PÉDRO ABELLANAS

MATEMATICA Y EXPERIMENTACION

A T L A N T I D A
REVISTA DEL PENSAMIENTO ACTUAL

Vol. I, Núm. 2 Marzo-Abril, 1963

I

Introducción

La matemática interviene de un modo cada vez más directo e intenso en las más diversas especulaciones intelectuales y en las más variadas técnicas actuales. Como consecuencia de ello, aumenta cada día la necesidad de progreso de esta ciencia en todas direcciones. Las demandas provienen de problemas concretos de tipo técnico, económico o social. Esto plantea un conjunto de cuestiones que estimamos de interés analizar, tales como las siguientes: ¿Por qué es útil la matemática para la resolución de tan variados problemas? ¿Es tarea propia del matemático ocuparse de cuestiones alejadas de su propia ciencia? ¿No será perjudicial para la matemática, y como consecuencia para las otras ciencias y técnicas a las que sirve, el acoger dentro de sus dominios cuestiones tan heterogéneas? ¿Debe existir alguna colaboración entre la investigación matemática y la de tipo experimental? ¿Cómo deben de influir todas estas cuestiones en la enseñanza de la matemática en sus diversos grados? El poder formar juicio sobre todas estas cuestiones, y otras de análogo interés, exige tener una idea clara de en qué consiste el quehacer del matemático, lo que ofrece ciertas dificultades por hallarse relacionado con el concepto de matemática y haber sufrido este último sustanciales variaciones en el último siglo.

II

La evolución del concepto de matemática

Es bien conocido que en la matemática prehelénica, especialmente en la cultura babilónica, se llegaron a manejar los números enteros y racionales positivos mediante el uso de un número superabundante de reglas de cálculo, llegándose a la resolución de tipos particulares de ecuaciones de primero y segundo grado. Esta matemática se caracteriza por el carácter empírico de todos sus resultados, que en ningún momento se trata de justificar, lo que indica que la matemática era, durante esta época, una ciencia experimental, carácter que queda bien patente en los métodos empleados para la medida de magnitudes. El paso de esta matemática a la matemática griega ha sido poco estudiado; posiblemente, por no disponerse de una información documental completa. No obstante, la comparación de los conocimientos matemáticos babilónicos y egipcios con la matemática griega y, de modo particular, con los *Elementos* de Euclides, permite extraer importantes consecuencias, especialmente en lo que al método de trabajo del matemático se refiere. Todos los libros de los *Elementos* comienzan por un conjunto de definiciones y, en el primero de ellos, siguen un grupo de postulados de carácter matemático unos y lógicos otros. No se tiene noticia de que con anterioridad a la matemática griega se haya sentido la necesidad de definir los conceptos que se empleaban, y esta es la diferencia esencial entre ambas. Analicemos brevemente esta afirmación. Se puede tener el concepto de ángulo recto habiendo visto varios ángulos rectos en cuerpos materiales. Quien posea un concepto de ángulo recto así formado puede entender la siguiente proposición: los bordes de esta cuartilla forman ángulos rectos. Este modo de formación de conceptos por observación directa de objetos o fenómenos permite entender ciertas proposiciones e incluso establecer ciertas relaciones entre los conceptos así formados. Sin embargo, quien solo posea el anterior concepto de ángulo recto no podrá demostrar que la mediana relativa a la base de un triángulo isósceles es también altura. Esto indica que el mecanismo de la lógica únicamente puede actuar cuando los conceptos se encuentren convenientemente elaborados. Análogamente, un profano en Derecho puede entender la proposición: "A y B han firmado un contrato", pero sobre tal concepto no se podría construir una teoría jurídica consistente sobre los contratos. Pues bien, los conceptos que se usaban en la matemática prehelénica se formaban por observación directa, por ello no se sentía la necesidad de definirlos y, como consecuencia, tampoco se podía usar un método deductivo. Un concepto es siempre una clase de seres o de entes de razón. Esta clase se puede formar por observación directa y conservación en la memoria de los objetos observados; a la formación de conceptos de ese modo la designaremos con el nombre de formación inmediata de los conceptos. Pero, también se puede definir la clase correspondiente a un concepto mediante una (o varias) propiedades características de los elementos de la clase; esto es, una propiedad que sea unificada por todos los elementos de la clase y solo por ellos. Este segundo modo de definir los conceptos lo designaremos con el nombre de abstracto. Podemos ahora precisar que la diferencia esencial entre la matemática prehelénica y la matemática griega se halla en que en aquella se usaba la definición inmediata de los conceptos, mientras que en ésta se emplea la definición abstracta. Como consecuencia de ello, a la matemática griega se le puede aplicar el método lógico, que no podría utilizarse en la matemática babilónica. Parece, por otra parte, natural suponer que se pasara gradualmente de un modo al otro de la definición de los conceptos, y que simultáneamente con esta evolución del proceso de formación de conceptos se fueron hallando las leyes de la lógica que permiten relacionar las proposiciones relativas a conceptos abstractos. Estas leyes lógicas permitirían ordenar las proposiciones y conducirían a la necesidad de reconocer el carácter de proposiciones primitivas, o postulados, de algunas de ellas. El paso de la definición inmediata a la definición abstracta de los conceptos ofrece grandes dificultades; por ello un buen número de las definiciones abstractas del primer libro de Euclides son todavía defectuosas.

En virtud de las observaciones anteriores, se puede decir que la matemática comenzó siendo una ciencia experimental. Cuando el número de proposiciones conocidas llegó a ser suficientemente grande se pudieron observar relaciones entre resultados de distinto origen. Este análisis de conocimientos previos permitiría llegar a la obtención de las propiedades características que conducirían a la definición abstracta de los conceptos y a la aplicación a los mismos del mecanismo lógico que se habría ido desarrollando simultáneamente. El resultado final de este proceso sería la monumental obra de los *Elementos* de Euclides. Se presenta esta obra, contemplada desde este punto de vista, como una ordenación genial de resultados previamente conocidos por vía experimental. Como consecuencia de ello, las proposiciones de la matemática griega expresaban de modo sistemático las propiedades fundamentales que se habían podido observar en el Universo con los elementales métodos de observación disponibles. Esta es la razón de que la matemática griega haya podido servir de soporte a las ciencias experimentales hasta que los instrumentos de observación y de medida no alcanzaron un grado de perfeccionamiento sustancial respecto de los empleados en aquella época.

