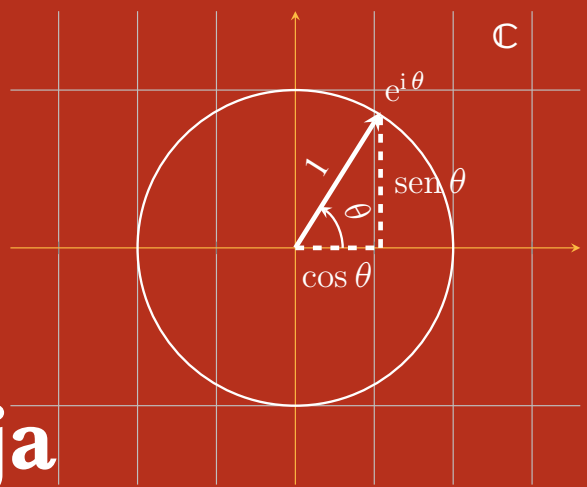


# Apuntes de Variable Compleja



**Manuel Mañas Baena**

Notas sobre cálculo en una variable compleja, que cubren la parte correspondiente del contenido de la asignatura de *Métodos Matemáticos I* del **Grado en Física**



UNIVERSIDAD  
COMPLUTENSE  
MADRID



# ÍNDICE GENERAL



Capítulo I. Números complejos	1
1.1 La compleja historia de los imaginarios . . . . .	1
1.1.1 La Geometría clásica y la resistencia a los números complejos . . . . .	7
1.2 La fórmula de Euler . . . . .	8
1.2.1 ¿Cómo se <i>descubrió</i> la fórmula de Euler? . . . . .	8
1.2.2 Otras formas de obtener la fórmula de Euler . . . . .	13
1.3 Operaciones con números complejos . . . . .	15
1.3.1 El cuerpo de los complejos . . . . .	16
1.3.2 Inverso de $z = x + iy$ . . . . .	18
1.3.3 El cuerpo de los números complejos no se puede ordenar . . . . .	18
1.3.4 Tomando raíces cuadradas . . . . .	19
1.3.5 Raíces de ecuaciones cuadráticas complejas. . . . .	19
1.3.6 El binomio de Newton. . . . .	20
1.3.7 Conjugado, módulo, partes reales e imaginarias de un número complejo . . . . .	21
1.3.8 Argumento de un número complejo . . . . .	22
1.3.9 Raíces $n$ -ésimas . . . . .	24
1.4 Aplicaciones . . . . .	24
1.4.1 Identidades trigonométricas . . . . .	24
1.4.2 La fórmula de Viète para la cúbica y la geometría del círculo. Trisecando ángulos . . . . .	27
1.4.3 Un problema de Geometría. . . . .	29
1.5 Ejercicios . . . . .	30
Capítulo II. Funciones holomorfas	37
II.1 Límites y continuidad. . . . .	37
II.2 Derivada compleja . . . . .	39
II.3 Ecuaciones de Cauchy–Riemann. . . . .	41
II.4 Funciones armónicas . . . . .	45
II.5 La historia de las ecuaciones de Cauchy–Riemann. . . . .	47
II.6 Aplicación: Fluidos ideales en el plano . . . . .	50
II.7 La función exponencial & Co. . . . .	51
II.7.1 Función exponencial . . . . .	51
II.7.2 Funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas . . . . .	54
II.7.3 El logaritmo complejo . . . . .	56
II.7.4 Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas . . . . .	61

II.8 Ejercicios . . . . .	63
Capítulo III. Integrales complejas . . . . .	73
III.1 Integración sobre arcos . . . . .	73
III.1.1 Arcos y cadenas . . . . .	73
III.1.2 Integrales a lo largo de arcos . . . . .	75
III.1.3 Teorema Fundamental del Cálculo <i>complejo</i> . . . . .	79
III.1.4 Independencia con respecto al camino de integración . . . . .	79
III.2 Teorema de Cauchy . . . . .	81
III.2.1 Una aproximación simple al teorema. . . . .	82
III.2.2 Teorema de Cauchy para un rectángulo . . . . .	83
III.2.3 Homotopía . . . . .	86
III.2.4 La idea <i>amplitwist</i> para explicar el Teorema de Cauchy. . . . .	89
III.2.5 La carta de Gauss a Bessel de diciembre de 1811 y el Teorema de Cauchy . . . . .	90
III.2.6 La demostración de Cauchy del <i>Teorema de Cauchy</i> : usando cálculo variacional . . . . .	91
III.2.7 Una tensión matemática y el debate americano . . . . .	92
III.3 Fórmula integral de Cauchy . . . . .	97
III.3.1 Índice de un arco cerrado . . . . .	97
III.3.2 El índice y el Teorema de Cauchy . . . . .	98
III.3.3 La fórmula integral . . . . .	100
III.3.4 Transformadas de Cauchy y formula integral de Cauchy para las derivadas. Teorema de Morera . . . . .	101
III.3.5 El <i>calcul des limites</i> o cómo Cauchy obtuvo su fórmula integral . . . . .	103
III.4 Teorema de Liouville . . . . .	106
III.4.1 El teorema. . . . .	106
III.4.2 La historia del <i>principio general</i> de Liouville . . . . .	107
III.4.3 Teorema Fundamental del Álgebra . . . . .	108
III.5 Fórmula de Cauchy–Green . . . . .	111
III.6 ¿Teorema de Green? ¿Teorema de Gauss? ¿Teorema de Stokes? . . . . .	113
III.6.1 Mr. Green . . . . .	113
III.6.2 El teorema de la divergencia . . . . .	113
III.6.3 ¿Quién descubrió el Teorema de Green? ¿Green o Cauchy? . . . . .	116
III.6.4 ¿Teorema de Stokes o de Lord Kelvin? . . . . .	117
III.7 Homología . . . . .	118
III.7.1 Homología de cadenas . . . . .	118
III.7.2 Homología <i>versus</i> homotopía . . . . .	121
III.7.3 Teoremas de Cauchy, de Green y la fórmula de Cauchy–Green. . . . .	122
III.8 Ejercicios . . . . .	123
Capítulo IV. Series complejas . . . . .	129
IV.1 Sucesiones y series de funciones complejas . . . . .	129
IV.1.1 Sucesiones y series de números complejos . . . . .	129
IV.1.2 Cauchy y la convergencia . . . . .	132

IV.1.3	Sucesiones y series de funciones . . . . .	133
IV.1.4	Orígenes de la convergencia uniforme . . . . .	139
IV.2	Series de potencias y desarrollos de Taylor . . . . .	142
IV.2.1	¿Cómo convergen las series de potencias? . . . . .	142
IV.2.2	Series de potencias y holomorfía . . . . .	143
IV.2.3	Unicidad y fórmulas para el radio de convergencia. . . . .	144
IV.2.4	El Teorema de Taylor . . . . .	146
IV.3	Historias sobre las series de potencias. . . . .	147
IV.3.1	Madhava de Sangamagrama ( <i>circa</i> 1350 – <i>circa</i> 1425) . . . . .	147
IV.3.2	James Gregory (1638-1675) . . . . .	149
IV.3.3	Brook Taylor (1685-1731) . . . . .	152
IV.3.4	Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) . . . . .	154
IV.3.5	Cauchy: <i>Resumé</i> y <i>Le Calcul des limits</i> . . . . .	155
IV.3.6	Weierstrass y la serie de potencias como piedra angular . . . . .	157
IV.4	Series de Laurent y singularidades . . . . .	159
IV.4.1	Series de Laurent . . . . .	159
IV.4.2	Teorema de Laurent. . . . .	160
IV.4.3	La triste historia del teorema de Laurent . . . . .	163
IV.4.4	Estudio de singularidades . . . . .	164
IV.5	Ejercicios . . . . .	170
Capítulo v.	Residuos . . . . .	189
v.1	El Teorema de los Residuos de Cauchy . . . . .	189
v.1.1	El teorema. . . . .	189
v.1.2	Cálculo de residuos . . . . .	191
v.1.3	Residuos en el infinito . . . . .	195
v.1.4	Historias residuales . . . . .	200
v.2	Evaluación de integrales reales. . . . .	202
v.2.1	Integrales de expresiones racionales de funciones trigonométricas . . . . .	203
v.2.2	Integrales impropias con límites de integración infinitos . . . . .	205
v.2.3	Transformada de Fourier. . . . .	211
v.2.4	Integrales impropias en valor principal de Cauchy . . . . .	220
v.2.5	Transformada de Mellin . . . . .	229
v.3	Ejercicios . . . . .	231
Textos consultados		257
Índice alfabético		259



# I. NÚMEROS COMPLEJOS

## Contenidos

1.1	La compleja historia de los imaginarios . . . . .	1
1.2	La fórmula de Euler . . . . .	8
1.3	Operaciones con números complejos . . . . .	15
1.4	Aplicaciones . . . . .	24
1.5	Ejercicios . . . . .	30

### §1.1. La compleja historia de los imaginarios



UE a mediados del S XVI, en 1545, cuando un matemático italiano, Girolamo Cardano, en su obra *Ars Magna* anunció al mundo la solución de la ecuación cúbica y de la cuártica (bicuadrática) creando tal conmoción entre los algebristas que suele considerarse el año 1545 como el del comienzo de la Matemática moderna. La ecuación cúbica fue resuelta unos treinta años antes, *circa* 1515, por Scipione Del Ferro, profesor de Matemáticas de la universidad de Bolonia, cuya demostración nunca publicó pero que antes de su muerte en 1526 se la comunicó a algunos de sus discípulos. Entre ellos estaba Maria Fior que posteriormente compitió y perdió en concurso público con Tartaglia en 1535 (Tartaglia consiguió, sólo horas antes de la conclusión del concurso, hallar la fórmula de Del Ferro). Del Ferro entregó el cuaderno de notas con sus descubrimientos a su yerno y discípulo Annibale della Nave –este cuaderno se encuentra hoy en día en la biblioteca de la Universidad de Bolonia. Cardano, en realidad, supo de una versión parcial del resultado por Niccoló Fontana (alias *Tartaglia*, tartamudo en italiano) en 1539, y aunque le da el crédito del descubrimiento, su publicación supuso una amarga disputa con Tartaglia porque Cardano juro solemnemente, sobre los sagrados evangelios y su palabra de caballero, secreto sobre el resultado. Cardano faltó a su juramento, ya que cuando viaja junto con su discípulo Ferrari a Bolonia en 1545 para estudiar los papeles póstumos de Del Ferro, que le entrega Nave, considera que Tartaglia no tiene la prioridad en el hallazgo de los resultados. Decía Cardano en el arranque capítulo XI de la segunda edición del *Ars Magna*: “*Scipio Ferro di Bolognia hace ya más de treinta años descubrió esta regla y se la entregó a Antonio María Fior de Venecia, que en el concurso que mantuvo con Niccoló Tartaglia de Brescia dio la oportunidad a Niccoló para descubrirlo, él me lo dio a mi en respuesta a mis ruegos, aunque sin demostración alguna, con su auxilio encontré una demostración, en varios modos, esto fue muy difícil, mi redacción del mismo sigue*”.

HIERONYMI CAR  
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE  
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,  
ARTIS MAGNÆ,  
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,  
Lib. vnus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod  
OPVS PERFECTVM  
inscribitur, est in ordine Decimus.



HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Col  
fa vocant) nouis adiuuentioibus, ac demonstrationibus ab Authore ita  
locupletatas, ut pro pauca aenea, vulgò trinta, iam septuaginta excaferint. Ne  
q; foliam, ubi minus natus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo daobus,  
aut tres uni equales fuerint, nodam explicent. Hunc et librum ideo fecim  
sim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeti  
cæ thesaurio in lucem eruto, & quali in theatro quodam omnibus ad spectan  
dam exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per  
Tomos edentur, tanto uilidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

C A P V T X I.

*De Cubo & rebus equalibus Numero.*

**S**CIPPIO Ferreus Bononiensis iam an  
nis ab hinc triginta fermè capitulum  
hoc inuenit, tradidit verò Antonio Ma  
riæ Florido Veneto, qui cùm in certamen  
cum Nicolao Tartalea Brixellense aliquan  
do uenisset, occasionem dedit, ut Nicolaus  
inuenerit & ipse, qui cum nobis roganti  
bus tradidisset, suppressâ demonstratione,  
freti hoc auxilio, demonstrationem quæsiui  
mus, eamque in modos, quod difficillimum  
fuit, redactam sic subiiciemus.

*Ars Magna de Cardano*

La cuártica fue resuelta por Luigi Ferrari por encargo del propio Cardano. Ferrari estuvo, de joven, al servicio de Cardano y después fue docente, ocupando el último año de su vida un puesto de profesor en la universidad de Bolonia. En el *Ars Magna* aparecen por primera vez los complejos, que se comenzaron a denominar como números sutiles o números inútiles. Cómo veremos después, los números imaginarios emergen de forma natural de las fórmulas de Cardano para las soluciones de la cúbica.



**Girolamo Cardano**  
(1501-1576)



**Niccolò Fontana**  
(alias Tartaglia)  
(1499-1557)



En 1572, otro italiano, Rafael Bombelli, en su libro *L'Algebra* manipulando la fórmula de Cardano realiza cálculos con números complejos y afirma: “*toda la materia parece descansar más en argucias que en verdad*”. En aquella época quien hablaba de éstos números los llamaba o bien números “*imaginarios*”, nombre acuñado por Decartes por oposición a real, o números “*imposibles*” (hoy en día un número imaginario no es un número complejo arbitrario sino un múltiplo de la unidad imaginaria). Recién comenzado el S XVIII, el filósofo, lógico y matemático alemán Gottfried Leibniz se refería en 1702 a  $\sqrt{-1}$  como “*ese anfibio entre la Existencia y la no-Existencia que recuerda al espíritu santo*”.

En descarga de Leibniz debemos apuntar que factorizó  $x^4 + a^4$  como  $x^4 + a^4 = (x + a\sqrt{i})(x - a\sqrt{i})(x + a\sqrt{-i})(x - a\sqrt{-i})$ . También, demostró que  $\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}$  y conjeturó, pero no probó, que si  $P(x)$  es un polinomio real entonces  $f(x+iy) + f(x-iy)$  también es real. Las cosas empezaron a cambiar, y ya Leonhard Euler, el gran matemático suizo, en 1748 discute la fórmula de Euler. Euler fue uno de los primeros en tener una visión moderna de los números complejos, como se puede deducir de su obra *Algebra* (1770), donde escribe cosas como  $\sqrt{-2}\sqrt{-3} = \sqrt{6}$  e introduce la notación  $i = \sqrt{-1}$ . Afirma en su capítulo XIII que las raíces cuadradas de números negativos no son ni positivas ni negativas, y que por ello “*deben pertenecer a especies distintas de números*” y sigue “*no son mayores ni menores que nada; y aún así, no podemos decir que son 0*” para concluir “*todos los números que es posible concebir son mayores o menores que 0, o son 0 . . . De esta manera nos vemos conducidos a la idea de los números, que por su naturaleza son imposibles; y por tanto usualmente son llamados cantidades imaginarias, porque ellas existen meramente en la imaginación*”.

Corría el año 1797 cuando un cartógrafo noruego-danes, Caspar Wessel, fue el primero en interpretar los números complejos como puntos del plano. Ésto lo presentó en el trabajo *Om directionens analytiske betegning* a la Real Academia Danesa de las Artes y las Ciencias. Recuperamos ahora algunos fragmentos de éste. Se pregunta Wessel: “*¿Cómo podemos representar analíticamente una dirección?: es decir, ¿cómo vamos a expresar las líneas rectas para que una única ecuación que involucre en una línea desconocida y otras conocidas, tanto, la longitud y la dirección de la línea desconocida se puedan expresar?*” Y considera la suma de segmentos de línea dirigidos: “*Dos líneas rectas se suman si las unimos de tal manera que le segunda línea comienza donde termina la primera, y luego trazamos una línea recta desde el primer hasta el último punto de las líneas unidas.*” En cuanto al producto dice: “*Por lo que respecta a la longitud, el producto será a un factor como el otro factor es a la unidad. En cuanto a la dirección, deberá diverger de un factor tantos grados, y en el mismo lado, como el otro factor diverge de la unidad, de modo que el ángulo dirigido del producto es la suma de los ángulos dirigidos de los factores.*” Y los identifica con cantidades imaginarias como sigue:

“*Sea +1 la unidad positiva, y + $\epsilon$  la unidad perpendicular a él. Entonces, el ángulo de dirigido de +1 es 0°, y el de -1 es 180°, el de + $\epsilon$  es 90°, y el de - $\epsilon$  de 270°. Por la regla de que el ángulo de*

## L'ALGEBRA OPERA

Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna  
Divisa in tre Libri.

Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta  
cognitione della teorica dell' Arimetica.

Con vna Tauola copiosa delle materie, che  
in essa si contengono.

Posta hora in luce à beneficio degli Studi di  
della professione.



IN BOLOGNA,  
Per Giovanni Rossi. MDLXXIX.  
Con licenza de' Superiori

—•••—  
*L'Algebra de Bombelli*

un producto es la suma de los ángulos de los factores, tenemos  $(+1)(+1) = 1$ ,  $(+1)(-1) = -1$ , ...,  $(+\epsilon)(+\epsilon) = -1$ , ... De esto, se ve que  $\epsilon = \sqrt{-1}$ .”

Om

## Directionens analytiske Betegning,

et Forsøg,

anvendt fornemmelig

til

plane og sphæriske Polygoners Opløsning.

af

Caspar Wessel,

Landmaaler.

Kjøbenhavn 1798.

Eryft hos Johan Rudolph Thiele.

Om directionens analytiske betegning de Wessel

## ESSAI

SUR UNE MANIÈRE DE REPRESENTER

## LES QUANTITÉS IMAGINAIRES

DANS

LES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES,

PAR R. ARGAND.

2<sup>e</sup> ÉDITION

PRÉCÉDÉE D'UNE PRÉFACE

PAR M. J. HOÜËL

ET SUIVIE D'UN APPENDICE

Contenant des Extraits des *Annales de Gergonne*, relatifs à la question des imaginaires.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSION DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 25.

1874

(Tous droits réservés.)

*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques de Argand*

Jean-Robert Argand era un matemático aficionado, nacido en Ginebra, que regentaba una librería en París, y publicó en 1806 anónimamente *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (publicación anónima). Tras el regreso de Cauchy a París, tuvo lugar en 1813 y 1814 un vivo debate en los *Annales* sobre interpretación geométrica de Argand de las cantidades complejas. Varios matemáticos participaron, incluyendo Gergonne, Français, Servois, Lacroix, y el propio Argand, al que se le reconocía el mérito de ser el autor del mencionado panfleto anónimo de 1806 y quien, en 1815, publicó una versión definitiva explicando sus ideas en detalle y, como un ejemplo de su utilidad, ofreciendo una nueva demostración, la primera completa y correcta, del teorema fundamental del álgebra. Bastante más tarde, en 1831, Carl Friedrich Gauss volvió a encontrar esta interpretación, aunque ya anteriormente, en 1799, en su construcción del 17-góno dejó entrever la misma interpretación. La descripción de Wessel-Argand de los números complejos como puntos en el plano no fue inicialmente muy conocida pero el apoyo de Gauss fue decisivo para su propagación e implantación. Para introducir un poco más de ruido, señalar que el 1849, Cauchy comenta que él ha

oído que en 1786 un tal Henri-Dominique Truel había encontrado la forma de representar los números complejos en un plano, y que sus manuscritos, hoy perdidos, los tenía en 1810 un tal Augustin Normauf, constructor de barcos en Havre.

A lo largo del siglo XVIII muchos matemáticos estaban convencidos de que había una jerarquía de cantidades imaginarias, *vera umbrae umbra* decía Gauss. Sólo gradualmente se aceptó la idea que Euler expresó: “*en general todas las cantidades imaginarias, da igual lo complicadas que parezcan, son siempre reducibles a la forma  $M + N\sqrt{-1}$* ”, donde  $M, N \in \mathbb{R}$ , como decía, en 1749, como conclusión a su trabajo sobre el Teorema Fundamental de Álgebra. Gauss promovió la interpretación geométrica, como se puede apreciar en su descubrimiento del polígono regular de 17 lados, donde presenta las soluciones de  $z^{17} - 1 = 0$  como puntos del plano. De hecho, en sus *Disquisitiones arithmeticae* de 1798 (publicado en Leipzig en 1801), las raíces aparecen escritas con sus partes reales e imaginarias, cada una con diez decimales. También en este libro, uso la notación de Euler: escribía “*¡ para la cantidad imaginaria  $\sqrt{-1}$* ”. En 1832 decía que la teoría de número se releva en su “*entera simplicidad y belleza*” cuando el campo de la aritmética se extiende a los números imaginarios. Explicaba que admitía números de la forma  $a + bi$ , y que “*tales números serán llamados enteros complejos*” decía. Afirmando que el dominio de los números complejos  $a + bi$  contenía a de los números reales para  $b = 0$  y a los números imaginarios para  $b$  no nulo. Dando las reglas aritméticas para dichos números complejos.



**Carl Gauss**  
(1777-1855)

GAUSS AN BESSEL, 18. December 1811.

..... Zuvörderst würde ich jemand, der eine neue Function in die Analyse einführen will, um eine Erklärung bitten, ob er sie schlechterdings bloss auf reelle Grössen (reelle Werthe des Arguments der Function) angewandt wissen will, und die imaginären Werthe des Arguments gleichsam nur als ein Überbein ansieht — oder ob er meinem Grundsatz beitrete, dass man in dem Reiche der Grössen die imaginären  $a + b\sqrt{-1} = a + bi$  als gleiche Rechte mit den reellen geniessend ansehen müsse. Es ist hier nicht von praktischem Nutzen die Rede, sondern die Analyse ist mir eine selbständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingirten Grössen ausserordentlich an Schönheit und Rundung verlieren und alle Augenblick Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genöthigt sein würde. ....

**Párrafo de Gauss**  
*Werke 8, 90-92*

En su carta a Bessel de 18 de diciembre de 1811 (publicada en 1880) encontramos el siguiente párrafo: “*Directamente, si alguien desea introducir una nueva función en análisis, yo le pediré que aclare si él simplemente desea usar cantidades reales (valores reales del argumento de la función), y que simultáneamente consideraría los valores imaginarios de la función como algo accesorio, o si él accedería a mi principio*

*de que el dominio de las cantidades imaginarias  $a + b\sqrt{-1} = a + bi$  debe ser considerado con los mismos derechos que los reales. No es una cuestión utilitaria, más bien, para mí, el análisis debe de ser*

considerada como una ciencia independiente que, menospreciando cada cantidad imaginaria, pierde excepcionalidad en belleza y perfección, y todas las verdades que de otro modo se sostendrían con generalidad, tienen necesariamente que sufrir recortes de todo tipo.” Se puede considerar, por tanto, que el año de 1811 fue el origen de la teoría de la funciones complejas.

Die

vollständige Erkenntniß der Natur einer analytischen Function muß auch die Einsicht in ihr Verhalten bei den imaginären Wörthen des Arguments in sich schließen, und oft ist sogar letztere unentbehrlich zu einer richtigen Beurtheilung der Gebarung der Function im Gebiete der reellen Argumente. Unverläßlich ist es daher auch, daß die ursprüngliche Fortsetzung des Begriffs der Function sich mit gleicher Bündigkeit über das ganze Größengebiet erstrecke, welches die reellen und die imaginären Größen unter dem gemeinschaftlichen Namen der complexen Größen in sich begreift.

Párrafo manuscrito de Gauss

Werke 10, 1, p. 405

Posteriormente, circa 1831, dice: “Un conocimiento completo de la naturaleza de una función analítica debe también incluir una idea de su comportamiento para valores imaginarios de sus argumentos. A menudo esto último es indispensable para una adecuado entendimiento del comportamiento de la función para valores reales. Es, por tanto, esencial que la determinación del concepto de función sea extendido al dominio de las cantidades que incluyan tanto las cantidades reales como las imaginarias, en pie de igualdad, bajo la simple designación de números complejos.” Las bases de la teoría de funciones de variable compleja sufrió un espectacular desarrollo en un periodo de apenas 40 años que va de

1814 a 1851. Sus principales paladines fueron, en primer lugar, el matemático francés Augustin Louis Cauchy y posteriormente los matemáticos alemanes Georg Friedrich Bernhard Riemann y Karl Theodor Wilhelm Weierstrass.



