahora el teorema de aproximación de la sección anterior sin restricciones especiales:

Teorema 4.4.1 *Sea $f : R^n \to R$ una función de clase $\mathcal{D}^r$. Sea $\delta : R^n \to R$ una función definible continua positiva. Existe entonces una aproximación $\widetilde{f} : R^n \to R$ de f de clase $\mathcal{D}^{r+1}$ tal que*

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f - \widetilde{f}) \right| < \delta$$

para $0 \leq |\alpha| \leq r$.

Demostración. En primer lugar, utilizando los teoremas 3.2.1 y 3.2.2 podemos encontrar una estratificación finita $R^n = \bigcup M_i$ de forma que, para cada i, M_i es una $\mathcal{D}^p$ celda, M_i es $\mathcal{D}^p$ difeomorfa a R^{d_i} ($d_i = \dim M_i$), y $f_{|M_i} : M_i \to R$ es una función $\mathcal{D}^p$, con p suficientemente grande de forma que los condiciones que van a ir apareciendo en el argumento se verifiquen.

Para cada i, tenemos un entorno tubular $\mathcal{D}^{p-1}$ de M_i, es decir, un entorno abierto definible T_i de M_i en R^n, una retracción sumersiva $\mathcal{D}^{p-1}$ $\tau_i : T_i \to M_i$ y una función cuadrado de la distancia de clase $\mathcal{D}^{p-1}$ $\rho_i : T_i \to R$. Por la demostración de 4.1.1, para cada i tenemos un difeomorfismo $\mathcal{D}^{p-1}$ $\phi_i : T_i \to R^n$ tal que $\phi_i(M_i) = \{0\} \times R^{d_i}$.

Definamos

$$M^{\leq k} = \bigcup_{\operatorname{codim}(M_i) \leq k} M_i.$$

Como $\{M_i\}$ es una estratificación, se tiene que, para $k = 0, \ldots, n$, la unión de estratos de dimensión $< n - k$ es un cerrado de R^n, luego su complementario $M^{\leq k}$ es un *abierto* de R^n. Por inducción sobre k, probamos que existe una función $\mathcal{D}^{r+1}$ $\widetilde{f}^{\leq k} : M^{\leq k} \to R$ tal que

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f - \widetilde{f}^{\leq k})(x) \right| \leq \eta_k(x)$$

para cada $x \in M^{\leq k}$, donde $\eta_k : R^n \to R$ es una función definible continua no negativa tal que $\eta_k < \delta$ y $\eta_k \equiv 0$ sobre $R^n \backslash M^{\leq k}$.

En efecto, si $k = 0$, $M^{\leq 0}$ es una unión de subconjuntos definibles abiertos de R^n, con lo que basta tomar $\widetilde{f}^{\leq 0} = f$ y $\eta_0 = 0$. Supongamos que $k > 0$. Por hipótesis de inducción tenemos una función de clase $\mathcal{D}^{r+1}$ $\widetilde{f}^{<k} : M^{<k} \to R$ que verifica

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f - \widetilde{f}^{<k}) \right| \leq \eta_{k-1}$$

para cierta función definible continua $\eta_{k-1} : R^n \to R$ tal que $\eta_{k-1} < \delta$ y $\eta_{k-1} \equiv 0$ sobre $R^n \backslash M^{<k}$. Consideremos un estrato $N = M_i$ tal que $\operatorname{codim} N = k$. Sea $T = T_i$ un entorno tubular de N, $\tau = \tau_i$ y $\rho = \rho_i$. Tomando T suficientemente pequeño, podemos suponer que N es el único estrato de codimensión $\geq k$ que interseca a T.

Las funciones $\widetilde{f}^{<k} : T \cap M^{<k} \to R$ y $f : N \to R$ son de clase $\mathcal{D}^{r+1}$. Como η_{k-1} es continua y $\eta_{k-1} \equiv 0$ sobre N, tenemos que $\widetilde{f}^{<k}$ y f definen una función $\mathcal{D}^r$ $f^{\leq k} : T \to R$.

Si consideramos el subconjunto cerrado $F = R^n \setminus M^{\leq k}$, el Teorema 3.3.5 nos da una función definible continua no negativa $\nu : R^n \to R$ tal que $\nu^{-1}(0) = F$. De esta forma, podemos definir $\eta_k = \max\{\eta_{k-1}, \frac{\nu}{\nu+1}\delta\}$, que es una función definible continua no negativa que verifica que $\eta_k < \delta$ y $\eta_k \equiv 0$ sobre $R^n \setminus M^{\leq k}$.

Sea $\phi = \phi_i : T \to R^n$ un difeomorfismo $\mathcal{D}^{p-1}$ tal que $\phi(N) = \{0\} \times R^d$, donde $d = d_i$. (Tal difeomorfismo existe por la demostración de Lema 4.1.1.) Consideremos la función $g = f^{\leq k} \circ \phi^{-1} : R^n \to R$. Tomando p suficientemente grande, tenemos que g es de clase $\mathcal{D}^{\min\{r,p-1\}} = \mathcal{D}^r$, $g_{|\{0\}\times R^d}$ es de clase $\mathcal{D}^{\min\{r+1,p-1\}} = \mathcal{D}^{r+1}$ y g es de clase $\mathcal{D}^{\min\{r+1,p-1\}} = \mathcal{D}^{r+1}$ fuera de $\{0\} \times R^d$. Podemos también suponer que las funciones $R^d \ni y \mapsto \frac{\partial^\alpha g_i}{\partial y^\alpha}(0, y)$ son de clase $\mathcal{D}^{r+1}$. Entonces, por el resultado de la sección anterior, podemos aproximar g por una función $\mathcal{D}^{r+1}$ $\widetilde{g} : R^n \to R$ de forma que

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y^\alpha}(g - \widetilde{g}) \right| < \delta_1$$

para $|\alpha| \leq r$ y para cierta función δ_1 que se determinará más adelante.

En lo sucesivo denotaremos por x las coordenadas en T y por y las coordenadas en R^n.

Consideremos ahora la función $\mathcal{D}^{r+1}$ $h = \widetilde{g} \circ \phi : T \to R$ y estudiemos $|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f - h)|$. Tenemos que

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f - h) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}((g - \widetilde{g}) \circ \phi)$$

y esto se puede expresar como una suma finita de términos de la forma

$$\frac{\partial^{|\beta|}(g - \widetilde{g})}{\partial y^\beta} \left[\frac{\partial^{|\gamma_1|}\phi_1}{\partial x^{\gamma_1}} \right]^{k_1} \cdots \left[\frac{\partial^{|\gamma_n|}\phi_n}{\partial x^{\gamma_n}} \right]^{k_n}$$

donde $|\beta| \leq |\alpha|$ y $\sum k_i|\gamma_i| \leq |\alpha|$. Como δ_1 se puede tomar tan pequeña como queramos, podemos hacer a su vez las expresiones anteriores tan pequeñas como queramos. De esta forma vemos que h es una buena aproximación de clase C^{r+1} de f en T. Es decir, podemos suponer que

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f - h) \right| < \eta_k$$

sobre T.

Finalmente, queremos "pegar" h con la función $\widetilde{f}^{<k}$ definida sobre los estratos de codim $< k$ para, de esta forma, obtener una aproximación global. Pero, por la construcción de h, podemos suponer que $h = \widetilde{f}^{<k}$ fuera de un pequeño entorno de N. Así, podemos simplemente definir la aproximación $\mathcal{D}^{r+1}$ $\widetilde{f}^{\leq k}$ de f sobre $M^{\leq k}$ mediante

$\widetilde{f}^{\leq k}(x) = h(x)$ si $x \in T$, y

$\widetilde{f}^{\leq k}(x) = \widetilde{f}^{<k}(x)$ si $x \in M^{<k} \setminus T$. □

Es importante destacar que la demostración anterior es válida también para el caso de una función $f : U \to R$, donde $U \subset R^n$ es un subconjunto abierto.

4.5 Aproximación de funciones arbitrarias

Después de los resultados anteriores obtenemos:

Teorema 4.5.1 *Sea $X \subset R^n$ una subvariedad $\mathcal{D}^r$. Sea $f : X \to R$ una función de clase $\mathcal{D}^{r-1}$. Entonces existe una función de clase $\mathcal{D}^r$ $\widetilde{f} : X \to R$ que aproxima f en la topología $\mathcal{D}^{r-1}$.*

Demostración. En primer lugar consideramos un entorno tubular definible U de X en R^n y una retracción $\mathcal{D}^{r-1}$ $\tau : U \to X$, . Con esto, $g = f \circ \tau : U \to R$ es una extensión de clase $\mathcal{D}^{r-1}$ de f a U. Por los resultados anteriores, existe una aproximación $\mathcal{D}^r$ $\widetilde{g} : U \to R$ de g. Por la continuidad de la restricción, al ser X cerrada en U, tenemos que $\widetilde{f} = \widetilde{g}_{|X}$ es una aproximación $\mathcal{D}^r$ de f. □

4.6 Entornos tubulares inclinados

En esta sección extendemos la clase de diferenciabilidad de los entornos tubulares sobre una variedad $\mathcal{D}^r$. Necesitamos este resultado (ya de por si interesante) para establecer el Teorema de Aproximación de forma general.

Teorema 4.6.1 *Sea X una subvariedad $\mathcal{D}^r$ de R^n. Entonces X admite un entorno tubular de clase $\mathcal{D}^r$.*

Shiota, en su trabajo [17], llama a esta construcción un entorno tubular *inclinado*.

Demostración. Supongamos que X tiene dimensión k. Consideremos la aplicación

$$\psi : X \to \mathbb{G}_{n,n-k}$$

$$x \mapsto \mathrm{N}_x X$$

que asigna a cada x en X el espacio normal a X en x. Este aplicación es de clase $\mathcal{D}^{r-1}$.

La Grassmanniana $\mathbb{G}_{n,n-k}$ es una subvariedad $\mathcal{D}^\infty$ de R^{n^2}, por lo que, en particular, existe un entorno definible abierto U de $\mathbb{G}_{n,n-k}$ en R^{n^2} y una retracción $\mathcal{D}^r$ $\tau : U \to \mathbb{G}_{n,n-k}$.

Si vemos ψ como una aplicación $X \to R^{n^2}$, podemos aproximarla por una aplicación de clase $\mathcal{D}^r$ $\widetilde{\psi} : X \to R^{n^2}$. Tomando esta aproximación suficientemente próxima, podemos suponer que $\widetilde{\psi}(X) \subset U$. De esta forma, está definida la aplicación $\tau \circ \widetilde{\psi} : X \to \mathbb{G}_{n,n-k}$, que es una aproximación de clase $\mathcal{D}^r$ de ψ.

Si tomamos $\widetilde{\psi}$ tan próxima que se verifica

$$\tau \circ \widetilde{\psi}(x) + \mathrm{T}_x X = R^n \text{ para todo } x \in X,$$

podemos entonces repetir la demostración de 3.3.1 sustituyendo NX por el conjunto

$$\{(x, v) \in X \times R^n : v \in \tau \circ \widetilde{\psi}(x)\}$$

para de este modo construir un entorno tubular "inclinado" para el que las aplicaciones π y ρ son de clase $\mathcal{D}^r$. □

4.7 Aproximación de aplicaciones arbitrarias

Finalmente, establecemos el Teorema de Aproximación con toda su generalidad.

Teorema 4.7.1 *Sean X e Y dos subvariedades $\mathcal{D}^r$ de R^n, y sea $f : X \to Y$ una aplicación de clase $\mathcal{D}^{r-1}$. Entonces podemos aproximar f por una aplicación de clase $\mathcal{D}^r$.*

Demostración. Por el resultado anterior, podemos suponer que tenemos una retracción $\mathcal{D}^r$ $\tau : U \to Y$, donde U es un entorno de Y en R^n. Sea $h : X \to R^n$ una aproximación de clase $\mathcal{D}^r$ de f vista como una aplicación $X \to R^n$. Tomando esta aproximación suficientemente buena de modo que $h(X) \subset U$, tenemos que $\widetilde{f} = \tau \circ h : X \to Y$ es una aproximación $\mathcal{D}^r$ de f. □

4.8 Eliminación de esquinas definibles

Terminamos este capítulo con un resultado que nos permitirá "suavizar" las esquinas de las variedades $\mathcal{D}^r$ $(r > 0)$.

Sean r y s dos enteros tales que $0 < r < s < \infty$. Consideremos una subvariedad $\mathcal{D}^r$ $M \subset R^n$. Supongamos que existe un subconjunto cerrado $S \subset M$ tal que $M \backslash S$ es una subvariedad de clase $\mathcal{D}^s$.

Teorema 4.8.1 *Dado un entorno abierto definible U de S en R^n, existe una subvariedad $\mathcal{D}^s$ $\widetilde{M} \subset R^n$ y un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $h : \widetilde{M} \to M$ tal que h es una aproximación $\mathcal{D}^r$ de la inclusión $\widetilde{M} \hookrightarrow R^n$ y $h_{|\widetilde{M} \backslash U} = Id$.*

Demostración. Como M es una subvariedad $\mathcal{D}^r$ de R^n, podemos escribir M como una unión finita $M_1 \cup \ldots \cup M_k$ de subconjuntos abiertos tales que para cada i la proyección $\pi_{i_1,\ldots,i_d} : R^n \to R^d : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_d})$ induce un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $M_i \to V_i$, donde V_i es un subconjunto abierto de R^d. Es decir, existe una aplicación $\mathcal{D}^r$ $\phi_i : V_i \subset R^d \to R^{n-d}$ tal que

$$M_i = \mathrm{graf}(\phi_i).$$

De hecho, la demostración de este resultado (ver [2, Cor. 9.3.10]) nos permite ver que para cada punto $x \notin S$ existe un entorno V^x de x en M tal que la proyección $\pi_{i_1,\dots,i_d|V^x}$ induce un difeomorfismo $\mathcal{D}^s$ sobre su imagen. Por tanto tenemos que ϕ_i es de clase $\mathcal{D}^s$ en $V_i \setminus \pi_{i_1,\dots,i_d}(S)$.

Demostramos el teorema por inducción sobre i. Para $i = 1$ (omitiendo los subíndices) tenemos la aplicación $\mathcal{D}^r$ $\phi : V \subset R^d \to R^{n-d}$ tal que $M = \text{graf}(\phi)$. Consideremos la proyección $\pi : R^n \to R^d$. Si definimos $F = \pi(S)$, tenemos que $\phi_{|V\setminus F}$ es de clase $\mathcal{D}^s$. Por el Teorema de aproximación y su demostración (considerando una descomposición en celdas definible adaptada a F) podemos encontrar una aproximación $\mathcal{D}^s$ de ϕ

$$\widetilde{\phi} : V \to R^{n-d}$$

tal que $\widetilde{\phi} = \phi$ sobre $V \setminus \pi(U)$.

De esta forma, $\widetilde{M} = \text{graph}(\widetilde{\phi})$ es una subvariedad $\mathcal{D}^s$ de R^n,

$$h : \widetilde{M} \to M : (x, y) \mapsto (x, \phi(x))$$

es un difeomorfismo definible C^r que está próximo a la inclusión $\widetilde{M} \hookrightarrow R^n$ y $h_{|\widetilde{M}\setminus U} = \text{Id}$.

Pasemos al caso $i > 1$. Por la hipótesis de inducción, podemos suponer que existen dos subconjuntos abiertos definibles M_1 y M_2 de M tales que $M = M_1 \cup M_2$ y existen subvariedades $\mathcal{D}^s$ $\widetilde{M}_i \subset R^n$ y difeomorfismos $\mathcal{D}^r$ $h_i : \widetilde{M}_i \to M_i$ tales que h_i es una aproximación $\mathcal{D}^r$ de la inclusión $\widetilde{M}_i \hookrightarrow R^n$ y $h_{i|\widetilde{M}_i\setminus U} = \text{Id}$, para $i = 1, 2$. A continuación queremos "pegar" $\widetilde{M}_1$ y $\widetilde{M}_2$.

Consideremos el subconjunto abierto $I = M_1 \cap M_2$. Tenemos entonces

$$\widetilde{M}_1 \supset \widetilde{I}_1 = {h_1}^{-1}(I) \xrightarrow{h_1} I \xleftarrow{h_2} {h_2}^{-1}(I) = \widetilde{I}_2 \subset \widetilde{M}_2.$$

Consideremos la aplicación $\mathcal{D}^r$ $\alpha = {h_2}^{-1} \circ h_1 : \widetilde{I}_1 \to \widetilde{I}_2$ que verifica

$$\alpha_{|\widetilde{I}_1\setminus U} = \text{Id} : \widetilde{I}_1 \setminus U \to \widetilde{I}_2 \setminus U.$$

De este forma podemos aproximar α por una aplicación $\mathcal{D}^s$ $\widetilde{\alpha} : \widetilde{I}_1 \to \widetilde{I}_2$ tal que $\widetilde{\alpha}_{|\widetilde{I}_1\setminus U} = \text{Id} : \widetilde{I}_1 \setminus U \to \widetilde{I}_2 \setminus U$.