La matemática griega volvió a adquirir vitalidad a partir del Renacimiento. Afortunadamente, el eclipse sufrido por el pensamiento científico durante los siglos que van de una época a otra permitió que los algebristas italianos del siglo XVI desarrollaran de un modo directo, y sin conexión con las ideas griegas, el estudio algorítmico del álgebra, que había quedado fuera del cuadro de ideas propias del pensamiento griego, lo que vivificó los métodos geométricos clásicos. Durante más de tres siglos pudieron acoplarse todos los conocimientos matemáticos y experimentales que se iban obteniendo a la estructura formada por la matemática griega y la que, sobre ella, se iba construyendo. Esto tuvo como consecunecia que se llegase a pensar que el espacio estudiado en los *Elementos* fuese una transcripción fiel del Universo. Esta creencia estuvo vigente hasta la aparición de los espacios no euclídeos en la primera mitad del siglo pasado. A partir de este momento fueron perdiendo las proposiciones de la matemática el carácter de verdades absolutas que habían tenido hasta entonces y surgió la necesidad de ocuparse en su fundamentación. La fundamentación de la matemática se polarizó en dos direcciones principales, correspondientes a las escuelas intuicionista y formalista. La escuela intuicionista partía de la afirmación de que los conceptos matemáticos se presentaban directamente a la mente humana, que era capaz de expresarlos de modo unívoco. A partir de este principio se vieron obligados los intuicionistas a no admitir el axioma lógico del *tertium non datur* y a emplear únicamente demostraciones constructivas, con lo que dejaban fuera del edificio matemático una gran parte del mismo. La escuela formalista, por su parte, partía del principio de que la única justificación posible de una teoría matemática consistía en no ser contradictoria. Esto implicaba la necesidad de demostrar la no contradicción de una teoría como cuestión previa a su desarrollo ulterior. Hilbert comenzó por ocuparse del problema de la no contradicción de la aritmética. Para ello, construyó una formalización de esta teoría empleando un número limite de signos y de leyes para manipular con ellos. Se trataba de probar que dentro de un tal sistema formal no podían obtenerse una proposición y su contraria. A pesar de los esfuerzos realizados por Hilbert y sus discípulos en este sentido, no se consiguió tal demostración. Fue Gödel [1] quien resolvió negativamente esta cuestión demostrando la imposibilidad de probar la no contradicción, mediante procesos finitos, en un sistema formalizado. Se ha continuado estudiando estos problemas prescindiendo de la condición de finitud del proceso, pero el teorema de Gödel había inutilizado la idea de Hilbert de buscar como punto de apoyo de la matemática la consistencia *a priori* de los sistemas formales.

A partir del siglo pasado, la matemática ha ido cediendo posiciones. De ser un conjunto de verdades desde las cuales se podía llegar a explicar todo el Universo, había pasado a ser un conjunto de verdades que se presentaban de modo unívoco e igualmente claro a cada una de las mentes humanas, o bien, un sistema de proposiciones y de leyes lógicas que las relacionaban dentro del cual no podía presentarse la contradicción, hasta llegar, finalmente, a ser un sistema de proposiciones y de reglas para pasar de una a otra en el que no se está seguro, *a priori*, de no llegar a obtener en algún momento una contradicción. Es curioso, sin embargo, que durante este último siglo, en el que el concepto vigente de matemática ha sufrido golpes tan duros, el crecimiento de la matemática ha adquirido proporciones, y se ha efectuado con una rapidez, que no admite comparación con el desarrollo en épocas anteriores. Es igualmente notable que sus métodos se han introducido de modo cada vez más profundo y esencial en ciencias que habían permanecido alejadas de ella; que múltiples problemas de la vida ordinaria requieren el empleo de métodos matemáticos y que, finalmente, la matemática actual presenta analogías sorprendentes con la matemática griega, hasta el punto de que ahora se comprenden mucho mejor las ideas de esta matemática de lo que lo habían sido hasta nuestro tiempo.

III

MATEMÁTICA Y EXPERIMENTACIÓN

Vamos a tomar un ejemplo actual que muestra el origen de una nueva teoría matemática. Los físicos empleaban la llamada función de Dirac para la explicación de algunos fenómenos del átomo. Lo que

1. K. GÖDEL, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verdwandter Systeme.* "Monatsch. für Math. und Phys." 38 (1931) 173-198.

ellos llamaban función no correspondía a ninguno de los conceptos matemáticos existentes, por lo que ningún matemático se hubiese permitido operar con dicha función como lo hacían los físicos. Pues bien, dicha función es actualmente un caso particular de un nuevo concepto matemático que ha dado lugar a la teoría de distribuciones, que constituye un valioso capítulo de la matemática. Esto confirma que el método matemático actual, lo mismo que sucedió en la matemática griega y en todo el desarrollo de la misma a partir del Renacimiento, consiste en un análisis de resultados conocidos, los cuales pueden proceder de la propia matemática o de otras ciencias, mediante el cual se extraen las propiedades características de los conceptos que en ellos intervienen, así como sus relaciones fundamentales, lo que permite aplicarles los métodos deductivos mediante los cuales quedan ordenados los conocimientos y aclaradas sus relaciones mutuas. Con este proceso se consigue una ordenación de los conocimientos que permite averiguar más fácilmente, mediante el empleo de un método, sus mutuas relaciones. Además, proporciona una economía de pensamiento que permite, con menor esfuerzo, dominar un conjunto de conocimientos que se presentaban dispersos, o de teorías ya existentes. Como este proceso puede repetirse, se va alcanzando mediante él la estructura arborescente del edificio matemático.

Como queda dicho, en el trabajo del matemático existe un primer proceso fundamental, que consiste en un análisis de conceptos previos, cuya procedencia puede ser muy variada: unas veces se trata de conceptos experimentales, otras de conceptos matemáticos ya elaborados, o, finalmente, de casos particulares previamente estudiados. Este análisis permite extraer del material estudiado un conjunto de propiedades características que permiten definir nuevos conceptos, que comprenden como casos particulares a los anteriores, y enunciar las relaciones fundamentales entre los nuevos conceptos. Preparados los conceptos y sus primeras relaciones, se les puede aplicar el método deductivo para obtener nuevas relaciones. La investigación matemática puede realizarse, por tanto, a diversos niveles. Cuando trabaja sobre conceptos y relaciones obtenidos por experimentación u observación de fenómenos naturales, al resultado obtenido se le llama matemática aplicada. Cuando aquellos proceden de la propia matemática se dice que el producto es matemática pura. En el primer caso, la bondad de la teoría elaborada vendrá medida por el grado de concordancia de los resultados derivados de la misma con los fenómenos u observaciones de la Naturaleza que la han originado. En el segundo, por la capacidad de la nueva teoría de obtener como casos particulares las proposiciones de las teorías que la han engendrado, o, en el caso más modesto, por la posibilidad de resolver un problema que comprende a los problemas particulares que se habían estudiado. Según esto, la diferencia esencial entre un matemático puro y un matemático aplicado se halla en el nivel en que se efectúa un trabajo.