**Augustin Cauchy**  
(1789-1857)



**Bernhard Riemann**  
(1826-1866)



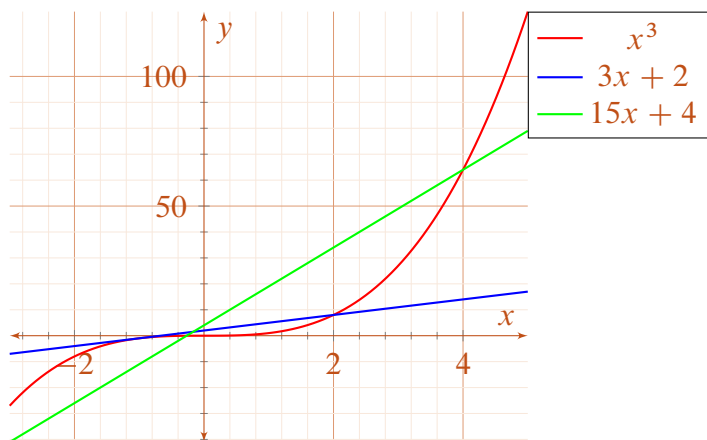
**Karl Weierstrass**  
(1815-1897)

**1.1.1. La Geometría clásica y la resistencia a los números complejos** Pero, ¿por qué este retraso en reconocer a los complejos como herramientas útiles y esenciales? Es habitual introducir los números complejos como algo necesario e imprescindible para la resolución de la ecuación cuadrática  $x^2 = 2mx + c$ , dadas magnitudes  $m$  y  $c$ . Hace ya 4000 años que encontramos como resolver problemas ligados a la resolución de esta ecuación que, en términos modernos, tiene como soluciones a  $x = m \pm \sqrt{m^2 + c}$ . El problema es que cuando  $m^2 + c < 0$  está expresión, antes de los complejos, no tenía sentido, que fue lo que condujo a Cardano a considerar las raíces cuadradas de cantidades negativas.

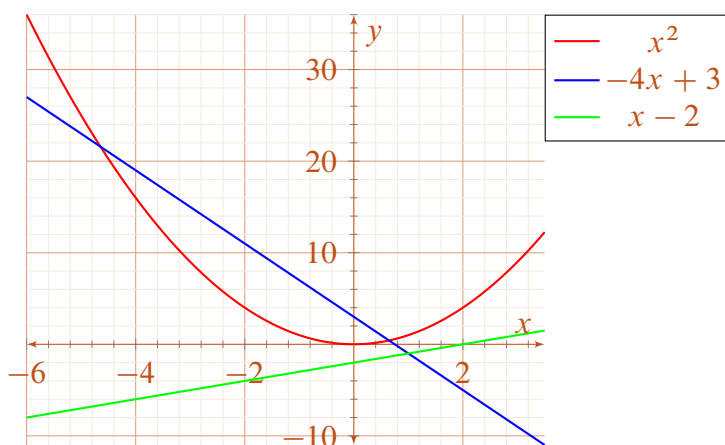
Desde los antiguos griegos hasta el año 1500, cuando se pensaba en Matemáticas se pensaba en Geometría, y la solución a la ecuación cuadrática se interpreta como los dos puntos de corte de la parábola  $y = x^2$  con la recta  $y = 2mx + c$ . Por tanto, la resolución de la ecuación no era un problema en sí mismo, sino, más bien, la formulación algebraica de un problema geométrico. Cuando  $m^2 + c < 0$ , simplemente no hay puntos de corte, como se ilustra en la gráfica. Obviamente existe una amplia gama de posibilidades de elección de los parámetros  $m$  y  $c$  tales que la recta no corta a la parábola, eran soluciones **inútiles**, de ahí la denominación. Los números complejos empezaron a tomar carta de naturaleza una vez que Bombelli demostró su utilidad para hallar soluciones de problemas en geometría y no sólo de álgebra. En concreto, se trataba de analizar las soluciones  $x$  de la ecuación cúbica

$$(1) \quad x^3 = 3px + 2q,$$

donde  $p$  y  $q$  son parámetros reales. Dichas soluciones resuelven un problema geométrico, hallar los cortes de la curva cúbica  $y = x^3$  con la recta  $y = 3px + 2q$ . En el *Ars Magna*, se determinan sus soluciones como sigue



**Cortes de cúbica y recta**



**Cortes de parábola y recta**

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Por ejemplo, para el caso en que  $p = q = 1$ , la ecuación a resolver es  $x^3 = 3x + 2$ , tendremos  $\sqrt{q^2 - p^3} = 0$ , y la fórmula de Cardano–Tartaglia–Del Ferro nos provee con la solución  $x = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 2$  (en la última igualdad, como veremos a lo largo del curso, hemos hecho un poco de trampa), como se ve en la figura. De momento, los números complejos no han sido de ayuda alguna para

encontrar soluciones con sentido real de la ecuación cúbica. Pero que ocurre cuando  $q^2 < p^3$ , tendríamos que encontrar raíces cuadradas de números negativos. ¿Son de alguna utilidad? Sí, contesto Bombelli, siguiendo lo que el mismo denominó como *una idea loca*. Recordemos su razonamiento. Consideremos el caso  $p = 5$  y  $q = 2$ ,  $x^3 = 15x + 4$ , donde  $\sqrt{q^2 - p^3} = 11i$ , y la fórmula de Cardano nos da  $x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$ . El propio Cardano apunta que

una solución es 4, de hecho la única positiva, y por tanto no llega a entender el sentido de esta fórmula, llamando a las raíces de los números negativos como *sofísticas*, concluyendo que este era un un resultado *tan sutil como inútil*. Bombelli procedió a manipular formalmente esta expresión y supuso, su *loca idea*, que existía un número  $n$  tal que  $\sqrt[3]{2+11i} = 2+ni$  y  $\sqrt[3]{2-11i} = 2-ni$ . Para demostrar esto, utilizó las siguientes reglas de suma y multiplicación de dos números complejos  $a+ib$  y  $c+id$ , donde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,

$$(2) \quad (a+bi) + (c+di) = (a+b) + (c+d)i,$$

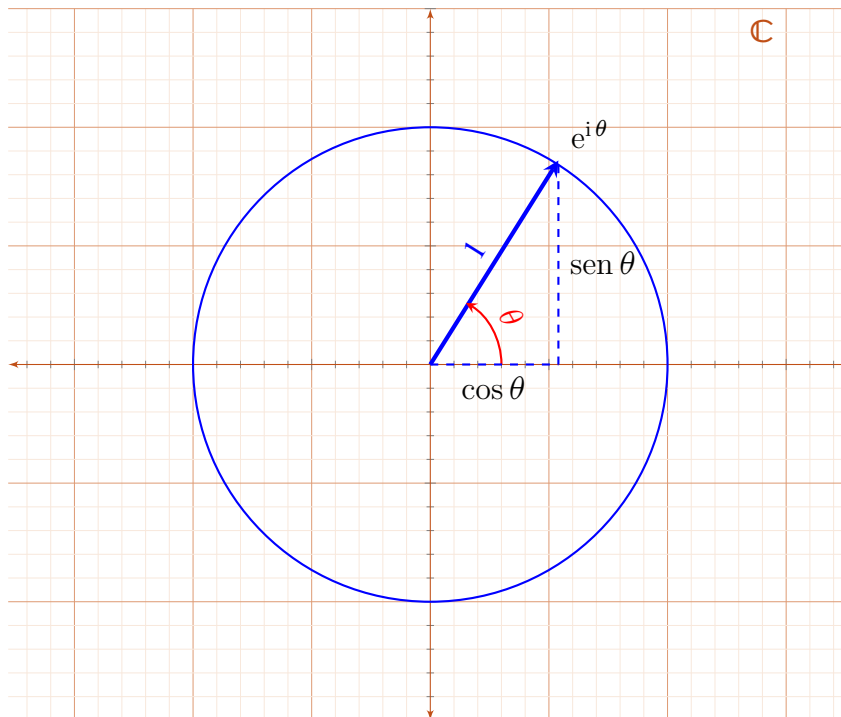
$$(3) \quad (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Así vio que  $(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i$ , y el número era  $n = 1$ . Por ello, concluyo que  $x = 4$  era una solución real y que para encontrarla era imprescindible, si se está usando la fórmula de Cardano, considerar los números complejos  $2 \pm 11i$ . Así, soluciones reales de problemas geométricos se obtienen usando números complejos.

## §1.2. La fórmula de Euler



CONSIDERAMOS ahora la formula de Euler,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ , que para  $\theta = \pi$ , da una de las ecuaciones más bellas de las Matemáticas, la identidad de Euler,  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , en donde aparecen ligados los números  $e$ ,  $\pi$ ,  $1$ ,  $i$  y  $0$ , quizás los más fundamentales de las Matemáticas.

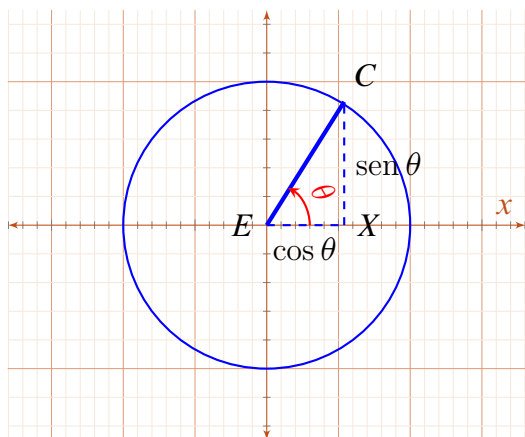


**1.2.1. ¿Cómo se descubrió la fórmula de Euler?** La historia es compleja, como casi siempre. El matemático inglés Roger Cotes, (colaborador de Isaac Newton) enunció en 1712, cuatro años antes de morir, que  $\log(\cos q + i \operatorname{sen} q) = -iq$ , fórmula a la que no presto mucha atención y de la que inmediatamente, tomando exponenciales, casi se puede deducir (salvo signo) la fórmula de Euler.

triam designari, sed modo inexplicabili. Nam si quadrantis circuli quilibet arcus, radio  $CE$  descriptus, finum habeat  $CX$  finumque complementi ad quadrantem  $XE$ : sumendo radium  $CE$  pro Módulo, arcus erit rationis inter  $EX + XC\sqrt{-1}$  &  $CE$  mensura ducta in  $\sqrt{-1}$ . Verum isthæc aliis, quibus operæ pretium videt-

#### Párrafo de Cotes

*Logometria*, Philosophical Transactions 29 (1714) 5-45



En su artículo *Logometria*, publicado en las Philosophical Transactions, se puede leer “Así, si cualquier arco de un cuadrante de un círculo, descrito por el radio  $CE$ , tiene sinus  $CX$  y sinus del complementario al cuadrante  $XE$ ; tomando el radio  $CE$  como Módulo, el arco será la medida  $EX + XC\sqrt{-1}$  &  $CE$  multiplicada por  $\sqrt{-1}$ .” Esto requiere la siguiente interpretación: Un círculo con centro en  $E$  y radio  $CE$  es dado. Considerar un ángulo  $\theta$  con vértice en  $E$  con el eje  $x$  como un lado y el radio  $CE$  como otro. La perpendicular al eje  $x$  que pasa por  $C$  es el *senus* de  $\theta$ , que denota por  $CX$ , la línea del centro del círculo al punto  $X$  (el corte del eje  $x$  con la perpendicular) es el *senus* del complementario al cuadrante (esto es  $\cos \theta$ ). El cociente  $EX + XC\sqrt{-1}$  y  $CE$  es

$\cos \theta + i \sin \theta$ . Para Cotes, la *medida* de una magnitud es su logaritmo natural y su *módulo* es un factor de conversión que transforma la longitud de arco en el ángulo correspondiente, esto es dividir por el radio. Por tanto, Cotes afirma que  $iCE \log(\cos \theta + i \sin \theta) = CE \theta$ , que está equivocada en un signo ya que debería ser  $iCE \log(\cos \theta + i \sin \theta) = -CE \theta$ . Obviamente, para los matemáticos británicos, Cotes es su héroe en lo que respecta a la fórmula de Euler, ver *El camino de la realidad* de Roger Penrose.

La fórmula de De Moivre  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ , no apareció explícitamente en la obra del matemático francés afinado en Inglaterra Abraham De Moivre (amigo de Newton y al que Newton se refería cuando le preguntaban cuestiones imaginarias), pero casi. Efectivamente, De Moivre publicó el artículo titulado

Verum si acciderit ut a fit minor unitate, tunc Radicis forma secunda, ut quæ proposito est magis conveniens, præ reliquis feligenda est. Sic si Aequatio fuerit  $5y - 20y^4 + 16y^5 = \frac{61}{64}$ , erit  $y = \frac{1}{2} \sqrt[5]{\frac{61}{64} + \sqrt{\frac{375}{4096}}} + \frac{1}{2} \sqrt[5]{\frac{61}{64} - \sqrt{\frac{375}{4096}}}$ . Et quidem si Binomialium Radix quintana ullo pacto extrahi queat, prodibit Radix proba & possibilis, et si expressio ipsa impossibilitatem mentiat. Binomialis vero  $\frac{61}{64} + \sqrt{\frac{375}{4096}}$  Radix quintana est  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{-15}$ , & Binomialis  $\frac{61}{64} - \sqrt{\frac{375}{4096}}$  Radix itidem quintana est  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{-15}$ , quorum Binomialium semifumma  $= \frac{1}{4} = y$ .

#### Párrafo de De Moivre

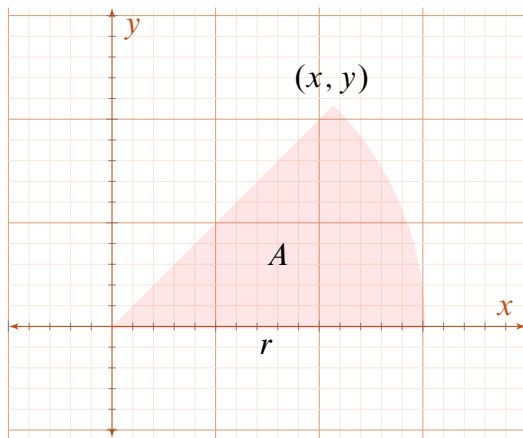
*Aequationum Quarundam Potestatis Tertiae, Quintae...*, Philosophical Transactions 25 (1706) 2368-2371

*Aequationum Quarundam Potestatis Tertiae, Quintae, Septimae, Nonae, & Superiorum, ad Infinitum Usque Pergendo, in Terminis Finitis, ad Instar Regularum pro Cubicis Quae Vocantur Cardani, Resolutio Analytica* en las Philosophical Transactions en donde demuestra conocer que, para  $n$  impar, se tiene

$$\frac{1}{2} \sqrt[n]{\operatorname{sen} n\theta + i \cos n\theta} + \frac{1}{2} \sqrt[n]{\operatorname{sen} n\theta - i \cos n\theta} = \operatorname{sen} \theta$$

Por otro lado, ya en 1722, en otro artículo en la misma revista, y 1730, en su obra *Miscellanea analytica*, vuelve a hacer uso implícito de la fórmula que lleva su nombre. En concreto, en su *Miscellanea* usa para  $n$  arbitrario la relación

$$\frac{1}{2} \sqrt[n]{\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta} + \frac{1}{2} \sqrt[n]{\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta} = \cos \theta.$$



Otra parte de la historia comienza en 1702, Johann Bernoulli, matemático suizo nacido en Basilea, dio la siguiente fórmula para el área de un sector circular de radio  $r$ , cuya base es el eje  $x$  y con vértice superior situado en  $(x, y)$ :  $A = \frac{r^2}{4i} \log \frac{x+iy}{x-iy}$ . Obsérvese que  $\frac{2i}{x^2+1} = \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}$ , así que si *tomando primitivas* concluimos  $\arctan x = \frac{1}{2i} \log \frac{x-i}{x+i} + C$  y cómo –integrando en polares  $\int_0^r dr \int_0^{\arctan y/x} r dr d\theta$ – el área de dicho sector es  $\frac{r^2}{2} \arctan \frac{y}{x}$ , se obtiene, tras alguna manipulación formal y peligrosa, la fórmula de Bernoulli. Más tarde, en 1727, estudiando la ecuación  $y = (-1)^x$  junto con un joven Leonhard Euler, también nacido en Basilea, tuvieron que considerar que significaba  $\log(-1)$ . Bernoulli, usando

las propiedades del logaritmo natural en los reales, argumento que  $0 = \log 1 = \log(-1)^2 = 2 \log(-1)$ . Esto se debería aplicar, por supuesto, a cualquier real  $x$ ,  $\log(-x)^2 = \log x^2$ , y por ello creyeron que  $\log(-x) = \log x$  (¡Fallaron!). Euler tomó entonces la fórmula de Bernoulli para el área del cuarto de círculo  $A = \frac{r^2}{4i} \log(-1)$  que, según lo anterior, debería ser cero y que obviamente no lo era. ¡Algo estaba mal! Fijémonos en que Euler estaba a un paso de demostrar la identidad con su nombre, ya que sustituyendo  $A = \frac{\pi r^2}{4}$  se obtiene  $\log(-1) = i\pi$  y por ello  $-1 = e^{i\pi}$ , pero no lo hizo. Posteriormente, en 1729, Euler requiere del uso de

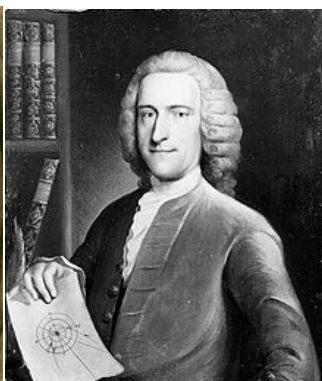
$$\frac{1}{2} \sqrt{i \log(-1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

sin dar explicaciones. Por tanto, Cotes, De Moivre, Bernoulli y Euler rondaron la famosa fórmula desde 1712 a 1730. Pero, en mi opinión, ninguno llegó a la fórmula en cuestión tal como hizo Euler años después, como veremos ahora mismo, mereciendo, sin duda, que tal fórmula lleve su nombre.





**Abraham De Moivre**  
(1667-1754)



**Roger Cotes**  
(1682-1716)



**Johann Bernoulli**  
(1667-1748)



**Leonhard Euler**  
(1707-1783)

En 1740 Euler escribe *Introductio in analysin infinitorum*, una de sus obras más afamadas, y que fue publicada más tarde, en 1748, en Suiza. En su capítulo VIII deriva la ecuación de Euler como sigue. De la relación  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$  concluye que  $(\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) = 1$ ; por otro lado, calcula

$$(\cos y + i \sin y)(\cos z + i \sin z) = \cos(y + z) + i \sin(y + z)$$

y llega a

$$(\cos z \pm i \sin z)^n = \cos nz \pm i \sin nz,$$

¡las fórmulas de De Moivre! aunque él no hace referencia al matemático franco-inglés. De aquí infiere que

$$(4) \quad \begin{aligned} \cos nz &= \frac{(\cos z + i \sin z)^n + (\cos z - i \sin z)^n}{2}, \\ \sin nz &= \frac{(\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin z)^n}{2i}. \end{aligned}$$

Aunque parezca increíble, de estas dos formas de la ecuaciones de De Moivre, Euler deduce las series de Taylor del coseno y del seno.

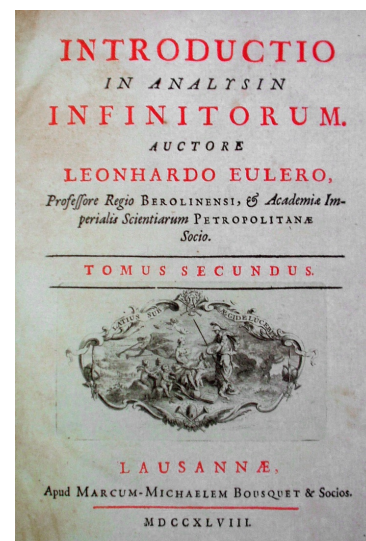
Para ello hace que  $z$  sea muy pequeño de modo que  $\sin z \rightarrow z$  y  $\cos z \rightarrow 1$  y toma  $n$  muy grande  $n \rightarrow \infty$ , pero ¡con  $nz = v$  finito! Por ejemplo, veamos la del  $\cos z$  con  $n = 2m$  un número par<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \cos nz &= \cos^n z - \frac{n(n-1)}{2} \cos^{n-2} z \sin^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cos^{n-4} z \sin^4 z + \dots \\ &\quad + (-1)^{m-1} \frac{n(n-1)}{2} \cos^2 z \sin^{n-2} z + (-1)^m \sin^n z \end{aligned}$$

Estas fórmulas ya las conocía el matemático francés Viète un siglo antes.

<sup>1</sup>Si  $n = 2m + 1$  es un número impar tendríamos

$$\cos nz = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{2} \cos^{n-2} z \sin^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cos^{n-4} z \sin^4 z + \dots + (-1)^n n \cos z \sin^{n-1} z$$



*Introductio in analysin  
infinitorum de Euler*

138. Ponatur denuo in formulis §. 133, Arcus  $z$  infinite parvus, & fit  $n$  numerus infinite magnus  $i$ , ut  $iz$  obtineat valorem finitum  $v$ . Erit ergo  $nz = v$ ; &  $z = \frac{v}{i}$ , unde  $\sin. z = \frac{v}{i}$  &  $\cos. z = 1$ ; his substitutis fit  $\cos. v =$

104 DE QUANTATIBUS TRANSCENDENT.

LIB. I. 
$$\frac{(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i + (1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2}; \text{ atque } \sin. v =$$

$$\frac{(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i - (1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}. \text{ In Capite autem}$$

præcedente vidimus esse  $(1 + \frac{z}{i})^i = e^z$ , denotante  $e$  basin Logarithmorum hyperbolicorum: scripto ergo pro  $z$  partim  $+v\sqrt{-1}$  partim  $-v\sqrt{-1}$  erit  $\cos. v =$

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \text{ \& } \sin. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ex quibus intelligitur quomodo quantitates exponentiales imaginariæ ad Sinus & Cosinus Arcuum realium reducantur. Erit vero  $e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1} \sin. v$  &  $e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1} \sin. v$ .

### Párrafos de Euler

*Introductio in analysin infinitorum* (1748)

Sustituyendo  $nz \rightarrow v$ ,  $\cos z \rightarrow 1$ ,  $\sin z \rightarrow 0$  y  $n \sin z \rightarrow v$  (esto último implica que  $n(n-1)\dots(n-k+1)\sin^k z \rightarrow v^k$ ) obtenemos  $\cos v = 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} + \dots$ . A continuación Euler escribe (4) de la siguiente forma

$$\cos v = \frac{(1 + i\frac{v}{n})^n + (1 - i\frac{v}{n})^n}{2}, \quad \sin v = \frac{(1 + i\frac{v}{n})^n - (1 - i\frac{v}{n})^n}{2i},$$

con  $n \rightarrow \infty$ . Recordando que  $e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n$ , él deduce

$$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}, \quad \sin v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}.$$

De donde inmediatamente se sigue la fórmula de Euler  $e^{i\nu} = \cos \nu + i \operatorname{sen} \nu$ . En resumen, Euler utiliza las fórmulas de adición de las funciones trigonométricas y la definición como límite de la exponencial. En realidad, en ese momento, Euler lo que hace es definir  $e^{i\theta} := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{\theta}{n}\right)^n$ .

Y así la fórmula de Euler se hizo un sitio privilegiado en las Matemáticas y en la cultura universal.

### 1.2.2. Otras formas de obtener la fórmula de Euler

1.2.2.1. *Series de Taylor a la Cauchy* En la serie de Taylor de la función exponencial

$$(5) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

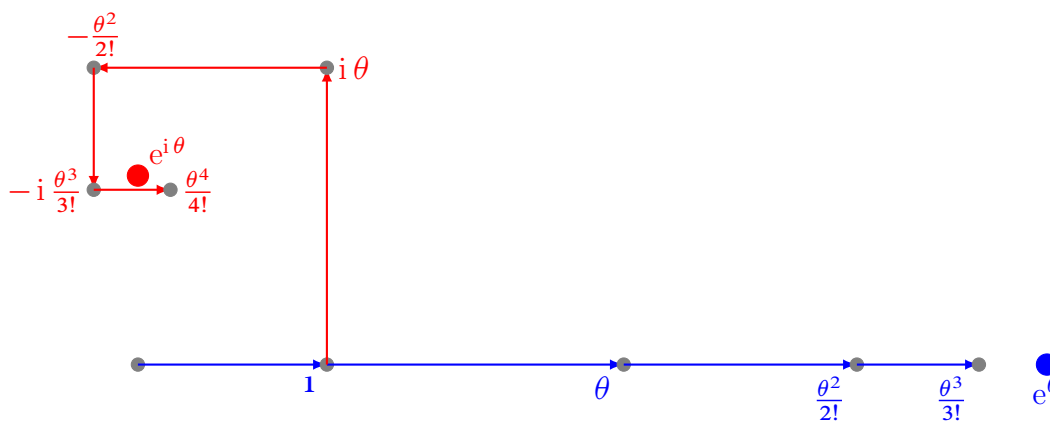
la sustitución  $x \mapsto i\theta$  conduce a

$$(6) \quad e^{i\theta} = C(\theta) + iS(\theta), \quad C(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots, \quad S(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots.$$

Pero  $C(\theta)$  y  $S(\theta)$  son las series de Taylor de  $\cos \theta$  y  $\operatorname{sen} \theta$  y deducimos así la fórmula de Euler. La deducción a partir de series de Taylor de la fórmula de Euler aparece por primera vez en *Exercices d'analyse et de physique mathématique. Tome 4* (1847) de Cauchy, ver páginas 245-246.