Tomemos ahora dos subconjuntos abiertos definibles $N_1 \subset M_1$ y $N_2 \subset M_2$ que verifiquen que $N_1 \cup N_2 = M$, $\overline{N_1} \subset M_1$ y $\overline{N_2} \subset M_2$. Definamos $g_i = {h_i}^{-1} : M_i \to \widetilde{M}_i$. Entonces podemos considerar los subconjuntos definibles cerrados de $\widetilde{M}_1$, disjuntos,

$$A = \widetilde{M}_1 \setminus g_1(N_2 \cap M_1) \qquad B = \widetilde{M}_1 \setminus g_1(N_1).$$

Tomemos una partición de la unidad $\mathcal{D}^s$ $\{\lambda, 1 - \lambda\}$ de $\widetilde{M}_1$ subordinada al recubrimiento abierto $\{g_1(N_1), g_1(N_2 \cap M_1)\}$. Tenemos que λ es una función $\mathcal{D}^s$ sobre $\widetilde{M}_1$ tal que $\lambda = 1$ sobre A y $\lambda = 0$ sobre B. Definimos entonces

$$p : \widetilde{M}_1 \to R^n$$

$$x \mapsto \lambda(x)x + (1 - \lambda(x))\widetilde{\alpha}(x).$$

y una aplicación $\mathcal{D}^s$ que es una aproximación $\mathcal{D}^s$ de la inclusión. Por tanto, p es una inmersión difeomórfica. Consideremos entonces $\widetilde{M}_1^* = p(\widetilde{M}_1)$. De esta forma, $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1^* \cup (\widetilde{M}_2 \backslash g_2^{-1}(\overline{N_1}))$ es una variedad $\mathcal{D}^s$ que satisface las condiciones del enunciado. □

A partir de este resultado, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.8.2 *Para $r > 0$, cualquier subvariedad $\mathcal{D}^r$ de R^n es $\mathcal{D}^r$ difeomorfa a una subvariedad $\mathcal{D}^{r+1}$. Dos subvariedades $\mathcal{D}^{r+1}$ de R^n que son $\mathcal{D}^r$ difeomorfas son $\mathcal{D}^{r+1}$ difeomorfas.*

Demostración. Como hemos visto anteriormente, podemos estratificar nuestra variedad en una unión finita de estratos, de forma que cada uno de los estratos sea una subvariedad $\mathcal{D}^{r+1}$. Sea F la unión de los estratos de codimensión > 0, que es un subconjunto definible cerrado. Basta entonces aplicar el Teorema 4.8.1.

Para la segunda afirmación, utilizamos el Teorema de Aproximación. Dado un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ entre subvariedades $\mathcal{D}^{r+1}$, podemos aproximarlo por una aplicación $\mathcal{D}^{r+1}$. Como podemos tomar esta aproximación tan cercana como queramos al difeomorfismo en cuestión, resulta que la aproximación es de hecho un difeomorfismo. □

Capítulo 5

Familias de variedades definibles

En este capítulo vamos a estudiar familias de variedades definibles, y a dar un teorema sobre la existencia de trivializaciones de estas familias.

En concreto, el resultado fundamental es la trivialidad $\mathcal{D}^r$ de sumersiones $\mathcal{D}^r$ propias suprayectivas. Un punto clave en la demostración es que, dada una variedad definible en una estructura o-minimal S que expande un cuerpo real cerrado R, podemos construir un modelo de esta variedad definible sobre una estructura o-minimal "más pequeña", es decir, que expande un cuerpo real cerrado que es un subcuerpo de R. Este proceso de construcción de modelos definibles y el uso del espectro definible nos permitirá demostrar el resultado principal.

5.1 Familias de variedades definibles

Damos en esta sección algunos resultados básicos sobre familias de variedades $\mathcal{D}^r$. En los capítulos anteriores hemos considerado las familias de conjuntos definibles como subconjuntos $X \subset R^p \times R^n$. Consideremos ahora una situación algo más general. Sean $N \subset R^n$ y $P \subset R^p$ dos variedades $\mathcal{D}^r$ y $g : N \to P$ una aplicación $\mathcal{D}^r$. Entonces, si consideramos

$$X^g = \{(x, y) \in R^p \times R^n : x = g(y)\} \subset R^p \times R^n$$

podemos ver g como una familia de conjuntos definible, donde X^g_t no es más que $g^{-1}(t)$. De ahora en adelante, veremos las familias de conjuntos definibles de estas dos formas equivalentes.

Proposición 5.1.1 *Sean $B \subset R^p$ y $X \subset B \times R^n$ subconjuntos definibles tales que, para cada $b \in B$, X_b es una subvariedad $\mathcal{D}^r$ de R^n. Entonces, para cualquier $\alpha \in \widetilde{B}$, X_α es una subvariedad $\mathcal{D}^r$ de $k(\alpha)^n$.*

Demostración. Por la Proposición 3.1.5, el hecho de que X_b sea una subvariedad $\mathcal{D}^r$ de R^n puede ser expresado por una familia parametrizada de fórmulas de primer orden, digamos Φ_b. Entonces X_α verifica la fórmula Φ_α, es decir, es una variedad $\mathcal{D}^r$. $\square$

Proposición 5.1.2 *Sea $S \subset R^p$ un conjunto definible y tal que $S \in \alpha$. Sea U un subconjunto abierto definible de $S \times R^m$, y $f : U \to S \times R$ una familia definible de funciones parametrizada por S. Si, para cada $t \in S$, la fibra $f_t : U_t \to R$ es una función $\mathcal{D}^r$, entonces la fibra $f_\alpha : U_\alpha \to k(\alpha)$ es también una función $\mathcal{D}^r$.*

Demostración. Basta observar que, de nuevo por la Proposición 3.1.5, el hecho de que $f_t : U_t \to R$ sea una función $\mathcal{D}^r$, para cada $t \in S$, se puede expresar mediante una familia definible de fórmulas. □

Vemos a continuación algunos resultados sobre familias de aplicaciones definibles que nos serán de gran utilidad.

Proposición 5.1.3 *Sea $U \subset R^p \times R^m$ un abierto definible, y $g : U \to R^p \times R$ una familia de funciones definibles. Sea $\pi : R^p \times R^m \to R^p$ las proyección sobre las p primeras coordenadas, y supongamos que, para todo $t \in \pi(U)$, $g_t : U_t \to R$ es una función $\mathcal{D}^r$. Entonces existe un abierto definible $V \subset \pi(U)$ tal que $f_{[V]} : U_{[V]} \to V \times R$ es $\mathcal{D}^r$ y* $\dim(\pi(U) \setminus V) < p$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre r. Para cada $i = 1, \dots, p$ consideremos el conjunto

$$G_i = \{t \in \pi(U) : \frac{\partial g}{\partial t_i}(t, x) \text{ existe para todo } (t, x) \in U\}$$

Claramente G_i es definible y $\frac{\partial g}{\partial t_i}$ es definible en $U_{[G_i]}$. Veamos que $\dim(\pi(U) \setminus G_i) < p$. Si $\dim(\pi(U) \setminus G_i) = p$, por el Teorema de Descomposición en Celdas, existe una caja abierta C contenida en $\pi(U) \setminus G_i$. Supongamos que $0 \in C$. Entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $\gamma(t) = (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0) \in C$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ (estando t situada en la posición i).

Consideremos el conjunto definible

$$H = \{(t, x) \in \pi^{-1}(C) : \frac{\partial g}{\partial t_i}(t, x) \text{ no existe }\}.$$

Como $C \subset \pi(U) \setminus G_i$ tenemos que $H \neq \emptyset$. Utilizando el Teorema de Elección Definible y la descomposición en celdas $\mathcal{D}^r$, podemos suponer que γ se eleva a un camino $\mathcal{D}^1$

$$\tilde{\gamma} = (\gamma, \beta) : (0, \epsilon) \to H.$$

Tenemos entonces que para cada $s \in (0, \epsilon)$,

$$(g \circ \tilde{\gamma})'(s) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial t_k}(\tilde{\gamma}(s))\gamma_k'(s) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_j}(\tilde{\gamma}(s))\beta_j'(s) = \frac{\partial g}{\partial t_i}(\tilde{\gamma}(s)) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_j}(\tilde{\gamma}(s))\beta_j'(s).$$

De esta forma, $h = g \circ \tilde{\gamma} : (0, \epsilon) \to R$ es una función definible que no admite derivada en ningún punto, lo que contradice el Teorema 3.1.3.

Por tanto, $\dim(\pi(U) \setminus G_i) < p$ para cada i. Consideremos entonces

$$G_i^* = \{t \in G_i : \frac{\partial g}{\partial t_i}(t,x) \text{ existe y es continua para todo } (t,x) \in U\}.$$

Tenemos que G_i^* es un subconjunto definible de G_i, y por el Teorema de Continuidad a Trozos existe un cerrado definible $F_i \subset G_i$ tal que $G_i \setminus F_i \subset G_i^*$ y $\dim(G_i \setminus F_i) < p$. Tomando entonces $V = \bigcap G_i^*$, tenemos nuestro resultado para $r = 1$. Por inducción se demuestra fácilmente el resultado para un r arbitrario. □

Proposición 5.1.4 *Sea $\alpha \in \widetilde{R^p}$, y sea Ω un subconjunto definible abierto de $k(\alpha)^m$, y $\varphi : \Omega \to k(\alpha)$ una función $\mathcal{D}^r$. Existe una subvariedad $\mathcal{D}^r$ $M \subset R^p$, con $M \in \alpha$, un subconjunto abierto definible U de $M \times R^m$ y una familia definible de funciones $f : U \to M \times R$ parametrizada por M, tal que $U_\alpha = \Omega$, $f_\alpha = \varphi$ y f es una aplicación $\mathcal{D}^r$.*

Demostración. Por definición, existe un subconjunto abierto definible $U \subset R^p \times R^m$ tal que $\Omega = U_\alpha$. Por otro lado, podemos escribir $k(\alpha) = (R^p \times R)_\alpha$. De este modo tenemos la aplicación definible $\varphi : U_\alpha \to (R^p \times R)_\alpha$. Por la Proposición 2.3.3 existe un subconjunto definible $A \subset R^p$, $A \in \alpha$, y una aplicación definible $f : U_{[A]} \to A \times R$ tal que $\varphi = f_\alpha$.

Consideremos el subconjunto

$$B = \{t \in A : f_t : U_t \to R \text{ es de clase } \mathcal{D}^r\}.$$

Es claro que B es un conjunto definible y $B \neq \emptyset$ (si $B = \emptyset$ entonces $f_\alpha = \varphi$ no es de clase $\mathcal{D}^r$). Utilizando la descomposición en celdas $\mathcal{D}^r$, tenemos que existe una variedad $\mathcal{D}^r$ $M \subset B$, $M \in \alpha$, que es $\mathcal{D}^r$ difeomorfa a un espacio afín. De esta forma, $f : U_{[M]} \to M \times R$ verifica que f_t es $\mathcal{D}^r$ para todo $t \in M$. Por tanto, por la proposición anterior (reduciendo tal vez M) podemos suponer que $f : U_{[M]} \to M \times R$ es $\mathcal{D}^r$. □

Esta proposición se puede generalizar de una forma bastante directa al caso en que Ω sea una variedad $\mathcal{D}^r$.

Siguiendo de forma directa la demostración de la proposición anterior, podemos demostrar una útil extensión de este resultado.

Proposición 5.1.5 *Sea $\alpha \in \widetilde{R^p}$, y sean M y N dos variedades $\mathcal{D}^r$. Sea $\varphi : M_{k(\alpha)} \to N_{k(\alpha)}$ una aplicación $\mathcal{D}^r$. Existe una subvariedad $\mathcal{D}^r$ $S \subset R^p$, con $S \in \alpha$, y una familia definible de aplicaciones $f : S \times M \to S \times N$ parametrizada por S, tal que $f_\alpha = \varphi$ y f es una aplicación $\mathcal{D}^r$.*

Proposición 5.1.6 *Sean $B \subset R^p$ y $X \subset B \times R^n$ subconjuntos definibles. Consideremos un elemento $\alpha \in \widetilde{B}$ que verifica que X_α es una subvariedad $\mathcal{D}^r$ de $k(\alpha)^n$. Entonces existe una subvariedad $\mathcal{D}^r$ $M \subset R^p$, $M \subset B$, tal que $M \in \alpha$, $X_{[M]}$ es una subvariedad $\mathcal{D}^r$ de $M \times R^n$ y la proyección $\pi : X_{[M]} \to M$ es una sumersión.*

Demostración. Sea $k = \dim X_\alpha$. Entonces podemos escribir X_α como una unión finita $X_\alpha = \bigcup \Lambda_i$, donde cada $\Lambda_i = \text{graf}(\phi_{i,k+1}, \ldots, \phi_{i,n})$ para ciertas funciones $\mathcal{D}^r$ $\phi_{i,j} : \Omega_i \to k(\alpha)$, donde Ω_i es un subconjunto abierto definible de $k(\alpha)^k$. Por la Proposición 5.1.4 existe una subvariedad $\mathcal{D}^r$ de R^p, $M_i \subset B$, un subconjunto definible abierto $U_i \subset M \times R^k$ y funciones $f_{i,k+1}, \ldots, f_{i,n}$ sobre U tales que $L_i = \text{graph}(f_{i,k+1}, \ldots, f_{i,n})$ verifica $(L_i)_\alpha = \Lambda_i$. Por la Proposición 2.2.4, tomando M más pequeña, podemos suponer que $X_{[M]}$ es la unión de los subconjuntos definibles abiertos L_i. De esta forma, $X_{[M]}$ es una variedad $\mathcal{D}^r$ y π es una submersión. □

Corolario 5.1.7 *Sea $B \subset R^p$ un subconjunto definible. Sea $X \subset B \times R^n$ un subconjunto definible tal que, para cada $b \in B$, X_b es una subvariedad $\mathcal{D}^r$ de R^n. Entonces existe una estratificación $\{M_i\}_{i \in I}$ de B en un número finito de variedades $\mathcal{D}^r$ de forma que para cada $i \in I$, $X_{|M_i}$ es una variedad $\mathcal{D}^r$ y la proyección $X_{|M_i} \to M_i$ es una submersión. Si, además, X_b es un conjunto cerrado-acotado para cada b, podemos pedir que dicha submersión sea propia.*

Demostración. Sea $\alpha \in \widetilde{B}$. Por la Proposición 5.1.1 tenemos que X_α es una subvariedad $\mathcal{D}^r$. Entonces, por la Proposición 5.1.6, existe una subvariedad $\mathcal{D}^r$ M tal que $X_{[M]}$ es una subvariedad y $X_{[M]} \to M$ es una sumersión. De esta forma, por la compacidad del espectro definible, resulta que B se puede poner como una unión finita $\{M_i\}$ de variedades $\mathcal{D}^r$ que verifican las condiciones del enunciado. Finalmente, por la versión definible del teorema de Hardt [5, Th. 5.22], podemos obtener homeomorfismos definibles

$$h_i : X_{[M_i]} \to M_i \to F_i$$

compatibles con las proyecciones a M_i, para ciertas variedades $\mathcal{D}^r$ F_i, tal vez refinando la estratificación. Esto nos permite demostrar la segunda afirmación. □

El siguiente resultado nos presenta formulaciones equivalentes del resultado principal de esta sección (válidas para cualquier estructura o-minimal $(R, \mathcal{S})$). Para poder dar el enunciado con precisión, necesitamos algunas nociones de teoría de modelos. Una buena referencia sobre este tema, teniendo en cuenta las aplicaciones que le queremos dar, es el trabajo de Prestel [15].

Sea R' un cuerpo real cerrado y $\mathcal{S}'$ una estructura o-minimal que expande el cuerpo real cerrado R'. Definimos el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{S}'}$ como el lenguaje que incluye un símbolo de relación n-aria ϕ_A para cada conjunto definible $A \subset R'^n$. De forma trivial, $\mathcal{S}'$ es una $\mathcal{L}_{\mathcal{S}'}$-estructura.

Sea R otro cuerpo real cerrado que es una extensión de R', y $\mathcal{S}$ una estructura o-minimal que expande el cuerpo real cerrado R. Si R es una $\mathcal{L}_{\mathcal{S}'}$-estructura y se verifica que toda $\mathcal{L}_{\mathcal{S}'}$-fórmula (con parámetros en R') es cierta en R' si y sólo si es cierta en R, diremos que $R' \subset R$ es una *inmersión elemental*. Si $(R, \mathcal{S})$ es una $\mathcal{L}_{\mathcal{S}'}$-estructura y $R' \subset R$

es una inmersión elemental, diremos que $(R, \mathcal{S})$ es una *extensión elemental* de $(R', \mathcal{S}')$ y lo denotaremos por

$$(R', \mathcal{S}') \prec (R, \mathcal{S}).$$

De una forma sencilla, esto se puede interpretar de la siguiente forma. La estructura $(R, \mathcal{S})$ es una extensión elemental de $(R', \mathcal{S}')$ si la extensión $R' \to R$ es una inmersión elemental y todo conjunto $A' \in \mathcal{S}'_n$ se puede interpretar como un conjunto $A \in \mathcal{S}_n$. Llamaremos a esta "interpretación" la *extensión* de A' a $(R, \mathcal{S})$ y la notaremos A'_R.