Hemos alcanzado con todo lo que antecede el concepto de matemática en una perspectiva actual. El origen de la matemática es la experimentación y observación de fenómenos naturales. En la fase experimental del conocimiento se presentan los conceptos de un modo inmediato, como consecuencia de la observación directa. Los conceptos inmediatos no están preparados para poderlos someter al mecanismo lógico. Es necesario elaborarlos para extraer de ellos sus propiedades características. Una vez definidos los conceptos por sus propiedades y relaciones fundamentales, se ha obtenido un sistema formal al que se puede aplicar el proceso lógico. Al resultado obtenido se le llama matemática. Este proceso se puede aplicar reiteradamente obteniéndose sucesivamente teorías cada vez más generales.

El paso de un concepto inmediato a un concepto abstracto ha costado siempre mucho esfuerzo a la humanidad y sigue presentando dificultades al individuo en todas las épocas. Quizá sea aleccionador el siguiente ejemplo. Uno de los mejores geómetras del siglo pasado, v. Staudt, escribía en el prólogo de su obra fundamental [2] lo siguiente: "En la representación de los puntos del espacio por ternas de números acontece que al aplicar el método algebraico a la resolución de un problema geométrico aparecen soluciones imaginarias y se pregunta uno: ¿dónde se hallan los puntos imaginarios?". Esta pregunta indica que la sustitución del concepto correspondiente a una imagen gráfica sobre el papel por una terna de números, que es el concepto abstracto correspondiente, no había sido aceptada plenamente. Pues bien, con objeto de prescindir del concepto abstracto de punto, Staudt elabora en la mencionada obra una teoría geométrica, perfectamente construida en la que prescinde de la representación de los puntos por números. Mediante ella consigue dar una definición abstracta de punto imaginario (pues, de otro modo, no hubiera podido desarrollar la teoría) y demuestra, sin advertirlo, que el concepto de punto imaginario por él elaborado, coincide, salvo en el lenguaje empleado, con la definición de punto mediante ternas de números complejos, con lo que, naturalmente, probó lo contrario de lo que se proponía, esto es, que la definición algebraica de punto era la definición abstracta adecuada. Situaciones análogas se advierten actualmente, por parte de algunos físicos, debido a que una parte de la física actual ha pasado a ser matemática y la parte que no lo es se ocupa de la experimentación sobre fenómenos que todavía no han podido dar lugar a conceptos abstractos adecuados y a la comprobación experimental de las teorías matemáticas ya construidas.

IV

La investigación y la matemática

Independientemente del concepto de matemática vigente en cada época, el quehacer del matemático ha sido siempre el mismo. Consta de una primera fase, creadora de conceptos y descubridora de relaciones, seguida de un proceso deductivo, en el que actúa la lógica. En la obra matemática terminada resalta el proceso deductivo, y queda oculto el creador, lo que ocasiona que el no matemático piense que únicamente aquel es el empleado, y que la matemática se reduce a una inacabable cadena de silogismos, siendo así que

2. V. Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Leipzig, 1848.

la lógica no tiene más misión que la puramente instrumental. No obstante, tampoco pueden considerarse los conceptos y proposiciones como pertenecientes a la matemática mientras no se han ordenado mediante un proceso lógico. El sistema lógico puede ser arbitrario; esto es, se puede emplear en la matemática cualquier lógica de las actualmente existentes o que se construya, lo único necesario es declarar al principio qué sistema lógico se emplea y atenerse a él en todo el desarrollo posterior. La justificación de una teoría matemática se halla en el origen experimental de sus conceptos, aun cuando, debido al reiterado proceso de abstracción, sea difícil reconocer esta procedencia en muchos casos. La validez de una teoría matemática exige su consistencia; esto es, que en ella no se haya presentado contradicción. Descartada la posibilidad de demostración de la consistencia *a pirori*, existe siempre la posibilidad de que en algún momento se presente una contradicción. Eso llevaría a un nuevo análisis de los conceptos y postulados de la teoría en que esto ocurriera, con objeto de descubrir el origen de aquella y perfeccionar estos de modo adecuado para evitarla. Así, por ejemplo, hasta finales del siglo pasado se desarrolló toda la matemática sin disponerse de un concepto abstracto bien elaborado de número real. En la demostración del teorema fundamental de la geometría proyectiva, supone Staudt, por ejemplo, que los puntos de una recta están bien ordenados; esto es, que cada punto pone un siguiente inmediato. Esta y otras muchas demostraciones tuvieron que rehacerse cuando se alcanzó el concepto actual de número real.

La investigación en la matemática es, por tanto, en su parte esencial, de la misma naturaleza que en cualquier otra ciencia: se va de lo particular a lo general mediante análisis de casos o teorías particulares. La diferencia entre la investigación matemática y la experimental está en que aquella requiere una formulación abstracta de los conceptos, que no es posible realizar mientras dichos conceptos no son suficientemente conocidos. La misión fundamental de la investigación experimental consiste en realizar las experiencias y observaciones necesarias para llegar a disponer de material suficiente para la caracterización y definición abstracta de los conceptos. Nos encontramos, por tanto, en el punto de unión de la investigación matemática con la experimental: la elaboración de conceptos abstractos. De aquí nace la necesidad de colaboración del matemático en equipos de trabajo de investigación, como ha podido comprobarse en los casos más recientes de investigación nuclear, misiles, electrónica, etcétera, en que ha sido necesaria la intervención del matemático en su verdadero aspecto científico creador, no como calculista, que es la misión que le podría asignar el profano en cuestiones científicas.