No se nos debe escapar que ésto que hemos hecho es un poco tramposo y no se puede considerar como una demostración. Obsérvese que (5) es una serie de potencias que converge para todo  $x \in \mathbb{R}$  a la función  $e^x$ . Sin embargo, ahora la hacemos válida con  $x = i\theta \in i\mathbb{R}$ . Esto requiere de una justificación. En realidad, esta demostración es casi una definición. Esto es, tomamos (6) como definición de  $e^{i\theta}$ , pero claro ahí están las series del  $\cos \theta$  y  $\operatorname{sen} \theta$  ya presentes, y por tanto la definición será  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ . Es decir, hacemos de la fórmula de Euler la definición de la exponencial con argumento imaginario. Yo, personalmente, prefiero la aproximación de Euler.

Podemos ilustrar gráficamente la diferencia entre calcular las series de Taylor de  $e^{i\theta}$  y  $e^\theta$ .



**Representación gráfica de  $e^{i\theta}$  y de  $e^\theta$**

Se puede apreciar que, para  $e^{i\theta}$ , en la espiral roja, se superponen dos series, una en el eje imaginario y otra en el eje real, ambas con términos positivos y negativos, en tanto que para  $e^\theta$ , en azul, siempre se añaden términos positivos en el eje real.

**1.2.2.2. Otra de series de Taylor** La idea es usar (6) e ignorar que los desarrollos en serie de potencias  $C(\theta)$  y  $S(\theta)$  son los desarrollos de Taylor de las funciones trigonométricas. En primer lugar, de la forma de las series  $C(\theta)$  y  $S(\theta)$  tenemos que  $C'(\theta) = -S(\theta)$  y  $S'(\theta) = C(\theta)$  y por ello, cómo  $|e^{i\theta}|^2 = (C(\theta))^2 + (S(\theta))^2$  tenemos  $\frac{d}{d\theta}|e^{i\theta}|^2 = 2C(\theta)C'(\theta) + 2S(\theta)S'(\theta) = 0$ . Luego  $|e^{i\theta}|$  es una función constante, no depende de su variable independiente  $\theta$  y cómo  $e^{i0} = 1$ , obtenemos el primer resultado:  $|e^{i\theta}| = 1$ . En segundo lugar, si llamamos  $\Theta(\theta) := \arg e^{i\theta}$ , entonces  $\tan \Theta(\theta) = \frac{S(\theta)}{C(\theta)}$ . Podemos, recordando que  $|e^{i\theta}| = 1$ , derivar a la izquierda

$$(\tan \Theta(\theta))' = (1 + \tan^2 \Theta(\theta))\Theta'(\theta) = \left(1 + \frac{(S(\theta))^2}{(C(\theta))^2}\right)\Theta'(\theta) = \frac{1}{(C(\theta))^2}\Theta'(\theta)$$

y la derecha de esta ecuación

$$(\tan \Theta(\theta))' = \frac{S'(\theta)C(\theta) - C'(\theta)S(\theta)}{(C(\theta))^2} = \frac{1}{(C(\theta))^2},$$

para así obtener  $\Theta'(\theta) = 1$ . Por ello,  $\Theta(\theta) = \theta + \Theta(0)$ , pero  $\Theta(0) = 0$ , y por tanto  $\arg e^{i\theta} = \theta$ . Concluimos que la partes reales e imaginarias de  $e^{i\theta}$  coinciden con  $\cos \theta$  y el  $\sin \theta$ , respectivamente, y de ahí obtenemos la fórmula de Euler. Más aún, tras esta identificación, llegamos a que las series de potencias  $C(\theta)$  y  $S(\theta)$  son las series de Taylor del  $\cos \theta$  y del  $\sin \theta$ , respectivamente.

**1.2.2.3. Ecuación diferencial** Una de las propiedades fundamentales de la función exponencial es que  $f(x) = e^{ax}$  es la única solución de

$$\begin{cases} \frac{d f(x)}{d x} = a f(x), \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Denotemos la solución de  $\frac{d f(\theta)}{d \theta} = i f(\theta)$  y  $f(0) = 1$  por  $e^{i\theta}$ . Como  $\cos \theta + i \sin \theta$  es solución, obtenemos  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , esta interpretación de la fórmula de Euler tiene también un sentido cinemático. Efectivamente, multiplicar por la unidad imaginaria geoméricamente es una rotación de  $\pi/2$  rad. Por ello, la ecuación anterior se puede interpretar como la cinemática de un punto con posición  $\mathbf{r}(t)$  perpendicular a su velocidad  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t) \perp \mathbf{r}(t)$ , esto es, el producto escalar de velocidad y posición es cero,  $\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ , i.e.,  $|\mathbf{r}(t)| = \text{constante}$ , y como  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ , ( $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ ) entonces  $|\mathbf{r}(t)| = 1$ , y el punto se mueve en el círculo unitario. Así que existe una función  $\varphi(t)$  tal que  $\mathbf{r}(t) = \cos \varphi(t)\mathbf{i} + \sin \varphi(t)\mathbf{j}$ , de la ecuación diferencial deducimos que  $\dot{\varphi}(t) = 1$ , luego  $\varphi(t) = t - t_0$ , pero como  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$  sabemos que  $t_0 = 0$ . Esto es,  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$ .

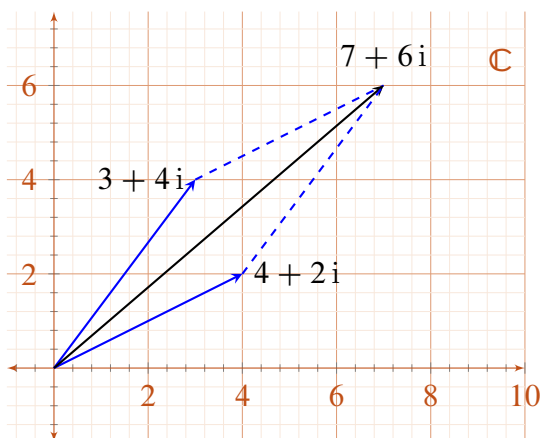
**1.2.2.4. Fórmulas de adición** Una propiedad relevante de la función exponencial  $e^{ax}$  es su propiedad de adición, i.e.  $e^{a(x+y)} = e^{ax} e^{ay}$ . De hecho, si buscamos una función  $f(x)$  derivable en  $x = 0$  que satisfaga la propiedad de adición  $f(x+y) = f(x)f(y)$  junto con  $f(0) = 1$  y  $f'(0) = a$ , no tenemos que ir muy lejos, la única solución es  $f(x) = e^{ax}$ . Efectivamente, como  $f(x+h) = f(x)f(h)$  se tiene para el cociente incremental  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)\frac{f(h)-1}{h}$  y por ello, tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , que  $f'(x) = af(x)$ ,  $f(0) = 1$ , que sabemos tiene como única solución a  $f(x) = e^{ax}$ . Por otro lado, en cuanto uno recuerda las formulas de adición de las funciones trigonométricas

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y,$$

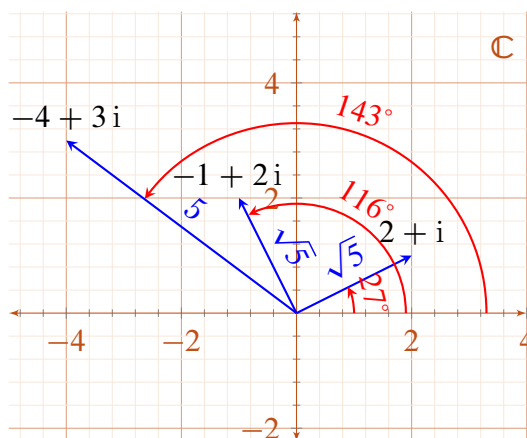
se da cuenta de que  $f(x) := \cos x + i \sin x$  cumple  $f(x+y) = f(x)f(y)$  con  $f(0) = 1$  y  $f'(0) = i$ . Por tanto, se sigue que  $f(x) = e^{ix}$  y la fórmula de Euler.

### §1.3. Operaciones con números complejos

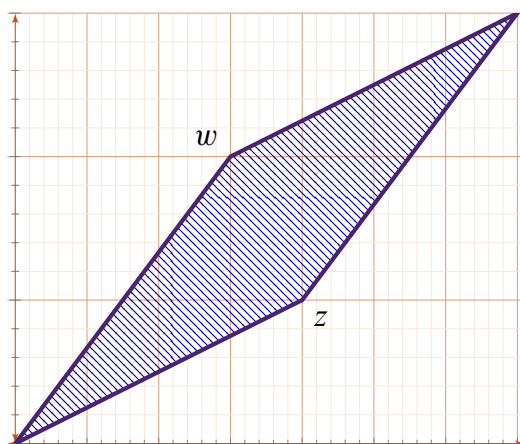
**H**EMOS comentado anteriormente cómo Bombelli comenzó a trabajar con los números complejos con las reglas para el producto y la suma de números complejos dadas por (2) y (3). También, recordando las palabras de Wessel, sabemos que la suma (2) no es más que la regla de paralelogramo en el plano de Wessel–Argand. Sin embargo, siguiendo de nuevo a Wessel, el producto (3) es mucho más *complejo*: las longitudes de los números complejos se van a multiplicar y su argumentos se va a sumar. Observamos que esta es una *buena* multiplicación, por ejemplo el número imaginario  $6i$  es el producto complejo del número complejo  $6$  por el número complejo  $i$ ; también, vemos que dado que la longitud de  $i$  es  $1$  y su argumento es  $\pi/2$ , entonces  $i^2$  tiene longitud  $1$  y argumento  $\pi$ , esto es:  $i^2 = -1$ , como debía ser.



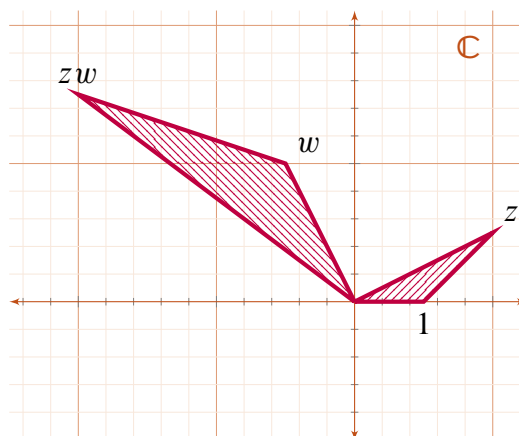
**Suma de complejos**  
Regla del paralelogramo



**Producto de complejos**  
Multiplicación de longitudes y suma de argumentos



**Suma de complejos**  
Suma como vértices de un paralelogramo



**Producto de complejos**  
Producto como semejanza de triángulos

Estas dos operaciones, suma y producto de complejos, se interpretan en el plano de Wessel–Argand. La suma es sencilla, no es más, como implica la regla del paralelogramo, que una traslación. Los puntos  $0, z, w, z + w$  conforman los vértices de un paralelogramo, y la transformación que supone sumar  $w$  a cualquier número complejo no es más que deslizar, sin rotar ni dilatar ni cambiar la forma en el plano complejo, esto es: una traslación. Más interesante es el producto complejo, cuando se multiplica por  $w$  cualquier número complejo  $z$  tenemos una transformación que deja el origen  $z = 0$  fijo y conserva la forma, que envía el  $1$  a  $w$  y el  $z$  a  $wz$ . Los correspondientes triángulos  $\Delta(0, 1, z)$  y  $\Delta(0, w, wz)$  son semejantes, tienen la misma

forma, el primer triángulo ha sido dilatado por un factor  $|z|$  y ha sufrido una rotación entorno al origen de ángulo  $\arg z$  (enseguida veremos que es el módulo y argumento de un número complejo; esto es, su representación polar).

**1.3.1. El cuerpo de los complejos** Vamos ahora a ser más formales y definir rigurosamente la estructura que subyace en las discusiones previas sobre números complejos. Tenemos que los números complejos son puntos del plano, esto es son elementos de  $\mathbb{R}^2$  con la operación de suma, luego constituyen un espacio lineal real bidimensional. Es la operación del producto la que dota a los complejos de su estatus especial.

### El cuerpo de los complejos $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

Para vectores arbitrarios  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$  definimos su suma y producto como

- i)  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- ii)  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

El conjunto  $\mathbb{C}$  es un cuerpo, esto es, con respecto a la suma es un grupo conmutativo, con respecto al producto también es un grupo conmutativo y satisface la propiedad distributiva. El elemento neutro con respecto a la suma es  $(0, 0)$  (en la notación habitual  $a + ib$  es  $0$ ) el elemento neutro con respecto al producto, la identidad, es  $(1, 0)$  (en la notación habitual es  $1$ ). El elemento inverso de  $z = (x, y) = x + iy$  con respecto a la suma es  $-z = (-x, -y) = -x - iy$ .



*and on Algebra as the Science of Pure Time.*

403

*On the Addition, Subtraction, Multiplication, and Division, of Number-Couples, as combined with each other.*

6. Proceeding to operations upon number-couples, considered in combination with each other, it is easy now to see the reasonableness of the following definitions, and even their necessity, if we would preserve in the simplest way, the analogy of the theory of couples to the theory of singles :

$$(b_1, b_2) + (a_1, a_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2); \quad (52.)$$

$$(b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2); \quad (53.)$$

$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \times (a_1, a_2) = (b_1 a_1 - b_2 a_2, b_2 a_1 + b_1 a_2); \quad (54.)$$

$$\frac{(b_1, b_2)}{(a_1, a_2)} = \left( \frac{b_1 a_1 + b_2 a_2}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right) \quad (55.)$$

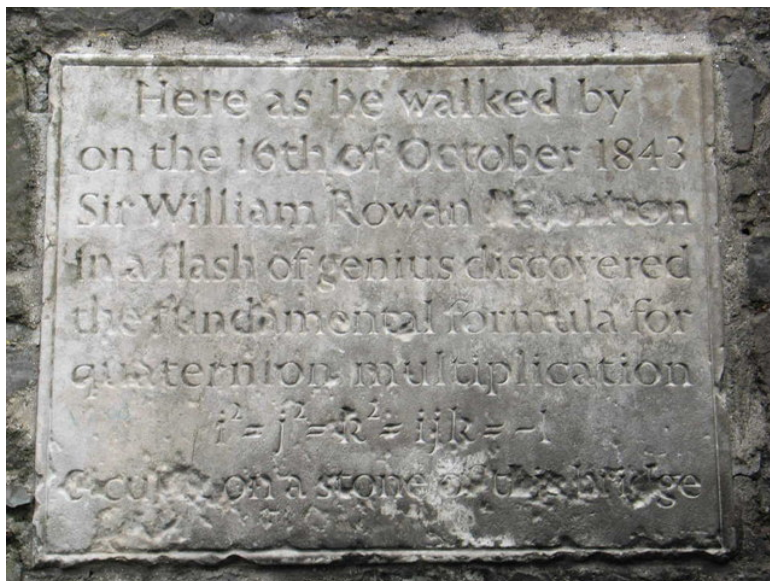
Were these definitions even altogether arbitrary, they would at least not contradict each other, nor the earlier principles of Algebra, and it would be possible to draw legitimate conclusions, by rigorous mathematical reasoning, from premises thus arbitrarily assumed : but the persons who have read with attention the foregoing remarks of this theory, and have compared them with the Preliminary Essay, will see that these definitions are really *not arbitrarily chosen*, and that though others might have been assumed, no others would be equally proper.

### Párrafo de Hamilton

Transactions of the Royal Irish Academy 17 (1837) 93-422

Esta notación por parejas fue comunicada por primera vez por el físico y matemático irlandés William Rowan Hamilton en 1833 en un artículo titulado *Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples, with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time*. Hamilton, ya en 1828, no estaba satisfecho con la interpretación geométrica de los números complejos y le molestaba especialmente la dependencia de la representación geométrica de un sistema de coordenadas en particular. Tampoco le gustaba la representación binomial  $a + ib$ , ya que le parecía que añadir  $b$  i a  $a$  era como sumar peras y manzanas. Y se preguntaba: ¿qué es  $i$ ? Todo esto le condujo, en el

mencionado artículo, a definir los números complejos por parejas ordenadas de números reales. (Cosa ya hecha por Gauss dos años antes. en 1831, aunque cómo solía ocurrir con el príncipe de las Matemáticas, no lo publicó.) Hamilton definió cuatro operaciones con las parejas, suma, resta, multiplicación y división, y observó que dichas operaciones satisfacen las leyes conmutativas y distributivas (para llegar a la noción de cuerpo actual le faltó la ley asociativa, que introdujo él mismo años más tarde cuando descubrió los cuaterniones), los inversos bajo suma y bajo multiplicación y la existencia del elemento cero. Quizás fueran estas ideas las que le llevaron a considerar en vez de parejas, a triples  $(a, b, c)$  de números reales, que también representaba por  $a + ib + jc$ . Al intentar definir un producto *satisfactorio* para estos triples tenía que decir quien eran los productos  $ij$  y  $jj$ . Durante 15 años Hamilton trabajó en esta búsqueda, sin resultado. Era habitual que sus hijos le preguntaran por las mañanas ¿ya sabes como se multiplican los triples? Este fracaso le hizo abandonar los triples y volver la vista hacia los cuádruples  $(a, b, c, d)$  de números reales, que denotaba en forma vectorial como  $a + bi + cj + dk$ . Y la mañana del 16 de octubre de 1843, cuando paseaba junto con su mujer a lo largo del *Royal Canal* de Dublín, descubrió los cuaterniones, y grabó en la piedra del Brougham Bridge las fórmulas:  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ .



Los cuaterniones  $\mathbb{H} := \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$  tiene como elementos de la base a  $1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $i = (0, 1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 0, 1, 0)$  y  $k = (0, 0, 0, 1)$ : las reglas de suma y producto son

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2, a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2, a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)$$



**William Hamilton**  
(1805-1865)

Los cuaterniones se pueden invertir y como los complejos tienen módulo y conjugado. Los cuaterniones no forman un cuerpo como los complejos, forman un álgebra asociativa no conmutativa sobre los reales. El carácter no conmutativo es la que le impide ser cuerpo. Los cuaterniones forman parte de un álgebra mayor, conocida como álgebra de Clifford. A pesar de que Hamilton llegó a los cuaterniones tras el fracaso con los triples, el álgebra  $\mathbb{H}$  encuentra aplicaciones para describir la geometría en  $\mathbb{R}^3$ , por ejemplo en electrodinámica y en generación de gráficos en el ordenador. También la ecuación de Dirac se reformula de modo sencillo en términos de cuaterniones. Las palabras escalar y vector aparecen por primera vez en 1846 en un artículo sobre cuaterniones de Hamilton, que pueden considerarse como la semilla del álgebra vectorial.

**1.3.2. Inverso de  $z = x + iy$**  Veamos ahora quien es el elemento inverso con respecto al producto. Escribamos  $z^{-1} = u + iv$ , entonces la condición  $zz^{-1} = 1$  es equivalente a  $(ux - vy) + i(uy + vx) = 1$ , y obtenemos el sistema lineal

$$\begin{cases} ux - vy = 1, \\ uy + vx = 0, \end{cases}$$

cuya solución es  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$  y  $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$

$$z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$



**Ejemplo:** Calculemos el inverso o recíproco de  $z = 3 + 4i$ , ahora  $x = 3$  e  $y = 4$ , y por ello  $x^2 + y^2 = 25$  y así obtenemos  $(3 + 4i)^{-1} = \frac{3 - 4i}{25}$ .

**1.3.3. El cuerpo de los números complejos no se puede ordenar** Fijémonos que el cuerpo  $\mathbb{C}$  a diferencia del cuerpo  $\mathbb{R}$  no tiene un orden; i.e., no podemos decir si un número complejo es menor o igual que otro de forma consistente. Aquí es importante aclarar de que se habla cuando ordenamos un cuerpo, es decir un orden que respete las operaciones que define esta estructura algebraica.

#### ¿Se puede ordenar el cuerpo de los complejos?

Para que  $\mathbb{C}$  se pudiera ordenar debería existir un conjunto  $P$ , los complejos positivos, satisfaciendo las siguientes propiedades

- I) Para cada  $z \in \mathbb{C}$  no nulo  $z \neq 0$  se debe cumplir una y sólo una de las siguientes condiciones:  $z \in P$  ó  $-z \in P$ .
- II) Si  $z_1, z_2 \in P$  entonces  $z_1 z_2 \in P$  y  $z_1 + z_2 \in P$ .

Si dicho conjunto de números positivos existe, la relación de orden se define como sigue:  $z_1 \leq z_2$  si y solo si  $z_2 - z_1 \in P$  ó  $z_1 = z_2$ .

El problema, por supuesto, radica en las propiedades de la unidad imaginaria  $i$ . Fijémonos en que  $(-1)(-1) = 1$ , así que si  $-1 \in P$  tendríamos, de acuerdo con II), que  $1 \in P$ , lo cual contradice I), ya que  $0 \neq 1$ . Por ello, es necesario que  $-1$  no sea un complejo positivo,  $-1 \notin P$ . ¿Qué ocurre con  $i$ ? ¿Es  $i$  un complejo positivo o no lo es? Supongamos que la unidad imaginaria fuera un complejo positivo  $i \in P$ , entonces II) implica que  $ii = -1 \in P$ , lo que no es cierto, como acabamos de ver. Entonces, se debería tener que la unidad imaginaria es negativa  $-i \in P$ , ya que obviamente  $i \neq 0$ . Pero esto tampoco puede ser. Efectivamente, si  $-i \in P$  entonces  $(-i)(-i) = -1 \in P$ , que no es cierto. Por lo tanto, el conjunto de los complejos positivos no existe y concluimos que:

El cuerpo de los complejos no se puede ordenar



Es importante subrayar que  $\mathbb{R}^2$  se puede ordenar de muchas maneras. Por ejemplo, primero ordenamos en la primera componente, y luego en la segunda componente, o viceversa. El problema de esos posibles ordenamientos es que no respetan la suma y el producto, las operaciones que caracterizan la estructura de cuerpo.

**1.3.4. Tomando raíces cuadradas** Queremos ahora, dado un número complejo  $z = x + iy$ , encontrar su raíz cuadrada, esto es, otro número complejo  $w = u + iv$  tal que  $w^2 = z$ . Dicho esto, deberíamos antes de nada, preguntarnos que nos hace pensar que dichas raíces cuadradas existen. Por ejemplo, en el caso real ya sabemos que los números negativos no tienen raíces cuadradas. Justamente, para eso se empezaron a considerar los números imaginarios, y se introdujo  $i = \sqrt{-1}$ . Pero, *¿asegura la introducción de una sola raíz cuadrada, la de  $-1$ , la existencia de raíces cuadradas para cualquier elemento del nuevo cuerpo de los complejos?* Así formulada la cuestión no parece tan trivial. Pero la respuesta es que sí, que con la mera extensión mediante la unidad imaginaria aseguramos que todos los nuevos números tienen raíz cuadrada. Veamos cómo. En primer lugar, nos damos cuenta de que

$$w^2 = u^2 - v^2 + i2uv,$$

y que, por tanto, debemos resolver el sistema no lineal

$$(7) \quad \begin{cases} x = u^2 - v^2, \\ y = 2uv. \end{cases}$$


La resolución del cual pasa por observar que  $x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2$ , y así  $u^2 + v^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Utilizando (7) obtenemos las siguientes relaciones

$$(8) \quad u^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}, \quad v^2 = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}.$$

En resumidas cuentas, descartando el caso sencillo  $y = 0$  en donde tenemos la raíz real, para  $x > 0$  y la raíz de números negativos, los imaginarios, para  $x < 0$ , podemos expresar la raíz cuadrada  $w = \sqrt{x + iy}$  de un número complejo  $z = x + iy$  como sigue

$$(9) \quad \sqrt{x + iy} = \begin{cases} \pm \left( \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} \right), & y > 0, \\ \pm \left( \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} \right), & y < 0. \end{cases}$$

De las ecuaciones (8) obtenemos, salvo signo, los valores de  $u$  y  $v$ , simplemente se toma la raíz cuadrada real, ya conocida, y después elegimos el signo adecuado.

**Ejemplo:** Calculemos la raíz cuadrada de  $z = 3 + 4i$ , por ello debemos reemplazar en (9)  $x = 3$ ,  $y = 4$ , con  $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$ . Por tanto,  $u^2 = \frac{3+5}{2} = 4$  y  $v^2 = \frac{-3+5}{2} = 1$  y la raíz es  $\sqrt{3 + 4i} = \pm(2 + i)$ . 