Ejemplo 5.1.8 *Si $R' \subset R$ es una extensión de cuerpos real cerrados y $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) es la estructura o-minimal formada por los conjuntos semialgebraicos sobre R (resp. sobre R'), entonces $(R', \mathcal{S}') \prec (R, \mathcal{S})$.*

Ejemplo 5.1.9 *Si $(R, \mathcal{S})$ es una estructura o-minimal que expande el cuerpo real cerrado R y $\alpha \in \widetilde{R^p}$, entonces $(k(\alpha), \mathcal{S}(\alpha))$ es una extensión elemental de $(R, \mathcal{S})$.*

Dadas N y P variedades $\mathcal{D}^r$ (para $\mathcal{S}$) y $g : N \to P$ una aplicación $\mathcal{D}^r$, diremos que g es $\mathcal{D}^r$ *trivial* si existe un punto $p \in P$ y un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $\gamma = (\gamma_0, g) : N \to g^{-1}(p) \times P$. Esto significa que la familia asociada X^g es trivial, en el sentido que todas las fibras son $\mathcal{D}^r$ difeomorfas a la fibra X^g_p.

El siguiente resultado nos da propiedades equivalentes a que una aplicación (o una familia) sea $\mathcal{D}^r$ trivial.

Teorema 5.1.10 *Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) Sea $(R, \mathcal{S})$ una estructura o-minimal que expande el cuerpo real cerrado R, sean $B \subset R^p$ y $X \subset B \times R^n$ subconjuntos definibles tales que para cada $b \in B$ X_b es una variedad $\mathcal{D}^r$ de dimensión k. Entonces existe una estratificación finita $B = \bigcup_{i \in I} M_i$ de B en variedades $\mathcal{D}^r$ tal que cada $X_{[M_i]}$ es una variedad $\mathcal{D}^r$ y tiene una trivialización definible

$$h_i : X_{[M_i]} \to F_i \times M_i$$

para cierta variedad $\mathcal{D}^r$ F_i.

(ii) Para cualquier $(R', \mathcal{S}') \prec (R, \mathcal{S})$, toda variedad de clase $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ $V \subset R^n$ de dimensión k es difeomorfa a la extensión a $(R, \mathcal{S})$ de una variedad $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}'}$ $V' \subset R'^m$.

Con k todavía fijado, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i') Como (i), pero X_b cerrado-acotado para cada b.

(ii') Como (ii), pero con V cerrada-acotada y V' cerrada-acotada.

(iii') Para cualquier estructura o-minimal que expande un cuerpo real cerrado $(R,\mathcal{S})$, *cualquier variedad* $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ *de dimensión* $k+1$, X, *y cualquier submersión de clase* $\mathcal{D}^r$ *sobreyectiva y propia* $p: X \to R$, *existe una trivialización* $\mathcal{D}^r$ $h: X \to F \times R$ *(para cierta variedad* $\mathcal{D}^r$ F*).*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ (e $(i') \Rightarrow (ii')$) Por definición de inmersión elemental, podemos escribir

$$V = \{x \in R^n : \Phi(a,x)\}$$

donde Φ es una fórmula de primer orden en $\mathcal{L}_{\mathcal{S}'}$ (es decir, una fórmula "con parámetros en R'") y $a \in R^p$. Para cada $b \in R'^p$ podemos considerar el conjunto definible

$$X_b = \{x \in R'^n : \Phi(b,x)\}.$$

El conjunto de los $b \in R'^p$ tales que X_b es una subvariedad $\mathcal{D}^r$ (cerrada y acotada) de dimensión k es un subconjunto definible $B \subset R'^p$. De esta forma podemos considerar la familia definible $X \to B$ de variedades $\mathcal{D}^r$ (compactas) de dimensión k, parametrizadas por B. Observemos que $a \in B_R$ y $V = (X_R)_a$. Aplicamos (i) (o (i')) a esta familia, y obtenemos entonces las trivializaciones $h_i : X_{|M_i} \to F_i \times M_i$. Existe i tal que $a \in (M_i)_R$. Por lo tanto, $V \simeq (F_i)_R$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ (y $(ii') \Rightarrow (i')$) Consideremos B y X como en (i) (o en (i')). Tomemos $\alpha \in \widetilde{B}$. Entonces, por la Proposición 5.1.1, X_α es una subvariedad (cerrada y acotada) $\mathcal{D}^r$ de $k(\alpha)^n$ de dimensión k. Entonces por (ii) (o (ii')) obtenemos una variedad $\mathcal{D}^r$ F (sobre R) y un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $g: F_{k(\alpha)} \to X_\alpha$. Por la Proposición 5.1.6 existe una variedad $\mathcal{D}^r$ $M \subset B$, $M \in \alpha$, de forma que $X_{|M}$ es una subvariedad $\mathcal{D}^r$. Aplicamos la Proposición 5.1.4 (más bien su generalización al caso de variedades) a g y a g^{-1} y obtenemos un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $h: F \times M \to X_{|M}$ (tal vez reduciendo M). Por la compacidad de $\widetilde{B}$ obtenemos (i) (o (i')).

$(iii') \Rightarrow (ii')$ Empezamos como en la demostración de $(i') \Rightarrow (ii')$. Tenemos V y construimos la familia definible $X \to B$ sobre R', de forma que $V = (X_R)_a$. Si aplicamos el Corolario 5.1.7, obtenemos la colección finita $\{M_i\}_{i \in I}$ y, para cada $i \in I$, sumersiones $\mathcal{D}^r$ propias $X_{|M_i} \to M_i$. Existe $i \in I$ tal que $a \in (M_i)_R$. Tomemos $b \in M_i$. Podemos suponer (tal vez subdividiendo la estratificación) que $M_i \simeq R'^s$. Entonces, tenemos una inmersión difeomórfica de clase $\mathcal{D}^r$ $R \hookrightarrow (M_i)_R \simeq R^s$ cuya imagen contiene a y b. Consideremos el pull-back

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X_{|M_i} \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow \\ R & \hookrightarrow & M_i. \end{array}$$

La función p es una sumersión propia, por lo que, por (iii'), $V \simeq (X_b)_R$.

$(i') \Rightarrow (iii')$ Apliquemos (i') a $p: X \to R$. Obtenemos entonces una partición $a_1 < \ldots < a_s$ de R tal que p es trivial sobre (a_i, a_{i+1}). Por otro lado, es posible construir una trivialización $\mathcal{D}^r$ sobre un entorno abierto definible de cada a_i. En efecto, sea $T \subset R^n$ un entorno tubular definible de $X_{a_i} = p^{-1}(a_i)$ y $\pi : T \to X_{a_i}$ la correspondiente retracción $\mathcal{D}^r$.

Al ser p propia, existe un intervalo I_i de R que contiene a a_i y tal que $X_{I_i} = p^{-1}(I_i) \subset T$. Entonces, reduciendo tal vez el intervalo I_i, podemos suponer que la aplicación

$$X_{I_i} \to X_{a_i} \times I_i$$
$$x \mapsto (\pi(x), p(x))$$

es un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$.

De esta forma tenemos un recubrimiento de R por intervalos abiertos de forma que p es $\mathcal{D}^r$ trivial sobre cada intervalo. Ahora vamos a "pegar" estas trivializaciones para obtener una trivialización global. Supongamos por ejemplo que $a_i = 0$, $I_i \cap (0, a_{i+1}) = (0,1)$, y sean

$$h : X_{(a_i, a_{i+1})} \to F_i \times (a_1, a_{i+1})$$
$$g : X_{I_i} \to X_{a_i} \times I_i$$

las dos trivializaciones construidas. Consideremos el difeomorfismo $\mathcal{D}^r$

$$g \circ h^{-1} : F_i \times (0,1) \to X_{a_i} \times (0,1)$$
$$(x,t) \mapsto (\phi(x,t), t)$$

y la aplicación

$$\zeta : F_i \times (0,1) \to X_{(0,1)}$$
$$(x,t) \mapsto g^{-1}(\phi(x, u(t)), t)$$

donde

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 < t \leq \frac{1}{4}, \\ (t - \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ t & \text{si } \frac{3}{4} \leq t < 1. \end{cases}$$

Tenemos que ζ es un difeomorfismo $\mathcal{D}^1$. Observem~~os que si 3/4 ≤~~ $t < 1$, entonces $\zeta = h^{-1}$, y que si $0 < t \leq 1/4$ entonces $\zeta = g^{-1} \circ (\psi \times \mathrm{Id})$, donde $\psi = \phi(\cdot, \frac{1}{2}) : F_i \to X_0$ es un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$. Podemos definir entonces

$$h^* : X_{I_i \cup (a_i, a_{i+1})} \to F_i \times [I_i \cup (a_i, a_{i+1})]$$

$$x \mapsto \begin{cases} (\psi \times \mathrm{Id}) \circ \zeta^{-1}(x) & \underline{\text{si } p(x) \leq \frac{1}{4}} \\ \zeta^{-1}(x) & \text{si } \frac{1}{4} \leq p(x) \leq 1 \\ h(x) & \cancel{\text{si } p(x) > 1.} \end{cases}$$

De esta forma, pegando las trivializaciones intervalo a intervalo, obtenemos una trivialización global de clase $\mathcal{D}^1$.

Para obtener una trivialización $\mathcal{D}^r$, necesitamos el Teorema de aproximación. Sea h' la trivialización $\mathcal{D}^1$ obtenida por el proceso anterior. Por construcción tenemos que h' es de la forma (h'_0, p). Sea $\widetilde{h}_0$ una aproximación $\mathcal{D}^r$ a h'_0. Entonces $\widetilde{h} = (\widetilde{h}_0, p)$ es una aplicación $\mathcal{D}^r$ próxima a h' (junto con sus derivadas), y por tanto es un difeomorfismo.

□

Acabamos esta sección con dos resultados técnicos.

Lema 5.1.11 *Sea $(R', S') \prec (R, S)$ una extensión elemental de estructuras o-minimales sobre cuerpos reales cerrados. Sean A y B variedades $\mathcal{D}^r_{S'}$, y $\delta : A_R \to B_R$ una aplicación $\mathcal{D}^r_S$ que satisface cierta cantidad finita de condiciones que pueden ser formuladas como fórmulas de primer orden del lenguaje $\mathcal{L}_{S'}$ con parámetros en R'. Entonces existe una de aplicación $\mathcal{D}^r_{S'}$ $\delta' : A \to B$ (sobre R') que satisface las mismas condiciones. Es más, podemos elegir δ' de forma que exista una familia de aplicaciones $\mathcal{D}^r_S$ $\Delta : [0,1]_R \times A_R \to [0,1]_R \times B_R$ tal que $\Delta_0 = \delta'_R$, $\Delta_1 = \delta$ y, para cada $t \in [0,1]_R$, Δ_t satisface las mismas condiciones de primer orden.*

Demostración. Consideremos el grafo de δ. Podemos escribir

$$\mathrm{graf}(\delta) = \{x \in R^N : \Phi(a, x)\}$$

para cierta fórmula de primer orden en $\mathcal{L}_{S'}$ y cierto $a \in R^q$. Sea a' un elemento en R'^q. Podemos considerar el conjunto definible

$$X(a') = \{x \in R'^N : \Phi(a', x)\}.$$

Sea B' el conjunto de puntos $a' \in R'^q$ tales que $X(a')$ es el grafo de una aplicación $\mathcal{D}^r_{S'}$ entre A y B que satisface las condiciones de primer orden anteriores. La condición para que un conjunto definible en R'^N sea el grafo de una aplicación definible entre A y B se puede expresar mediante una fórmula de primer orden en el lenguaje $\mathcal{L}_{S'}$. Es más, tenemos el siguiente resultado:

Dado un conjunto definible S y una familia definible $\{f_t : A \to B\}_{t \in S}$, el conjunto $\{t \in S : f_t \text{ es } \mathcal{D}^r\}$ es definible.

Así, el subconjunto B' es definible y $a \in B'_R$. Ahora, podemos considerar una estratificación $\mathcal{D}^r$ $\{S_i\}_{i=1,\dots,\nu}$ de B', donde cada S_i es una variedad $\mathcal{D}^r$ conexa. Entonces $\{S_{iR}\}_{i=1,\dots,\nu}$ es una estratificación $\mathcal{D}^r$ de B'_R y podemos suponer que a es un punto de la variedad $\mathcal{D}^r$ conexa S_{1R}. Observamos que $S_1 \neq \emptyset$ porque $S_{1R} \neq \emptyset$ (por definición de inmersión elemental). Podemos considerar entonces la familia definible

$$\Theta : S_1 \times A \to S_1 \times B$$

que verifica que para cada $t \in S_1$, Θ_t es la aplicación $\mathcal{D}^r$ correspondiente a $X(t)$. Recordemos que, dado $\alpha \in \widetilde{S_1}$, $(S_1 \times A)_\alpha$ no es más que $A_{k(\alpha)}$. Entonces, por la Proposición 5.1.2, para todo $\alpha \in \widetilde{S_1}$, $\Theta_\alpha : A_{k(\alpha)} \to B_{k(\alpha)}$ es una aplicación $\mathcal{D}^r$. Por las Proposiciones 5.1.5 y 2.3.4(b), existe una variedad $\mathcal{D}^r$ $M \subset S_1$, $M \in \alpha$, tal que la aplicación

$$\Theta_{[M]} : (S_1 \times A)_{[M]} \to (S_1 \times B)_{[M]}$$

es $\mathcal{D}^r$; esta aplicación es simplemente $\Theta_{|M \times A} : M \times A \to M \times B$. Así, por la compacidad del espectro definible, se tiene que S_1 es una unión finita $\cup_{i=1}^k M_i$ de subvariedades $\mathcal{D}^r$ tales que $\Theta : M_i \times A \to M_i \times B$ es de clase $\mathcal{D}^r$ para cada $i = 1, \dots, k$. Es más, subestratificando si es necesario, podemos suponer que M_i es $\mathcal{D}^r$ difeomorfa a $R'^{\dim M_i}$ para cada $i = 1, \dots, k$.

De nuevo podemos suponer que $a \in M_{1R}$ y $M_{1R} \neq \emptyset$. Podemos elegir $a' \in M_1$ de forma que $X(a')$ sea el grafo una aplicación $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}'}$

$$\delta' : A \to B$$

definida sobre R' y que satisface las condiciones de primer orden. Como M_{1R} es una subvariedad $\mathcal{D}^r$ difeomorfa a $R^{\dim M_1}$ podemos tomar un camino $\mathcal{D}^r$ entre a y a' en M_{1R}. Este significa que existe un "camino $\mathcal{D}^r$" entre δ'_R y δ, es decir, existe una familia $\mathcal{D}^r$

$$\Delta : [0,1]_R \times A_R \to [0,1]_R \times B_R$$

tal que $\Delta_0 = \delta'_R$, $\Delta_1 = \delta$ y Δ_t es una aplicación $\mathcal{D}^r$ que satisface las anteriores condiciones de primer orden con parámetros en R', para cada $t \in [0,1]_R$. $\square$

Proposición 5.1.12 *Consideremos una inmersión elemental $(R', \mathcal{S}') \prec (R, \mathcal{S})$ de estructuras o-minimales que expanden cuerpos reales cerrados. Sean F y D variedades de clase $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}'}$, y*

$$\Gamma' : F_R \times (0,1)_R \to D_R \times (0,1)_R$$

un difeomorfismo $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ compatible con las proyecciones sobre $(0,1)_R$. Entonces es posible modificar Γ' para obtener

$$\Gamma : F_R \times (0,1)_R \to D_R \times (0,1)_R$$

de forma que existe $\delta \in (0, 1/2)_{R'}$ y un difeomorfismo $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}'}$ $\gamma : F \to D$ que verifican

$$\Gamma = \Gamma' \textit{ sobre } F_R \times (0, 1-2\delta)_R,$$

$$\Gamma = \gamma_R \times Id_{(1-\delta,1)_R} \textit{ sobre } F_R \times (1-\delta, 1).$$

Demostración. Por el Lema 5.1.11 existe un difeomorfismo $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}'}$ $\gamma : F \to D$. Es más, existe una familia $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$

$$\Delta : F_R \times [1,2]_R \to D_R \times [1,2]_R$$

que verifica que $\Delta_1 = (\Gamma')_1$ y $\Delta_2 = \gamma_R$. Podemos suponer que

- $\Delta_t = (\Gamma')_1$ para $t \in [1, 1+\epsilon]$, y
- $\Delta_t = \gamma_R$ para $t \in [2-\epsilon, 2]$

para cierto $\epsilon > 0$, $\epsilon \in R'$. Así, podemos definir

$$\Gamma^* : F_R \times]0,2[\to D_R \times]0,2[$$

por

- $\Gamma^*_t = (\Gamma')_1$ para $t \in]0,1]$, y
- $\Gamma^*_t = \Delta_t$ para $t \in [1,2[$.

Ahora el resultado es claro, componiendo con una función $]0,1[\to]0,2[$ apropiada. $\square$

5.2 Un lema de extensión

Dedicamos esta sección a otro lema muy importante. Ese lema es el siguiente.

Lema 5.2.1 *1. Sea N una variedad $\mathcal{D}^r$, $g : N \to R^l$ una sumersión $\mathcal{D}^r$ propia. Sea $P \subset R^l$ una subvariedad $\mathcal{D}^r$ tal que $g_{|g^{-1}(P)}$ es $\mathcal{D}^r$ trivial. Entonces podemos extender esta $\mathcal{D}^r$ trivialidad a un entorno definible de P, es decir, existe un entorno abierto definible U de P tal que $g_{|g^{-1}(U)}$ es $\mathcal{D}^r$ trivial.*

2. Sean M, N dos variedades $\mathcal{D}^r$, $f : M \to N$ y $g : N \to R^l$ sumersiones $\mathcal{D}^r$ propias. Sea $P \subset R^l$ una subvariedad $\mathcal{D}^r$ tal que $(f_{|(g\circ f)^{-1}(P)}, g_{|g^{-1}(P)})$ es $\mathcal{D}^r$ trivial. Entonces podemos extender esta $\mathcal{D}^r$ trivialidad a un entorno definible de P, es decir, existe un entorno abierto definible U de P tal que $(f_{|(g\circ f)^{-1}(U)}, g_{|g^{-1}(U)})$ es $\mathcal{D}^r$ trivial.