La investigación en la matemática aplicada no solo beneficia a la ciencia experimental, sino que, como resulta de todo el estudio que llevamos hecho, es vital para la propia matemática que, si no hundiese sus raíces en la experimentación, no pasaría de ser un simple juego de ajedrez, pero mucho más complicado. No obstante, si simultáneamente al trabajo en el campo de la matemática aplicada no se produjera un desarrollo armónico de la matemática pura, unificador de teorías, simplificador de resultados y constructor de esquemas, llegaría a producirse una situación de conocimientos desarticulados que conduciría a la aparición de una pléyade de especialistas incapaces de entenderse entre sí, con lo que se produciría un colapso en la investigación científica y en el progreso técnico, que constituyen los principales soportes para la subsistencia de la humanidad actual.

V

La enseñanza y la matemática

Hemos visto que la matemática constituye el último grado de elaboración del pensamiento científico y que, por ello, es indispensable en cualquier ciencia o en cualquier técnica medianamente desarrolladas. Como consecuencia de ello, el estudio de la matemática es insustituible en todos los grados de la enseñanza. Existen, por otro lado, dos hechos que creemos haber analizado suficientemente en este estudio: por un lado la variación que ha sufrido el concepto de matemática, por otro el extraordinario volumen que ha alcanzado el edificio matemático actual y sus aplicaciones. Todo ello conduce a una revisión de la enseñanza de la matemática en todos los grados.

La enseñanza de la matemática en el nivel primario se halla centrada en la técnica de cálculo con números naturales y fraccionarios. La poca geometría que se estudia en este grado de la enseñanza se reduce al cálculo de algunas áreas y volúmenes mezclados con unos pocos conceptos mal definidos. Es patente que el odio a la matemática de muchos escolares tiene su origen en este sistema de enseñanza de tipo exclusivamente memorístico. El niño, en su primera edad escolar, posee una memoria mucho más desarrollada que su inteligencia y debe aprovecharse este hecho, pero debe hacerse racionalmente. El niño necesita retener en su memoria muchos conocimientos, pero la forma de conseguir esto debe ser adecuada. Como hemos visto al principio de este trabajo, la matemática comenzó siendo una ciencia exclusivamente experimental; por ello es aconsejable proceder de modo análogo en su primera enseñanza. En consecuencia, convendría ir presentándole al niño las cuestiones originándose y no ya elaboradas. Las reglas deberán ser, por tanto, algo a lo que se llega y no algo de que se parte. De este modo el niño podrá ir adquiriendo conciencia de la simplificación que las reglas y leyes proporcionan para la resolución de muchos problemas y podrá aplicarlas adecuadamente. Es bien conocido que muchos niños, que realizan correctamente las operaciones de multiplicar y dividir no saben, ante un problema concreto, qué operación deben realizar con los datos para llegar a la solución del problema. Esto no ocurriría si se hubiese empleado el tiempo necesario para hacerles comprender en qué consisten las operaciones de la aritmética. Todavía es peor la situación en cuanto a la enseñanza de la geometría se refiere. Las pocas definiciones de conceptos geométricos que se le dan, son unas veces falsas, otras no son comprobables por el alumno, y siempre se le dan sin ninguna justificación previa, lo que le hace llegar a la conclusión de que no tienen ninguna utilidad, con lo que se le ha deformado, quizá de un modo permanente. Todo esto podría evitarse presentándole los conceptos y las relaciones geométricas sobre modelos de papel o cartón y haciendo que él mismo los forme de modo inmediato sobre ellos. Pasar de los conceptos adquiridos de modo inmediato a conceptos de tipo abstracto desborda el cuadro de la enseñanza primaria.

En cuanto a la enseñanza secundaria se refiere, la inadecuación de los métodos empleados resulta igualmente patente. La enseñanza de la matemática en el bachillerato se halla organizada desde hace mucho más de un siglo sobre los *Elementos* de Euclides. En Inglaterra, por ejemplo, se llegaron a emplear traducciones casi literales de dicho libro en la enseñanza secundaria. Entre nosotros, se han usado elaboraciones de paternidad desconocida. Ya hemos visto que los *Elementos* de Euclides constituyen una obra monumental que no ha sido bien comprendida hasta nuestros días, pero que en ningún momento puede considerarse como obra apta para menores ni como una introducción a la matemática. Se plantea, por tanto, el problema del estudiar la organización de la enseñanza de la matemática en el bachillerato. La primera cuestión que debe resolverse es la de la misión de los estudios de matemática en la enseñanza media. Es evidente que, por las razones de aplicación a las más diversas ciencias que hemos señalado anteriormente, el bachiller debe poseer un cierto bagaje de conocimientos matemáticos que le capaciten para su aplicación posterior o para el ulterior estudio de una ciencia o técnica determinada. Pero, más importante que este aspecto de tipo informativo, es su capacidad para pensar por sí mismo de modo preciso y correcto. Conseguir este resultado es una de las finalidades del bachillerato, necesaria cualquiera que sea la futura actividad del bachiller. Ahora bien, el poder pensar correctamente exige manejar conceptos abstractos y la formación y comprensión de tales conceptos es, como ya hemos dicho anteriormente, una operación de gran dificultad. Por consiguiente, podríamos formular como misión principal de la matemática en el bachillerato la de enseñar a pensar con claridad y precisión al alumno. Esto conduce a centrar la enseñanza de la matemática en desarrollar la capacidad del alumno para formar conceptos, primero inmediatos y gradualmente abstractos, y descubrir las relaciones fundamentales entre ellos. Conseguido esto será tarea sencilla enseñarle a relacionarlos entre sí mediante un proceso deductivo, pero este proceso no tiene validez ninguna si no actúa sobre conceptos sólidamente adquiridos. Esta concepción de lo que debe ser la enseñanza de la matemática en el grado medio es diametralmente opuesta a las ideas (?) que rigen la enseñanza actual. En ésta se centra toda la atención en los silogismos sin preocuparse si el alumno posee los conceptos con la debida precisión. La consecuencia de ello es que el alumno, o no estudia la matemática, y buena prueba de esto la proporcionan las estadísticas de las calificaciones en los exámenes de grado, o se limita a repetir demostraciones aprendidas de memoria o a resolver mecánicamente problemas de determinados tipos.

La enseñanza superior de la matemática

presenta también problemas complicados. Sería preciso atender de modo adecuado a las tres modalidades de un matemático: matemático puro, matemático aplicado y profesor de matemática de grado medio. De estas tres modalidades la que presenta mayor dificultad de organización es la de matemático aplicado, y ello porque la formación de este tipo de científico requiere una acertada coordinación con otras ciencias experimentales y estudios técnicos superiores, por lo que creemos que este tema requiere un estudio que no podría sintetizarse aquí brevemente.