**1.3.5. Raíces de ecuaciones cuadráticas complejas** Nos preocupamos ahora de la ecuación

$$(10) \quad az^2 + bz + c = 0$$

donde  $a, b, c \in \mathbb{C}$  son números complejos y buscamos soluciones complejas  $z \in \mathbb{C}$ . El resultado es que la fórmula bien conocida para el caso real se aplica tal cual en este contexto complejo. Para demostrarlo reproducimos el clásico argumento de completar cuadrados de Gauss. Así tenemos

$$\begin{aligned} a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 &= a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= az^2 + bz + \frac{b^2}{4a}, \end{aligned}$$

lo que conduce a  $az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ . Por tanto, las raíces de (10) son las raíces de  $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ , que tomando raíces cuadradas de números complejos, como acabamos de aprender, nos lleva a

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$



**Triángulo de Pascal**

**1.3.6. El binomio de Newton** La famosa fórmula del binomio de Newton también es cierta en el contexto de los números complejos. Así dados dos números complejos,  $z, w \in \mathbb{C}$  y el número natural  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k},$$

donde hemos utilizado los números binomiales  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  en términos de los factoriales de números naturales,  $k! := k(k-1)\cdots 1$ . Los números binomiales aparecen en otros contextos, como la teoría de la probabilidad, y fueron tratados por el matemático francés Blaise Pascal cuando estudiaba su famoso triángulo.<sup>2</sup> Esta fórmula se puede probar por inducción. Obvia-

mente es cierta para  $n = 1$ , supongámosla cierta para  $n$  y veamos que ocurre para  $n + 1$

$$\begin{aligned} (z + w)^{n+1} &= (z + w)(z + w)^n \\ &= (z + w)\left(z^n + nz^{n-1}w + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}w^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}z^2w^{n-2} + nzw^{n-1} + w^n\right) \\ &= z^{n+1} + (n+1)z^n w + \frac{(n+1)n}{2}z^{n-1}w^2 + \cdots + \frac{(n+1)n}{2}z^2w^{n-1} + (n+1)zw^n + w^{n+1}, \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado el Teorema de Pascal para los números binomiales o triangulares,  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ .<sup>3</sup>

<sup>2</sup> *Traité du triangle arithmétique* (1653).

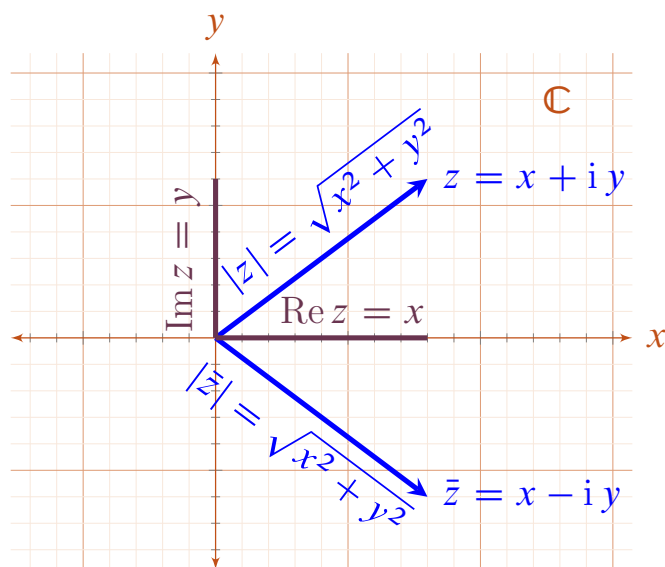
<sup>3</sup> Estas fórmulas eran familiares para los matemáticos hindúes como Pingala en el siglo segundo antes de nuestra era. De Pingala sólo quedan fragmentos, pero el comentarista Varahamihira, *circa* 505, dio una descripción de la fórmula y una explicación incluso más detallada fue dada por Halayudha, *circa* de 975.

**1.3.7. Conjugado, módulo, partes reales e imaginarias de un número complejo** Cuando hemos calculado el inverso de  $z = x + iy$  hemos visto que aparece el número  $x - iy$ . Este no es un número cualquiera, es muy relevante en el desarrollo de la teoría y se llama el **complejo conjugado** de  $z$  y lo denotamos por  $\bar{z} = x - iy$ .<sup>4</sup> Debemos notar que, tal como se ilustra en la figura, el complejo conjugado de un número  $z$  se obtiene con la reflexión especular, donde el espejo se sitúa en el eje real. Dos propiedades del complejo conjugado son

- I)  $\overline{(\bar{z})} = z$ , esto se conoce como una involución.
- II)  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ , esto se conoce como un homomorfismo.

Su demostración es fácil: Por un lado,  $\overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$  y por otro  $(x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ . También vimos la relevancia de lo que llamábamos longitud de  $z = x + iy$  y que era  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . A partir de ahora lo llamaremos **módulo de  $z$**  y usaremos la notación

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



**Complejo conjugado, módulo y partes real e imaginaria**

Usando el complejo conjugado podemos expresar el módulo como sigue

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

También llamaremos **partes reales e imaginarias** de  $z$ , denotadas por  $\operatorname{Re} z$  e  $\operatorname{Im} z$ , a sus proyecciones en los ejes reales e imaginarios, respectivamente. En términos del complejo conjugado tenemos

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} = x, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i} = y.$$

<sup>4</sup>Existe otra notación que es  $z^*$ .

**Desigualdad triangular**

$$z, w \in \mathbb{C}$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

DEMOSTRACIÓN. Esta importante desigualdad se puede demostrar como se hace en cálculo en  $\mathbb{R}^2$ , o bien usando el complejo conjugado. Para ello, escribimos

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} \\ &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}), \end{aligned}$$

y observamos que  $|z\bar{w}| = \sqrt{(\operatorname{Re} z\bar{w})^2 + (\operatorname{Im} z\bar{w})^2}$ , por lo que  $|z||w| = |z\bar{w}| \geq |\operatorname{Re} z\bar{w}|$ . Deducimos pues que  $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$ .  $\square$

De la desigualdad triangular se deriva

$$\left| |z| - |w| \right| \leq |z - w|.$$

Efectivamente, tenemos  $|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|$  o lo que es lo mismo  $|z| - |w| \leq |z - w|$ . Intercambiando  $z$  y  $w$  llegamos a  $|w| - |z| \leq |z - w|$ . Como  $||z| - |w|| = \max(|z| - |w|, -|z| + |w|)$  obtenemos a la desigualdad. También se puede deducir que siempre que  $|z| > |w|$  se satisface la siguiente desigualdad  $\frac{1}{|z-w|} \leq \frac{1}{|z|-|w|}$ .

**1.3.8. Argumento de un número complejo** La representación polar de los vectores en el plano nos conduce a la idea de módulo  $|z|$  y argumento  $\arg z$  de un número complejo  $z = x + iy$ ,

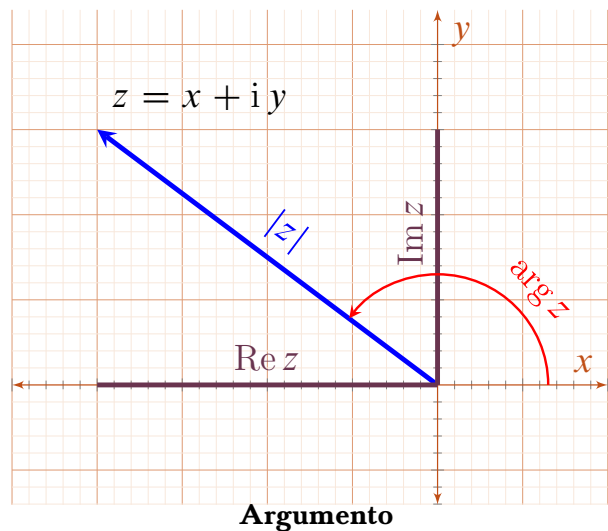
$$z = |z|(\cos \arg z + i \operatorname{sen} \arg z)$$

o, usando la fórmula de Euler,

$$z = |z|e^{i \arg z}.$$

Ahora entra en juego una importante observación. Las funciones trigonométricas  $\cos \theta$  y  $\operatorname{sen} \theta$  son  $2\pi$ -periódicas, i.e.,  $\cos(\theta + 2\pi k) = \cos \theta$  y  $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi k) = \operatorname{sen} \theta$  para  $k \in \mathbb{Z}$ . Por ello, el argumento está indeterminado y  $\arg z$  no es una función, al menos en el sentido usual de asignar un único valor de la variable dependiente para cada valor de la variable independiente. Tenemos muchos posibles valores, existe multivaluación, y por ello el argumento asigna a cada  $z$  un conjunto, numerable e infinito, de posibles argumentos. Si  $\theta$  es un posible argumento también lo son, por ejemplo,  $\theta + 2\pi$  ó  $\theta + 68\pi$ . Así, la unidad imaginaria se puede escribir como

$$i = 1 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Argumento

O bien, los posibles argumentos de  $-1 - i$  son

$$\arg(-1 - i) = \left\{ \frac{5\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Podemos eliminar esta ambigüedad eligiendo una determinación. Esto es, escogiendo un intervalo semiabierto  $I$  de longitud  $2\pi$  en donde yacerá uno y exclusivamente uno de los posibles valores del argumento. El intervalo  $I$  será semiabierto, esto es de la forma  $I = (a, a + 2\pi]$  ó  $I = [a, a + 2\pi)$ . Ejemplos de determinaciones los dan  $I = [0, 2\pi)$  o la determinación principal  $I = (-\pi, \pi]$ . El argumento asociado al intervalo  $I$  se denota por  $\arg_I z$ :

$$\arg_I z = \theta, \quad \theta \in \arg z \cap I.$$

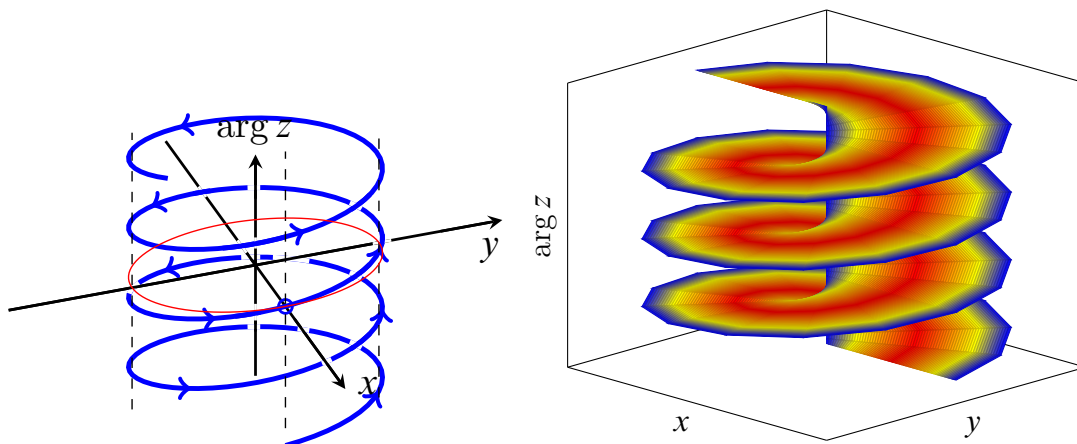
Por ejemplo,  $\arg_{[0, 2\pi)} i = \frac{\pi}{2}$ ,  $\arg_{[0, 2\pi)}(-i) = \frac{3\pi}{2}$ ,  $\arg_{(-\pi, \pi]} i = \frac{\pi}{2}$  y  $\arg_{(-\pi, \pi]}(-i) = -\frac{\pi}{2}$ . La determinación principal del argumento se denota por

$$\text{Arg } z = \arg_{(-\pi, \pi]} z.$$

### Propiedades del argumento

- $\arg(zw) = \arg z + \arg w$ , mód  $2\pi$ .
- $\arg(z^{-1}) = -\arg z$ , mód  $2\pi$ .
- $\arg(\bar{z}) = -\arg z$ , mód  $2\pi$ .
- $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$ , mód  $2\pi$ .

A continuación representamos los diferentes argumentos de los números complejos de módulo unidad, los que yacen el círculo de radio 1. La espiral representa los diferentes posibles valores del argumento. También dibujamos, a su derecha, la superficie parametrizada  $(r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$ , que atrapa la esencia de la función argumento. A cada número complejo  $z = r \cos \theta + i r \sin \theta$ , le asignamos una altura  $\theta$ , y obtenemos una superficie tipo *sacacorchos* de paso  $2\pi$ .



**Dos descripciones gráficas del comportamiento del argumento de un número complejo**

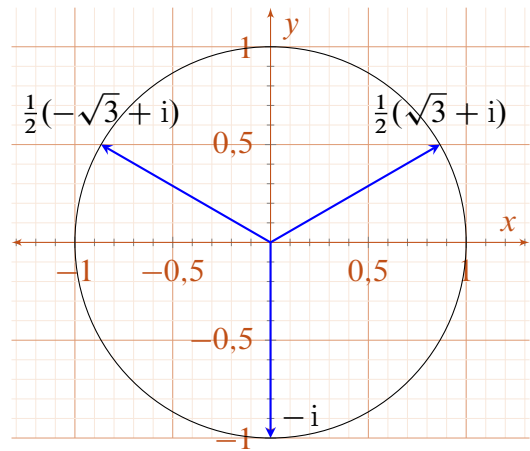
**1.3.9. Raíces  $n$ -ésimas** Dado un número complejo  $z = x + iy = r e^{i\theta}$  vamos a encontrar sus raíces  $n$ -ésimas, esto es, los números complejos  $w \in \mathbb{C}$  tales que  $w^n = z$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Si representamos a  $w$  de acuerdo con su representación polar, esto es, según la fórmula de Euler, tendremos

$$w = \rho e^{i\phi}, \quad \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \phi = \frac{\theta}{n} \pmod{\frac{2\pi}{n}}.$$



**Ejemplo:** hay tres raíces cúbicas de la unidad imaginaria

$$\sqrt[3]{i} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), \\ e^{i\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i), \\ e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i. \end{cases}$$



Raíces cúbicas de la unidad imaginaria

## §I.4. Aplicaciones

**U**RATAREMOS aquí algunas aplicaciones de los aspectos tratados hasta ahora sobre la manipulación de los números complejos; esto es, de la aritmética compleja. Comenzamos, en primer lugar, con un buen número de identidades trigonométricas, todas consecuencia de la fórmula de De Moivre, i.e. de la fórmula de Euler. Muy ligado a ello está, como veremos a continuación, la fórmula de Viète para la solución de la ecuación cúbica reducida, en términos de operaciones geométricas en el círculo, como trisecar un ángulo. Después, veremos como los complejos pueden ser de ayuda para la Geometría.

**1.4.1. Identidades trigonométricas** De la fórmula de Euler deducimos

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

Pero cómo  $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$  concluimos la conocida

### Fórmula de De Moivre

$$\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n,$$

ya vista anteriormente. Tomando partes reales e imaginarias y usando la fórmula de binomio de Newton obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} n\theta &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^k \theta \operatorname{sen}^{n-k} \theta \operatorname{sen} \frac{(n-k)\pi}{2}, \\ \cos n\theta &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^k \theta \operatorname{sen}^{n-k} \theta \cos \frac{(n-k)\pi}{2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Para  $n = 3$  tenemos



$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3 \\ &= (\cos^3 \theta)^3 - 3 \cos \theta (\operatorname{sen} \theta)^2 + i(-(\operatorname{sen} \theta)^3 + 3(\cos \theta)^2 \operatorname{sen} \theta)\end{aligned}$$

y por ello

$$(11) \quad \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta,$$

$$(12) \quad \operatorname{sen} 3\theta = -\operatorname{sen}^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta = -4 \operatorname{sen}^3 \theta + 3 \operatorname{sen} \theta.$$

El razonamiento inverso también es útil. Expresar potencias de funciones trigonométricas de un ángulo dado como combinación lineal de funciones trigonométricas de múltiplos de ese ángulo. Para eso utilizamos las identidades, que se siguen de la fórmula de Euler,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

de las que inferimos que

$$2^n \cos^n \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-2k)\theta}, \quad (2i)^n \operatorname{sen}^n \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(n-2k)\theta}.$$

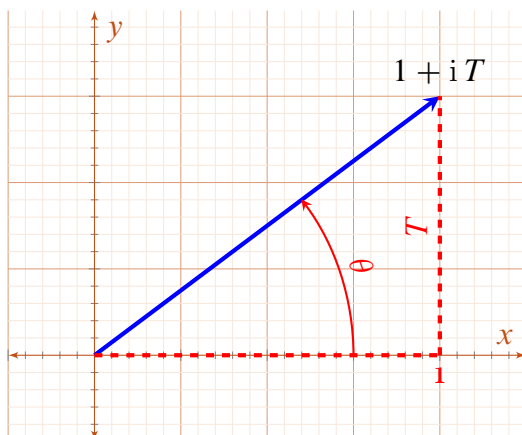
De la primera deducimos que

$$4^m \cos^{2m} \theta = 2 \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} \cos(2(m-k)\theta) + \binom{2m}{m}, \quad 4^m \cos^{2m+1} \theta = \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{k} \cos((2(m-k)+1)\theta),$$

y de la segunda

$$\begin{aligned}4^m \operatorname{sen}^{2m} \theta &= 2 \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} (-1)^{m-k} \cos(2(m-k)\theta) + \binom{2m}{m}, \\ 4^m \operatorname{sen}^{2m+1} \theta &= \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{k} (-1)^{m-k} \operatorname{sen}(2(m-k)+1)\theta.\end{aligned}$$

Por ejemplo,  $\cos^4 \theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3)$ . Estas relaciones son útiles para hallar primitivas,  $\int \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{1}{8}(-\frac{1}{4} \operatorname{sen} 4\theta - 2 \operatorname{sen} 2\theta + 3\theta) + \text{constante}$ .



**La tangente**

Otra posible aplicación para relacionar potencias de la tangente de un ángulo dado y las tangentes de múltiplos de ese ángulo se puede manipulando el número complejo  $z = 1 + iT$ , donde tenemos que  $T = \tan \theta$ . Usando el binomio de Newton, calculamos  $z^n = (1 + iT)^n$  y obtenemos sus partes real e imaginaria  $\operatorname{Re}((1 + iT)^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^{n-k} \cos \frac{(n-k)\pi}{2}$  y  $\operatorname{Im}((1 + iT)^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^{n-k} \sin \frac{(n-k)\pi}{2}$ . Como  $z^n = (\sqrt{1 + T^2})^n e^{in\theta}$ , se llega a

$$\tan n\theta = \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{n-k} \theta \sin \frac{(n-k)\pi}{2}}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{n-k} \theta \cos \frac{(n-k)\pi}{2}}.$$



**Ejemplo:**  $z^3 = (1 + iT)^3 = (1 - 3T^2) + i(3T - T^3)$  y concluimos  $\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$ .

FRANCISCI VIETÆ  
O P E R A  
M A T H E M A T I C A,

In unum Volumen congesta,  
ac recognita,

*Operâ atque studio*

FRANCISCI à SCHOOTEN Leydenfis,  
Matheseos Professoris.



LVGDVNI BATAVORVM,

Ex Officinâ Bonaventuræ & Abrahami Elzeviriorum.

Pa. 456 564

MDCLXVI

*Opera mathematica de Viète*

84



FRANCISCI VIETÆ  
DIS  
RECOGNITIONE ÆQVATIONVM  
TRACTATVS PRIMVS.

C A P V T I.

*De dignoscenda æquationum constitutione ex Zetesi,  
Plasmate, & Syncrifi.*



Eneralem & generaliter traditam de numerosa potestatum resolutione doctrinam, informat & perficit tractatus de recognitione æquationum: præparatione enim indigent æquationes sæpe-numero, antequam feliciter explicentur: ac præsertim quum potestates de homogeneis magnitudinibus negantur; vel ita mixtim homogeneæ magnitudines de potestatibus negantur & affirmantur, ut affectiones negatæ adfirmatis præpollent; ac denique quotquot æquationes fractis numeris vel asymmetris exhibentur.

In Geometricis quidem, accidens fractionis vel asymmetriæ non solet æquationibus officere, quo minus *ἀπληγῶς* explicentur: sicuti neque vitium negationis: est enim certum semper subiectum, sub quo operetur Geometra: at obest *ἀλυσιβία*, & quo elatior est potestas, affectionisque gradus, eo major se prodit in explicando Problemate *ἀρρητῶς ἢ ἀλογία*.

Ecquid vero æquationis, quæ proposita est, agnita constitutione non rentabit Analysta, quo saxa & scopulos refugiat? num gnarus Anatomices invertet, deprimet, attollet, & undique operabitur secure? nova, quum res postulaverit, suscepta Zetesi sub alio, quam qui proponebatur, termino, ad propositum tamen habente datam differentiam vel rationem.

Omnino æquationum origo, & prima constitutio scitu digna est, nullaque non solertia ab Analysta capescenda & adsequenda, quo sibi pateat ad eam reductionis via.

Æqualitatum constitutio potissimum deprehenditur Zetesi, Plasmate, & Syncrifi.

C A P V T II.

*De Zetesi.*

Zetesi non instituet temere neque *ἀπληγῶς* Analysta, quum pura è puris, affecta ex affectis proficisci dicter ratio: & ideo ad deprehendum æquationum ad potestates puras pertinentium conditionem, is ex affectu duobus lateribus potestates inquiret.

Ad æquationes adfectarum simpliciter potestatum, investigabit ex data diff-

*Æquationum recognitione et emendatione  
de Viète*



**1.4.2. La fórmula de Viète para la cúbica y la geometría del círculo. Trisecando ángulos** Antes hemos discutido cómo las cantidades imaginarias empezaron a abrirse paso en el S XVI como elementos útiles a la hora de encontrar soluciones reales de ecuaciones algebraicas, como la ecuación cúbica. Pero en el S XVII se dieron cuenta que dichas soluciones se pueden encontrar de forma geométrica. Efectivamente, el matemático francés François Viète encontró una forma particularmente simple, y con un profundo significado geométrico, de resolver la ecuación cúbica. Relacionó el caso *irreducible*, esto es con tres raíces reales, de la cúbica con la geometría del círculo. En *De Aequationem Recognitione et Emendatione Tractatus Duo* (1615) presentó la solución que ahora discutiremos.



ALITER,

TERTIVM THEOREMA.

**S**i A cubus — B quad. 3 in A, æquetur B quad. in D, sit autem B major D semisse: B quad. 3 in E, — E cubo æquabitur B quad. in D.

Et sunt duo triangula rectangula æqualis B hypotenusæ, ita ut angulus acutus subtensus à perpendicularo primi, sit triplus ad angulum acutum subtensum à perpendicularo secundi; basis vero dupla primi, est D, & sit A dupla basis secundi. E vero basis simpla secundi, contracta, protractave longitudine ejus quæ potest quadrato triplum perpendiculari ejusdem.

1 C — 300 N. æquetur 432. vel etiam 300 N. — 1 C æquetur 432. sunt duo triangula rectangula, quorum hypotenusæ communis est 10: ita ut angulus acutus primi, à perpendicularo videlicet subtensus, sit triplus ad acutum secundi, à suo quoque perpendicularo subtensum; basis autem primi dupla, est  $\frac{4}{3}\frac{32}{100}$ . & 1 N in æqualitate directe negata est basis dupla secundi: in inverse vero negata, est basis simpla secundi, plus minusve ea quæ potest quadrato triplum perpendicularum secundi.

Constituta hypotenusæ communis 10, basi secundi trianguli 9, sit perpendicularum ejusdem secundi  $\sqrt{19}$ .

Primi vero hypotenusæ stante 10, sit basis  $2\frac{16}{100}$ , itaque quum in ea hypothese dicatur 1 C — 300 N. æquari 432, fiet 1 N 18, vel quum dicatur 300 N. — 1 C æquari 432, fiet 1 N. 9 +  $\sqrt{57}$ , vel 9 —  $\sqrt{57}$ .

Párrafo de Viète

*De Aequationem Recognitione et Emendatione Tractatus Duo* (1615)

Este trabajo fue publicado de forma póstuma por el escocés Alexander Anderson por encargo de los herederos de Viète. La portada que se recoge en la figura adjunta corresponde a la recopilación de la obra completa de Viète por el matemático holandés Frans van Schooten y publicada en 1856 en Lieden. (Una de las primeras ediciones de lo que después sería y es Elsevier, uno de los mayores monopolios editoriales científicos de hoy en día.)