Antes de proceder con la demostración de este resultado, necesitamos tres lemas preliminares. En primer lugar establecemos un resultado topológico muy simple pero útil.

Lema 5.2.2 *Sean N y T dos conjuntos definibles y $h : N \to T$ una aplicación definible* propia. *Sea $P \subset T$ un conjunto definible y V un subconjunto definible abierto de N tal que $h^{-1}(P) \subset V$. Entonces existe un subconjunto abierto definible $U \supset P$ tal que $V \supset h^{-1}(U)$.*

Demostración. Basta tomar $U = T \setminus h(N \setminus V)$, que es abierto porque h es cerrada. □

El siguiente lema es una versión definible de un conocido resultado de topología.

Lema 5.2.3 *Sea $f : M \to N$ una aplicación definible sobreyectiva y propia entre dos conjuntos definibles M y N sobre R. Sea $P \subset M$ un subconjunto definible cerrado y supongamos que f es un homeomorfismo local definible para cada $x \in P$ y que $f_{|P} : P \to f(P)$ es inyectiva. Entonces existe un entorno abierto definible W de P en M tal que $f_{|W} : W \to f(W)$ es un homeomorfismo definible.*

Demostración. Sea Ω el conjunto de puntos $x \in M$ tales que f es un homeomorfismo local definible en x. Tenemos que Ω es un conjunto definible. Obviamente, Ω es abierto y $P \subset \Omega$. Consideremos ahora, utilizando $f : M \to N$, el conjunto definible $M \times_N M := \{(x, y) \in M \times M : f(x) = f(y)\}$ y el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M \times_N M & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{f} & N. \end{array}$$

Consideremos el conjunto definible $D = \{(w, w) : w \in \Omega\} \subset M \times_N M$. El conjunto D es abierto, porque f es un homeomorfismo local en Ω, y $P \times_N P \subset D$. La restricción $f_{|P} : P \to N$ es propia ya que P es cerrado. La proyección sobre el primer factor $\Omega \times_N P \to \Omega$ es también propia, porque es el pull-back de $f_{|P}$ mediante el anterior diagrama. Por el

Lema 5.2.2 existe un entorno definible $V_1 \supset P$ tal que $P \times_N P \subset V_1 \times_N P \subset D$. Podemos suponer que V_1 es cerrado y, aplicando el mismo argumento para la projección propia $V_1 \times_N \Omega \to \Omega$, obtenemos un entorno abierto definible V_2 de P en Ω tal que $V_1 \times_N V_2 \subset D$. Para acabar, basta con tomar un entorno abierto definible W de P tal que $W \subset V_1 \cap V_2$.

□

Finalmente, establecemos un lema sobre entornos tubulares definibles que son "compatibles".

Lema 5.2.4 *Sean $Y \subset R^n$, $Z \subset R^m$ variedades $\mathcal{D}^r$ y $F : Y \to Z$ una aplicación $\mathcal{D}^r$. Consideremos una subvariedad $\mathcal{D}^r$ $X \subset Y$ tal que $F_{|X}$ es una sumersión. Entonces, existe un entorno tubular de clase $\mathcal{D}^r$ U de X en Y, con una retracción sumersiva de clase $\mathcal{D}^r$ $\tau : U \to X$ tal que $F \circ \tau = F$ sobre U.*

Demostración. (Ver [7, Lemma 4].) Sea a la dimensión de X, b be la dimensión de Y y c la dimensión de Z. Podemos considerar la aplicación $\mathcal{D}^{r-1}$ $\varphi : X \to \mathbb{G}_{n,b+c-a}$ que asocia a cada punto $x \in X$ el espacio normal a $F^{-1}(F(x)) \cap X$ en Y en el punto x. (Aquí, $\mathbb{G}_{n,b+c-a}$ es la Grassmanniana de $(b+c-a)$-planos en R^n, que es una variedad de clase $\mathcal{D}^\infty$.) Por el Teorema de aproximación, podemos aproximar φ por una aplicación $\mathcal{D}^r$ ϕ. Consideremos ahora el fibrado vectorial

$$E = \{(x, \xi) \in X \times R^n : \xi \in \phi(x)\},$$

con proyección $\eta : E \to X$. Como Y es una subvariedad $\mathcal{D}^r$ de R^n, podemos considerar un entorno tubular definible W_1 de Y en R^n y una retracción $\mathcal{D}^r$ sumersiva $\gamma : W_1 \to Y$. Por la Proposición 3.3.7, podemos suponer también que existe un entorno abierto definible $W \subset W_1$ de Y tal que $W \subset \overline{W} \subset W_1$ y $\gamma : \overline{W} \to Y$ es propia. Si ϕ está suficientemente próxima a φ, tomando un entorno definible $V_1 \subset E$ de la sección cero, podemos definir la aplicación $\mathcal{D}^r$

$$V_1 \to Y \times Z$$

$$(x, \xi) \mapsto (\gamma(x + \xi), F(x)).$$

Esta aplicación es un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ entre la sección cero de E y el grafo de $F_{|X}$. Es más, en cada punto de la sección cero, la aplicación es una sumersión entre variedades de dimensión $b + c$, y por tanto un difeomorfismo local. Como $\gamma : \overline{W} \to Y$ es propia, podemos suponer que esta aplicación es también propia. Entonces, por el Lema 5.2.3, nuestra aplicación induce un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$, digamos α, desde un entorno abierto definible V de la sección cero en E a un entorno abierto definible U del grafo de $F_{|X}$ en $Y \times Z$. Así, hay un entorno definible U^* de X en Y sobre el que fórmula

$$\tau(x) = \eta \circ \alpha^{-1}(x, F(x))$$

define una retracción sumersiva de clase $\mathcal{D}^r$ $\tau : U^* \to X$. Es más, si $x \in U^*$ entonces $\alpha^{-1}(x, F(x)) = (y, \xi) \in E$ con $F(y) = F(x)$ (por definición). De esta forma, $F \circ \tau(x) = F \circ \eta \circ \alpha^{-1}(x, F(x)) = F(y) = F(x)$, y por tanto $F \circ \tau = F$. □

Podemos ya pasar a la demostración del resultado central de esta sección.

Demostración del Lema 5.2.1: Como el par $(f_{|(g\circ f)^{-1}(P)}, g_{|g^{-1}(P)})$ es $\mathcal{D}^r$ trivial tenemos difeomorfismos $\mathcal{D}^r$

$$\theta = (\theta_0, g\circ f) : (g\circ f)^{-1}(P) \to (g\circ f)^{-1}(p)\times P$$

$$\gamma = (\gamma_0, g) : g^{-1}(P) \to g^{-1}(p)\times P$$

para un cierto $p\in P$, de forma que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} (g\circ f)^{-1}(P) & \xrightarrow{f} & g^{-1}(P) & \xrightarrow{g} & P \\ \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Id}} \\ (g\circ f)^{-1}(p)\times P & \xrightarrow{f\times\mathrm{Id}} & g^{-1}(p)\times P & \xrightarrow{\pi} & P. \end{array}$$

Sea U un entorno tubular definible de P y $\tau : U\to P$ una retracción $\mathcal{D}^r$. Queremos extender los difeomorfismos $\mathcal{D}^r$ θ y γ a difeomorfismos $\mathcal{D}^r$

$$\tilde\theta : (g\circ f)^{-1}(U) \to (g\circ f)^{-1}(p)\times U$$

$$\tilde\gamma : g^{-1}(U) \to g^{-1}(p)\times U$$

de forma que el correspondiente diagrama conmute.

Consideramos la subvariedad $\mathcal{D}^r$ $g^{-1}(P)\subset N$. Aplicando el Lema 5.2.4 a $Y = g^{-1}(U)$, $Z = P$, $X = g^{-1}(P)$ y $F = \tau\circ g : g^{-1}(U)\to P$, y tal vez reduciendo U (podemos hacerlo por el Lema 5.2.2), obtenemos una retracción sumersiva $\tilde\tau : g^{-1}(U)\to g^{-1}(P)$ tal que

$$g\circ\tilde\tau = \tau\circ g$$

(observemos que $F_{|X} = g_{|P}$ es una sumersión porque es $\mathcal{D}^r$ trivial). Podemos definir ahora la aplicación $\mathcal{D}^r$

$$\tilde\gamma : g^{-1}(U) \to g^{-1}(p)\times U$$
$$x \mapsto (\gamma_0\tilde\tau(x), g(x)).$$

Por el Lema 5.2.3 aplicado a $\tilde\gamma$, existe un entorno abierto definible W de $g^{-1}(P)$ en $g^{-1}(U)$ tal que $\tilde\gamma : W\to\tilde\gamma(W)$ es un difeomorfismo. La aplicación $g : g^{-1}(U)\to U$ es propia por lo que, por el Lema 5.2.2 existe un entorno abierto U^* de P en U tal que $g^{-1}(U^*)\subset W$. Por tanto tenemos el difeomorfismo $\tilde\gamma : g^{-1}(U^*)\to\tilde\gamma(g^{-1}(U^*))$. pero $\tilde\gamma(g^{-1}(U^*))\subset g^{-1}(p)\times U^*$, por lo que aplicando de nuevo el Lema 5.2.2 a la aplicación propia $\pi : g^{-1}(p)\times U^*\to U^*$ ($g^{-1}(p)$ es compacto), obtenemos un entorno abierto U^{**} de P en U^* tal que $g^{-1}(p)\times U^{**}\subset\tilde\gamma(g^{-1}(U^*))$. Por lo tanto, $\tilde\gamma : g^{-1}(U^{**})\to g^{-1}(p)\times U^{**}$ es un difeomorfismo. Ahora, renombrando U^{**} como U tenemos que $\tilde\gamma$ es un difeomorfismo y que para todo $x\in g^{-1}(U)$, $\pi\circ\tilde\gamma(x) = g(x)$, por lo que el correspondiente diagrama es conmutativo.

De la misma forma, utilizando el Lema 5.2.4 con $Y = (g\circ f)^{-1}(U)$, $X = (g\circ f)^{-1}(P)$, $Z = g^{-1}(P)$, $F = \tilde\tau\circ f$ y observando que $F_{|X} = f_{|(g\circ f)^{-1}(P)}$ es $\mathcal{D}^r$ trivial, podemos construir una retracción sumersiva $\tilde{\sigma} : (g \circ f)^{-1}(U) \to (g \circ f)^{-1}(P)$ que verifica $f \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\tau} \circ f$, y, de forma similar, podemos definir

$$\tilde{\theta} : (g \circ f)^{-1}(U) \to (g \circ f)^{-1}(p) \times U$$

$$x \mapsto (\theta_0 \tilde{\sigma}(x), (g \circ f)(x)).$$

Tenemos de esta forma que $\tilde{\theta}$ es un difeomorfismo y, si tomamos $x \in (g \circ f)^{-1}(U)$ tenemos que

$$(f \times \mathrm{Id})\tilde{\theta}(x) = (f \times \mathrm{Id})(\theta_0 \tilde{\sigma}(x), (g \circ f)(x)) = (f\theta_0 \tilde{\sigma}(x), (g \circ f)(x))$$

y

$$\tilde{\gamma} f(x) = \tilde{\gamma}(f(x)) = (\gamma_0 \tilde{\tau}(f(x)), g(f(x))) =$$

$$= (\gamma_0 f \tilde{\sigma}(x), g(f(x))) = (f\theta_0 \tilde{\sigma}(x), (g \circ f)(x)).$$

Es decir, hemos extendido entonces la trivialización a U. □

Para acabar esta sección, presentamos un corolario muy útil del Lema 5.2.4.

Corolario 5.2.5 *Sea $f : M \to N$ una sumersión $\mathcal{D}^r$ entre subvariedades de clase $\mathcal{D}^r$ M y N. Sea $\widetilde{f} : M \to N$ una $\mathcal{D}^r$ aplicación suficientemente próxima a f (para la topología $\mathcal{D}^1$). Entonces existe un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $\tau : M \to M$ tal que $\widetilde{f} = f \circ \tau$.*

Demostración. Consideremos $\mathrm{graf}(f) \subset M \times N$. La proyección natural $\pi : \mathrm{graf}(f) \to N$ es una sumersión porque f es una sumersión. Entonces, por el Lema 5.2.4, existe un entorno abierto definible U de $\mathrm{graf}(f)$ en $M \times N$ y una retracción $\mathcal{D}^r$ sumersiva $\sigma : U \to \mathrm{graf}(f)$ tal que $\pi \circ \sigma = \pi$ sobre U. Dado un punto $(x, \widetilde{f}(x)) \in \mathrm{graf}(\widetilde{f})$ tenemos que $\widetilde{f}(x) = \pi(x, \widetilde{f}(x)) = \pi \circ \sigma(x, \widetilde{f}(x)) = \pi(\sigma_1(x, \widetilde{f}(x)), \sigma_2(x, \widetilde{f}(x))) = \sigma_2(x, \widetilde{f}(x))$. Pero, si definimos $\tau(x)$ como $\sigma_1(x, \widetilde{f}(x))$, tenemos $\sigma_2(x, \widetilde{f}(x)) = f(\tau(x))$. Y, si $\widetilde{f}$ está suficientemente cerca a f, entonces τ está suficientemente cerca a la identidad, por lo que podemos suponer que τ es un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$. □

5.3 Trivialidad de funciones

El teorema que queremos probar en esta sección es el siguiente:

Teorema 5.3.1 *Sea N una variedad $\mathcal{D}^r$ y sea $g : N \to R$ una sumersión $\mathcal{D}^r$ sobreyectiva propia. Entonces g es $\mathcal{D}^r$ trivial.*

Por el Teorema 5.1.10, este resultado es equivalente a:

Teorema 5.3.2 *Sea $(R', \mathcal{S}') \prec (R, \mathcal{S})$ una extensión elemental. Sea $X \subset R^n$ una subvariedad $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$. Entonces existe una subvariedad $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}'}$ Y tal que Y_R es $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ difeomorfa a X.*

Para la demostración de este resultado seguimos el argumento que Coste y Shiota hacen en [6] para el caso semialgebraico. La idea es utilizar la Teoría de Morse definible e inducción sobre $\dim X = k$. Sin embargo, la fibras de una función definible de Morse en un valor crítico son conjuntos definibles pero no variedades $\mathcal{D}^r$, por lo que debemos considerar la clase de singularidades que aparecen en este caso. Esto lleva a introducir la siguiente noción:

Definición 5.3.3 *Una* variedad $\mathcal{D}^r$ de dimensión k con una singularidad de Morse *es una cuadrupla $(X, \bar{p}, M, f)$, donde X es un conjunto definible que contiene al punto $\bar{p}$ y tal que*

- $X \setminus \{\bar{p}\}$ *es una variedad $\mathcal{D}^r$ de dimensión k,*
- *M es una variedad $\mathcal{D}^r$ de dimensión $k+1$ que contiene un entorno definible de $\bar{p}$ en X,*
- *f es una función $\mathcal{D}^r$ sobre M tal que $X \cap M = f^{-1}(0)$ y $\bar{p}$ es un punto crítico no degenerado de f.*

Definición 5.3.4 *Un* difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ de variedades $\mathcal{D}^r$ con singularidades de Morse *entre $(X, \bar{p}, M, f)$ e $(Y, \bar{q}, N, g)$ (o, de forma más breve, entre X e Y) es un homeomorfismo definible $\omega : X \cup M' \to Y \cup N'$, donde M' (resp. N') es un entorno definible abierto de $\bar{p}$ (resp. $\bar{q}$) en M (resp. N), tal que*

- $\omega(\bar{p}) = \bar{q}$,
- *ω induce un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ entre $X \setminus \{\bar{p}\}$ e $Y \setminus \{\bar{q}\}$,*
- *ω induce un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ entre M' y N',*
- $g \circ \omega_{|M'} = f_{|M'}$.

Es claro que en una variedad con singularidad de Morse $(X, \bar{p}, M, f)$, sólo importan los gérmenes de M y f en $\bar{p}$. Por tanto, en lo que sigue, siempre podremos reducir M cuando sea necesario. Siguiendo esta idea, podemos suponer que $\bar{p}$ es el único punto crítico de f.

Tenemos entonces el siguiente teorema.

Teorema 5.3.5 *Sea $(R', \mathcal{S}') \prec (R, \mathcal{S})$ una inmersión elemental. Sea $(X, \bar{p}, M, f)$ una variedad $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ de dimensión k con una singularidad de Morse, con X cerrada-acotada. Entonces, existe una variedad de clase $\mathcal{D}^{r-2k}_{\mathcal{S}'}$ con una singularidad de Morse $(Y, \bar{q}, N, g)$ tal que*

$$(X, \bar{p}, M, f) \simeq (Y_R, \bar{q}, N_R, g_R)$$

(i.e. existe un difeomorfismo de clase $\mathcal{D}^{r-2k}_{\mathcal{S}}$ de variedades $\mathcal{D}^{r-2k}_{\mathcal{S}}$ con singularidades de Morse).