PEDRO ABELLANAS

MATEMATICA Y EXPERIMENTACION

A T L A N T I D A
REVISTA DEL PENSAMIENTO ACTUAL

Vol. I, Núm. 2 Marzo-Abril, 1963

I

Introducción

La matemática interviene de un modo cada vez más directo e intenso en las más diversas especulaciones intelectuales y en las más variadas técnicas actuales. Como consecuencia de ello, aumenta cada día la necesidad de progreso de esta ciencia en todas direcciones. Las demandas provienen de problemas concretos de tipo técnico, económico o social. Esto plantea un conjunto de cuestiones que estimamos de interés analizar, tales como las siguientes: ¿Por qué es útil la matemática para la resolución de tan variados problemas? ¿Es tarea propia del matemático ocuparse de cuestiones alejadas de su propia ciencia? ¿No será perjudicial para la matemática, y como consecuencia para las otras ciencias y técnicas a las que sirve, el acoger dentro de sus dominios cuestiones tan heterogéneas? ¿Debe existir alguna colaboración entre la investigación matemática y la de tipo experimental? ¿Cómo deben de influir todas estas cuestiones en la enseñanza de la matemática en sus diversos grados? El poder formar juicio sobre todas estas cuestiones, y otras de análogo interés, exige tener una idea clara de en qué consiste el quehacer del matemático, lo que ofrece ciertas dificultades por hallarse relacionado con el concepto de matemática y haber sufrido este último sustanciales variaciones en el último siglo.

II

La evolución del concepto de matemática

Es bien conocido que en la matemática prehelénica, especialmente en la cultura babilónica, se llegaron a manejar los números enteros y racionales positivos mediante el uso de un número superabundante de reglas de cálculo, llegándose a la resolución de tipos particulares de ecuaciones de primero y segundo grado. Esta matemática se caracteriza por el carácter empírico de todos sus resultados, que en ningún momento se trata de justificar, lo que indica que la matemática era, durante esta época, una ciencia experimental, carácter que queda bien patente en los métodos empleados para la medida de magnitudes. El paso de esta matemática a la matemática griega ha sido poco estudiado; posiblemente, por no disponerse de una información documental completa. No obstante, la comparación de los conocimientos matemáticos babilónicos y egipcios con la matemática griega y, de modo particular, con los *Elementos* de Euclides, permite extraer importantes consecuencias, especialmente en lo que al método de trabajo del matemático se refiere. Todos los libros de los *Elementos* comienzan por un conjunto de definiciones y, en el primero de ellos, siguen un grupo de postulados de carácter matemático unos y lógicos otros. No se tiene noticia de que con anterioridad a la matemática griega se haya sentido la necesidad de definir los conceptos que se empleaban, y esta es la diferencia esencial entre ambas. Analicemos brevemente esta afirmación. Se puede tener el concepto de ángulo recto habiendo visto varios ángulos rectos en cuerpos materiales. Quien posea un concepto de ángulo recto así formado puede entender la siguiente proposición: los bordes de esta cuartilla forman ángulos rectos. Este modo de formación de conceptos por observación directa de objetos o fenómenos permite entender ciertas proposiciones e incluso establecer ciertas relaciones entre los conceptos así formados. Sin embargo, quien solo posea el anterior concepto de ángulo recto no podrá demostrar que la mediana relativa a la base de un triángulo isósceles es también altura. Esto indica que el mecanismo de la lógica únicamente puede actuar cuando los conceptos se encuentren convenientemente elaborados. Análogamente, un profano en Derecho puede entender la proposición: "A y B han firmado un contrato", pero sobre tal concepto no se podría construir una teoría jurídica consistente sobre los contratos. Pues bien, los conceptos que se usaban en la matemática prehelénica se formaban por observación directa, por ello no se sentía la necesidad de definirlos y, como consecuencia, tampoco se podía usar un método deductivo. Un concepto es siempre una clase de seres o de entes de razón. Esta clase se puede formar por observación directa y conservación en la memoria de los objetos observados; a la formación de conceptos de ese modo la designaremos con el nombre de formación inmediata de los conceptos. Pero, también se puede definir la clase correspondiente a un concepto mediante una (o varias) propiedades características de los elementos de la clase; esto es, una propiedad que sea unificada por todos los elementos de la clase y solo por ellos. Este segundo modo de definir los conceptos lo designaremos con el nombre de abstracto. Podemos ahora precisar que la diferencia esencial entre la matemática prehelénica y la matemática griega se halla en que en aquella se usaba la definición inmediata de los conceptos, mientras que en ésta se emplea la definición abstracta. Como consecuencia de ello, a la matemática griega se le puede aplicar el método lógico, que no podría utilizarse en la matemática babilónica. Parece, por otra parte, natural suponer que se pasara gradualmente de un modo al otro de la definición de los conceptos, y que simultáneamente con esta evolución del proceso de formación de conceptos se fueron hallando las leyes de la lógica que permiten relacionar las proposiciones relativas a conceptos abstractos. Estas leyes lógicas permitirían ordenar las proposiciones y conducirían a la necesidad de reconocer el carácter de proposiciones primitivas, o postulados, de algunas de ellas. El paso de la definición inmediata a la definición abstracta de los conceptos ofrece grandes dificultades; por ello un buen número de las definiciones abstractas del primer libro de Euclides son todavía defectuosas.

En virtud de las observaciones anteriores, se puede decir que la matemática comenzó siendo una ciencia experimental. Cuando el número de proposiciones conocidas llegó a ser suficientemente grande se pudieron observar relaciones entre resultados de distinto origen. Este análisis de conocimientos previos permitiría llegar a la obtención de las propiedades características que conducirían a la definición abstracta de los conceptos y a la aplicación a los mismos del mecanismo lógico que se habría ido desarrollando simultáneamente. El resultado final de este proceso sería la monumental obra de los *Elementos* de Euclides. Se presenta esta obra, contemplada desde este punto de vista, como una ordenación genial de resultados previamente conocidos por vía experimental. Como consecuencia de ello, las proposiciones de la matemática griega expresaban de modo sistemático las propiedades fundamentales que se habían podido observar en el Universo con los elementales métodos de observación disponibles. Esta es la razón de que la matemática griega haya podido servir de soporte a las ciencias experimentales hasta que los instrumentos de observación y de medida no alcanzaron un grado de perfeccionamiento sustancial respecto de los empleados en aquella época.