En primer lugar, presentaremos su discusión algebraica. Para ello recordamos (11) poniendo  $C = \cos \theta$ ,  $\cos 3\theta = 4C^3 - 3C$ . Por otro lado, escribimos la cúbica reducida (1) usando la variable  $x = 2\sqrt{p}C$ , esto es  $4C^3 - 3C = \frac{q}{p\sqrt{p}}$ . Si pedimos  $q^2 \leq p^3$  (i.e.,  $|\frac{q}{p\sqrt{p}}| \leq 1$ ) existirá un  $\phi$  tal que  $\frac{q}{p\sqrt{p}} = \cos \phi$ , que nos permite resolver la ecuación cúbica con



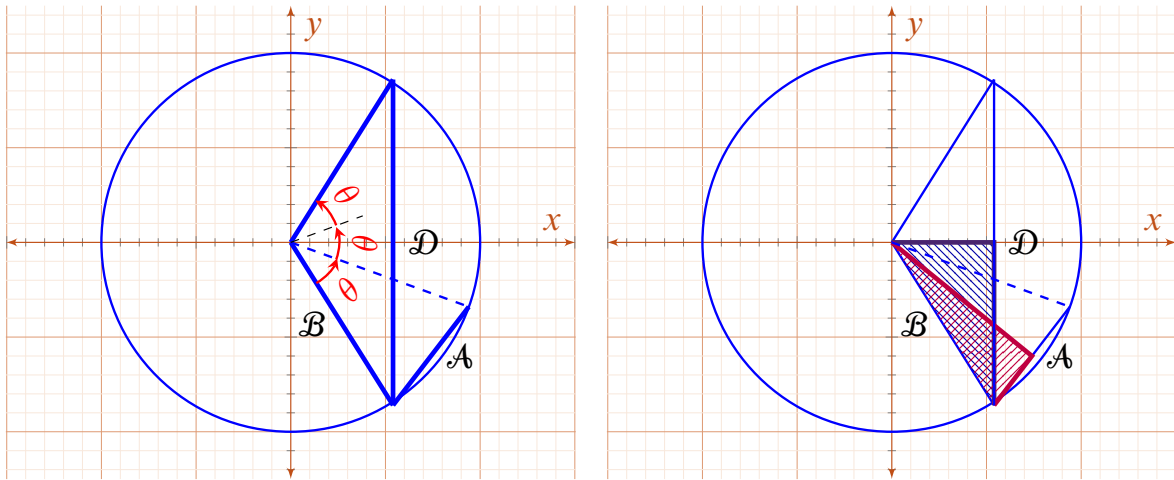
**François Viète**  
(1540-1603)

$$x = 2\sqrt{p} \cos\left(\frac{\arccos \frac{q}{p\sqrt{p}} + 2m\pi}{3}\right), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad q^2 \leq p^3.$$

Donde hemos usado (11) para identificar las soluciones con  $\theta = \frac{\phi+2m\pi}{3}$ , donde  $m \in \mathbb{Z}$ . Por ejemplo, si consideramos la ecuación sencilla  $x^3 = 3x$ , tenemos  $p = 1$  y  $q = 0$ , por lo que podemos escoger  $\phi = 90^\circ$ , y por ello los posibles ángulos serán  $\theta \in \{30^\circ, 90^\circ, 150^\circ\}$ , y las correspondientes raíces son  $\{\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}\}$ .<sup>5</sup>

Discutimos ahora su relación con la geometría del círculo. Viète nos dice, en terminología moderna, lo siguiente: *Si  $\mathcal{A}$  cubo menos  $\mathcal{B}$  cuadrado tres veces por  $\mathcal{A}$  se iguala a  $\mathcal{B}$  cuadrado por  $\mathcal{D}$ , donde  $\mathcal{B}$  es mayor que la mitad de  $\mathcal{D}$ :  $\mathcal{B}$  cuadrado (tres veces) por  $\mathcal{E}$  menos  $\mathcal{E}$  cubo será igual a  $\mathcal{B}$  cuadrado por  $\mathcal{D}$ .*

*Y hay dos triángulos rectángulos con igual hipotenusa  $\mathcal{B}$ , tal que el ángulo agudo subtendido por la perpendicular de la primera, es el triple del ángulo agudo subtendido por la perpendicular de la segunda; mientras que el doble de la base de la primera, es  $\mathcal{D}$ , haciendo que el doble de la base de la segunda sea  $\mathcal{A}$ .*



Esto es, Viète describe como la cuerda  $\mathcal{A}$  de un arco trisecado asociado a la cuerda  $\mathcal{D}$  de un círculo de radio  $\mathcal{B}$  es la solución de la ecuación cúbica  $\mathcal{A}^3 - 3\mathcal{B}^2\mathcal{A} = \pm\mathcal{B}^2\mathcal{D}$ , que en la notación de (1) será  $p = \mathcal{B}^2$  y  $q = \pm\frac{\mathcal{B}^2\mathcal{D}}{2}$ . Aunque Viète no hace ningún diagrama, ilustra su esquema con el ejemplo en la letra pequeña, que trata la ecuación  $\mathcal{N}^3 - 300\mathcal{N} \pm 432 = 0$ . La condición  $\mathcal{B} > \mathcal{D}/2$  es justamente  $q^2 < p^3$ , que implica la existencia de tres raíces reales. Para demostrar el resultado geométrico de Viète usaremos (12) con  $\theta/2$ :  $2\sin\frac{3\theta}{2} = 3\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) - \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^3$ . Pero, de la figura queda claro que  $2\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$  y también que  $2\sin\frac{3\theta}{2} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{B}}$  y, por tanto, de la relación para el seno triple obtenemos  $\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{B}} = 3\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} - \frac{\mathcal{A}^3}{\mathcal{B}^3}$ , i.e.,  $\mathcal{A}^3 - 3\mathcal{B}^2\mathcal{A} + \mathcal{B}^2\mathcal{D} = 0$ .

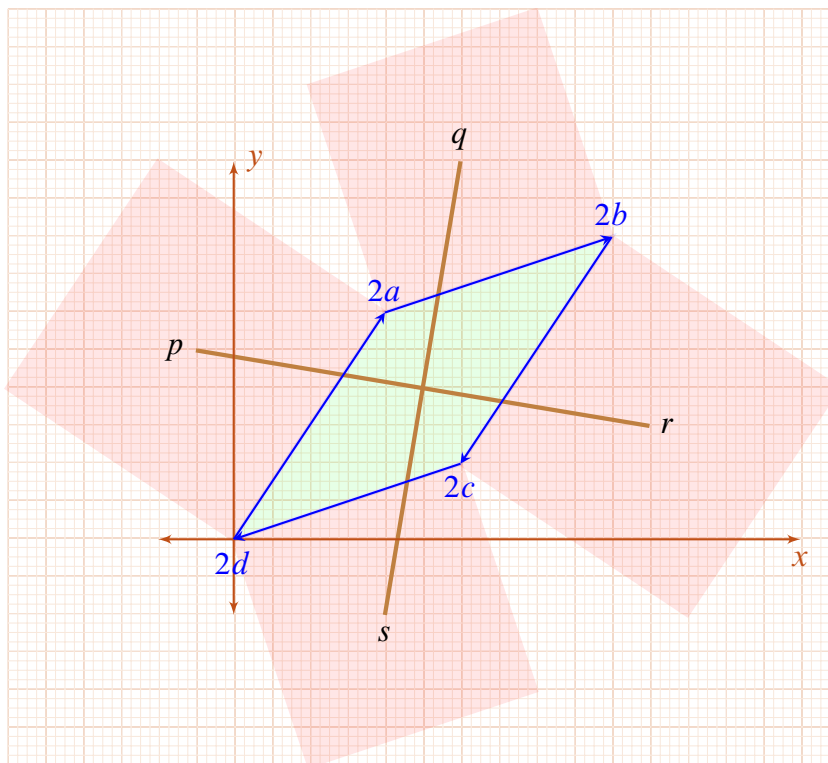
<sup>5</sup>Más adelante vamos a introducir las extensiones complejas  $\cos z$  y  $\sin z$  de las funciones trigonométricas, y estas van a satisfacer las mismas relaciones de adición que cumplen las funciones trigonométricas reales, es decir seguirán cumpliendo (11) y (12). Además, estas extensiones complejas de las funciones trigonométricas son  $2\pi$ -periódicas y visitan cada punto del plano complejo un número infinito de veces. Por ello, dado uno de esos infinitos puntos  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $\cos w = \frac{q}{p\sqrt{p}}$ , cómo  $\cos 3z = 4\cos^3 z - 3\cos z$ , podemos expresar la solución de la ecuación cúbica (1) como  $x = 2\sqrt{p} \cos\left(\frac{\arccos \frac{q}{p\sqrt{p}} + 2m\pi}{3}\right)$  con  $m \in \mathbb{Z}$ .

Más tarde, inspirado por Viète, René Descartes en su *La Géométrie* mejora el resultado hallando las dos raíces positivas de la cúbica. En este caso triseca el arco internamente, cómo lo hace Viète, pero también externamente.

La fórmula de Viète resolvía de forma geométrica el problema de hallar las raíces de la cúbica (1), evitando el uso de números complejos, esos números *inútiles* según Cardano y que Bombelli uso para encontrar las raíces reales de la cúbica. Un sencillo ejercicio lleva de un resultado a otro, ¿existe un resultado a la Viète para la cuártica?

**1.4.3. Un problema de Geometría** Veamos como lo que hemos visto sobre la aritmética de los números complejos nos permite construir un resultado de la Geometría Clásica (;de los griegos!).

Sea un paralelogramo cualquiera, construyamos en cada lado un cuadrado, unamos los centros de los cuadrados que yazcan en lados opuestos. Entonces, las rectas que unen estos centros tienen la misma longitud y se cortan perpendicularmente.



Para demostrarlo vamos a llamar  $2a, 2b, 2c$  y  $2d$  a los lados orientados del paralelogramo, i.e., los vectores que van de un vértice a su vértice contiguo en sentido horario, obviamente tendremos  $a+b+c+d = 0$ . También es cierto que los centros de los cuadrados, que designamos

como  $p, q, r$  y  $s$ , ver figura, se relacionan con  $a, b, c$  y  $d$  a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned} p &= a + ia, & q &= 2a + b + ib, \\ r &= 2a + 2b + c + ic, & s &= 2a + 2b + 2c + d + id, \end{aligned}$$

en donde hemos tenido en cuenta que  $iz$  rota, en sentido antihorario, al complejo  $z$  justo  $\pi/2$  radianes. Por tanto, los números complejos  $A := s - q$  y  $B := r - p$  representan los segmentos que unen los cuadrados. Calculemos ahora

$$\begin{aligned} A + iB &= s - q + ir - ip \\ &= (2a + 2b + 2c + d - 2a - b - c + a) + i(d - b + 2a + 2b + c - a) \\ &= (a + b + c + d)(1 + i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así pues,  $A = -iB$  lo que implica  $|A| = |B|$  y  $A \perp B$ , como queríamos demostrar.

### §1.5. Ejercicios

- i) Demostrar que si  $|z| = 1$  entonces, dados  $a, b \in \mathbb{C}$  cualesquiera, se tiene

$$\left| \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \right| = 1.$$

**Solución:** Como  $|az + b|^2 = (az + b)\overline{az + b} = (az + b)(\bar{a}\bar{z} + \bar{b}) = |a|^2|z|^2 + |b|^2 + a\bar{b}z + \bar{a}b\bar{z} = |a|^2 + |b|^2 + a\bar{b}z + \bar{a}b\bar{z} = |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(a\bar{b}z)$ . Usando esta expresión cambiando  $a \rightarrow \bar{b}$  y  $b \rightarrow \bar{a}$  concluimos que  $|\bar{b}z + \bar{a}|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{a}b\bar{z})$  y como  $\operatorname{Re} Z = \operatorname{Re} \bar{Z}$  obtenemos el resultado.

- ii) Describir el conjunto de números complejos tales que  $\operatorname{Re}(z^2 + 5) = 0$ .

**Solución:** Como  $z^2 + 5 = x^2 - y^2 + 5 + 2ixy$ , tenemos que  $\operatorname{Re}(z^2 + 5) = x^2 - y^2 + 5$ , luego el lugar pedido es la hipérbola equilátera  $y^2 - x^2 = 5$ .

- iii) Dados dos números complejos  $z, w \in \mathbb{C}$  demostrar la regla del paralelogramo  $|z - w|^2 + |z + w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ .

**Solución:** Recordando que  $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$ ,  $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$  se obtiene el resultado.

- iv) Para el número complejo  $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$ :

- Hallar su forma binómica (como suma de parte real e imaginaria) y exponencial
- demostrar que  $z^4 = z$
- encontrar las raíces cuartas de  $z$ .
- determinar todos los números complejos que son raíces cuartas de sí mismos

**Solución:**

- El número  $z$ , al ser el cociente de un número complejo y su conjugado tiene módulo unidad  $|z| = 1$ , además  $\arg(1 \pm i\sqrt{3}) = \pm \frac{\pi}{3}$  mód  $2\pi$ , luego  $\arg z = \frac{2\pi}{3}$  mód  $2\pi$  y  $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ . Esto es,  $z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- $z^4 = e^{i\frac{8\pi}{3}} = e^{i2\pi} e^{i\frac{2\pi}{3}} = z$ .

- c) Las raíces cuartas de  $z$  son los números  $z = e^{i(\frac{2\pi}{3} + i2\pi k)/4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Esto es, el conjunto de raíces cuartas es  $\{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{7\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}\}$
- d) Los números que satisfacen  $z^4 = z$  son aquellos tales que  $z(z^3 - 1) = 0$  esto es  $z = 0$  ó las raíces cúbicas de la unidad  $z^3 = 1$ . Esto es, el conjunto pedido es  $\{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\}$ .
- v) Usando la fórmula de Euler demostrar las identidades trigonométricas de la semidiferencia y semisuma

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}, \quad \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

**Solución:**

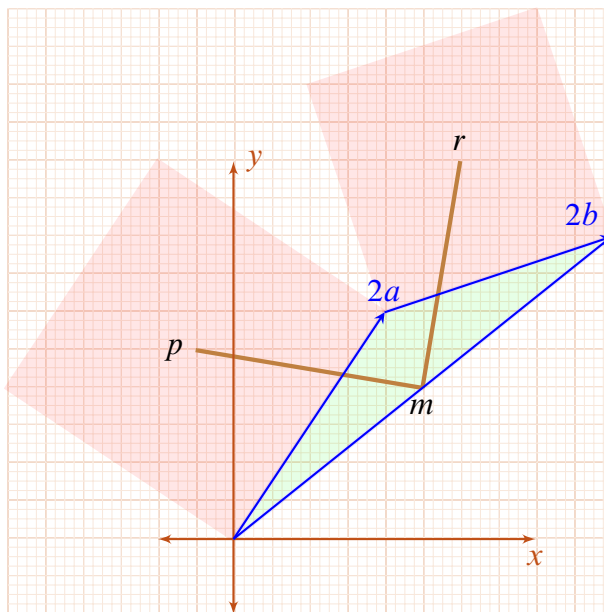
$$a) \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{e^{i\frac{x+y}{2}} - e^{-i\frac{x+y}{2}}}{2i} \frac{e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{-i\frac{x-y}{2}}}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{iy} - e^{-iy} + e^{-ix}}{4}.$$

$$b) \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{e^{i\frac{x+y}{2}} + e^{-i\frac{x+y}{2}}}{2} \frac{e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{-i\frac{x-y}{2}}}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{iy} + e^{-iy} - e^{-ix}}{4i}.$$

$$c) \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{e^{i\frac{x+y}{2}} + e^{-i\frac{x+y}{2}}}{2} \frac{e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\frac{x-y}{2}}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{iy} + e^{-iy} + e^{-ix}}{4}.$$

$$d) \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{e^{i\frac{x+y}{2}} - e^{-i\frac{x+y}{2}}}{2i} \frac{e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\frac{x-y}{2}}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{iy} - e^{-iy} - e^{-ix}}{4i}.$$

- vi) Dado un triángulo arbitrario se construye cuadrados sobre dos lados, y se unen los centros de éstos con el punto medio del lado opuesto del triángulo. Demostrar que dichos segmentos tienen la misma magnitud y se encuentran perpendicularmente. Ver figura



**Solución:** Como en el caso del rombo, tenemos  $p = a + ia$ ,  $r = 2a + b + ib$  y  $m = a + b$ . Por lo tanto,  $r - m = a + ib$  y  $p - m = ia - b = i(r - m)$ . Esto es, los segmentos son perpendiculares y miden lo mismo.

- vii) Dados dos números complejos  $a, b \in \mathbb{C}$ , hallar el conjunto de puntos  $z \in \mathbb{C}$  del plano complejo que cumplen

- a)  $|z - a| = |z - b|$   
 b)  $|z - a||z - b| = r$

**Solución:**

- a) Los puntos  $z$  equidistan de los dos puntos  $a$  y  $b$ , esto es conforman la recta mediatriz entre esos dos puntos. En cartesianas será

$$(x - \operatorname{Re} a)^2 + (y - \operatorname{Im} a)^2 = (x - \operatorname{Re} b)^2 + (y - \operatorname{Im} b)^2$$

que desarrollada da

$$\operatorname{Im}(a - b)y - \operatorname{Re}(a - b)x + |b|^2 - |a|^2 = 0.$$

- b) Es un ovalo de Cassini.

VIII) Dados los números complejos  $w_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ , para  $k \in \{1, \dots, n\}$ :

- a) Demostrar que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (w_k)^m = \begin{cases} 0, & m \notin \dot{n}, \\ 1, & m \in \dot{n}, \end{cases}$$

donde  $\dot{n} := \{nk, k \in \mathbb{N}\}$  denota el conjunto de múltiplos naturales de  $n$ .

- b) Si  $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{2n-1} z^{2n-1}$  es un polinomio arbitrario de grado  $2n - 1$  se tiene

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(w_k) = a_0 + a_n.$$

**Solución:**

- a) Tenemos que si  $m \notin \dot{n}$  que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (w_k)^m &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{i\frac{2\pi km}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( e^{i\frac{2\pi m}{n}} \right)^k = \frac{1}{n} \left( \frac{e^{i\frac{2\pi m}{n}(n+1)} - 1}{e^{i\frac{2\pi m}{n}} - 1} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \frac{e^{i2\pi m} e^{i\frac{2\pi m}{n}} - 1}{e^{i\frac{2\pi m}{n}} - 1} - 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

y si  $m \in \dot{n}$  que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (w_k)^m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{i\frac{2\pi km}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( e^{i\frac{2\pi m}{n}} \right)^k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1^k = 1$$

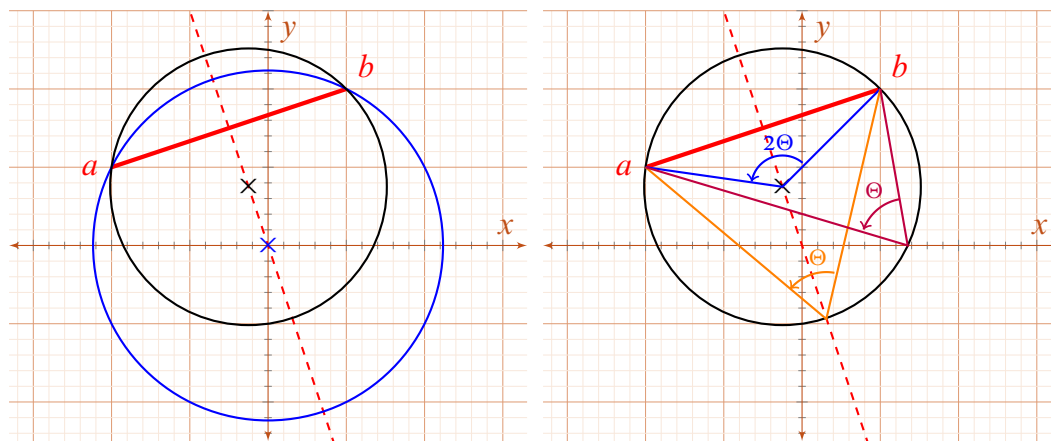
- b) Procedemos como sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(w_k) &= \frac{1}{n} \left( a_0 \sum_{k=1}^n 1 + a_1 \sum_{k=1}^n w_k + a_2 \sum_{k=1}^n (w_k)^2 + \dots + a_{n-1} \sum_{k=1}^n (w_k)^{n-1} + a_n \sum_{k=1}^n (w_k)^n \right. \\ &\quad \left. + a_{n+1} \sum_{k=1}^n (w_k)^{n+1} + \dots + a_{2n-1} \sum_{k=1}^n (w_k)^{2n-1} \right) \\ &= a_0 + a_n \end{aligned}$$

IX) Dados  $a, b \in \mathbb{C}$  y  $\Theta \in \mathbb{R}$  describir el conjunto de puntos  $z \in \mathbb{C}$  tales que  $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \Theta$ .

Ayudas:

- Todos los ángulos inscritos en un mismo círculo que subtenden el mismo arco son iguales (Proposición III.21 de los *Elementos* de Euclides) y si  $\angle CAD = \angle CBD$ , ángulos orientados de forma similar entonces los puntos  $A, B, C$  y  $D$  son concíclicos (existe un círculo que los contiene).
- Teorema del ángulo inscrito: *El ángulo central que subtende un arco (con respecto al centro del círculo) es el doble que el ángulo inscrito por ese arco* (Proposición III.20 de los *Elementos* de Euclides).
- Por dos puntos  $a$  y  $b$  pasan infinitas circunferencias, estando todas ellas centradas en la bisectriz de  $a$  y  $b$ .



**Solución:** Las circunferencias que pasan por  $a$  y  $b$  están todas centradas en la bisectriz de esos dos puntos en el plano complejo. Dicha bisectriz tiene como ecuación paramétrica

$$C(t) = \frac{a+b}{2} + i \frac{b-a}{2}t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

El ángulo  $2\Theta(t) = \angle abC(t)$  se calcula como sigue. Observemos que los radios que unen los puntos  $a$  y  $b$  con el centro de la circunferencia

$$\begin{aligned} a - C(t) &= a - \frac{a+b}{2} + i \frac{b-a}{2}t = -\frac{b-a}{2}T(t), & T(t) &:= 1 + it, \\ b - C(t) &= b - \frac{a+b}{2} + i \frac{b-a}{2}t = \frac{b-a}{2}\overline{T(t)}, \end{aligned}$$

Por ello,

$$2\Theta(t) = \arg\left(-\frac{T(t)}{\overline{T(t)}}\right)$$

y si escribimos  $T(t) = |T(t)|e^{i\theta(t)}$ ,  $|T(t)| = \sqrt{1+t^2}$  y  $\theta(t) = \arctan t \pmod{2\pi}$ , tendremos  $-\frac{T(t)}{T(t)} = e^{2i(\theta - \frac{\pi}{2})}$  y

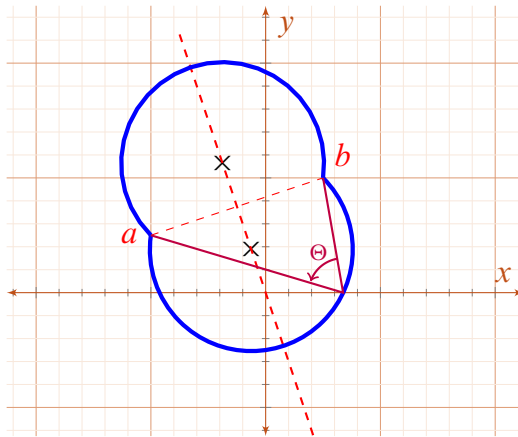
$$\Theta(t) = \theta(t) - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Por lo tanto,  $t = \cot \Theta$  y los centros correspondientes a un ángulo inscrito  $\Theta$  serán

$$C_{\pm}(\theta, a, b) = \frac{a+b}{2} + i \frac{b-a \cos \Theta}{2 \sin \Theta},$$

y existen dos posibles centros con el mismo ángulo inscrito, a la derecha y a la izquierda del segmento que une los puntos  $a$  y  $b$ . Pero, ahora bien, los puntos  $z$  sobre los lados largos, determinados por el segmento  $ab$ , de esas circunferencias con centros  $C_{\pm}$  y que pasa por  $a$  y  $b$  tiene justamente como ángulo inscrito a  $\Theta$  (los lados cortos tendrían  $-\Theta$ ). Esto es,

$$\arg \frac{z-a}{z-b} = \arg(z-a) - \arg(z-b) = \Theta.$$



x) Demostrar que  $\tan \frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$ . Ayuda: Considerar  $e^{i\pi/4}$  y  $e^{i\pi/2}$ , su suma y la forma polar.

**Solución:** Por un lado,  $e^{i\pi/4} + e^{i\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) + i = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i(1+\sqrt{2}))$  y, por el otro, tenemos  $e^{i\pi/4} + e^{i\pi/2} = e^{i3\pi/8}(e^{i\pi/8} + e^{-i\pi/8}) = 2e^{i3\pi/8} \cos \pi/8$ . Comparando la tangente del argumento de ambas expresiones, binomial y polar, obtenemos el resultado pedido.

xi) Probar que

$$\binom{2m}{1} - \binom{2m}{3} + \dots + (-1)^{m+1} \binom{2m}{2m-1} = 2^m \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2}.$$

**Solución:** Es una consecuencia de la forma real de las fórmulas de De Moivre,

$$\operatorname{sen} n\theta = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^k \theta \operatorname{sen}^{n-k} \theta \operatorname{sen} \frac{(n-k)\pi}{2},$$



donde ahora  $n = 2m$  es un número par y  $\theta = \pi/4$ , así

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2m}{k} \left(\cos \frac{\pi}{4}\right)^k \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)^{n-k} \operatorname{sen} \frac{(2m-k)\pi}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}^{2m}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2m}{k} \operatorname{sen} \frac{(2m-k)\pi}{2}\end{aligned}$$

y observando  $\operatorname{sen} \frac{(2m-k)\pi}{2}$  vale, consecutivamente,  $\pm 1$  cuando  $k$  es impar y se anula para  $k$  par obtenemos el resultado pedido.

XII) Demostrar las fórmulas de Lagrange

$$\begin{aligned}1 + \cos \theta + \dots + \cos n\theta &= \frac{\cos(\frac{n\theta}{2}) \operatorname{sen}(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}, \\ \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 2\theta + \dots + \operatorname{sen} n\theta &= \frac{\operatorname{sen}(\frac{n\theta}{2}) \operatorname{sen}(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

**Solución:** Tenemos

$$\begin{aligned}1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \dots + e^{in\theta} &= \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

De donde, tomando partes real e imaginaria, se obtienen las fórmulas de Lagrange.