En primer lugar observamos que el Teorema 5.3.5 implica el Teorema 5.3.2 en el caso de que X sea cerrada-acotada. En efecto, toda variedad $\mathcal{D}^r$ se puede ver como una variedad $\mathcal{D}^r$ con una singularidad de Morse, añadiendole un punto aislado. Por el Teorema 4.8.2, podemos suponer que X es $\mathcal{D}^r$ difeomorfa a una $\mathcal{D}^{r+2k}$ variedad X'. Entonces el Teorema 5.3.5 se tiene que X es $\mathcal{D}^r$ difeomorfa a la extensión a R de una variedad $\mathcal{D}^r_{S'}$ cerrada-acotada.

Demostración del Teorema 5.3.5. Procedemos por inducción sobre k. Para $k = 0$ es resultado es obvio. *Supongamos entonces que $k \geq 1$ y que el resultado está demostrado para* dimensiones más pequeñas que k. Como ya hemos mencionado anteriormente, seguimos la demostración que aparece en [6] para el caso semialgebraico. Damos aquí un esquema de esta demostración, resaltando el puntos en que son necesarios los nuevos resultados sobre variedades y aplicaciones $\mathcal{D}^r$.

En primer lugar, tomamos una función de Morse sobre X, es decir, una función $\phi : R^n \to R$ de clase $\mathcal{D}^{r-2}$ tal que no tiene puntos críticos degenerados en $X \setminus \{\bar{p}\}$ y los valores críticos de ϕ en $X \setminus \{\bar{p}\}$ son todos distintos entre si y diferentes de $\phi(\bar{p})$ (de hecho podemos suponer que $\bar{p} = 0$ y $\phi(\bar{p}) = 0$). Para construir ϕ basta repetir el argumento de [6, Lemma 3.5], teniendo en cuenta la existencia de particiones de la unidad de clase $\mathcal{D}^{r-2}$.

Estudiemos en primer lugar la situación entre dos valores regulares a y b de ϕ. La función ϕ restringida a $X \cap \phi^{-1}(a, b)$ es una sumersión propia. Tenemos que $\dim(X \cap \phi^{-1}(a, b)) = k$ y por la hipótesis de inducción existen modelos sobre R' para variedades de dimensión $k - 1$. Entonces, por la Proposición 5.1.10(iii'), existe una trivialización $X \cap \phi^{-1}(a, b) \to F \times R$, donde podemos tomar $F = \phi^{-1}(c)$ para cierto $c \in (a, b)$. De nuevo por la hipótesis de inducción, existe una variedad $\mathcal{D}^{r-2}_{S'}$ F' tal que F'_R es $\mathcal{D}^{r-2}_S$ difeomorfa a F. Entonces $F' \times (a, b)_{R'}$ es una variedad $\mathcal{D}^{r-2}_{S'}$ que es $\mathcal{D}^{r-2}_S$ difeomorfa a $X \cap \phi^{-1}(a, b)$.

Estudiemos a continuación la situación en un valor crítico a correspondiente a un punto crítico r. Para un tal valor crítico, la fibra $\phi^{-1}(a)$, junto con un entorno D de r en X, es una variedad con singularidad de Morse y, por hipótesis de inducción, tiene un modelo $\mathcal{D}^{r-2k}$ sobre R'. Por otro lado, utilizando el argumento anterior, tengo un modelo sobre R' de una "banda" con eje $\phi^{-1}(a) \setminus \{r\}$. Pegando estos dos modelos ([6, Lemma 3.6]) obtenemos un modelo sobre R' de $X \cap \phi^{-1}(a - \eta, a + \eta)$ para cierto $\eta > 0$. Para esta construcción necesitamos de nuevo la existencia de entornos tubulares $\mathcal{D}^r$ y las particiones de la unidad.

El caso de la fibra de ϕ que contiene a $\bar{p}$ es esencialmente el mismo ([6, Lemma 3.7]), luego de nuevo podemos construir un modelo sobre R' de $X \cap \phi^{-1}(-\delta, \delta)$, para cierto $\delta > 0$. Para ello utilizamos un lema de Morse definible ([6, Lemma 3.4]) que nos permite encontrar una descripción sencilla de X en un entorno de $\bar{p}$.

La demostración se acaba "pegando" los distintos modelos construidos. El argumento de [6] se puede repetir en el caso definible, ya que tenemos la Proposición 5.1.12. □

Demostración del Teorema 5.3.2. Hemos visto ya el caso cerrado-acotado. De nuevo por el Teorema 4.8.2, tenemos que X es $\mathcal{D}^r$ difeomorfa a una variedad $\mathcal{D}^{r+2k}$ X^*. Supongamos que X^* no es cerrada-acotada. Por el Corolario 3.3.6 podemos suponer que X^* es cerrada en R^n. Tomamos entonces un punto $p \in R^n$ tal que $x \mapsto \|x-p\|^2$ es una función de Morse propia sobre X^*. Repitiendo el proceso anterior para esta función podemos construir un modelo $\mathcal{D}^r_{S'}$ para X^*, y por tanto, un modelo $\mathcal{D}^r_{S'}$ para X. □

5.4 Trivialidad de aplicaciones

El teorema que obtenemos en esta sección es:

Teorema 5.4.1 *Sea $p : M \to R^l$ una sumersión $\mathcal{D}^r$ propia. Entonces p es $\mathcal{D}^r$ trivial.*

Demostración. Para $l = 1$, este resultado es la trivialidad de funciones que probamos en la sección anterior. Supongamos pues $l > 1$. Si sustituimos M por el grafo de p, podemos suponer que $M \subset R^n \times R^l$ y que p es la restricción de la proyección $R^n \times R^l \to R^l$. Podemos ver $p : M \to R^l = R^{l-1} \times R$ como una familia de sumersiones propias parametrizada por R:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\pi_l \circ p"'] & & R^{l-1} \times R \arrow[dl, "\pi_l"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

donde $\pi_l : R^l = R^{l-1} \times R$ es la proyección $y = (y', y_l) \mapsto y_l$.

Tomemos $\alpha \in \widetilde{R}$. Entonces podemos considerar

$$p_\alpha : M_\alpha \to k(\alpha)^{l-1}$$

que es una sumersión $\mathcal{D}^r$ propia. Por la hipótesis de inducción, p_α es $\mathcal{D}^r$ trivial, esto es, existe un difeomorfismo

$$h = (h_0, p_\alpha) : M_\alpha \to p_\alpha^{-1}(0) \times k(\alpha)^{l-1}.$$

Observamos que $p_\alpha^{-1}(0)$ es la fibra genérica de una cierta familia. Hemos supuesto arriba que $p : M \subset R^n \times R^l \to R^l$ es la restricción de la proyección $(x, y) \mapsto y$. Por tanto $M_\alpha \subset k(\alpha)^n \times k(\alpha)^{l-1}$ y p_α es la restricción de la proyección $k(\alpha)^n \times k(\alpha)^{l-1} \to k(\alpha)^{l-1}$. Por definición

$$p_\alpha^{-1}(0) = \{y \in k(\alpha)^n : (y, 0) \in M_\alpha\}.$$

Podemos considerar la familia

$$Y = p^{-1}(\{0\} \times R) \xrightarrow{\pi_l \circ p} R.$$

Para cada $t \in R$,

$$Y_t = \{y \in R^n : (y,0) \in M_t\} = p^{-1}(0,t)$$

($0 \in R^{l-1}$). Es claro entonces que $p_\alpha^{-1}(0) = Y_\alpha$.

Esto significa que existe un subconjunto definible $S \subset R$, $S \in \alpha$, y un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$

$$M \cap p^{-1}(R^{l-1} \times S) \to (M \cap p^{-1}(\{0\} \times S)) \times R^{l-1}.$$

Si S es un intervalo abierto, $M \cap p^{-1}(\{0\} \times S) \to p\{0\} \times S \simeq S$ es una sumersión propia, por lo que obtenemos una trivialización

$$\gamma = (\gamma_0, p) : M \cap p^{-1}(\{0\} \times S) \to p^{-1}(t) \times S$$

donde $t = (0, t')$. De este forma tenemos un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$

$$M \cap p^{-1}(R^{l-1} \times S) \to p^{-1}(t) \times R^{l-1} \times S,$$

esto es, una trivialización sobre $R^{l-1} \times S$.

Si S es un único punto, $S = \{a\}$, por la hipótesis de inducción obtenemos una trivialización $\mathcal{D}^r$ de p sobre $R^{l-1} \times \{a\}$ y, por el Lema de Extensión 5.2.1, obtenemos una trivialización sobre la banda $R^{l-1} \times (-\delta, \delta) = \{(x,t) \in R^{l-1} \times R : -\delta(x) < t < \delta(x)\}$ para cierta función $\delta : R^{l-1} \to R$.

Ahora debemos pegar estas trivializaciones. Por ejemplo, vamos a pegar una trivialización sobre $R^{l-1} \times (0,1)$

$$h_1 : p^{-1}(R^{l-1} \times (0,1)) \to p^{-1}(t) \times R^{l-1} \times (0,1)$$

y una trivialización sobre $R^{l-1} \times (-\delta, \delta)$

$$h_2 : p^{-1}(R^{l-1} \times (-\delta,\delta)) \to p^{-1}(t) \times R^{l-1} \times (-\delta, \delta)$$

para cierta función $\delta : R^{l-1} \to R$ y $t \in R^{l-1} \times (0, \delta)$.

Sobre $(0, \delta)$ tenemos

$$\Phi = h_2 \circ h_1^{-1} : p^{-1}(t) \times R^{l-1} \times (0,\delta) \to p^{-1}(t) \times R^{l-1} \times (0,\delta)$$
$$(x, s, t) \mapsto (\phi_{(s,t)}(x), s, t).$$

Por el mismo argumento que en la demostración del Teorema 6.3.1 podemos considerar una aplicación $\mathcal{D}^r$ $u : R^{l-1} \times (0,\delta) \to R^{l-1} \times (0, \delta)$ que verifica

- $u(x,t) = (0, \frac{3}{4}\delta(0))$ si $t \leq \frac{1}{4}\delta(s)$, y
- $u(x,t) = (s,t)$ si $t \geq \frac{3}{4}\delta(s)$.

Por tanto podemos considerar $\Psi : p^{-1}(t) \times R^{l-1} \times (0,\delta) \to p^{-1}(t) \times R^{l-1} \times (0,\delta)$ definida por $\Psi(x,s,t) = (\phi_{u(s,t)}(x), s, t)$. Consideremos ahora $h_2^* = \Psi \circ h_1$. Sobre $\{t \leq \frac{1}{4}\delta(s)$, $h_2^* = (\nu \times \mathrm{Id}) \circ h_1$ donde $\nu = \phi_{(0,\frac{3}{4}\delta(0))} : p^{-1}(t) \to p^{-1}(t)$. Sobre $\{t \geq \frac{3}{4}\delta(s)$, $h_2^* = h_2$. De esta forma podemos pegar h_1 y h_2^* para así obtener una trivialización global.

5.5 Variedades definibles con borde

De forma natural se definen en nuestra categoría o-minimal las *variedades $\mathcal{D}^r$ con borde diferenciable*, considerando cartas modelas sobre semi-espacios de R^d. El Teorema 5.4.1 puede generalizarse para este tipo de variedades.

Teorema 5.5.1 *Sea $M \subset R^n$ una variedad de clase $\mathcal{D}^r$ con borde N. Sea $p : M \to R^l$ una sumersión $\mathcal{D}^r$ propia, tal que la restricción de p al borde N es también una sumersión. Entonces existe una trivialización $\mathcal{D}^r$ de p que es un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $h = (h_0, p) : M \to p^{-1}(0) \times R^l$ que induce una trivialización $h_{|N} : N \to (p^{-1}(0) \cap N) \times R^l$. Además, podemos tomar un entorno tubular T de N de clase $\mathcal{D}^r$ con una retracción $\mathcal{D}^r$ $\pi : T \to N$ y una función cuadrado de la distancia $\rho : T \to R$, y elegir la trivialización h de forma que $\rho(h_0(x)) = \rho(x)$ y $\pi(h_0(x)) = h_0(\pi(x))$ para todo x perteneciente a un entorno de N en M.*

Demostración. Basta adaptar la demostración de [7, Th. 3] al caso definible. Un paso clave en esta demostración es el Lema 5.2.4, que nos permite tomar un entorno tubular $\mathcal{D}^r$ T de N en R^n con una retracción $\mathcal{D}^r$ $\pi : T \to N$ que verifica $p \circ \pi = p_{|T}$. □

El siguiente teorema es un caso muy especial de nuestro Teorema 6.3.1.

Teorema 5.5.2 *Sea $P \subset R^m$ una variedad $\mathcal{D}^r$ y $M \subset R^n$ una variedad $\mathcal{D}^r$ con borde N. Sea*

$$(\pi, p) : M \to P \times R^l$$

una sumersión $\mathcal{D}^r$ propia, que es también sumersión al restringirla al borde N. Entonces existe un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$

$$h = (h_0, p) : M \to p^{-1}(0) \times R^l$$

tal que h_0 es la identidad sobre $p^{-1}(0)$ y $\pi \circ h_0 = \pi$. Supongamos además que τ es una función $\mathcal{D}^r$ no negativa definida en un entorno de N en M, de forma que 0 es valor regular de τ y $\tau^{-1}(0) = N$. Entonces podemos tomar h de forma que $\tau \circ h_0 = \tau$ en un entorno de N de M.

Demostración. (Ver [7, Th. 8].) Podemos encontrar un recubrimiento de P por abiertos definibles tales que cada uno de ellos es $\mathcal{D}^r$ difeomorfo al espacio afín R^k. Probamos nuestro resultado por inducción sobre el número de abiertos del recubrimiento. De esta forma, basta estudiar el caso en que $P = U \cup V$, de forma que U y V son abiertos definibles de P, la conclusión del teorema se cumple para $(\pi, p) : \pi^{-1}(U) \cap M \to U \times R^l$ y V es $\mathcal{D}^r$ difeomorfo a R^k.

Tenemos entonces un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $g = (g_0, p) : \pi^{-1}(U) \to (\pi^{-1}(U) \cap p^{-1}(0)) \times R^l$ tal que g_0 es la identidad sobre $\pi^{-1}(U) \cap p^{-1}(0)$, $\pi \circ g_0 = \pi$ y $\tau \circ g_0 = \tau$ en un entorno de $N \cap \pi^{-1}(0)$. Por otro lado, utilizando el Teorema 5.5.1, tenemos un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$

$$\Theta = (\Delta, \pi, p) : \pi^{-1}(V) \to Q \times V \times R^l$$

donde $Q = (\pi, p)^{-1}(v, 0)$ para cierto $v \in V$, tal que Δ es la identidad sobre Q y $\tau \circ \Delta = \tau$ en un entorno de $N \cap \pi^{-1}(V)$ en $\pi^{-1}(V)$ (esta última afirmación se obtiene de la demostración del Teorema 5.5.1). Sea Θ_0 el difeomorfismo $\mathcal{D}^r$

$$\Theta_0 = (\Delta, \pi)_{|\pi^{-1}(V) \cap p^{-1}(0)} : \pi^{-1}(V) \cap p^{-1}(0) \to Q \times V.$$

A partir de estos datos construimos un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$

$$Q \times (U \cap V) \times R^l \to Q \times (U \cap V) \times R^l$$

$$(\xi, y, t) \mapsto (\zeta_{y,t}(\xi), y, t)$$

tomando $\zeta_{y,t}(\xi) = \Delta(g_0(\Theta^{-1}(\xi, y, t)))$. Nótese que $\zeta_{y,0}$ es la identidad sobre Q, para todo y. Tomemos ahora una partición de la unidad $\mathcal{D}^r$ $\{\phi, 1 - \phi\}$ de P subordinada al recubrimiento $\{U, V\}$. Definimos h_0 sobre $\pi^{-1}(U \cap V)$ mediante

$$h_0(x) = \Theta_0^{-1}(\zeta_{y,\phi(y)t}(\Delta(x)), y) \qquad \text{donde } y = \pi(x) \text{ y } t = p(x).$$

Si $\phi = 0$ tenemos que

$$h_0(x) = \Theta_0^{-1}(\Delta(x), \pi(x))$$

y si $\phi = 1$ tenemos

$$h_0(x) = \Theta_0^{-1}(\Delta(g_0(x)), \pi(x)) = g_0(x).$$

Por tanto podemos extender h_0 a M mediante

$$h_0(x) = \begin{cases} \Theta_0^{-1}(\Delta(x), \pi(x)) & \text{cuando } \pi(x) \in V \setminus U, \\ g_0(x) & \text{cuando } \pi(x) \in U \setminus V. \end{cases}$$

Es fácil entonces ver que $h = (h_0, p)$ es el difeomorfismo que buscamos. □

Capítulo 6

Familias de aplicaciones definibles

Como en el caso de familias de conjuntos definibles, podemos ver un par de aplicaciones definibles entre conjuntos definibles como una familia de aplicaciones definibles. Es decir, si $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$ y $Z \subset R^p$ son subconjuntos definibles y $f : X \to Y$, $p : Y \to Z$ son aplicaciones definibles, podemos ver el par (f, p) como la familia $\mathrm{graf}(p \circ f) \to \mathrm{graf}(p)$, siendo Z el espacio de parámetros.