La matemática griega volvió a adquirir vitalidad a partir del Renacimiento. Afortunadamente, el eclipse sufrido por el pensamiento científico durante los siglos que van de una época a otra permitió que los algebristas italianos del siglo XVI desarrollaran de un modo directo, y sin conexión con las ideas griegas, el estudio algorítmico del álgebra, que había quedado fuera del cuadro de ideas propias del pensamiento griego, lo que vivificó los métodos geométricos clásicos. Durante más de tres siglos pudieron acoplarse todos los conocimientos matemáticos y experimentales que se iban obteniendo a la estructura formada por la matemática griega y la que, sobre ella, se iba construyendo. Esto tuvo como consecunecia que se llegase a pensar que el espacio estudiado en los *Elementos* fuese una transcripción fiel del Universo. Esta creencia estuvo vigente hasta la aparición de los espacios no euclídeos en la primera mitad del siglo pasado. A partir de este momento fueron perdiendo las proposiciones de la matemática el carácter de verdades absolutas que habían tenido hasta entonces y surgió la necesidad de ocuparse en su fundamentación. La fundamentación de la matemática se polarizó en dos direcciones principales, correspondientes a las escuelas intuicionista y formalista. La escuela intuicionista partía de la afirmación de que los conceptos matemáticos se presentaban directamente a la mente humana, que era capaz de expresarlos de modo unívoco. A partir de este principio se vieron obligados los intuicionistas a no admitir el axioma lógico del *tertium non datur* y a emplear únicamente demostraciones constructivas, con lo que dejaban fuera del edificio matemático una gran parte del mismo. La escuela formalista, por su parte, partía del principio de que la única justificación posible de una teoría matemática consistía en no ser contradictoria. Esto implicaba la necesidad de demostrar la no contradicción de una teoría como cuestión previa a su desarrollo ulterior. Hilbert comenzó por ocuparse del problema de la no contradicción de la aritmética. Para ello, construyó una formalización de esta teoría empleando un número limite de signos y de leyes para manipular con ellos. Se trataba de probar que dentro de un tal sistema formal no podían obtenerse una proposición y su contraria. A pesar de los esfuerzos realizados por Hilbert y sus discípulos en este sentido, no se consiguió tal demostración. Fue Gödel [1] quien resolvió negativamente esta cuestión demostrando la imposibilidad de probar la no contradicción, mediante procesos finitos, en un sistema formalizado. Se ha continuado estudiando estos problemas prescindiendo de la condición de finitud del proceso, pero el teorema de Gödel había inutilizado la idea de Hilbert de buscar como punto de apoyo de la matemática la consistencia *a priori* de los sistemas formales.

A partir del siglo pasado, la matemática ha ido cediendo posiciones. De ser un conjunto de verdades desde las cuales se podía llegar a explicar todo el Universo, había pasado a ser un conjunto de verdades que se presentaban de modo unívoco e igualmente claro a cada una de las mentes humanas, o bien, un sistema de proposiciones y de leyes lógicas que las relacionaban dentro del cual no podía presentarse la contradicción, hasta llegar, finalmente, a ser un sistema de proposiciones y de reglas para pasar de una a otra en el que no se está seguro, *a priori*, de no llegar a obtener en algún momento una contradicción. Es curioso, sin embargo, que durante este último siglo, en el que el concepto vigente de matemática ha sufrido golpes tan duros, el crecimiento de la matemática ha adquirido proporciones, y se ha efectuado con una rapidez, que no admite comparación con el desarrollo en épocas anteriores. Es igualmente notable que sus métodos se han introducido de modo cada vez más profundo y esencial en ciencias que habían permanecido alejadas de ella; que múltiples problemas de la vida ordinaria requieren el empleo de métodos matemáticos y que, finalmente, la matemática actual presenta analogías sorprendentes con la matemática griega, hasta el punto de que ahora se comprenden mucho mejor las ideas de esta matemática de lo que lo habían sido hasta nuestro tiempo.

III

Matemática y experimentación

Vamos a tomar un ejemplo actual que muestra el origen de una nueva teoría matemática. Los físicos empleaban la llamada función de Dirac para la explicación de algunos fenómenos del átomo. Lo que

1. K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verdwandter Systeme*. "Monatsch. für Math. und Phys." 38 (1931) 173-198.

ellos llamaban función no correspondía a ninguno de los conceptos matemáticos existentes, por lo que ningún matemático se hubiese permitido operar con dicha función como lo hacían los físicos. Pues bien, dicha función es actualmente un caso particular de un nuevo concepto matemático que ha dado lugar a la teoría de distribuciones, que constituye un valioso capítulo de la matemática. Esto confirma que el método matemático actual, lo mismo que sucedió en la matemática griega y en todo el desarrollo de la misma a partir del Renacimiento, consiste en un análisis de resultados conocidos, los cuales pueden proceder de la propia matemática o de otras ciencias, mediante el cual se extraen las propiedades características de los conceptos que en ellos intervienen, así como sus relaciones fundamentales, lo que permite aplicarles los métodos deductivos mediante los cuales quedan ordenados los conocimientos y aclaradas sus relaciones mutuas. Con este proceso se consigue una ordenación de los conocimientos que permite averiguar más fácilmente, mediante el empleo de un método, sus mutuas relaciones. Además, proporciona una economía de pensamiento que permite, con menor esfuerzo, dominar un conjunto de conocimientos que se presentaban dispersos, o de teorías ya existentes. Como este proceso puede repetirse, se va alcanzando mediante él la estructura arborescente del edificio matemático.

Como queda dicho, en el trabajo del matemático existe un primer proceso fundamental, que consiste en un análisis de conceptos previos, cuya procedencia puede ser muy variada: unas veces se trata de conceptos experimentales, otras de conceptos matemáticos ya elaborados, o, finalmente, de casos particulares previamente estudiados. Este análisis permite extraer del material estudiado un conjunto de propiedades características que permiten definir nuevos conceptos, que comprenden como casos particulares a los anteriores, y enunciar las relaciones fundamentales entre los nuevos conceptos. Preparados los conceptos y sus primeras relaciones, se les puede aplicar el método deductivo para obtener nuevas relaciones. La investigación matemática puede realizarse, por tanto, a diversos niveles. Cuando trabaja sobre conceptos y relaciones obtenidos por experimentación u observación de fenómenos naturales, al resultado obtenido se le llama matemática aplicada. Cuando aquellos proceden de la propia matemática se dice que el producto es matemática pura. En el primer caso, la bondad de la teoría elaborada vendrá medida por el grado de concordancia de los resultados derivados de la misma con los fenómenos u observaciones de la Naturaleza que la han originado. En el segundo, por la capacidad de la nueva teoría de obtener como casos particulares las proposiciones de las teorías que la han engendrado, o, en el caso más modesto, por la posibilidad de resolver un problema que comprende a los problemas particulares que se habían estudiado. Según esto, la diferencia esencial entre un matemático puro y un matemático aplicado se halla en el nivel en que se efectúa un trabajo.