XIII) Si  $w$  es una raíz  $n$ -ésima de la unidad,  $w^n = 1$ , y  $w \neq 1$  demostrar que

$$\begin{aligned}1 + w + \dots + w^{n-1} &= 0, \\ 1 + 2w + \dots + nw^{n-1} &= \frac{n}{w-1}.\end{aligned}$$

Completar, en el espíritu de las anteriores relaciones, la ecuación

$$2 + \dots + (n+1)nw^{n-1} = ???$$

**Solución:** Tenemos

$$S_{n-1}(w) := 1 + w + \dots + w^{n-1} = \frac{w^n - 1}{w - 1}$$

y si  $w^n = 1$  obtenemos  $S_{n-1}(w) = 1 + w + \dots + w^{n-1} = 0$ .

Por otro lado, si llamamos  $S_n^{(1)} := 1 + 2w + \dots + nw^{n-1}$  tenemos

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} - wS_n^{(1)} &= 1 + 2w + 3w^2 + \dots + nw^{n-1} - w - 2w^2 - \dots - (n-1)w^{n-1} - nw^n \\ &= 1 + w + \dots + w^{n-1} - nw^n \end{aligned}$$

y como  $w^n = 1$  queda

$$S_n^{(1)} - wS_n^{(1)} = -n$$

y, por lo tanto, obtenemos

$$S_n^{(1)} = \frac{n}{w-1}.$$

Llamemos  $S_{n+1}^{(2)} = 2 + \dots + (n+1)nw^{n-1}$  y calculemos

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(2)} - wS_{n+1}^{(2)} &= 2 + 6w + 12w^2 + \dots + (n+1)nw^{n-1} - 2w - 6w^2 - \dots - n(n-1)w^{n-1} - (n+1)nw^n \\ &= 2 + 4w + 6w^2 + \dots + 2nw^{n-1} - n(n+1)w^n \\ &= 2S_n^{(1)}(w) - n(n+1)w^n \end{aligned}$$

Así pues, cuando  $w^n = 1$ , obtenemos

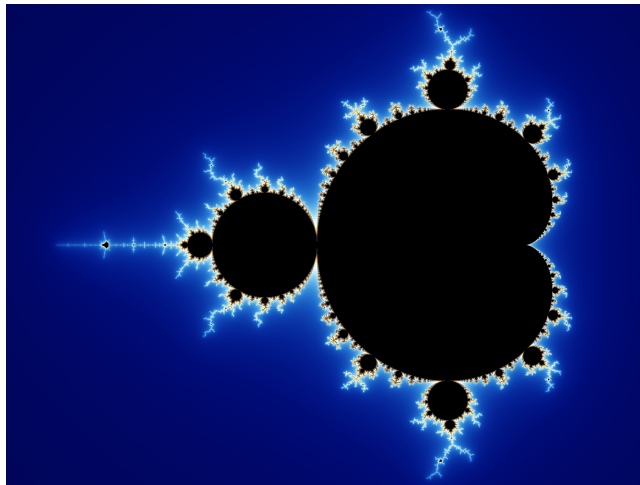
$$(1-w)S_{n+1}^{(2)} = \frac{2n}{w-1} - n(n+1),$$

por lo que concluimos

$$S_{n+1}^{(2)} = -\frac{2n}{(w-1)^2} + \frac{n(n+1)}{w-1}.$$

- XIV) Para cada  $c \in \mathbb{C}$  considerar  $f(z) = z^2 + c$  y la sucesión determinada por su iteración,  $z_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n(z)$ . Estudiar el conjunto de puntos  $\mathfrak{M}^{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty\}$ .

**Solución:**



# II. FUNCIONES HOLOMORFAS

## Contenidos

II.1 Límites y continuidad . . . . .	37
II.2 Derivada compleja . . . . .	39
II.3 Ecuaciones de Cauchy–Riemann . . . . .	41
II.4 Funciones armónicas . . . . .	45
II.5 La historia de las ecuaciones de Cauchy–Riemann . . . . .	47
II.6 Aplicación: Fluidos ideales en el plano. . . . .	50
II.7 La función exponencial & Co.. . . . .	51
II.8 Ejercicios . . . . .	63

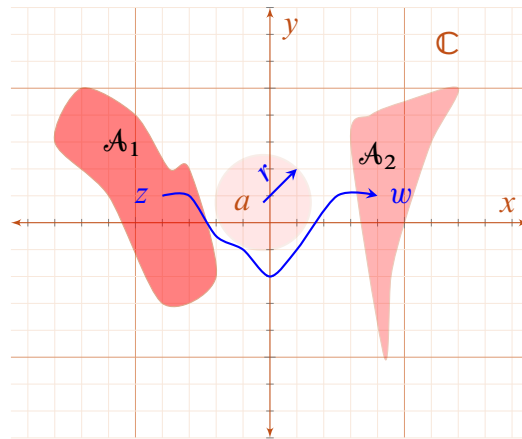


### §II.1. Límites y continuidad



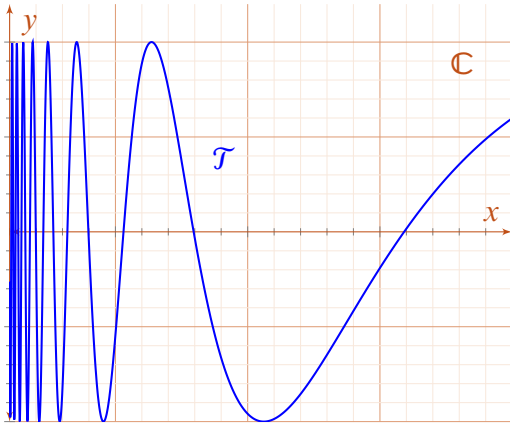
ASICAMENTE, el cálculo diferencial en una variable compleja se construye sobre los mismos pilares que el cálculo en varias variables reales. La diferencia básica aparecerá después, cuando consideremos una operación que sólo existe en  $\mathbb{C}$  y no en  $\mathbb{R}^2$ , la de la posibilidad de dividir números complejos (no tiene sentido dividir un vector por

otro vector). Así pues, los fundamentos topológicos que usaremos son prestados del cálculo en  $\mathbb{R}^2$  y por tanto deben ser familiares. Necesitamos una *base de entornos*, que serán los discos  $D(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ , así pues la *topología* es  $\{D(a, r) : a \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_+\}$ . Un conjunto  $\mathcal{A}$  es un *abierto* si para todo  $a \in \mathcal{A}$  existe un  $r > 0$  tal que  $D(a, r) \subset \mathcal{A}$ . Un conjunto  $\mathcal{C}$  es *cerrado* si su complementario  $\mathcal{C}^c = \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$  es un conjunto abierto. Un *compacto* será un conjunto cerrado y acotado.<sup>1</sup> Un conjunto abierto  $\mathcal{A}$  es *conexo* si no existen dos conjuntos abiertos  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  tales que  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$ , salvo cuando se escogen como  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  a  $\mathcal{A}$  y a  $\emptyset$ . Un conjunto abierto  $\mathcal{A}$  es *conexo por arcos* si para todo par de puntos  $z, w \in \mathcal{A}$  existe una curva continua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}$  tal que  $\gamma(0) = z$  y  $\gamma(1) = w$ .



Componentes de un conjunto no conexo y un disco

<sup>1</sup>En realidad la definición de conjunto compacto es más general: De todo recubrimiento cerrado se puede extraer un subrecubrimiento finito. En el caso de  $\mathbb{R}^n$ , debido al Teorema de Borel, esta definición coincide con la que hemos dado.



### Seno del topólogo

Cerrado conexo no conexo por arcos

Para conjuntos abiertos de  $\mathbb{C}$  las nociones de conexo y conexo por arcos coinciden. Si hacemos las mismas definiciones relajando las condiciones y no exigiendo que los conjuntos sean abiertos ambos conceptos no tienen porque coincidir. Hay conjuntos cerrados conexos que no son conexos por arcos, por ejemplo el *seno del topólogo*:  $\mathcal{T} = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in (0, 1]\} \cup \{(0, 0)\}$ , ¿cómo se une el origen con cualquier otro punto de  $\mathcal{T}$  por un arco? No se puede. Un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , abierto y conexo, se llama región o dominio. Una aplicación  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ , que a cada  $z$  del conjunto  $\mathcal{A}$  le asigna otro número complejo  $f(z)$  se llama función. Sus partes reales e imaginarias serán denotadas por  $u(x, y) := \operatorname{Re} f(z)$  y  $v(x, y) := \operatorname{Im} f(z)$  de modo que  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ . Las funciones complejas son transformaciones geométricas del plano en el plano.

Por ejemplo,  $f(z) = e^{i\pi/3} z + 5$  es una rotación antihoraria de  $\pi/3$  rad seguido de una traslación a la derecha de 5 unidades, o bien  $f(z) = iz^2 - 2$  es la composición de las siguientes operaciones geométricas, 1) doblar el argumento de  $z$ , 2) dilatarlo, elevando al cuadrado su módulo, 3) rotar  $90^\circ$  y 4) trasladar todo a la izquierda en dos unidades.

A continuación introducimos lo que entendemos por límite de una función compleja, que no es más que la noción de límite en  $\mathbb{R}^2$ .

### Límites de funciones complejas

Dado  $z_0 \in \overline{\mathcal{A}}$ , un punto en el cierre del abierto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ , y una función  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  decimos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell$  siempre que para todo  $\varepsilon > 0$  podamos encontrar un  $\delta > 0$  de modo que, si  $|z - z_0| < \delta$ , se satisface que  $|f(z) - \ell| < \varepsilon$ .

Esto es, podemos encontrar, por muy pequeño que sea el disco  $D(\ell, \varepsilon)$  alrededor de  $\ell$ , otro disco  $D(a, \delta)$  alrededor de  $a$ , suficientemente pequeño, de manera que la función  $f$  lo transforma en un conjunto que está incluido en el disco  $D(\ell, \varepsilon)$ . Las propiedades de los límites en  $\mathbb{R}^2$  se reformulan a este contexto complejo como sigue.

### Propiedades de límites de funciones complejas

- I) Si el límite existe es único.
- II) Se tiene que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell \in \mathbb{C}$  sí y sólo si  $\lim_{\substack{x \rightarrow \operatorname{Re} z_0 \\ y \rightarrow \operatorname{Im} z_0}} u(x, y) = \operatorname{Re} \ell$  y  $\lim_{\substack{x \rightarrow \operatorname{Re} z_0 \\ y \rightarrow \operatorname{Im} z_0}} v(x, y) = \operatorname{Im} \ell$ , tomados estos últimos como límites en  $\mathbb{R}^2$ .
- III) La toma de límites respeta:
  - a) la suma:  $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ ,
  - b) el producto:  $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = \left( \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \right) \left( \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \right)$ ,
  - c) el inverso:  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}$ , siempre que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq 0$ .

Cómo para las aplicaciones  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(u,v)} \mathbb{R}^2$ , introducimos la noción de continuidad de una función compleja.

### Continuidad de funciones complejas

Dado un conjunto abierto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ , una función compleja  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  es continua en  $z_0 \in \mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  si  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

Las siguientes propiedades de la continuidad de funciones complejas se demuestran como en el caso real

### Propiedades de funciones complejas continuas

Dados dos conjuntos abiertos  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ , y dos funciones continuas  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$  entonces:

- i) Para un punto  $z_0 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$  del dominio de ambas funciones complejas, se tiene que:
  - a)  $f(z) + g(z)$  es una función continua en  $z_0$ .
  - b)  $f(z)g(z)$  es una función continua en  $z_0$ .
  - c)  $\frac{1}{f(z)}$  es una función continua en  $z_0$  siempre que  $f(z_0) \neq 0$ .
- ii)  $h = g(f(z))$  es continua en  $z_0$ , siempre que  $f(z_0) \in \mathcal{B}$ .

## §II.2. Derivada compleja



La idea de función en la recta real nos condujo a la noción de función compleja como una transformación de puntos y conjuntos del plano. Para ello hemos *traducido* las nociones de límite y continuidad en  $\mathbb{R}^2$  al plano de Wessel–Argand, viendo que esta traducción es casi inmediata salvo por el nuevo producto complejo. Demos ahora un paso importante y menos inmediato, y discutamos la derivada compleja, extendiendo la construcción basada en el cociente incremental de la recta real, usando para ello el producto complejo. Esto nos permitirá ir más allá de la diferencial de la transformación  $(x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$  del cálculo en dos variables reales.

### Derivada de una función compleja. Funciones holomorfas

Una función compleja  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida en el conjunto abierto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ , es derivable en  $z_0 \in \mathcal{A}$  si existe el límite del cociente incremental en ese punto

$$f'(z_0) \equiv \frac{d f}{d z}(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

La función se dice **holomorfa** en  $\mathcal{A}$  si existe  $f'(z)$  para todo punto  $z \in \mathcal{A}$  y se dirá holomorfa en un subconjunto  $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$  si existe un abierto  $\mathcal{A}$  con  $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$  y  $f(z)$  holomorfa en  $\mathcal{A}$ . Una función holomorfa en todo el plano complejo  $\mathbb{C}$  se dice entera.

La palabra *holomorfa* deriva del griego *holos* que significa entero, y *morphē* que significa forma o apariencia. Fue introducida por dos estudiantes de Cauchy, Charles Briot (1817-1882) y Jean-Claude Bouquet (1819-1895) en la segunda edición de su manual *Theorie des fonctions elliptiques* (Gauthier-Villars (1875) Paris), en donde se puede leer en página 14 lo siguiente “15. *Lorsqu’une fonction est continue, monotrope, et a une dérivée, quand la variable se meut dans une certaine partie du plan, nous dirons qu’elle est holomorphe dans cette partie du plan. Nous indiquons par cette dénomination qu’elle est semblable aux fonctions entières qui jouissent de ces propriétés dans toute l’étendue du plan.*” Esto es: 15. *Cuando una función es continua, monótopa, y tiene derivada, cuando la variable se mueve en una cierta parte del plano, nosotros diremos que es holomorfa en esta parte del plano. Indicamos por este nombre que es similar a las funciones enteras que disfrutan de estas propiedades en todo el plano*, donde monótopa significa univaluada. Es curioso que en la primera edición de 1859 no usen el término holomorfo, sino el que usaba Cauchy, esto es “*monogène*”.

En este punto es relevante subrayar un hecho notable, que quizás en primera instancia pase inadvertido. Podemos considerar el cociente incremental  $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$  porque sabemos dividir por el número complejo  $z-z_0$ . Esta idea supera las nociones sobre diferenciabilidad en dos variables reales. Ciertamente es mucho más exigente y conduce, cuando existe el límite de este cociente incremental, a propiedades excepcionales. Pero esto lo iremos contando a lo largo del curso. De momento, veamos algunas propiedades.

### Propiedades de las funciones complejas derivables


Sean  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$ , dos funciones complejas definidas en los abiertos  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ .

- i) Entonces siempre que ambas sean derivables en  $z_0 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ , tenemos
  - a) La suma  $f(z) + g(z)$  es derivable en  $z_0$  y  $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
  - b) **Regla de Leibniz:** El producto  $f(z)g(z)$  es derivable en  $z_0$  con  $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$ .
  - c) Si  $f(z_0) \neq 0$ , la función  $\frac{1}{f(z)}$  es derivable en  $z_0$ , con  $\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2}$ .
- ii) **Regla de la cadena:** Si  $f(z)$  es derivable en  $z_0 \in \mathcal{A}$  y  $g(z)$  es derivable en  $f(z_0) \in \mathcal{B}$  tenemos  $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$ .

Como pasa en el caso real *si una función es derivable en un punto es continua en dicho punto*, cosa que se deduce inmediatamente de la existencia de límite del cociente incremental. Efectivamente,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \right) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0)0 = 0. \end{aligned}$$

También, como en el caso real, la derivada se puede entender como una primera aproximación. Si  $f(z)$  es derivable en  $z_0$  entonces  $f(z) = f(z_0) + H(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0)$  donde  $H \in \mathbb{C}$  y  $\lim_{z \rightarrow z_0} \psi(z) = 0$ . Evidentemente, aquí  $H = f'(z_0)$  es la derivada.

**Ejemplos:** Veamos algunas derivadas elementales, 

- I) **Funciones constantes:** Si  $f(z) = c$  con  $c \in \mathbb{C}$  es una función constante su derivada es nula  $f'(z) = 0$ , ya que el cociente incremental es siempre nulo y, por ello, también su límite.
- II) **Polinomios de grado 1:** Cuando  $f(z) = mz + c$ ,  $m, c \in \mathbb{C}$ , su cociente incremental es  $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{m(z - z_0)}{z - z_0} = m$ , luego el límite será  $m$ , i.e.,  $f'(z) = m$ .
- III) **Potencias:** Si  $f(z) = z^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , aplicando el binomio de Newton podemos deducir para el cociente incremental

$$\begin{aligned} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} &= \frac{(z - z_0 + z_0)^n - z_0^n}{z - z_0} \\ &= (z - z_0)^n + n(z - z_0)^{n-1}z_0 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}(z - z_0)z_0^{n-2} + nz_0^{n-1}, \end{aligned}$$

y por ello, haciendo tender  $z \rightarrow z_0$ , se llega a que  $f'(z_0) = nz_0^{n-1}$ .

- IV) **Polinomios:** Si  $f(z) = c_N z^N + \cdots + c_1 z + c_0$ ,  $\{c_N, \dots, c_0\} \subset \mathbb{C}$ , es un polinomio de grado  $N$ , podemos fácilmente deducir para su derivada

$$f'(z) = Nc_N z^{N-1} + (N-1)c_{N-1} z^{N-2} + \cdots + c_1.$$

- v) **Funciones racionales:** Si  $f(z) = \frac{1}{c_N z^N + \cdots + c_1 z + c_0}$  entonces


$$f'(z) = -\frac{Nc_N z^{N-1} + (N-1)c_{N-1} z^{N-2} + \cdots + c_1}{(c_N z^N + \cdots + c_1 z + c_0)^2}.$$

Un ejemplo de función compleja no derivable es  $f(z) = \bar{z}$ . Ahora  $u(x, y) = x$  y  $v(x, y) = -y$ . Efectivamente, el cociente incremental se escribe cómo sigue

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = e^{-2i\theta}$$

siempre que  $z - z_0 \in e^{i\theta} \mathbb{R}$ . Pero este límite no existe, ya que según la dirección que escojamos para aproximarnos a  $z_0$  obtendremos un límite direccional diferente.

### §II.3. Ecuaciones de Cauchy–Riemann

 DISCUTIMOS ahora la diferencia entre la derivada compleja y la diferencial en dos variables reales. Esta discusión nos llevará a concluir que la holomorfía es mucho más exigente que la diferenciabilidad en dos variables reales. Una primera observación es que la acción de multiplicación  $z \mapsto az$ ,  $a = \operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a$ , se puede reinterpretar como  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a & -\operatorname{Im} a \\ \operatorname{Im} a & \operatorname{Re} a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ; esto es, como una transformación lineal  $M_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , siendo la matriz de la transformación  $M_a := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a & -\operatorname{Im} a \\ \operatorname{Im} a & \operatorname{Re} a \end{pmatrix}$ . Dados dos números complejos  $a, b \in \mathbb{C}$  se puede ver fácilmente que  $M_{a+b} = M_a + M_b$  y  $M_{ab} = M_a M_b$ , i.e., la aplicación  $M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es un

homomorfismo. Por ejemplo,  $(M_a)^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a & -\operatorname{Im} a \\ \operatorname{Im} a & \operatorname{Re} a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(\operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a & \operatorname{Im} a \\ -\operatorname{Im} a & \operatorname{Re} a \end{pmatrix} = M_{\frac{1}{a}}$  y así  $\frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{|a|^2}$ , cómo ya vimos anteriormente. Volvamos ahora a la interpretación de una función compleja  $z \mapsto f(z)$  como una transformación del plano  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ . Recordemos que esta transformación es diferenciable en  $z_0 = x_0 + i y_0$  si existe una matriz real  $2 \times 2$ , que denotaremos por  $J = \begin{pmatrix} J_{1,1} & J_{1,2} \\ J_{2,1} & J_{2,2} \end{pmatrix}$  tal que

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_1(x, y) \\ \Psi_2(x, y) \end{pmatrix} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

donde  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \sqrt{(\Psi_1(x, y))^2 + (\Psi_2(x, y))^2} = 0$ . Cómo sabemos la matriz  $J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$  es la diferencial de la transformación; esto es, la matriz jacobiana de la transformación. En términos de la derivadas parciales de las componentes tiene la siguiente forma  $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ . Así que, para conseguir llegar a la derivada compleja, esta matriz jacobiana debería identificarse con un número complejo, lo que conduce a las ecuaciones de Cauchy–Riemann:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  y  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ . Procedemos a una formulación más cuidadosa de este importante resultado.

### Ecuaciones de Cauchy–Riemann

Sean  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  un subconjunto abierto,  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  una función compleja  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $z_0 = x_0 + i y_0 \in \mathcal{A}$ . Entonces,  $f(z)$  tiene una derivada compleja en  $z_0$  si y sólo si

- I)  $\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$  es diferenciable en  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$
- II) Las partes real  $u(x, y)$  e imaginaria  $v(x, y)$  de  $f(z)$  satisfacen las siguientes condiciones de Cauchy–Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

en  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ .



DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, vamos a ver que si  $f(z)$  es derivable en  $z_0$  podemos asegurar que  $\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$  es diferenciable con jacobiana  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = M_{f'(z_0)}$ . Efectivamente, dado que la función tiene derivada compleja en  $z_0$  tendremos

$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z) e^{i \arg(z - z_0)} |z - z_0|$ , donde  $\psi(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ . Por tanto, si ponemos  $\Psi(x, y) = \psi(z) e^{i \arg(z - z_0)}$  nos queda

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + M_{f'(z_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_1(x, y) \\ \Psi_2(x, y) \end{pmatrix} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

con  $\Psi_1(x, y) = \operatorname{Re}(\psi(z) e^{i \arg(z - z_0)})$  y  $\Psi_2(x, y) = \operatorname{Im}(\psi(z) e^{i \arg(z - z_0)})$  y

$$\sqrt{(\Psi_1(x, y))^2 + (\Psi_2(x, y))^2} = |\psi(z)| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0.$$



Por ello, debemos tener

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix}.$$

Lo que implica las ecuaciones de Cauchy–Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{Re} f'(z_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} = -\operatorname{Im} f'(z_0). \end{aligned}$$

Veamos ahora el recíproco, esto es que la diferenciabilidad junto con las ecuaciones de Cauchy–Riemann en  $(x_0, y_0)$  implican la existencia de la derivada compleja. Como la transformación  $\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$  podemos asegurar que

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_1(x, y) \\ \Psi_2(x, y) \end{pmatrix} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

con

$$\sqrt{(\Psi_1(x, y))^2 + (\Psi_2(x, y))^2} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0.$$

Pero, dadas las condiciones de Cauchy–Riemann, la jacobiana de la transformación se puede escribir como sigue

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad A = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Llamemos  $\psi(z) = (\Psi_1(x, y) + i\Psi_2(x, y)) e^{-i \arctan \frac{y-y_0}{x-x_0}}$ , entonces  $\psi(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$  y

$$f(z) = f(z_0) + (A + iB)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0).$$

□

## Amplitwist y rigidez

- Como hemos visto  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix}$ , que conduce a

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= (\operatorname{Re} f'(z_0))^2 + (\operatorname{Im} f'(z_0))^2 \\ &= |f'(z_0)|^2. \end{aligned}$$

Esto es, la transformación implica una dilatación con factor de escala dado por  $|f'(z_0)|$ , ya que podemos escribir  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'(z_0)| \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix}$ , con  $C^2 + S^2 = 1$ . De hecho,  $\begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix}$  representa una rotación de ángulo  $\arg f'(z)$ , y se debe tener  $\begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} = M_{e^{i \arg f'(z_0)}}$ .

- **Amplitwist y rigidez.** Vemos, del comentario anterior, que las transformaciones con derivada compleja no nula en un punto son muy especiales ya que, como transformación geométrica, a nivel infinitesimal dilatan y rotan todas las direcciones por igual, y por ello, al preservar los ángulos, son transformaciones conformes. Esto es lo que Needham, en su manual *Visual Complex Analysis* llama *amplitwist*. Las transformaciones derivables son excepcionalmente **rígidas**, aunque pueden estirar las regiones, estiran todas las direcciones por igual, dado lugar a regiones semejantes. Estas ideas, que provienen de la esencia de como se multiplican los números complejos, veremos en el siguiente capítulo, que también tienen fuertes implicaciones a la hora de integrar, y de hecho conducen al Teorema de Cauchy.



- i) Debemos recordar que la diferenciabilidad de  $\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  es equivalente a la existencia de las derivadas parciales de  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  y  $\frac{\partial v}{\partial y}$  en  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ .
- ii) Fijémonos en que de la demostración podemos concluir las siguientes relaciones entre la derivada compleja y las derivadas parciales a lo largo de  $x$  e  $y$ :

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

- iii) Se suelen usar los operadores diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

En términos de los cuales podemos decir que  $f(z)$  es derivable en  $z = z_0$  si y sólo si  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ . Esto es fácil de ver ya que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(u + iv)}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial(u + iv)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Luego  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$  es equivalente a las condiciones de Cauchy–Riemann.