En este capítulo demostramos la trivialidad de pares sumersiones propias, dentro de la categoría $\mathcal{D}^r$.

6.1 Equivalencia genérica de familias definibles

Para la demostración del teorema de trivialidad de pares utilizaremos los resultados de la Sección 5.1. Necesitamos además la siguiente proposición, que expresa que, si las fibras de dos familias de aplicaciones en un punto genérico son equivalentes, entonces las dos familias son equivalentes sobre un subconjunto del espacio de parámetros.

Proposición 6.1.1 *Sean $M \subset R^m$ y $N \subset R^n$ variedades $\mathcal{D}^r$, y sean $f : R^p \times M \to R^p \times N$ y $g : R^p \times M \to R^p \times N$ familias $\mathcal{D}^r$ de aplicaciones $\mathcal{D}^r$. Sea $\alpha \in \widetilde{R^p}$. Supongamos que tenemos difeomorfismos $\mathcal{D}^r$ $\gamma : M_{k(\alpha)} \to M_{k(\alpha)}$ y $\sigma : N_{k(\alpha)} \to N_{k(\alpha)}$ tales que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} M_{k(\alpha)} & \xrightarrow{\gamma} & M_{k(\alpha)} \\ \downarrow{\scriptstyle g_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle f_\alpha} \\ N_{k(\alpha)} & \xrightarrow{\sigma} & N_{k(\alpha)} \end{array}$$

(recordemos $M_{k(\alpha)}$ es $(M \times R^p)_\alpha$). Entonces existe una subvariedad $\mathcal{D}^r$ $S \subset R^p$, $S \in \alpha$, y dos familias de difeomorfismos $\mathcal{D}^r$ $\zeta : S \times M \to S \times M$ y $\eta : S \times N \to S \times N$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} S \times M & \xrightarrow{\zeta} & S \times M \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S \times N & \xrightarrow{\eta} & S \times N. \end{array}$$

Demostración. Consideramos el difeomorfismo $\mathcal{D}^r$

$$H : M_{k(\alpha)} \times N_{k(\alpha)} \to M_{k(\alpha)} \times N_{k(\alpha)}$$
$$(x, y) \mapsto (\gamma(x), \sigma(y)).$$

Este difeomorfismo manda el grafo de g_α al grafo de f_α. Utilizando la Proposición 5.1.5 para H, podemos suponer que existe una $\mathcal{D}^r$ subvariedad $S \subset R^p$, $S \in \alpha$, y una familia de aplicaciones $\mathcal{D}^r$

$$\Xi : S \times M \times N \to S \times M \times N$$
$$(t, x, y) \mapsto (t, \zeta(x, t), \eta(x, t))$$

tales que $\Xi_\alpha = H$. Utilizando de nuevo la Proposición 5.1.5, y tal vez reduciendo S, podemos suponer que existe una familia de aplicaciones $\mathcal{D}^r$ $\Xi^* : S \times M \times N \to S \times M \times N$ tal que $\Xi^*_\alpha = H^{-1}$. Tenemos entonces que $\mathrm{Id}_{M_{k(\alpha)} \times N_{k(\alpha)}} = H \circ H^{-1} = \Xi_\alpha \circ \Xi^*_\alpha = (\Xi \circ \Xi^*)_\alpha$ por lo que, por la Proposición 2.3.4, reduciendo S otra vez, podemos suponer que $\Xi_{[S]} \circ \Xi^*_{[S]} = \mathrm{Id}_{S \times M \times N}$. Ahora, de la misma forma, podemos suponer también que $\Xi^*_{[S]} \circ \Xi_{[S]} = \mathrm{Id}_{S \times M \times N}$, por lo que $\Xi^* = \Xi^{-1}$ sobre S, y, de hecho, $\Xi_{[S]}$ es una familia de difeomorfismos $\mathcal{D}^r$. Finalmente, tal vez reduciendo de nuevo S, podemos suponer que la aplicación Ξ manda el grafo de g al grafo de f, por lo que induce el diagrama anterior.

□

6.2 Un modelo para una sumersión propia

Consideremos $\mathcal{S}'$ y $\mathcal{S}$ dos estructuras o-minimales tales que $(R', \mathcal{S}') \prec (R, \mathcal{S})$. En esta sección, dada una sumersión de clase $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ propia $f : M \to N$, encontramos un modelo $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}'}$ para f definible sobre $\mathcal{S}'$. Construiremos este modelo sobre los elementos de un recubrimiento abierto definible de N. El primer lema nos permitirá pegar modelos locales para de esta forma obtener un modelo global.

Lema 6.2.1 *Sean Λ, V y N variedades $\mathcal{D}^r$ y Ω y U subconjuntos abiertos definibles de N tales que $\Omega \cup U = N$. Sean $f : \Lambda \to \Omega$, $g : V \to U$ sumersiones $\mathcal{D}^r$ propias; y supongamos que existe un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $\psi : f^{-1}(\Omega \cap U) \to g^{-1}(\Omega \cap U)$ tal que $f_{|f^{-1}(\Omega \cap U)} = g_{|g^{-1}(\Omega \cap U)} \circ \psi$. Entonces existe una variedad $\mathcal{D}^r$ M, inmersiones difeomórficas $i : \Lambda \to M$, $j : V \to M$ y una sumersión $\mathcal{D}^r$ propia $F : M \to N$ tal que $j \circ \psi = i$ y el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[d, "F"] & V \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

(es decir, podemos "pegar" Λ y V sobre N).

Demostración. Podemos suponer que $\Lambda \subset R^n$ y $V \subset R^m$. Sea $\{h, 1-h\}$ una partición de la unidad $\mathcal{D}^r$ subordinada a $\{\Omega, U\}$, de forma que $\{h \neq 0\} \cap \{h \neq 1\} \subset \Omega \cap U$.

Consideremos

$$M_1 = \{(h(f(x))x, (1-h(f(x)))\psi(x), f(x)) : x \in \Lambda\},$$
$$M_2 = \{(h(g(y))\psi^{-1}(y), (1-h(g(y)))y, g(y)) : y \in V\},$$
$$M = M_1 \cup M_2 \subset R^n \times R^m \times N$$

y la proyección $F = \pi_{3|M} : M \to N$.

Es claro que M es un conjunto definible y F es una aplicación definible. Tenemos también que $F^{-1}(\Omega) = M_1$ es $\mathcal{D}^r$ difeomorfo a Λ. De hecho la aplicación

$$\Lambda \xrightarrow{i} M_1$$
$$x \mapsto (h(f(x))x, (1-h(f(x)))\psi(x), f(x))$$

es un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ con inverso definido por

$$M_1 \to \Lambda$$
$$(u, v, t) \mapsto \begin{cases} \frac{u}{h(t)} & \text{si } h(t) \neq 0 \\ \psi^{-1}(\frac{v}{1-h(t)}) & \text{si } h(t) \neq 1. \end{cases}$$

De forma análoga, $F^{-1}(U) = M_2$, y M_2 es $\mathcal{D}^r$ difeomorfa a V. Entonces, M es una variedad $\mathcal{D}^r$ y F es una sumersión $\mathcal{D}^r$ propia. □

Después de este lema preliminar, establecemos el resultado principal de esta sección.

Proposición 6.2.2 (Modelos Definibles) *Sea $(R', \mathcal{S}') \prec (R, \mathcal{S})$ una extensión elemental de estructuras o-minimales. Sea $f : M \to N$ una sumersión $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ propia entre las subvariedades $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ M y N de R^n. Entonces, existen dos subvariedades $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}'}$ M' y N' de $R'^{n'}$, una sumersión $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ propia $f' : M' \to N'$ y difeomorfismos $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ $\alpha : N'_R \to N$, $\beta : M'_R \to M$, tales que $f \circ \beta = \alpha \circ f'_R$.*

Demostración. Por el Teorema 5.3.2, existe una subvariedad $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}'}$ N', definida sobre R', y un difeomorfismo $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ $\alpha : N'_R \to N$. Por el Lema 4.1.1, podemos suponer que $N' = \bigcup_{i=1}^k U'_i$, donde U'_i es un abierto definible y $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}'}$ difeomorfo a R'^s para todo i. Consideremos ahora los subconjuntos abiertos $U_i = \alpha((U'_i)_R)$. Entonces $N = \bigcup_{i=1}^k U_i$, y U_i es $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ difeomorfo a R^s para todo i.

Tenemos que $f_{|f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i) \to U_i$ es una sumersión $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ propia. Por el Teorema 5.4, existe una variedad $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ compacta F_i y un difeomorfismo $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ $\beta_i : f^{-1}(U_i) \to F_i \times U_i$ tal que $f = \pi_i \circ \beta_i$, donde π_i es la proyección $F_i \times U_i \to U_i$.

Para cada i, existe una variedad $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}'}$ compacta F'_i sobre R' cuya extensión a R es difeomorfa a F_i, esto es, tenemos un difeomorfismo $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ $e_i : F'_{iR} \to F_i$. Tenemos que "pegar" los conjuntos $\{F_i' \times U_i'\}_{i=1,\dots,k}$ para construir una variedad $\mathcal{D}^r_{S'}$ M' y una sumersión $\mathcal{D}^r_{S'}$ propia $f' : M' \to N'$, definida sobre R'. Procedemos por inducción sobre k.

Para $k = 1$, no hay nada que demostrar. Consideramos el caso $k > 1$. Consideramos los subconjuntos $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k-1} U_i$, $\Lambda = f^{-1}(\Omega)$. Por la hipótesis de inducción, tenemos una variedad $\mathcal{D}^r_{S'}$ Λ' sobre R', un difeomorfismo $\mathcal{D}^r_S$ $\psi_1 : \Lambda'_R \to \Lambda$ y una sumersión propia de clase $\mathcal{D}^r_{S'}$ $\phi^1 : \Lambda' \to \Omega' = \bigcup_{i=1}^{k-1} U_i'$, de forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda'_R & \xrightarrow{\psi_1} & \Lambda \\ \big\downarrow{\scriptstyle \phi^1_R} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ \Omega'_R & \xrightarrow{\alpha} & \Omega. \end{array}$$

Por otro lado, tenemos $\beta_k : f^{-1}(U_k) \to F_k \times U_k$, F_k', $e_k : F'_{kR} \to F_k$, y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} (F_k' \times U_k')_R & \xrightarrow{e_k \times \alpha} & F_k \times U_k & \xrightarrow{\beta_k^{-1}} & f^{-1}(U_k) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi'_R} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ (U_k')_R & \xrightarrow{\alpha} & U_k & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & U_k, \end{array}$$

donde π, π' son las respectivas proyecciones.

De esta forma, si definimos $U = U_k$, $V = f^{-1}(U_k)$, $V' = F_k' \times U_k'$, $U' = U_k'$, $\phi^2 = \pi'$ y $\psi_2 = \beta_k^{-1} \circ (e_k \times \alpha)$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V'_R & \xrightarrow{\psi_2} & V \\ \big\downarrow{\scriptstyle \phi^2_R} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ U'_R & \xrightarrow{\alpha} & U. \end{array}$$

Nótese que $\psi_1(\Lambda' \cap V')_R = \Lambda \cap V = \psi_2(\Lambda' \cap V')_R$.

Estudiemos qué pasa sobre $U' \cap \Omega'$. Tenemos el difeomorfismo $\mathcal{D}^r_S$

$$\delta = (\psi_2)^{-1} \circ \psi_1 : (\phi^1)^{-1}(U' \cap \Omega')_R \to (\phi^2)^{-1}(U' \cap \Omega')_R$$

sobre $(U' \cap \Omega')_R$ *compatible* con ϕ^1_R y ϕ^2_R, lo que significa que $\phi^2_R \circ \delta = \phi^1_R$ sobre $(U' \cap \Omega')_R$. Por el Lema 5.1.11 existe un difeomorfismo $\mathcal{D}^r_{S'}$

$$\delta' : (\phi^1)^{-1}(U' \cap \Omega') \to (\phi^2)^{-1}(U' \cap \Omega')$$

definido sobre R' y compatible con ϕ^1 y ϕ^2, y una familia $\mathcal{D}^r_S$ de difeomorfismos $\mathcal{D}^r_S$

$$\Delta : [0,1]_R \times (\phi^1)^{-1}(U' \cap \Omega')_R \to [0,1]_R \times (\phi^1)^{-1}(U' \cap \Omega')_R$$

tal que $\Delta_0 = \delta'_R$, $\Delta_1 = \delta$ y Δ_t es compatible con ϕ^1_R y ϕ^2_R para cada $t \in [0,1]_R$.

De esta forma, utilizando el Lema 6.2.1 para δ', tenemos una variedad $\mathcal{D}^r_{S'}$ M' sobre R' y una sumersión $\mathcal{D}^r_{S'}$ propia $f' : M' \to N'$. Afirmamos que M'_R es $\mathcal{D}^r_S$ difeomorfa a M. Por la demostración del Lema 6.2.1, M'_R se obtiene *pegando* Λ'_R y V'_R mediante el difeomorfismo $\mathcal{D}^r_{S'}$ δ'_R. Esto significa que

$$\begin{aligned} M'_R &= (M'_1)_R \cup (M'_2)_R \\ &= \{(h_R(\phi^1_R(x))x, (1 - h_R(\phi^1_R(x)))\delta'_R(x), \phi^1_R(x)) : x \in \Lambda'_R\} \cup \\ &\quad \{(h_R(\phi^2_R(y))(\delta'_R)^{-1}(y), (1 - h_R(\phi^2_R(y)))y, \phi^2_R(y) : y \in V'_R\} \end{aligned}$$

para cierta partición de la unidad de clase $\mathcal{D}^r_{S'}$ $\{h, 1-h\}$ subordinada a $\{\Omega', U'\}$. Sea M^* la variedad obtenida mediante el pegado de Λ'_R y V'_R por el difeomorfismo $\mathcal{D}^r_S$ $\delta : (\phi^1)^{-1}(U' \cap \Omega')_R \to (\phi^2)^{-1}(U' \cap \Omega')_R$. Veamos que M'_R es $\mathcal{D}^r_S$ difeomorfo a M^*.

Podemos suponer, componiendo con una aplicación $\mathcal{D}^r_S$ apropiada $[0,1] \to [0,1]$, que $\Delta_t = \delta'_R$ para todo $t \in [0, t_0)$ y $\Delta_t = \delta$ para todo $t \in (t_1, 1]$, para ciertos t_0, t_1 tales que $0 < t_0 < t_1 < 1$.

Tenemos entonces

$$\gamma : M'_R \to M^*$$

$$(u, v, t) \mapsto \begin{cases} (s\delta^{-1}\Delta_s(\frac{u}{s}), (1-s)\Delta_s(\frac{u}{s}), t) & \text{si } s \neq 0 \\ (s\delta^{-1}\Delta_s(\delta'_R)^{-1}(\frac{v}{1-s}), (1-s)\Delta_s(\delta'_R)^{-1}(\frac{v}{1-s}), t) & \text{si } s \neq 1, \end{cases}$$

donde $s = h_R(t)$. La aplicación γ está bien definida y de hecho es un difeomorfismo $\mathcal{D}^r_S$. Así, $M'_R \simeq M^*$.

Veamos ahora que $M^* \simeq M$. Tenemos que $M = \Lambda \cup V$, y $M^* = M_1^* \cup M_2^*$, donde M_1^* y M_2^* están definidas de la misma forma que arriba. Definimos la aplicación

$$\Lambda \xrightarrow{\overline{\gamma_1}} M_1^*$$

$$x \mapsto (h_R(\phi^1_R(p))p, (1 - h_R(\phi^1_R(p))\delta(p), \phi^1_R(p))$$

donde $p = \psi_1^{-1}(x)$. Esto es claramente un difeomorfismo $\mathcal{D}^r_S$. Por otro lado, tenemos

$$V \xrightarrow{\overline{\gamma_2}} M_2^*$$

$$x \mapsto (h_R(\phi^2_R(q))\delta^{-1}(q), (1 - h_R(\phi^2_R(q)))q, \phi^2_R(q))$$

donde $q = \psi_2^{-1}(x)$. Esto es también un difeomorfismo $\mathcal{D}^r_S$. Para construir un difeomorfismo $\mathcal{D}^r_S$ entre M y M^* a partir de $\overline{\gamma_1}$ y $\overline{\gamma_2}$, basta comprobar que coinciden sobre $\Lambda \cap V$. Pero para $x \in \Lambda \cap V$, p y q como antes, tenemos

$$\begin{array}{ll} (i) & \phi^1_R(p) = \phi^1_R\psi_1^{-1}(x) = \alpha^{-1}f(x) = \phi^2_R\psi_2^{-1}(x) = \phi^2_R(q) \\ (ii) & h_R(\phi^1_R(p))p = h_R(\phi^1_R(p))\psi_1^{-1}(x) = h_R(\phi^2_R(q))\delta^{-1}\psi_2^{-1}(x) = h_R(\phi^2_R(q))\delta^{-1}(q) \\ (iii) & (1 - h_R(\phi^1_R(p)))\delta(p) = (1 - h_R(\phi^1_R(p)))\delta\psi_1^{-1}(x) = (1 - h_R(\phi^1_R(p)))\psi_2^{-1}(x) \\ & = (1 - h_R(\phi^2_R(q)))q. \end{array}$$

Así, $\overline{\gamma_1}(x) = \overline{\gamma_2}(x)$. Podemos definir entonces un difeomorfismo $\mathcal{D}^r_S$ $\overline{\gamma} : M \to M^*$.