Hemos alcanzado con todo lo que antecede el concepto de matemática en una perspectiva actual. El origen de la matemática es la experimentación y observación de fenómenos naturales. En la fase experimental del conocimiento se presentan los conceptos de un modo inmediato como consecuencia de la observación directa. Los conceptos inmediatos no están preparados para poderlos someter al mecanismo lógico. Es necesario elaborarlos para extraer de ellos sus propiedades características. Una vez definidos los conceptos por sus propiedades y relaciones fundamentales, se ha obtenido un sistema formal al que se puede aplicar el proceso lógico. Al resultado obtenido se le llama matemática. Este proceso se puede aplicar reiteradamente obteniéndose sucesivamente teorías cada vez más generales.

El paso de un concepto inmediato a un concepto abstracto ha costado siempre mucho esfuerzo a la humanidad y sigue presentando dificultades al individuo en todas las épocas. Quizá sea aleccionador el siguiente ejemplo. Uno de los mejores geómetras del siglo pasado, v. Staudt, escribía en el prólogo de su obra fundamental [2] lo siguiente: "En la representación de los puntos del espacio por ternas de números acontece que al aplicar el método algebraico a la resolución de un problema geométrico aparecen soluciones imaginarias y se pregunta uno: ¿dónde se hallan los puntos imaginarios?". Esta pregunta indica que la sustitución del concepto correspondiente a una imagen gráfica sobre el papel por una terna de números, que es el concepto abstracto correspondiente, no había sido aceptada plenamente. Pues bien, con objeto de prescindir del concepto abstracto de punto, Staudt elabora en la mencionada obra una teoría geométrica, perfectamente construida en la que prescinde de la representación de los puntos por números. Mediante ella consigue dar una definición abstracta de punto imaginario (pues, de otro modo, no hubiera podido desarrollar la teoría) y demuestra, sin advertirlo, que el concepto de punto imaginario por él elaborado, coincide, salvo en el lenguaje empleado, con la definición de punto mediante ternas de números complejos, con lo que, naturalmente, probó lo contrario de lo que se proponía, esto es, que la definición algebraica de punto era la definición abstracta adecuada. Situaciones análogas se advierten actualmente, por parte de algunos físicos, debido a que una parte de la física actual ha pasado a ser matemática y la parte que no lo es se ocupa de la experimentación sobre fenómenos que todavía no han podido dar lugar a conceptos abstractos adecuados y a la comprobación experimental de las teorías matemáticas ya construidas.

IV

La investigación y la matemática

Independientemente del concepto de matemática vigente en cada época, el quehacer del matemático ha sido siempre el mismo. Consta de una primera fase, creadora de conceptos y descubridora de relaciones, seguida de un proceso deductivo, en el que actúa la lógica. En la obra matemática terminada resalta el proceso deductivo, y queda oculto el creador, lo que ocasiona que el no matemático piense que únicamente aquel es el empleado, y que la matemática se reduce a una inacabable cadena de silogismos, siendo así que

2. V. Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Leipzig, 1848.

la lógica no tiene más misión que la puramente instrumental. No obstante, tampoco pueden considerarse los conceptos y proposiciones como pertenecientes a la matemática mientras no se han ordenado mediante un proceso lógico. El sistema lógico puede ser arbitrario; esto es, se puede emplear en la matemática cualquier lógica de las actualmente existentes o que se construya, lo único necesario es declarar al principio qué sistema lógico se emplea y atenerse a él en todo el desarrollo posterior. La justificación de una teoría matemática se halla en el origen experimental de sus conceptos, aun cuando, debido al reiterado proceso de abstracción, sea difícil reconocer esta procedencia en muchos casos. La validez de una teoría matemática exige su consistencia; esto es, que en ella no se haya presentado contradicción. Descartada la posibilidad de demostración de la consistencia *a pirori,* existe siempre la posibilidad de que en algún momento se presente una contradicción. Eso llevaría a un nuevo análisis de los conceptos y postulados de la teoría en que esto ocurriera, con objeto de descubrir el origen de aquella y perfeccionar estos de modo adecuado para evitarla. Así, por ejemplo, hasta finales del siglo pasado se desarrolló toda la matemática sin disponerse de un concepto abstracto bien elaborado de número real. En la demostración del teorema fundamental de la geometría proyectiva, supone Staudt, por ejemplo, que los puntos de una recta están bien ordenados; esto es, que cada punto pone un siguiente inmediato. Esta y otras muchas demostraciones tuvieron que rehacerse cuando se alcanzó el concepto actual de número real.

La investigación en la matemática es, por tanto, en su parte esencial, de la misma naturaleza que en cualquier otra ciencia: se va de lo particular a lo general mediante análisis de casos o teorías particulares. La diferencia entre la investigación matemática y la experimental está en que aquella requiere una formulación abstracta de los conceptos, que no es posible realizar mientras dichos conceptos no son suficientemente conocidos. La misión fundamental de la investigación experimental consiste en realizar las experiencias y observaciones necesarias para llegar a disponer de material suficiente para la caracterización y definición abstracta de los conceptos. Nos encontramos, por tanto, en el punto de unión de la investigación matemática con la experimental: la elaboración de conceptos abstractos. De aquí nace la necesidad de colaboración del matemático en equipos de trabajo de investigación, como ha podido comprobarse en los casos más recientes de investigación nuclear, misiles, electrónica, etcétera, en que ha sido necesaria la intervención del matemático en su verdadero aspecto científico creador, no como calculista, que es la misión que le podría asignar el profano en cuestiones científicas.