- iv) Podemos reformular el resultado de la siguiente manera. Dada una función compleja  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  en el abierto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  y  $z_0 \in \mathcal{A}$ ,  $f(z)$  tendrá derivada compleja en  $z_0$  si y sólo si

- a) La transformación  $\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$  es diferenciable en  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$
- b) Existe un número complejo  $c \in \mathbb{C}$  tal que la diferencial  $d f(x_0, y_0) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x_0, y_0) = M_c$ .
- v) Una función compleja  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en el abierto  $\mathcal{A}$  con derivada compleja nula es constante en  $\mathcal{A}$ . Es una consecuencia del resultado en dos variables reales, ya que ahora la diferencial es la matriz cero y por tanto la transformación es constante.
- vi) Podemos demostrar la regla de la cadena, suponiendo el resultado real. Efectivamente,  $d(g \circ f)(x_0, y_0) = d g(f(x_0, y_0)) d f(x_0, y_0) = M_{g'(f(z_0))} M_{f'(z_0)} = M_{g'(f(z_0))f'(z_0)}$ .

### Derivada de la función inversa

Sea una función compleja  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en el subconjunto abierto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  con  $f'(z)$  un función continua y un punto  $z_0 \in \mathcal{A}$  tal que  $f'(z_0) \neq 0$ . Entonces, existe un abierto  $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$  que contiene al punto  $z_0$  y un abierto  $\mathcal{V}$  que contiene al punto  $f(z_0)$  tales que  $f'(z)$  no se anula en  $\mathcal{U}$  y  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{C}$  es biyectiva. Además la función compleja  $f^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  es holomorfa en  $\mathcal{V}$  y

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))},$$

para todo  $w \in \mathcal{V}$ .



DEMOSTRACIÓN. La transformación  $f(x, y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$  es diferenciable con diferencial  $d f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$  y  $\det(d f(x, y)) = |f'(z)|^2 \neq 0$ . Luego, podemos aplicar el *Teorema de la Función Inversa* para variables reales, ya que la continuidad de  $f'(z)$  asegura la continuidad de todas las derivadas parciales  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  y  $\frac{\partial v}{\partial y}$ . Así que, existen abiertos  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  que contienen a los puntos  $z_0$  y  $f(z_0)$ , respectivamente, tales que  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  es biyectiva, y por tanto la función inversa  $f^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  está definida y además es diferenciable con diferencial  $d f^{-1}(w) = \left(d f(f^{-1}(w))\right)^{-1}$  para todo  $w \in \mathcal{V}$ . Si  $z = f^{-1}(w)$  tendremos

$$d f^{-1}(w) = (d f(z))^{-1} = (M_{f'(z)})^{-1} = M_{\frac{1}{f'(z)}},$$

y llegamos al resultado deseado. □

## §II.4. Funciones armónicas



AS funciones armónicas juegan un papel clave tanto en las Matemáticas como en la Física. Aquí mostraremos como, para el caso bidimensional, están íntimamente ligadas a las ecuaciones de Cauchy–Riemann y a la holomorfía. Una función  $u : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es armónica si  $u \in C^2(\mathcal{A}, \mathbb{R})$  y se satisface la **ecuación de Laplace** para todo punto  $(x, y) \in \mathcal{A}$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

### Funciones armónicas y funciones holomorfas

- I) Sea  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en el subconjunto abierto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  con  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ . Entonces sus partes real e imaginaria,  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$ , son ambas funciones armónicas en  $\mathcal{A}$ .
- II) Sean  $u : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  una función armónica en el subconjunto abierto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \mathcal{A}$  y  $\mathcal{U} = D(z_0, r) \subset \mathcal{A}$ . Entonces, existe una función  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en  $\mathcal{U}$  y tal que  $u = \operatorname{Re} f$ . A  $v = \operatorname{Im} f$  se le llama armónico conjugado de  $u$ .
- III) Sea una función armónica  $u(x, y)$  en el subconjunto abierto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ . Entonces, la diferencia entre dos funciones armónicas conjugadas (localmente) a ella es constante.



DEMOSTRACIÓN. I) De las condiciones de Cauchy–Riemann deducimos que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ , así que  $u(x, y)$  es armónica. Análogamente,  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  y  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , y  $v(x, y)$  es una función armónica.

- II) Necesitamos encontrar una función  $v(x, y)$  que satisfaga junto con  $u(x, y)$  las condiciones de Cauchy–Riemann  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$  y  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ . Integrando la primera relación obtenemos que  $v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) ds + h(x)$ . Es importante hacer notar

que esta expresión integral es cierta ya que  $\{x\} \times (y_0, y) \subset \mathcal{U}$ . Así que  $\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) ds + \frac{dh}{dx}(x)$ . Como  $u(x, y)$  es armónica, escribimos

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = - \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, s) ds + \frac{dh}{dx}(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) + \frac{dh}{dx}(x),$$

donde hemos utilizado el *Teorema Fundamental del Cálculo* en  $\mathbb{R}$ . Las condiciones de Cauchy–Riemann nos conducen a

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y_0) - \frac{\partial v}{\partial x}(x, y_0) + \frac{dh}{dx}(x).$$

Esto es,  $\frac{\partial v}{\partial x}(x, y_0) = \frac{dh}{dx}(x)$ , y por ende, usando de nuevo Cauchy–Riemann, llegamos a  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) = -\frac{dh}{dx}(x)$ , que una vez integrada se lee como  $-\int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0) ds + c = h(x)$ , donde  $c \in \mathbb{R}$  es una constante de integración. Por tanto,

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) ds - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0) ds + c$$

Esta función  $v(x, y)$  tiene derivadas parciales,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  y  $\frac{\partial v}{\partial y}$  ya que  $u \in C^2$ , por ello es diferenciable, y además  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  cumplen las condiciones de Cauchy–Riemann de lo que se infiere que  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  es derivable en el disco  $\mathcal{U}$ .

- III) Sean  $v_1(x, y)$  y  $v_2(x, y)$  son dos funciones localmente armónicas conjugadas a  $u(x, y)$ . Entonces, las dos funciones  $f_1(z) = u(x, y) + i v_1(x, y)$  y  $f_2(z) = u(x, y) + i v_2(x, y)$  son funciones holomorfas en  $\mathcal{A}$  y, por ello,  $f_1(z) - f_2(z) = i(v_1(x, y) - v_2(x, y))$  es

un función derivable. Luego, sus partes real e imaginaria satisfacen las condiciones de Cauchy–Riemann, y obtenemos  $\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial x} = \frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial y} = 0$  y así vemos que la diferencia es una función constante. □

## §II.5. La historia de las ecuaciones de Cauchy–Riemann



ORRÍA el año de 1752 cuando Jean le Rond d’Alambert, en su trabajo sobre fluidos *Essai d’une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, fue el primero en escribir las ecuaciones de Cauchy–Riemann. D’Alambert estudiaba el problema de como, bajo determinadas condiciones, hallar la velocidad de un fluido en un punto dado. Para ello denotó las componentes

del campo de velocidades a lo largo de los ejes  $x$  y  $z$  por las letras  $p$  y  $q$ . Aquí  $z$  no es una variable compleja, sino la coordenada en el eje vertical o altura. Para simplificar el problema y poder tratarlo “*más fácilmente*” tomó las hipótesis de trabajo *más simples*:  $dq = M dx + N dz$  y  $dp = N dx - M dz$ . Cómo son diferenciales completas, sigue, también lo serán  $(M + iN)(dx - idz)$  y  $(M - iN)(dx + idz)$ . A continuación, d’Alambert escribe  $du = dx - idz$  y  $dt = dx + idz$ ,  $M + iN = \alpha$  y  $M - iN = \beta$  para encontrar que  $\alpha du$  y  $\beta dt$  son diferenciales completas y, por ello,  $u = F + x - iz$  y  $t = G + x + iz$ , donde  $F$  y  $G$  son constantes. Así que  $\alpha$  es una función de  $u$  y  $\beta$  de  $t$ .

### COROLLAIRE I.

59. On peut encore trouver  $M$  &  $N$  par la méthode suivante qui est un peu plus simple. Puisque  $\frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx}$  &  $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz}$ , donc  $q dx + p dz$  &  $p dx - q dz$  feront des différentielles complètes. Donc  $q + p\sqrt{-1} = \text{fonct. } F + x + \frac{z}{\sqrt{-1}}$ , &  $q - p\sqrt{-1} = \text{fonct. } G + x - \frac{z}{\sqrt{-1}}$ ; donc  $q = \text{fonct. } F + x + \frac{z}{\sqrt{-1}} + \text{fonct. } G + x - \frac{z}{\sqrt{-1}}$ ,  
H ii)

Párrafo de d’Alambert  
*Essai d’une nouvelle théorie de la résistance des fluides*,  
 Paris, 1752

Cómo  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}$  y  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z}$ , que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann, deduce, cómo antes, que  $q dx + p dz$  y  $p dx - q dz$  son diferenciales completas lo que le permite aplicar el argumento descrito. Si se requieren velocidades  $p$  y  $q$ , reales las constantes  $F, G$  deben ser reales. Para ello, d'Alambert halló expresiones para las componentes de la velocidad en donde las cantidades imaginarias *se destruyen así mismas*, dice d'Alambert: "*Il est évident que dans ces valeurs de  $p$  &  $q$  les quantités imaginaires se détruiront d'elles-mêmes*".

Más tarde Euler siguiendo los pasos de d'Alambert discutió sobre estos temas. Por ejemplo en 1762 publicó el artículo *Problème. Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés [etc]* (Mémoires de l'Académie des Sciences, Berlin 16 (1767) 228-249). En éste, para lidiar con fluidos planares requería a las diferenciales  $u dx + v dy$ ,  $v dx - u dy$  que fueran integrables. Progresando de forma similar a cómo lo hizo d'Alambert uso las combinaciones  $u(dx - idy) - iv(dx - idy)$  y  $u(dx + idy) +$

## NOTE

### SUR L'INTÉGRATION D'UNE CLASSE PARTICULIÈRE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

*Bulletin de la Société Philomatique, p. 17-20; 1818.*

On sait que l'on regarde l'équation différentielle

$$(1) \quad dy - f(x, y) dx = 0$$

comme intégrée, lorsqu'on a trouvé un facteur propre à convertir le premier membre de cette équation en une différentielle exacte. De plus il est facile de voir que

$$P dy - Q dx \quad \text{et} \quad P dx + Q dy$$

seront des différentielles complètes, si  $P$  et  $Q$  désignent deux fonctions réelles d' $x$  et d' $y$  liées entre elles par une équation de la forme

$$(2) \quad \varphi(x + y\sqrt{-1}) = P - Q\sqrt{-1}.$$

On aura en effet dans cette hypothèse

$$\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dy}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\varphi'(x + y\sqrt{-1}) = \frac{dP}{dx}\sqrt{-1} + \frac{dQ}{dx},$$

et par suite

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dP}{dx} = \frac{d(-Q)}{dy}.$$

#### Artículo de Cauchy

*Note sur l'intégration d'une classe particulière d'équations différentielles,*  
Nouveau Bulletin des Sciences 4 (1818) 17-20  
Publie par la Société Philomatique de Paris

$iv(dx + idy)$ , esto es  $(u - iv)(dx + idy)$  y  $(u + iv)(dx - idy)$ . Euler impuso que estas funciones se representaran por funciones reales y que *lo imaginario era destruido* llegando a las condiciones de Cauchy–Riemann. En 1818 Cauchy publicó el artículo titulado *Note sur l'intégration d'une classe particulière d'équations différentielles*. Observó que era fácil probar que  $P dy - Q dx$  y  $P dx + Q dy$  eran diferenciales completas, donde tanto  $P$  como  $Q$  denotan dos funciones reales en las variables  $x$  e  $y$  ligadas por una ecuación de la forma  $\phi(x + yi) = P - Qi$ . De aquí deduce  $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} i = i\phi'(x + iy) = \frac{\partial P}{\partial x} i + \frac{\partial Q}{\partial x}$  y, por tanto, las ecuaciones de Cauchy–Riemann  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , y  $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$ . El problema de los descubrimientos de d'Alembert y de Euler es que, a pesar de encontrar las ecuaciones de Cauchy–Riemann, no fueron capaces de hallar su significado como condiciones para la existencia de la derivada compleja. Tampoco Cauchy estuvo muy fino en este sentido.

Bernhard Riemann defendió su tesis doctoral *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, dirigida por Gauss, en 1851 en la universidad de Gotinga, Alemania. Allí sentó las bases de la teoría de las superficies de Riemann y la teoría de la variable compleja alcanzo su madurez. Para Riemann una variable compleja  $w$  se llama función de otra variable compleja  $z$  siempre que la primera dependa de la segunda de manera que la derivada  $\frac{dw}{dz}$  sea independiente del  $dz$ . Por ello, para que  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  sea una función (derivable) se tendrán que satisfacer las ecuaciones de Cauchy–Riemann. Riemann enfatizó el hecho de que las ecuaciones de Cauchy–Riemann permiten estudiar las funciones  $u$  y  $v$  y por tanto a  $f$ . Más aún, de estas condiciones uno puede encontrar la función armónica conjugada de  $u(x, y)$  o de  $v(x, y)$ .



— 4 —

so erhellt, dass er und zwar nur dann für je zwei Werthe von  $dx$  und  $dy$  denselben Werth haben wird, wenn

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}$$

ist. Diese Bedingungen sind also hinreichend und nothwendig, damit  $w = u + vi$  eine Function von  $z = x + yi$  sei. Für die einzelnen Glieder dieser Function fliessen aus ihnen die folgenden:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0,$$

welche für die Untersuchung der Eigenschaften, die Einem Gliede einer solchen Function einzeln betrachtet zukommen, die Grundlage bilden. Wir werden den Beweis für die wichtigsten dieser Eigenschaften einer eingehenderen Betrachtung der vollständigen Function voraufgehen lassen, zuvor aber noch einige Punkte, welche allgemeineren Gebieten angehören, erörtern und festlegen, um uns den Boden für jene Untersuchungen zu ebenen.



Párrafo en la tesis doctoral de Riemann

## §II.6. Aplicación: Fluidos ideales en el plano



FLUIDOS en el plano aparecen tanto en la hidrodinámica como en la aerodinámica, en donde se supone que el flujo es el mismo en planos paralelos al plano  $xy$ . Dado un punto  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  del plano  $xy$  se denotará por  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \end{pmatrix}$ , con componentes en los ejes cartesianos  $p(x, y)$  y  $q(x, y)$ , al vector velocidad de un elemento de fluido, o partícula, en ese punto  $(x, y)$ . El fluido tendrá una densidad  $\rho(\mathbf{r})$ , la masa de un elemento infinitesimal de volumen de fluido situado en  $\mathbf{r}$ , una presión  $P(\mathbf{r})$  y estará sometidos a una fuerza externa  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , por ejemplo la gravedad. Asumiremos que en la región donde tiene lugar el flujo no se crea ni se destruye materia, es decir no existe fuentes ni sumideros de líquido, y que las funciones  $p(x, y)$  y  $q(x, y)$  poseen derivadas parciales continuas. En este caso, las ecuaciones conservación de la masa y las ecuaciones del movimiento conforman las ecuaciones de Euler

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v} + \operatorname{grad} P = \mathbf{F}.$$

Estas ecuaciones se completan con la ecuación de estado  $\rho = f(P)$ . Una simplificación relevante es que el fluido sea **estacionario**, es decir que halla alcanzado el equilibrio, y las magnitudes físicas no dependan del tiempo. Una idealización es suponer que **no hay viscosidad** y que el fluido es **incompresible** (su volumen y densidad no se ven afectados por la presión), que se puede aplicar en regímenes de flujo lentos, en líquidos con baja viscosidad, como el agua, o incluso en gases, con velocidades muy por debajo de la velocidad del sonido, que es cuando un gas es incompresible. Esto se modela pidiendo que  $\rho$  sea uniforme y constante en la región definida por el fluido. Se puede demostrar que la vorticidad  $\boldsymbol{\zeta} := \operatorname{rot} \mathbf{v}$ , que mide la circulación o rotación interna a lo largo de un arco cerrado, es un invariante. Una restricción más es que el flujo sea **irrotacional**, es decir se solicita que la **vorticidad se anula**. Este conjunto de condiciones, sin viscosidad, estacionario, incompresible e irrotacional, definen un fluido ideal. Así que las ecuaciones Euler para un fluido ideal, en **ausencia de fuerzas externas**, son

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad \rho(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v} + \operatorname{grad} P = 0.$$

Sin suponer que la vorticidad es nula, las ecuaciones del movimiento conducen a la ecuación de Bernoulli (Daniel, hijo de Johann). Efectivamente, de la identidad del cálculo vectorial  $\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}$ , la ecuación del movimiento, en el caso estacionario, nos lleva a  $\operatorname{grad}(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + P) = \rho \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}$ , que se simplifica a  $\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + P) = 0$ . Esto es, sobre las líneas de corriente, determinadas por  $\mathbf{v}$ ,  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ , se tiene la ecuación de Bernoulli  $\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + P = \text{cte}$ . En el caso irrotacional, esto se da en todo el fluido, no sólo sobre líneas de corriente.

En definitiva, llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho p \frac{\partial p}{\partial x} + \rho q \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \\ \rho p \frac{\partial q}{\partial x} + \rho q \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Que implican la ecuación de Bernoulli,  $\frac{1}{2}(\rho(p^2 + q^2)) + P = \text{cte}$ , en todo el fluido.

Usando la notación compleja en el plano de Wessel–Argand podremos escribir  $z = x + iy$  y  $V(z) = p(x, y) + iq(x, y)$ , es decir que la velocidad es una función compleja. En el caso ideal que estamos discutiendo, reconocemos que el primer conjunto de ecuaciones son las ecuaciones de Cauchy–Riemann para  $\overline{V(z)} = p(x, y) - iq(x, y)$ , que será pues una función holomorfa. De la ausencia de vorticidad uno deduce la existencia de un potencial  $\Phi(x, y)$  de modo que localmente  $p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$  y  $q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ . Las ecuaciones de Cauchy–Riemann implican que el potencial de velocidades  $\Phi(x, y)$  es una función armónica:  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ . Sabemos que, al menos localmente, existirá



una función armónica conjugada, digamos  $\Psi(x, y)$ , de modo que  $F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ , conocida como potencial de velocidades, es una función holomorfa. Por tanto, podemos escribir para la función velocidad en términos del potencial de velocidades:  $V(z) = \overline{F'(z)}$ .

## §II.7. La función exponencial & Co.



PRESENTAMOS a continuación algunos ejemplos de funciones elementales, más allá de las funciones racionales, en el plano complejo. Esencialmente se trata, como veremos, de una discusión alrededor de la función exponencial y de su función inversa, el logaritmo natural (o neperiano). Comencemos presentando a la función exponencial compleja.

**II.7.1. Función exponencial** La función exponencial  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto e^z$ , se puede definir de varias formas equivalentes que extienden las correspondientes definiciones del caso real  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto e^x$ . Recordemos algunas de las posibles maneras equivalentes en que podemos definir la exponencial en el caso real,

I) **Límite:**  $e^x := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ . La preferida de Euler.

II) **Ecuación diferencial:** Es la única función derivable que satisface  $\frac{d f}{d x} = f(x)$ ,  $f(0) = 1$ .

III) **Aditividad:** Es la única función derivable en  $x = 0$  tal que  $f(x + y) = f(x)f(y)$ ,  $f(0) = f'(0) = 1$ .

IV) **Integral:**  $x = \int_1^{e^x} \frac{d t}{t}$ .

V) **Serie de Taylor:**  $e^x = \exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Esta serie de potencias converge  $\forall x \in \mathbb{R}$  y da lugar a una función analítica,  $\exp \in C^\omega(\mathbb{R})$ .

Todas estas definiciones, salvo la de la integral, se pueden extender fácilmente al contexto de los números complejos como sigue. (La de la integral se puede hacer con más cuidado.)

### Función exponencial compleja

Las siguientes propiedades son equivalentes y caracterizan a la función exponencial compleja  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto e^z$ ,

I) **Aditividad:** Es la única función definida sobre  $\mathbb{C}$  que es derivable en  $z = 0$  tal que

$$f(z + w) = f(z)f(w), \quad f(0) \neq 0, f'(0) = 1.$$

II) **Ecuación diferencial:** Es la única función entera que satisface

$$\frac{d f}{d z}(z) = f(z), \quad f(0) = 1.$$

III) **Fórmula de Euler:**  $e^z := e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ .

IV) **Límite:**  $e^z := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ .

V) **Serie de Taylor:**  $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ .

DEMOSTRACIÓN. ■ **I)  $\Leftrightarrow$  II).** Si suponemos I) cierto, vemos que el cociente incremental será  $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z)$  y por ello  $f'(z) = f'(0)f(z) = f(z)$ . Luego,  $f(z)$  es una función entera, y además como  $f(0+0) = f(0)^2$  tenemos  $f(0) = 1$ . Así que, recordando que la solución a esta EDO con condición inicial es única, sabemos que existe una única función que satisface I) y además deducimos que I)  $\Rightarrow$  II). Por otro lado, si  $f(z)$  está prescrito por II) vamos a introducir otras dos funciones  $f_1(z, w) = f(z+w)$  y  $f_2(z, w) = f(z)f(w)$ , que satisfacen, por un lado, las mismas condiciones iniciales  $f_1(0, w) = f(w)$  y  $f_2(0, w) = f(0)f(w) = f(w)$ , y por otro las mismas ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(z, w) = f_1(z, w), \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(z, w) = f_2(z, w).$$

Por tanto, considerando a  $w$  como parámetro y apelando a la unicidad de las soluciones de estas EDO con condiciones iniciales, deducimos que  $f_1(z, w) = f_2(z, w)$ .

■ **II)  $\Leftrightarrow$  III).** Suponiendo II) vemos que, para  $z = x \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{d f}{d x}(x) = f(x), \quad f(0) = 1.$$

Por ello,  $f(x) = e^x$ , i.e., nuestra extensión de la exponencial real coincide con ésta sobre la recta real. Luego, usando I) obtenemos  $f(z) = f(x)f(iy) = e^x(C(y) + iS(y))$ , donde  $C(y), S(y)$  son funciones reales por determinar, así que

$$f'(z) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z) = e^x \left( \frac{1}{i} \frac{d C}{d y}(y) + \frac{d S}{d y}(y) \right).$$

Pero, de II) deducimos que

$$\begin{cases} -\frac{d C}{d y}(y) = S(y), \\ \frac{d S}{d y}(y) = C(y), \\ C(0) = 1, S(0) = 0. \end{cases}$$

que, cómo sabemos de la teoría de sistemas de EDO lineales tiene como única solución  $C(y) = \cos y$  y  $S(y) = \sin y$ . Por tanto, hemos deducido que II)  $\Rightarrow$  III). Cómo la función definida por I) es única y esta implica la forma dada III), necesariamente debemos tener la implicación inversa (observar, también, que de III) fácilmente se deduce I).

■ **II)  $\Leftrightarrow$  IV)** Definimos la sucesión de funciones  $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  con  $f_n(z) := \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  (más adelante trataremos estos objetos con más detalle). Es fácil darse cuenta de que

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right) \frac{d f_n}{d z}(z) = f_n(z), \quad f_n(0) = 1.$$

Luego, su límite (se puede comprobar que la convergencia es uniforme)  $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$  satisface

$$\frac{d f}{d z}(z) = f(z), \quad f(0) = 1.$$

Así que IV)  $\Leftrightarrow$  II).

▪ **IV)  $\Leftrightarrow$  V)** Por último, se puede comprobar que

$$f_1(z) = 1 + z,$$

$$f_2(z) = 1 + \frac{2}{2}z + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} \frac{z^2}{2!},$$

$$f_3(z) = 1 + \frac{3}{3}z + \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 3} \frac{z^2}{2!} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3} \frac{z^3}{3!},$$

$$f_4(z) = 1 + \frac{4}{4}z + \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 4} \frac{z^2}{2!} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 4 \cdot 4} \frac{z^3}{3!} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} \frac{z^4}{4!},$$

que se obtienen fácilmente usando el binomio de Newton como caso particular de la fórmula

$$f_n(z) = 1 + \frac{n}{n}z + \frac{n(n-1)}{n^2} \frac{z^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \frac{z^3}{3!} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n^4} \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots 2}{n^{n-1}} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{n(n-1)\dots 1}{n^n} \frac{z^n}{n!},$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$  obtenemos la serie de potencias (series que veremos con más cuidado más adelante)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Con esto concluimos la demostración de que **IV)  $\Rightarrow$  V)**, y como **IV)** implica **I)** y **I)** determina una única función concluimos, por fin, que todas epígrafes, de **I)** a **V)**, son definiciones equivalentes de la función exponencial en el plano complejo.  $\square$

Otras propiedades de la función exponencial son

- i) Tenemos  $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$ . Efectivamente,  $1 = e^0 = e^{z-z} = e^z e^{-z}$ .
- ii)  $e^{nz} = (e^z)^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .
- iii) No tiene ceros,  $e^z \neq 0$  para todo número complejo  $z \in \mathbb{C}$ . Si hubiera algún  $z$  tal que  $e^z = 0$  entonces  $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$  no estaría definido.
- iv)  $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$  y  $\arg e^z = \operatorname{Im} z \pmod{2\pi}$ .
- v) Es  $2\pi i$ -periódica,  $e^{z+2\pi k i} = e^z$ , que se deduce de  $e^{2\pi k i} = 1$ . Por tanto, no es inyectiva.
- vi) Es sobreyectiva,  $e^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ . Cada  $w \in \mathbb{C}$  tiene como preimagen a  $z = x + iy$ , con  $x = \log |w|$  y  $y = \arg w \pmod{2\pi}$ .