Finalmente, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} M'_R & \xrightarrow{\gamma} & M^* & \xrightarrow{\overline{\gamma}^{-1}} & M \\ \downarrow{\scriptstyle f'_R} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ N'_R & \xrightarrow[=]{\text{Id}} & N'_R & \xrightarrow{\alpha} & N, \end{array}$$

donde $f'' : M^* \to N'_R$ es la proyección $(x, y, z) \mapsto z$ restringida a M^* (véase la construcción de M^* anterior). De esta forma, definiendo $\beta = \overline{\gamma}^{-1} \circ \gamma$, tenemos nuestro resultado.

□

Para acabar esta Sección, la Proposición anterior nos permite demostrar un teorema o-minimal "de tipo Hardt".

Teorema 6.2.3 *Sean $B \subset R^p$, $X \subset B \times R^n$ y $Y \subset B \times R^m$ conjuntos definibles, y sea $f : X \to Y$ una familia definible de aplicaciones definibles. Supongamos que $f_t : X_t \to Y_t$ es una sumersión $\mathcal{D}^r$ propia entre variedades $\mathcal{D}^r$ para cada $t \in B$. Entonces podemos estratificar B en una unión disjunta de variedades $\mathcal{D}^r$, digamos $B = S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_r$, de forma que, para cada S_i, podemos encontrar una trivialización $\mathcal{D}^r$ de f sobre S_i de la forma*

$$\begin{array}{ccc} S_i \times X_{t_i} & \xrightarrow{\sim} & X_{[S_i]} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\times f_{t_i}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_{[S_i]}} \\ S_i \times Y_{t_i} & \xrightarrow{\sim} & Y_{[S_i]}, \end{array}$$

para cierto $t_i \in S_i$.

Demostración. Tomemos un punto α en el espectro real $\widetilde{B}$ de B. La fibra $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ es una sumersión $\mathcal{D}^r$ propia sobre $k(\alpha)$ (es decir, una aplicación $\mathcal{D}^r_{S_\alpha}$). Por la Proposición 6.2.2, tenemos una sumersión $\mathcal{D}^r$ $f' : X' \to Y'$ entre variedades $\mathcal{D}^r$ X' e Y', definida sobre R, y difeomorfismos $\mathcal{D}^r$ γ y σ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X'_{k(\alpha)} & \xrightarrow{\gamma} & X_\alpha \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f'_{k(\alpha)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_\alpha} \\ Y'_{k(\alpha)} & \xrightarrow{\sigma} & Y_\alpha \end{array}$$

Pero, como $f'_{k(\alpha)}$ es la fibra $(\mathrm{Id}\times f')_\alpha$ de la familia constante $\mathrm{Id}\times f' : B \times X' \to B \times Y'$, por la Proposición 6.1.1, existe una variedad $\mathcal{D}^r$ $S \subset R$, $S \in \alpha$, y difeomorfismos $\mathcal{D}^r$ ζ y η, compatibles con las proyecciones, tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} S \times X' & \xrightarrow{\zeta} & X_{[S]} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\times f'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ S \times Y' & \xrightarrow{\eta} & Y_{[S]}. \end{array}$$

Por la propiedad de compacidad de $\widetilde{B}$, y tal vez subestratificando, podemos suponer que existe una estratificación $\mathcal{D}^r$ finita $\{S_i\}$ de B tal que un diagrama como el anterior se verifica para cada S_i. $\square$

6.3 Trivialidad de pares

Sean N y P variedades $\mathcal{D}^r$ y $g : N \to P$ una aplicación $\mathcal{D}^r$. Recordamos que g es $\mathcal{D}^r$ *trivial* si existe un punto $p \in P$ y un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $\gamma = (\gamma_0, g) : N \to g^{-1}(p) \times P$. Sea M una variedad $\mathcal{D}^r$ y $f : M \to N$ una aplicación $\mathcal{D}^r$. Diremos que (f, g) es $\mathcal{D}^r$ *trivial* si existe p y γ como antes y un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $\theta = (\theta_0, g \circ f) : M \to (g \circ f)^{-1}(p) \times P$ tal que $f \circ \theta_0 = \gamma_0 \circ f$. En otras palabras, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \theta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ (g \circ f)^{-1}(p) \times P & \xrightarrow{f\times \mathrm{Id}} & g^{-1}(p) \times P & \xrightarrow{\pi} & P. \end{array}$$

El principal resultado de este capítulo es:

Teorema 6.3.1 *Sean M y N variedades $\mathcal{D}^r$ y sean $f : M \to N$, $g : N \to R^l$ sumersiones $\mathcal{D}^r$ sobreyectivas y propias. Entonces (f, g) es $\mathcal{D}^r$ trivial.*

Demostración. La aplicación $p : N \to R^l$ es una sumersión $\mathcal{D}^r$ propia. Por el Teorema 5.4.1, existe una variedad $\mathcal{D}^r$ compacta F y un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $\psi = (g, \psi_0) : N \to R^l \times F$. De la misma forma, $g \circ f : M \to R^l$ es una sumersión $\mathcal{D}^r$ propia, por lo que existe una variedad $\mathcal{D}^r$ compacta G y un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $\varphi = (g \circ f, \varphi_0) : M \to R^l \times G$. Podemos considerar entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & R^l \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ R^l \times G & \xrightarrow{f'} & R^l \times F & \xrightarrow{\pi_1} & R^l, \end{array}$$

donde $f' = \psi f \varphi^{-1}$ ($\pi_1 : R^l \times F \to R^l$ es la proyección). Además,

$$\pi_1 f'(t, x) = \pi_1 \psi f \varphi^{-1}(t, x) = g f \varphi^{-1}(t, x) = \pi_2 \varphi \varphi^{-1}(t, x) = \pi_2(t, x) = t,$$

donde π_2 es la proyección $R^l \times G \to R^l$.

Por tanto podemos suponer que M, N son compactas y $f : R^l \times M \to R^l \times N$ es una sumersión $\mathcal{D}^r$ propia de la forma $f(t, x) = (t, f_t(x))$. En otras palabras, tenemos una familia $\mathcal{D}^r$ de sumersiones $\mathcal{D}^r$ $\{f_t : M \to N\}_{t \in R^l}$ y podemos olvidarnos de g. Procederemos por inducción sobre l.

Consideremos en primer lugar el caso $l = 1$. Por el Teorema 6.2.3 existe una estratificación $\mathcal{D}^r$ finita $\{S_i\}$ de R tal que $f_{[S_i]}$ es $\mathcal{D}^r$ trivial para cada i. Podemos suponer que los S_i son o bien intervalos abiertos o bien conjuntos formados por un único elemento, y por el Lema 5.2.1 podemos también reemplazar estos últimos por intervalos abiertos. De esta forma tenemos trivializaciones de la familia f sobre un recubrimiento de R por intervalos abiertos. A continuación debemos pegar estas trivializaciones.

Por ejemplo, vamos a pegar una trivialización sobre el intervalo $(0, 2)$ con una trivialización sobre $(-1, 1)$, concretamente

$$\begin{array}{ccc} (-1,1) \times M & \xrightarrow{\overline{\zeta_1}} & (-1,1) \times M \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id} \times f'_1} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ (-1,1) \times N & \xrightarrow{\overline{\eta_1}} & (-1,1) \times N, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (0,2) \times M & \xrightarrow{\overline{\zeta_2}} & (0,2) \times M \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id} \times f'_2} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ (0,2) \times N & \xrightarrow{\overline{\eta_2}} & (0,2) \times N, \end{array}$$

donde f'_1, $f'_2 : M \to N$ son sumersiónes $\mathcal{D}^r$ propias, $\overline{\zeta_i}$ es un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ de la forma $\overline{\zeta_i}(t, x) = (t, \zeta_i(t, x))$ y $\overline{\eta_i}$ es un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ de la forma $\overline{\eta_i}(t, x) = (t, \eta_i(t, x))$ para $i = 1, 2$.

Consideremos el punto $t_0 = 1/2$. Entonces

$$\eta_{1,t_0} \circ f'_1 \circ (\zeta_{1,t_0})^{-1} = f_{t_0} = \eta_{2,t_0} \circ f'_2 \circ (\zeta_{2,t_0})^{-1},$$

por lo que

$$f'_2 = (\eta_{2,t_0})^{-1} \circ \eta_{1,t_0} \circ f'_1 \circ (\zeta_{1,t_0})^{-1} \circ \zeta_{2,t_0}.$$

Entonces si reemplazamos $\overline{\zeta_2}$ por $\overline{\zeta_2}\circ(\mathrm{Id}\times[(\zeta_{2,t_0})^{-1}\circ\zeta_{1,t_0}])$ y $\overline{\eta_2}$ por $\overline{\eta_2}\circ(\mathrm{Id}\times[(\eta_{2,t_0})^{-1}\circ\eta_{1,t_0}])$, podemos suponer que $f'_1 = f'_2$. Escribiremos f' en vez de f'_i, $i = 1, 2$.

Sobre el intervalo $(0,1)$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
(0,1)\times M & \xrightarrow{\overline{\zeta_1}} & (0,1)\times M & \xleftarrow{\overline{\zeta_2}} & (0,1)\times M \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\times f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\times f'} \\
(0,1)\times N & \xrightarrow{\overline{\eta_1}} & (0,1)\times N & \xleftarrow{\overline{\eta_2}} & (0,1)\times N,
\end{array}$$

por lo que $(\eta_1^{-1}\eta_2)_t f' = f'(\zeta_1^{-1}\zeta_2)_t$.

Consideremos la función $\mathcal{D}^1$ $u^* : R \to R$, definida por

$$u^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < t \le 3/8 \\ 2((t-\frac{3}{8})^2 + \frac{1}{4}) & 3/8 \le t \le 5/8 \\ t & 5/4 \le t < 1. \end{cases}$$

Por el Teorema de aproximación, podemos aproximar u^* por una función $\mathcal{D}^r$ u tal que $0 < u < 1$ sobre $(0,1)$, $u(t) = 1/2$ si $0 < t \le 1/4$ y $u(t) = t$ si $3/4 \le t < 1$.

Definimos entonces los difeomorfismos $\mathcal{D}^r$ $\overline{\phi} = (t, \phi_t(x))$ como $\phi_t(x) = \zeta_{1,u(t)}^{-1} \circ \zeta_{2,u(t)}$ y $\overline{\psi} = (t, \psi_t(x))$ como $\psi_t(x) = \eta_{1,u(t)}^{-1} \circ \eta_{2,u(t)}$. Observamos que $\psi_t \circ f' = f' \circ \phi_t$ para cada $t \in (0,1)$.

Podemos entonces considerar los difeomorfismos $\mathcal{D}^r$ sobre $(0,1)$ $\overline{\zeta^*}_2 = \overline{\zeta}_1 \circ \overline{\phi}$ y $\overline{\eta^*}_2 = \overline{\eta}_1 \circ \overline{\psi}$. Estos nuevos difeomorfismos hacen que los correspondientes diagramas sean conmutativos. Sobre $(3/4, 1)$ tenemos que $\overline{\zeta^*}_2 = \overline{\zeta}_2$ y $\overline{\eta^*}_2 = \overline{\eta}_2$. Sobre $(0, 1/4)$, $\overline{\zeta^*}_2 = \overline{\zeta}_1 \circ (\mathrm{Id}\times\mu)$ y $\overline{\eta^*}_2 = \overline{\eta}_1 \circ (\mathrm{Id}\times\nu)$ donde $\mu = \zeta_{1,1/2}^{-1} \circ \zeta_{2,1/2} : M \to M$ y $\nu = \eta_{1,1/2}^{-1} \circ \eta_{2,1/2} : N \to N$ son difeomorfismos $\mathcal{D}^r$ tales que $f' \circ \mu = \nu \circ f'$. De esta forma podemos definir $\overline{\zeta^*}(t,x) = (t, \zeta_t^*(x))$ como

$$\zeta_t^* = \begin{cases} \zeta_{1,t}\circ\mu & -1 < t \le 1/4 \\ \zeta_{2,t}^* & 1/4 \le t \le 1 \\ \zeta_{2,t} & 3/4 \le t < 2, \end{cases}$$

y $\overline{\eta^*}(t,x) = (t, \eta_t^*(x))$ como

$$\eta_t^* = \begin{cases} \eta_{1,t}\circ\nu & -1 < t \le 1/4 \\ \eta_{2,t}^* & 1/4 \le t \le 1 \\ \eta_{2,t} & 3/4 \le t < 2. \end{cases}$$

Claramente son difeomorfismos $\mathcal{D}^r$ y el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
(-1,2)\times M & \xrightarrow{\overline{\zeta^*}} & (-1,2)\times M \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\times f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
(-1,2)\times N & \xrightarrow{\overline{\eta^*}} & (-1,2)\times N
\end{array}$$

es conmutativo. Obtenemos entonces una trivialización $\mathcal{D}^r$ global sobre $(-1, 2)$.

Si $l > 1$, podemos ver f como una familia parametrizada sobre R:

$$f : R \times (R^{l-1} \times M) \to R \times (R^{l-1} \times N)$$

$$(t, s, x) \mapsto (t, f_t(s, x)) = (t, s, f_{(t,x)}(x)).$$

Sea $\alpha \in \widetilde{R}$ y consideremos la fibra

$$f_\alpha : k(\alpha)^{l-1} \times M_{k(\alpha)} \to k(\alpha)^{l-1} \times N_{k(\alpha)}.$$

Por la hipótesis de inducción, existe una trivialización $\mathcal{D}^r$

$$\begin{array}{ccc} k(\alpha)^{l-1} \times M_{k(\alpha)} & \xrightarrow{\zeta^\alpha} & k(\alpha)^{l-1} \times M_{k(\alpha)} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\times\widetilde{f_\alpha}} & & \downarrow{\scriptstyle f_\alpha} \\ k(\alpha)^{l-1} \times N_{k(\alpha)} & \xrightarrow{\eta^\alpha} & k(\alpha)^{l-1} \times N_{k(\alpha)} \end{array}$$

para cierta sumersión $\mathcal{D}^r$ $\widetilde{f_\alpha} : M_{k(\alpha)} \to N_{k(\alpha)}$. Aplicando la Proposición 6.2.2 a la sumersión $\mathcal{D}^r$ propia $\widetilde{f_\alpha}$ obtenemos dos variedades $\mathcal{D}^r$ M' y N' definidas sobre R, dos difeomorfismos $\mathcal{D}^r$ $\zeta' : M'_{k(\alpha)} \to M_{k(\alpha)}$ y $\eta : N'_{k(\alpha)} \to N_{k(\alpha)}$ y una sumersión $\mathcal{D}^r$ propia $f' : M' \to N'$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M'_{k(\alpha)} & \xrightarrow{\zeta'} & M_{k(\alpha)} \\ \downarrow{\scriptstyle f'_{k(\alpha)}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{f_\alpha}} \\ N'_{k(\alpha)} & \xrightarrow{\eta'} & N_{k(\alpha)}. \end{array}$$

Las variedades $M'_{k(\alpha)}$ y $M_{k(\alpha)}$ son $\mathcal{D}^r$ difeomorfas, luego, por el Lema 5.1.11, existe un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $\zeta : M' \to M$ definido sobre R; de forma similar, tenemos un difeomorfismo $\mathcal{D}^r$ $\eta : N' \to N$ definido sobre R. Así, reemplazando ζ^α por $\zeta^\alpha \circ (\mathrm{Id} \times \zeta') \circ (\mathrm{Id} \times \zeta^{-1})_{k(\alpha)}$, η^α por $\eta^\alpha \circ (\mathrm{Id} \times \eta') \circ (\mathrm{Id} \times \eta^{-1})_{k(\alpha)}$, f' por $f' = \eta \circ f' \circ \zeta^{-1} : M \to N$ y $\widetilde{f_\alpha}$ por$f'_{k(\alpha)}$, poremos suponer que tenemos una trivialización de la forma

$$\begin{array}{ccc} k(\alpha)^{l-1} \times M_{k(\alpha)} & \xrightarrow{\zeta^\alpha} & k(\alpha)^{l-1} \times M_{k(\alpha)} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\times f'_{k(\alpha)}} & & \downarrow{\scriptstyle f_\alpha} \\ k(\alpha)^{l-1} \times N_{k(\alpha)} & \xrightarrow{\eta^\alpha} & k(\alpha)^{l-1} \times N_{k(\alpha)}. \end{array}$$

Esto implica (por la Proposición 6.1.1) que existe una trivialización $\mathcal{D}^r$

$$\begin{array}{ccc} S \times R^{l-1} \times M & \xrightarrow{\zeta^S} & S \times R^{l-1} \times M \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\times\mathrm{Id}\times f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S \times R^{l-1} \times N & \xrightarrow{\eta^S} & S \times R^{l-1} \times N \end{array}$$

donde S es un subconjunto definible de R con $S \in \alpha$. Por la compacidad del espectro definible tenemos una partición finita $R = \bigcup S_i$ tal que sobre cada $S_i \times R^{l-1}$ tenemos una trivialización $\mathcal{D}^r$ como arriba. Como antes, podemos suponer que los S_i son intervalos abiertos o conjuntos formados por un único punto. En el caso $S_i = \{a\}$, para cierto $a \in R$, por la hipótesis de inducción, f es $\mathcal{D}^r$ trivial sobre $\{a\} \times R^{l-1}$ y, por el Lema 5.2.1, podemos encontrar una trivialización $\mathcal{D}^r$ sobre un entorno abierto de $\{a\} \times R^{l-1}$. En otras palabras, podemos encontrar una función $\mathcal{D}^r$ positiva $\delta : R^{l-1} \to R$ de forma que f es $\mathcal{D}^r$ trivial sobre la banda

$$(a_i - \delta, a_i + \delta) \times R^{l-1} \times := \{(t, x) \in R \times R^{l-1} : |t - a_i| < \delta(x)\}.$$

Como antes, tenemos que pegar estas trivializaciones y lo hacemos con un argumento análogo. Por ejemplo, vamos a pegar la trivialización sobre $(0, 1) \times R^{l-1}$

$$\begin{array}{ccc} (0,1) \times R^{l-1} \times M & \xrightarrow{\zeta_1} & (0,1) \times R^{l-1} \times M \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id} \times \mathrm{Id} \times f_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ (0,1) \times R^{l-1} \times N & \xrightarrow{\eta_1} & (0,1) \times R^{l-1} \times N \end{array}$$

y la trivialización sobre $(-\delta, \delta) \times R^{l-1}$,

$$\begin{array}{ccc} (-\delta,\delta) \times R^{l-1} \times M & \xrightarrow{\zeta_2} & (-\delta,\delta) \times R^{l-1} \times M \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id} \times \mathrm{Id} \times f_2} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ (-\delta,\delta) \times R^{l-1} \times N & \xrightarrow{\eta_2} & (-\delta,\delta) \times R^{l-1} \times N \end{array}$$

para cierta función $\mathcal{D}^r$ $\delta : R^{l-1} \to R$, $0 < \delta < 1$.