La investigación en la matemática aplicada no solo beneficia a la ciencia experimental, sino que, como resulta de todo el estudio que llevamos hecho, es vital para la propia matemática que, si no hundiese sus raíces en la experimentación, no pasaría de ser un simple juego de ajedrez, pero mucho más complicado. No obstante, si simultáneamente al trabajo en el campo de la matemática aplicada no se produjera un desarrollo armónico de la matemática pura, unificador de teorías, simplificador de resultados y constructor de esquemas, llegaría a producirse una situación de conocimientos desarticulados que conduciría a la aparición de una pléyade de especialistas incapaces de entenderse entre sí, con lo que se produciría un colapso en la investigación científica y en el progreso técnico, que constituyen los principales soportes para la subsistencia de la humanidad actual.

V

La enseñanza y la matemática

Hemos visto que la matemática constituye el último grado de elaboración del pensamiento científico y que, por ello, es indispensable en cualquier ciencia o en cualquier técnica medianamente desarrolladas. Como consecuencia de ello, el estudio de la matemática es insustituible en todos los grados de la enseñanza. Existen, por otro lado, dos hechos que creemos haber analizado suficientemente en este estudio: por un lado la variación que ha sufrido el concepto de matemática, por otro el extraordinario volumen que ha alcanzado el edificio matemático actual y sus aplicaciones. Todo ello conduce a una revisión de la enseñanza de la matemática en todos los grados.

La enseñanza de la matemática en el nivel primario se halla centrada en la técnica de cálculo con números naturales y fraccionarios. La poca geometría que se estudia en este grado de la enseñanza se reduce al cálculo de algunas áreas y volúmenes mezclados con unos pocos conceptos mal definidos. Es patente que el odio a la matemática de muchos escolares tiene su origen en este sistema de enseñanza de tipo exclusivamente memorístico. El niño, en su primera edad escolar, posee una memoria mucho más desarrollada que su inteligencia y debe aprovecharse este hecho, pero debe hacerse racionalmente. El niño necesita retener en su memoria muchos conocimientos, pero la forma de conseguir esto debe ser adecuada. Como hemos visto al principio de este trabajo, la matemática comenzó siendo una ciencia exclusivamente experimental; por ello es aconsejable proceder de modo análogo en su primera enseñanza. En consecuencia, convendría ir presentándole al niño las cuestiones originándose y no ya elaboradas. Las reglas deberán ser, por tanto, algo a lo que se llega y no algo de que se parte. De este modo el niño podrá ir adquiriendo conciencia de la simplificación que las reglas y leyes proporcionan para la resolución de muchos problemas y podrá aplicarlas adecuadamente. Es bien conocido que muchos niños, que realizan correctamente las operaciones de multiplicar y dividir no saben, ante un problema concreto, qué operación deben realizar con los datos para llegar a la solución del problema. Esto no ocurriría si se hubiese empleado el tiempo necesario para hacerles comprender en qué consisten las operaciones de la aritmética. Todavía es peor la situación en cuanto a la enseñanza de la geometría se refiere. Las pocas definiciones de conceptos geométricos que se le dan, son unas veces falsas, otras no son comprobables por el alumno, y siempre se le dan sin ninguna justificación previa, lo que le hace llegar a la conclusión de que no tienen ninguna utilidad, con lo que se le ha deformado, quizá de un modo permanente. Todo esto podría evitarse presentándole los conceptos y las relaciones geométricas sobre modelos de papel o cartón y haciendo que él mismo los forme de modo inmediato sobre ellos. Pasar de los conceptos adquiridos de modo inmediato a conceptos de tipo abstracto desborda el cuadro de la enseñanza primaria.

En cuanto a la enseñanza secundaria se refiere, la inadecuación de los métodos empleados resulta igualmente patente. La enseñanza de la matemática en el bachillerato se halla organizada desde hace mucho más de un siglo sobre los *Elementos* de Euclides. En Inglaterra, por ejemplo, se llegaron a emplear traducciones casi literales de dicho libro en la enseñanza secundaria. Entre nosotros, se han usado elaboraciones de paternidad desconocida. Ya hemos visto que los *Elementos* de Euclides constituyen una obra monumental que no ha sido bien comprendida hasta nuestros días, pero que en ningún momento puede considerarse como obra apta para menores ni como una introducción a la matemática. Se plantea, por tanto, el problema del estudiar la organización de la enseñanza de la matemática en el bachillerato. La primera cuestión que debe resolverse es la de la misión de los estudios de matemática en la enseñanza media. Es evidente que, por las razones de aplicación a las más diversas ciencias que hemos señalado anteriormente, el bachiller debe poseer un cierto bagaje de conocimientos matemáticos que le capaciten para su aplicación posterior o para el ulterior estudio de una ciencia o técnica determinada. Pero, más importante que este aspecto de tipo informativo, es su capacidad para pensar por sí mismo de modo preciso y correcto. Conseguir este resultado es una de las finalidades del bachillerato, necesaria cualquiera que sea la futura actividad del bachiller. Ahora bien, el poder pensar correctamente exige manejar conceptos abstractos y la formación y comprensión de tales conceptos es, como ya hemos dicho anteriormente, una operación de gran dificultad. Por consiguiente, podríamos formular como misión principal de la matemática en el bachillerato la de enseñar a pensar con claridad y precisión al alumno. Esto conduce a centrar la enseñanza de la matemática en desarrollar la capacidad del alumno para formar conceptos, primero inmediatos y gradualmente abstractos, y descubrir las relaciones fundamentales entre ellos. Conseguido esto será tarea sencilla enseñarle a relacionarlos entre sí mediante un proceso deductivo, pero este proceso no tiene validez ninguna si no actúa sobre conceptos sólidamente adquiridos. Esta concepción de lo que debe ser la enseñanza de la matemática en el grado medio es diametralmente opuesta a las ideas (?) que rigen la enseñanza actual. En ésta se centra toda la atención en los silogismos sin preocuparse si el alumno posee los conceptos con la debida precisión. La consecuencia de ello es que el alumno, o no estudia la matemática, y buena prueba de esto la proporcionan las estadísticas de las calificaciones en los exámenes de grado, o se limita a repetir demostraciones aprendidas de memoria o a resolver mecánicamente problemas de determinados tipos.

La enseñanza superior de la matemática

presenta también problemas complicados. Sería preciso atender de modo adecuado a las tres modalidades de un matemático: matemático puro, matemático aplicado y profesor de matemática de grado medio. De estas tres modalidades la que presenta mayor dificultad de organización es la de matemático aplicado, y ello porque la formación de este tipo de científico requiere una acertada coordinación con otras ciencias experimentales y estudios técnicos superiores, por lo que creemos que este tema requiere un estudio que no podría sintetizarse aquí brevemente.