Podemos suponer como en el caso $l = 1$ que $f_1 = f_2 = f' : M \to N$. Comenzamos considerando los subconjuntos abiertos definibles $U_1 = (0, \frac{3}{4}\delta) \times R^{l-1}$ y $U_2 = (\frac{1}{4}\delta, \delta) \times R^{l-1}$ de $(0, \delta) \times R^{l-1}$. Tomamos entonces una partición de la unidad $\mathcal{D}^r$ de $(0, \delta) \times R^{l-1}$, $\{h, 1 - h\}$ subordinada al recubrimiento $\{U_1, U_2\}$, y consideramos la aplicación definible $u^* : (0, \delta) \times R^{l-1} \to (0, \delta) \times R^{l-1}$ dada por

- $u^*(t, s) = (\frac{3}{4}\delta((1 - h(t, s))s), (1 - h(t, s))s)$ para $t \le \frac{3}{4}\delta(s)$
- $u^*(t, s) = (t, s)$ para $t \ge \frac{3}{4}\delta(s)$.

Observamos que para $0 < t < \frac{1}{4}\delta(s)$, $h(t, s) = 1$ y por tanto $u^*(t, s) = (\frac{3}{4}\delta(0), 0)$ es constante. Es más, para $t = \frac{3}{4}\delta(s)$ tenemos que $h(t, s) = 0$ y por tanto $u^*(t, s) = (\frac{3}{4}\delta(s), s) = (t, s)$, así que de hecho u^* es continua. Por el Teorema de Aproximación (y su demostración), podemos aproximar u^* por una aplicación $\mathcal{D}^r$ $u : (0, \delta) \times R^{l-1} \to (0, \delta) \times R^{l-1}$ tal que

- $u(t, s) = (\frac{3}{4}\delta(0), 0)$ para $t \le \frac{1}{4}\delta(s)$
- $u(t, s) = (t, s)$ para $t \ge \frac{3}{4}\delta(s)$.

Sobre $(0, \delta)$ tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} (0,\delta) \times R^{l-1} \times M & \xrightarrow{\overline{\zeta}_1} & (0,\delta) \times R^{l-1} \times M & \xleftarrow{\overline{\zeta}_2} & (0,\delta) \times R^{l-1} \times M \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id} \times \mathrm{Id} \times f'} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id} \times \mathrm{Id} \times f'} \\ (0,\delta) \times R^{l-1} \times N & \xrightarrow{\overline{\eta}_1} & (0,\delta) \times R^{l-1} \times N & \xleftarrow{\overline{\eta}_2} & (0,\delta) \times R^{l-1} \times N, \end{array}$$

por lo que $(\eta_1^{-1}\eta_2)_t f' = f'(\zeta_1^{-1}\zeta_2)_t$.

De una forma parecida al caso anterior, definimos los difeomorfismos $\mathcal{D}^r$ $\phi_{(t,s)} = (\zeta_1^{-1} \circ \zeta_2)_{u(t,s)}$ y $\psi_{(t,s)} = (\eta_1^{-1} \circ \eta_2)_{u(t,s)}$. Observemos que $\psi \circ f' = f' \circ \phi$. Consideremos ahora los difeomorfismos $\mathcal{D}^r$ $\zeta_2^* = \zeta_1 \circ \phi$ y $\eta_2^* = \eta_1 \circ \psi$. Estos nuevos difeomorfismos hacen que los correspondientes diagramas conmuten. Sobre $\{t > \frac{3}{4}\delta(s)\}$ tenemos que $\zeta_2^* = \zeta_2$ y $\eta_2^* = \eta_2$. Sobre $\{t < \frac{1}{4}\delta(s)\}$, $\zeta_2^* = \zeta_1 \circ \mu$ donde $\mu = \zeta^{-1}_{1,(\frac{1}{2}\delta(0),0)} \circ \zeta_{2,(\frac{1}{2}\delta(0),0)} : M \to M$ y de forma similar $\eta_2^* = \eta_1 \circ \nu$ donde $\nu = \eta^{-1}_{1,(\frac{1}{2}\delta(0),0)} \circ \eta_{2,(\frac{1}{2}\delta(0),0)} : N \to N$. Por tanto podemos definir la siguiente trivialización $\mathcal{D}^r$ global sobre $(-1,\delta) \times R^{l-1}$:

$$\begin{array}{ccc}
(-1,\delta) \times R^{l-1} \times M & \xrightarrow{\widetilde{\zeta^*}} & (-1,\delta) \times R^{l-1} \times M \\
\Big\downarrow \scriptstyle{\mathrm{Id}\times f'} & & \Big\downarrow \scriptstyle{f} \\
(-1,\delta) \times R^{l-1} \times N & \xrightarrow{\widetilde{\eta^*}} & (-1,\delta) \times R^{l-1} \times N.
\end{array}$$

Con esto termina la demostración. □

Capítulo 7

Conjuntos de bifurcación de funciones definibles en una estructura o-minimal

Como aplicación de todos los resultados vistos en los capítulos anteriores, contestamos aquí a una pregunta de Loi y Zaharia en [12]. En la primera sección describimos la situación sobre los números reales para funciones diferenciables no necesariamente definibles, y en la segunda probamos el resultado correspondiente en el caso definible sobre cuerpos reales arbitrarios.

7.1 Conjuntos de bifurcación

Estudiemos en primer lugar el caso general para funciones diferenciables (no necesariamente definibles) sobre $\mathbb{R}$.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y fijemos una función de clase C^1 $\rho : U \to \mathbb{R}$ que verifica

$$\text{para todo } r \in \mathbb{R}, \text{ la “bola” } B_r^\rho = \{u \in U : \rho(u) \leq r\} \text{ es compacta.} \tag{7.1}$$

Denotemos por $S_r^\rho = \{x \in U : \rho(x) = r\}$ la correspondiente “esfera”. Para una función C^1 $g : U \to \mathbb{R}$, definimos

$$M(g;\rho) = \{x \in U : \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \text{grad}g(x) = \lambda\ \text{grad}\rho(x)\}.$$

Para una sucesión $\{y^k\} \subset M(g;\rho)$ consideramos las condiciones

$$\lim_{k\to\infty} \rho(y^k) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} g(y^k) = c. \tag{7.2}$$

Denotamos por Σ_g el conjunto de valores críticos de g, y escribimos

$$S_{g;\rho} = \{c \in \mathbb{R} : \text{ existe una sucesión } \{y^k\} \subset M(g;\rho) \text{ que cumple 7.2}\}.$$

Tenemos entonces el siguiente teorema ([12]):

Teorema 7.1.1 *Sea $U \subset R^n$ un subconjunto abierto y sean $g, \rho : U \to R$ funciones de clase C^{p+1} para algún $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Supongamos además que Σ_ρ está acotado. Entonces para cualquier intervalo abierto $J \subset g(U) \backslash (\Sigma_g \cup S_{g;\rho})$, la restricción*

$$g : g^{-1}(J) \to J$$

una fibración C^p trivial.

Un punto $y \in \Sigma_g \cup S_{g;\rho}$, es decir, un punto en el que g no es una fibración trivial en un entorno de y, se llama un *valor atípico* C^p de g, y el conjunto de los valores atípicos se llama el *conjunto de bifurcación* de g.

7.2 El caso definible

Sea $\mathcal{S}$ una estructura o-minimal que expande un cuerpo real cerrado R. Consideramos las notaciones y definiciones de las sección anterior, pero sustituyendo $\mathbb{R}$ por R y tomando todas las funciones de clase $\mathcal{D}^r$ para algún $r \in \mathbb{N}$. Damos entonces una versión definible del resultado anterior, cuya validez plantean Loi y Zaharia.

Teorema 7.2.1 *Sea $U \subset R^n$ un subconjunto definible abierto y sean $g, \rho : U \to R$ funciones de clase $\mathcal{D}^r$ para algún $r > 0$. Entonces para cualquier intervalo abierto $J \subset g(U) \backslash (\Sigma_g \cup S_{g;\rho})$, la restricción*

$$g : g^{-1}(J) \to J$$

es $\mathcal{D}^r$ trivial.

Demostración. En [12, Th. 1.5] se demuestra que los conjuntos Σ_g y $S_{g;\rho}$ son finitos. Sea J un intervalo abierto como arriba. Para todo $t \in J$, $U_t = g^{-1}(t)$ es una variedad $\mathcal{D}^r$. Por tanto, para todo $\alpha \in \widetilde{J}$, U_α es una variedad $\mathcal{D}^r$. Entonces, por el mismo argumento utilizado anteriormente en 5.1.10, tenemos que g es $\mathcal{D}^r$ trivial fuera de un número finito de valores $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

Tomemos un valor $a = a_i$. Como $a \notin S_{g,\rho}$, podemos encontrar $\epsilon > 0$ y $K > 0$ suficientemente grande tal que

$$(g, \rho) : g^{-1}(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap \rho^{-1}(K, +\infty) \to (a - \epsilon, a + \epsilon) \times (K, +\infty)$$

es una sumersión definible propia. Por tanto es $\mathcal{D}^r$ trivial, es decir, existe un difeomorfismo definible

$$\Theta = (\Delta, g, \rho) : g^{-1}(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap \rho^{-1}(K, +\infty) \longrightarrow (g^{-1}(a) \cap \rho^{-1}(K + 1)) \times (a - \epsilon, a + \epsilon) \times (K, +\infty).$$

Por otro lado consideremos la variedad definible con borde

$$g^{-1}(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap \rho^{-1}(-\infty, K+2]$$

y la función definible

$$g : g^{-1}(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap \rho^{-1}(-\infty, K+2] \to (a-\epsilon, a+\epsilon),$$

que es una sumersión propia que es también una sumersión restringida al borde (de nuevo porque $a \notin S_{g,\rho}$). Entonces, por el Teorema 5.5.1, es también $\mathcal{D}^r$ trivial, esto es, existe un difeomorfismo definible

$$h = (h_0, g) : g^{-1}(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap \rho^{-1}(-\infty, K+2] \to (g^{-1}(a) \cap \rho^{-1}(-\infty, K+2]) \times (a-\epsilon, a+\epsilon).$$

Podemos suponer que $h_{0|g^{-1}(a)} = \mathrm{Id}$ y $\rho \circ h_0 = \rho$ sobre un entorno abierto definible de $\rho^{-1}(K+2)$.

Queremos pegar estas dos trivializaciones para obtener una trivialización definible sobre $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Consideremos

$$\Theta_0 = (\Delta, \rho)_{|g^{-1}(a)} : g^{-1}(a) \cap \rho^{-1}(K, +\infty) \to Q \times (K, +\infty)$$

donde $Q = g^{-1}(a) \cap \rho^{-1}(K+1)$. Con estos datos podemos construir

$$Q \times (a-\epsilon, a+\epsilon) \times (K, K+2) \to Q \times (a-\epsilon, a+\epsilon) \times (K, K+2)$$

$$(\xi, y, t) \mapsto (\tau_{y,t}(\xi), y, t)$$

definida por $\tau_{y,t}(\xi) = \Delta(h_0(\Theta^{-1}(\xi, y, t)))$. Observamos que $\tau_{a,t} = \mathrm{Id}$ sobre Q.

Sea $\phi : R \to R$ una función definible, $0 \leq \phi \leq 1$, tal que $\phi \equiv 0$ sobre $(-\infty, K]$ y $\phi \equiv 1$ sobre $[K+2, +\infty)$. Entonces definimos

$$\gamma_0(x) = {\Theta_0}^{-1}(\tau_{\phi(t)a+(1-\phi(t))y,t}(\Delta(x)), y)$$

para $x \in g^{-1}(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap \rho^{-1}(K, K+2]$, donde $y = g(x)$ y $t = \rho(x)$.

Si $\phi = 1$, entonces $\gamma_0(x) = {\Theta_0}^{-1}(\Delta(x), \rho(x))$, y si $\phi = 0$

$$\begin{aligned}\gamma_0(x) &= {\Theta_0}^{-1}(\tau_{y,t}(\Delta(x)), t) \\ &= {\Theta_0}^{-1}(\Delta h_0(\Theta^{-1}(\Delta(x), g(x), \rho(x))), \rho(x)) \\ &= {\Theta_0}^{-1}(\Delta h_0(x), \rho(h_0(x))) = h_0(x).\end{aligned}$$

Por tanto, podemos extender γ_0 a $g^{-1}(a-\epsilon, a+\epsilon)$ mediante

$$\gamma_0(x) = \begin{cases} {\Theta_0}^{-1}(\Delta(x), \rho(x)) & \text{si } \rho(x) \in [K+2, +\infty) \\ h_0(x) & \text{si } \rho(x) \in (-\infty, K]. \end{cases}$$

Entonces $\gamma = (\gamma_0, g)$ es una trivialización de g sobre $(a-\epsilon, a+\epsilon)$.

De esta forma, podemos recubrir J por un número finito de abiertos tales que g es $\mathcal{D}^r$ trivial sobre cada uno de ellos. Para finalizar, debemos pegar estas trivializaciones. Pero para ello basta repetir el argumento que aparece en la demostración de 5.1.10.

□

Bibliografía

[1] J.L. Bell, A.R. Slomson: *Models and ultraproducts: an introduction*, North Holland, 1969.

[2] J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy: *Real Algebraic Geometry*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 36, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1998.

[3] G. W. Brumfiel: *Partially ordered rings and semi-algebraic geometry*, Cambridge Univ. Press (1979).

[4] M. Coste: *Topological types of fewnomials*, Singularities Symposium - Lojasiewicz 70, Banach Center Pub. 44, 81-92 (1998).

[5] M. Coste: *An introduction to o-minimal geometry*, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Instituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (2000).

[6] M. Coste, M. Shiota: *Nash triviality in families of Nash manifolds*, Invent. Math. 108 (1992), 349-368.

[7] M. Coste, M. Shiota: *Thom's first isotopy lemma: a semialgebraic version, with uniform bound*, in Real Analytic and Algebraic Geometry (Ed. F.Broglia, M. Galbiati, A. Tognoli), Walter de Gruyter, Berlin 1995, 83-101.

[8] L. van den Dries: *Tame topology and o-minimal structures*, London Math. Soc. Lecture Note 248. Cambridge Univ. Press (1998).

[9] L. van den Dries, C. Miller: *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84**, 497-540 (1996).

[10] A. Grothendieck: *Esquisse d'un Programme*, Research Proposal (no publicado) (1984).

[11] R. Hardt: *Semi-algebraic local triviality in semi-algebraic mappings*, Amer. J. Math., 102, 291-302 (1980).

[12] T. L. Loi, A. Zaharia: *Bifurcation sets of functions definible in o-minimal structures*, Illinois Journal of Mathematics, Vol. 42, Num. 3, Fall 1998.

[13] Y. Peterzil, C. Steinhorn: *Definable compactness and definable subgroups of o-minimal groups*, Journal of the London Math. Soc., 189, vol. 59, part 3 (1999).

[14] A. Pillay: *On groups and fields definable on o-minimal structures*, Journal of Pure and Applied Algebra 53 (1988), pp. 239-255.

[15] A. Prestel: *Model Theory for the Real Algebraic Geometer*, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Instituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (1998).

[16] R. Ramanakoraisina: *Complexité des fonctions de Nash*, Commun. Algebra 17 (n. 6), 1395-1406 (1989).

[17] M. Shiota: *Nash Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics 1269, Springer-Verlag, Berlin (1987).

[18] M. Shiota: *Geometry of Subanalytic and Semialgebraic Sets*, Progress in Mathematics, vol. 150, Birkhäuser, Boston, 1997.

[19] A. J. Wilkie: *Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function*, J. Amer. Math. Soc. 9, 1051-1094 (1996).