La función exponencial compleja, como transformación real  $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$  tiene la forma

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y,$$

siendo la matriz jacobiana de esta transformación

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = e^x \begin{pmatrix} \cos y & -\operatorname{sen} y \\ \operatorname{sen} y & \cos y \end{pmatrix} = M_{e^z},$$

que nos cuenta lo que ya sabemos, la exponencial dilata por la exponencial real de la parte real y gira, en sentido antihorario, en un ángulo igual a la parte imaginaria.

## II.7.2. Funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas

## Funciones trigonométricas complejas

Las funciones trigonométricas tienen la extensión compleja –sugerida por la fórmula de Euler– que sigue

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

Observar que éstas extienden las funciones trigonométricas reales, ya que al restringirse a la recta real recuperamos, gracias a la fórmula de Euler, las funciones trigonométricas reales.

Se tienen las siguientes propiedades:

- I) **Paridad:**  $\cos(-z) = \cos z$  y  $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ .
- II) **Fórmulas de adición:**  $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$  y  $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$ .
- III) **Fórmulas de reducción:**  $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - z) = \cos z$ ,  $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + z) = \cos z$ ,  $-\cos(\frac{\pi}{2} + z) = \cos(\frac{\pi}{2} - z) = \operatorname{sen} z$ .
- IV) **Fórmulas de De Moivre:**  $\cos nz + i \operatorname{sen} nz = (\cos z + i \operatorname{sen} z)^n$ .
- V)  $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$ ,  $\cos(z + \pi) = -\operatorname{sen} z$  y  $\operatorname{sen}(z + \pi) = -\cos z$ .
- VI)  $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$  y  $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \bar{z}$ .
- VII) **Ceros:**  $\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \pmod{\pi}$  y  $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ .
- VIII) **Periodicidad:**  $\cos(z + 2n\pi) = \cos z$  y  $\operatorname{sen}(z + 2n\pi) = \operatorname{sen} z$  para  $n \in \mathbb{Z}$ .

También se extienden al plano las funciones trigonométricas tangente y secante

$$\tan z := \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \sec z := \frac{1}{\cos z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \right\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

y sus recíprocas, la cotangente y la cosecante,

$$\cot z := \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \quad \operatorname{csc} z := \frac{1}{\operatorname{sen} z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{ \pi n \}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Las funciones hiperbólicas complejas se definen como sigue.

## Funciones hiperbólicas complejas

Las versión compleja de las funciones hiperbólicas es

$$\begin{aligned} \cosh z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \operatorname{senh} z &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\ &= \cos(iz), & &= -i \operatorname{sen}(iz). \end{aligned}$$

También se extienden al plano complejo las funciones tangente y secante hiperbólicas

$$\tanh z := \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}, \quad \operatorname{sech} z := \frac{1}{\cosh z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ i \frac{\pi}{2} + i \pi n \right\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

y sus recíprocas, la cotangente y la cosecante hiperbólicas,

$$\operatorname{coth} z := \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}, \quad \operatorname{csch} z := \frac{1}{\operatorname{senh} z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{ i \pi n \}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Algunas propiedades son:

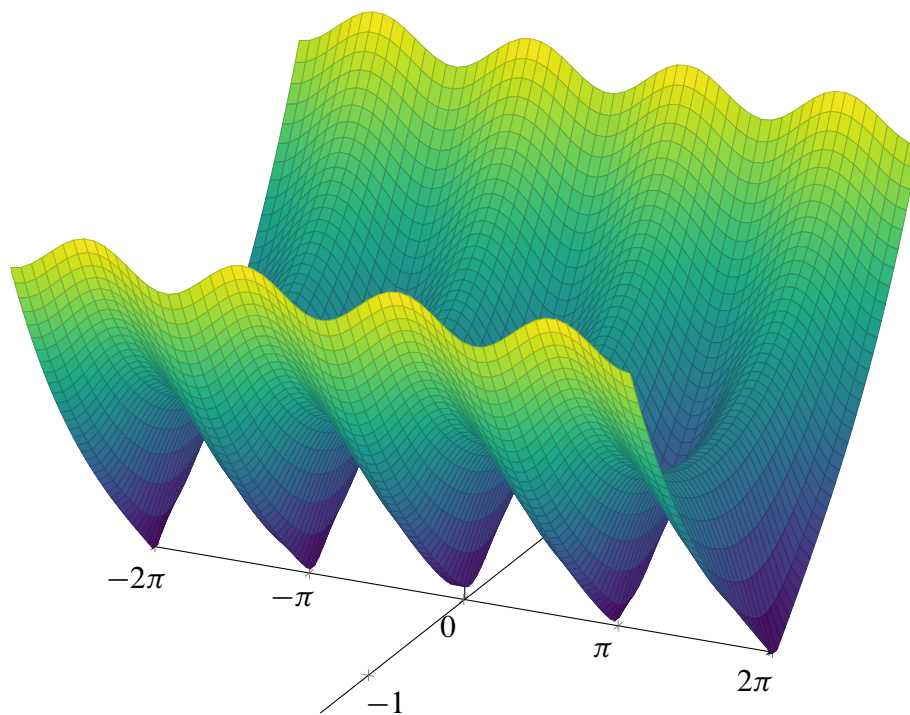
- I)  $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ .  
 II)  $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y$  y  $\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \sinh y$ .  
 III)  $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$  y  $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \operatorname{sen} y$ .  
 IV)  $\tanh z = -i \tan(iz)$ .  
 V) **Ceros:**  $\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \pmod{i\pi}$  y  $\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = i\frac{\pi}{2} \pmod{i\pi}$ .  
 VI) **Periodicidad:**  $\cosh(z + 2n\pi i) = \cosh z$  y  $\sinh(z + 2n\pi i) = \sinh z$  para  $n \in \mathbb{Z}$ .  
 VII) **Módulos:**

$$|\operatorname{sen} z| = \sqrt{\sinh^2 y + \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x},$$

$$|\cos z| = \sqrt{\sinh^2 y + \cos^2 x} = \sqrt{\cosh^2 y - \operatorname{sen}^2 x}.$$

VIII)  $|\sinh y| \leq |\operatorname{sen} z| \leq \cosh y$  y  $|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$ .

IX) **Crecimiento:**  $|\operatorname{sen} z|, |\cos z| \sim \frac{e^{|y|}}{2}$ , cuando  $|y| \rightarrow \infty$

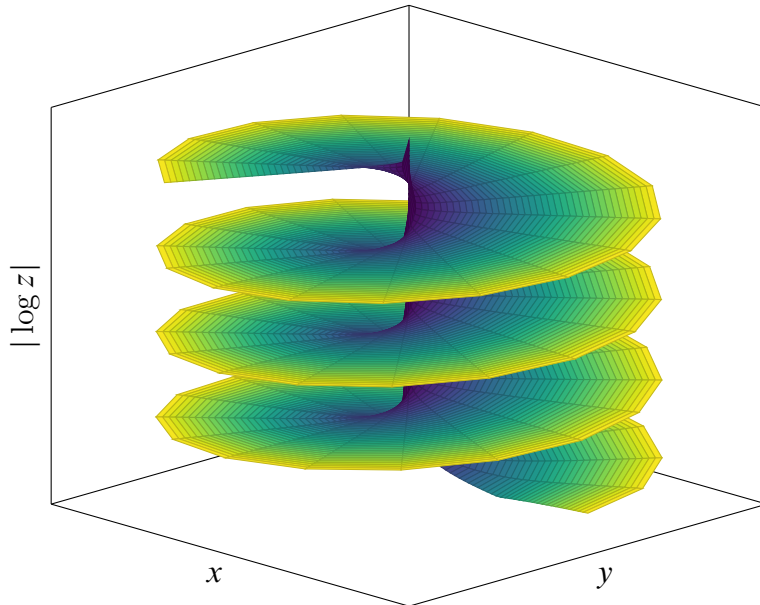


Superficie de  $|\operatorname{sen} z|$

Para las derivadas tenemos

- I)  $(\operatorname{sen} z)' = \cos z$  y  $(\cos z)' = -\operatorname{sen} z$ .  
 II)  $(\tan z)' = \sec^2 z$ , definida para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .  
 III)  $(\sec z)' = \sec z \tan z$ , definida para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .  
 IV)  $(\csc z)' = -\csc z \cot z$ , definida para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{n\pi\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .  
 V)  $(\cot z)' = -\csc^2 z$ , definida para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{n\pi\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .  
 VI)  $(\sinh z)' = \cosh z$  y  $(\cosh z)' = \sinh z$ .

- VII)  $(\tanh z)' = \operatorname{sech}^2 z$ , definida para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\frac{\pi}{2} + in\pi\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .  
 VIII)  $(\operatorname{sech} z)' = \operatorname{sech} z \tanh z$ , definida para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\frac{\pi}{2} + in\pi\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .  
 IX)  $(\operatorname{csch} z)' = -\operatorname{csch} z \coth z$ , definida para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{in\pi\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .  
 X)  $(\coth z)' = -\operatorname{csch}^2 z \cot z$ , definida para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{in\pi\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Superficie de  $|\log z|$ 

### II.7.3. El logaritmo complejo

Como hemos visto la función exponencial compleja no es inyectiva, ya que es  $2\pi i$ -periódica. De hecho, la ecuación  $e^w = z$ , que nos determina las preimágenes  $w = u + iv$  de  $z \in \mathbb{C}$ , tiene como soluciones  $u = \log |z|$  y  $v = \arg z \pmod{2\pi}$ ; i.e., tenemos pues multivaluación con  $w = \log |z| + i \arg z \pmod{2\pi i}$ , donde hemos usado el logaritmo natural definido en su versión real, ya bien conocida. Tenemos pues infinitas preimágenes que difieren en múltiplos de  $2\pi i$ . Para tener una aplicación unívoca habremos de elegir una determinación, una única preimagen, de forma consistente, para ello basta con elegir una determinación del argumento.

#### Función logaritmo compleja

Dado un intervalo semiabierto  $I \subset \mathbb{R}$  de longitud  $2\pi$  y un número complejo  $z \neq 0$ , se define el logaritmo (natural) en su determinación  $I$  como sigue

$$\log_I z = \log |z| + i \arg_I z.$$

La determinación principal corresponde a  $I = (-\pi, \pi]$  y se usa la notación  $\operatorname{Log} z = \log_{(-\pi, \pi]} z$ .

Algunos ejemplos son  $\operatorname{Log}(-2i) = \log 2 - i\frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{Log}(-3) = \log 3 + i\pi$ ,  $\operatorname{Log} 10 = \log 10$  y  $\log(3 + 4i) = \log 5 + i \arctan \frac{4}{3}$ .

Se cumplen las siguiente propiedades

- i) Si  $z \neq 0$  entonces  $e^{\log_I z} = z$ .
- ii)  $\log_I e^w = w \pmod{2\pi i}$  y  $\log_I e^w = w \Leftrightarrow \operatorname{Im} w \in I$ .
- iii)  $\log_I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} s \in I\}$  es una biyección.
- iv) Si  $zw \neq 0$  entonces  $\log_I(zw) = \log_I z + \log_I w \pmod{2\pi i}$ .

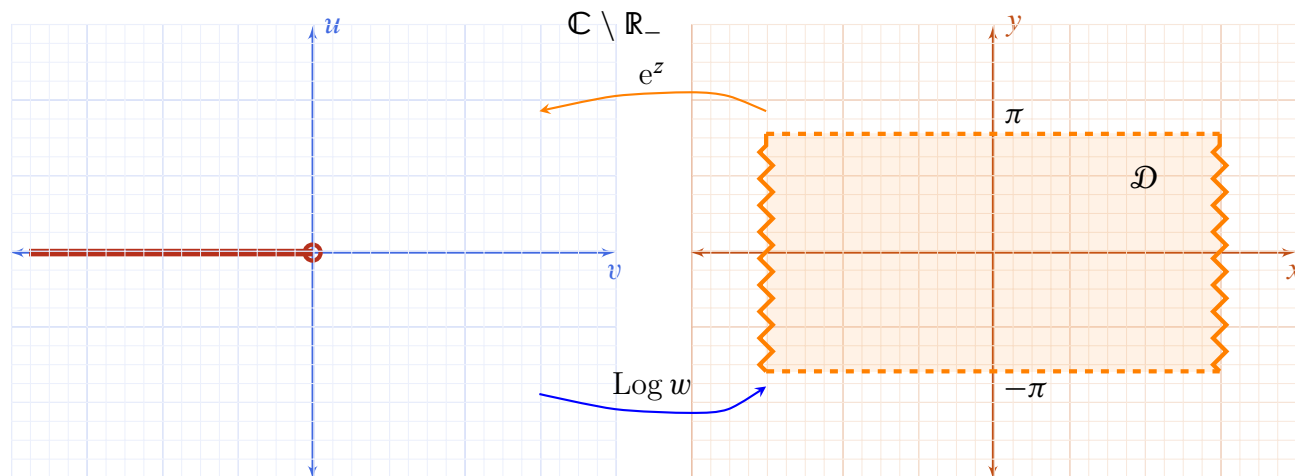
- DEMOSTRACIÓN. i) Para  $z \neq 0$  tenemos  $e^{\log_I z} = e^{\log|z| + i \arg_I z} = |z| e^{i \arg_I z} = z$ .  
 II) Si  $w = u + i v$  entonces  $\log_I e^w = \log|e^w| + i \arg_I e^w = \log e^u + i v \pmod{2\pi i} = u + i v \pmod{2\pi i}$ .  
 III) Consecuencia inmediata de las dos anteriores.  
 IV)  $\log_I(zw) = \log|zw| + i \arg_I(zw) = \log|z| + i \arg_I z + i \arg_I w \pmod{2\pi i} = \log_I z + \log_I w \pmod{2\pi i}$ .

□

**Ejemplo:** Debe subrayarse que  $\text{Log}(zw) \neq \text{Log} z + \text{Log} w$ , ya que se puede añadir un múltiplo de  $2\pi i$ . Por ejemplo,  $\text{Log}(-i) = -i \frac{\pi}{2}$ , pero  $\text{Log}(-1) + \text{Log}(i) = i\pi + i \frac{\pi}{2} = i \frac{3\pi}{2} = -i \frac{\pi}{2} + 2\pi i$ .



La determinación principal del argumento  $\text{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$  es una función discontinua sobre los reales negativos,  $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ , ya que  $\text{Arg}(-|r| + i\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^\pm} \pm\pi$ . Luego, la determinación principal de logaritmo también es discontinua. Para entender mejor esta situación, podemos restringir la función exponencial al dominio  $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im} z < \pi\}$ , y ahora  $\exp : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  es una biyección, con inversa dada por la determinación principal del logaritmo,  $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathcal{D}$ .



Dominios de  $\text{Log}(w)$  y  $e^z$

**Derivada del logaritmo**

La derivada de  $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathcal{D}$  es  $\frac{d \text{Log}(w)}{d w} = \frac{1}{w}$ .

DEMOSTRACIÓN. Cómo sabemos la exponencial compleja es una función que no se anula y holomorfa en  $\mathbb{C}$ , por tanto continua, así que podemos aplicar el teorema de la función inversa para funciones complejas, y deducir que la función inversa  $\exp^{-1}(w) = \text{Log} w$  tiene como

derivada

$$\begin{aligned}\frac{d \operatorname{Log}(w)}{d w} &= \frac{d \exp^{-1}(w)}{d w} = \frac{1}{\frac{d \exp(z)}{d z}} \Big|_{z=\operatorname{Log} w} = \frac{1}{\exp(z)} \Big|_{z=\operatorname{Log} w} \\ &= \frac{1}{w}.\end{aligned}$$

□

*II.7.3.1. Aplicación: potencias complejas* Dados dos número complejos  $a, b \in \mathbb{C}$ , discutamos ahora como podemos definir  $a^b$ . La motivación inicial es clara, si  $b \in \mathbb{N}$ :  $a^b = \underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}}$ , para

extenderlo a  $b \in \mathbb{Z}$ , en primer lugar decimos que  $a^0 = 1$  y también tenemos que considerar que significa  $a^{-b}$  cuando  $b \in \mathbb{N}$  y  $a \neq 0$ , esto es,  $a^{-b} = \frac{1}{\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}}}$ . Observese que en estas conside-

raciones  $a \in \mathbb{C}$  es un número complejo arbitrario. Para seguir avanzando vamos a considerar que ocurre cuando  $b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  con  $p, q \in \mathbb{Z}$ , primos relativos y  $q > 1$ . Para tener una mayor motivación, dejemos que, de momento, el número  $a \in \mathbb{R}$  sea real. Por ejemplo, si  $b = \frac{3}{2}$  y  $a \in \mathbb{R}$  con  $a \geq 0$  definimos  $a^{\frac{3}{2}} = (\pm \sqrt{a})^3 = \pm \sqrt{a}^3$ , viendo que existen dos posibles valores, esto es, es una aplicación multivaluada. Sin embargo, cuando  $a < 0$ , hay que echar mano de los números imaginarios, ya que si  $a < 0$  podemos escribir  $a^{\frac{3}{2}} = (\pm \sqrt{-|a|})^3 = -(\pm \sqrt{(|a| i)})^3 = \mp \sqrt{|a|}^3 i$ . Volviendo al caso en que la base  $a \in \mathbb{R}_+$  sea un número real positivo, se puede utilizar las funciones logaritmo natural y exponencial reales para escribir  $a^b = e^{b \log a}$ , donde es imprescindible que  $a > 0$ . ¿Donde está la multivaluación? Es fácil verlo con nuestro ejemplo, atendiendo a la última definición  $a^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2} \log a}$ , y hemos descartado el valor negativo. Pero, como hemos visto, ambas funciones, logaritmo y exponencial, tiene extensiones al plano complejo y, en particular, la función logaritmo es multivaluada. Es también multivaluada cuando la restringimos a número reales positivos. Esto es,  $\log a = \log |a| + 2\pi i n$ , donde  $n \in \mathbb{Z}$ , ya que  $a = |a| e^{2\pi n i}$ . Por tanto, atendiendo a esta nueva visión del logaritmo, tendremos  $a^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2} \log |a| + 3\pi n i}$ , pero  $e^{3\pi n i} = \begin{cases} 1, & n \text{ par,} \\ -1, & n \text{ impar,} \end{cases}$  donde vemos como aparece el signo  $\pm$  y la bivaluación perdida. Pare-

ce claro, que la consideración de  $a^b$  nos conduce inevitablemente a aceptar que existen varias posibilidades, es decir que estamos ante una expresión multivaluada, en donde van aparecer números complejos aunque los argumentos sean reales. La idea clave es usar la extensión compleja del logaritmo para escribir la expresión multivaluada

$$a^b := e^{b \log a},$$

donde  $\log$  es el logaritmo natural complejo. Dado un intervalo  $I$  semiabierto de longitud  $2\pi$  y la correspondiente determinación del logaritmo  $\log_I$ , ahora ya una función compleja univaluada, podemos escribir

$$(13) \quad a^b := \{e^{b(\log_I a + 2\pi n i)} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Para distinguir el valor asociado a la determinación  $I$  podemos escribir (notación mía)

$$[a^b]_I := e^{b \log_I a}$$



de modo que  $a^b = \{[a^b]_I e^{2\pi n i b} : n \in \mathbb{Z}\}$ , para la determinación principal escribiremos  $[a^b] := e^{b \operatorname{Log} a}$ . Así que la definición para  $a, b$  reales con  $a > 0$ ,  $a^b = e^{b \log a}$  en términos de la exponencial y logaritmo reales, corresponde a la determinación principal de logaritmo. Es decir, la definición de las potencias reales corresponde a la determinación principal de la definición de potencias complejas.

Atendiendo a (13) revisemos nuestra primeras consideraciones. Sea  $b \in \mathbb{Z}$ , entonces existe un único valor, ya que en ese caso  $e^{2\pi n b i} = 1$ . Esta es el única situación en que  $a^b$  es una expresión univaluada. Por otro lado, si  $b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  es un número racional, con  $p, q \in \mathbb{Z}$  primos relativos y  $q > 1$ , tenemos  $q$  posibles elementos en el conjunto, las  $q$  raíces  $q$ -ésimas de  $a^p$ , esto se debe a que  $e^{2\pi n \frac{p}{q} i} = (e^{2\pi \frac{n}{q} i})^p$  y  $e^{2\pi \frac{n}{q} i} = (\omega_q)^n$ , donde  $\omega_q = e^{\frac{2\pi}{q} i}$  el generador de las raíces  $q$ -ésimas de la unidad, y sus potencias conforman todas las posibles raíces  $q$ -ésimas. Este es el unico caso en que la expresión  $a^b$  es multivaluada con un número finito de valores diferentes. En los demás casos  $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$  el conjunto de potencias complejas  $a^b$  tiene infinitos elementos, o posibles valores, difiriendo las potencias en factores multiplicativos de la forma  $e^{2\pi n b i}$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Efectivamente, si  $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , es un número real irracional entonces  $e^{2\pi n b i} = e^{2\pi m b i}$  implica que  $2\pi(n - m)b i = 2\pi m k i$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$  cuya única solución es que  $n = m$ . Por tanto, todos los valores son distintos. Por otro lado, si  $b = x + i y$  con  $y \neq 0$  tenemos  $e^{2\pi n b i} = e^{2\pi n x i} e^{-2\pi n y}$  y todos los valores son distintos.

**Ejemplos:** El primero es



$$\begin{aligned} (1+i)^{3i} &= \{e^{3i(\operatorname{Log}(1+i)+2\pi n i)}\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ &= \{e^{3i \operatorname{Log}(1+i)} e^{-6\pi n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ &= \{e^{3i(\frac{\log 2}{2} + \frac{3\pi i}{4})} e^{-6\pi n}\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ &= \{e^{-3\pi(2n + \frac{3}{4})} e^{i \frac{3 \log 2}{2}}\}_{n \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

con determinación principal  $[(1+i)^{3i}] = e^{-\frac{9\pi}{4}} e^{i \frac{3 \log 2}{2}}$ . Otro ejemplo, más llamativo,

$$\begin{aligned} i^i &= \{e^{i \operatorname{Log} i - 2\pi n} : n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{e^{i(\log 1 + i \frac{\pi}{2}) - 2\pi n} : n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi n} : n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

y su determinación principal es  $[i^i] = e^{-\frac{\pi}{2}}$  (permitirme escribir  $i^i e^{\frac{\pi}{2}} = 1$ , quizás no tan cautivadora como la identidad de Euler pero también mágica ¿no?). Otra sorpresa, algo tan imaginario como  $i^i$ , la unidad imaginaria elevada a la unidad imaginaria, es real en su determinación principal, involucrando de nuevo a los números  $e$  y  $\pi$ , pero es que no sólo ¡todas las determinaciones son reales!

#### Aditividad de las potencias complejas con la misma base

Dada una determinación  $I$  y números complejos  $a, b, c \in \mathbb{C}$  se cumple que  $[a^b]_I [a^c]_I = [a^{b+c}]_I$ .

DEMOSTRACIÓN. Por un lado tenemos que  $[a_I^{b+c}] = e^{(b+c)\log_I a}$ , por otro

$$[a^b]_I [a^c]_I = e^{b \log_I a} e^{c \log_I a} = e^{(b+c)\log_I a},$$

en donde hemos usado la propiedad de adición de la exponencial compleja.  $\square$

**II.7.3.2. Funciones  $z^a$  y  $a^z$**  Como aplicación de las ideas anteriormente desarrolladas definimos las potencias de  $z$  mas allá de las potencias enteras y funciones exponenciales con cualquier base compleja

### ¿Qué son $z^a$ y $a^z$ ?

Dado  $a \in \mathbb{C}$  se define como la función potencia  $a$ -ésima y la exponencial con base  $a$  como sigue

$$z^a = e^{a \log z}, \quad a^z = e^{(\log a)z}.$$

Dado un intervalo semiabierto  $I$  de longitud  $2\pi$  la correspondiente determinación de logaritmo nos conduce a una función univaluada  $[z^a]_I := e^{a \log_I z}$  y a  $[a^z]_I = e^{(\log_I a)z}$ , que llamaremos determinaciones  $I$  de las correspondientes funciones. La determinación principal la denotaremos por  $[z^a] := e^{a \text{Log} z}$  y  $[a^z] = e^{(\text{Log} a)z}$ , siendo esta última notación de cosecha propia.

Cómo el argumento y el logaritmo la función  $f(z) = z^a$  es una función multivaluada, salvo para  $a \in \mathbb{Z}$ , en cuyo caso es una función univaluada: una potencia entera de  $z$ . Cuando  $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$  primos relativos y  $q > 1$ , tenemos  $q$  posibles valores, como hemos discutido anteriormente. Es una función multivaluada con  $q$ -posibles valores. En general, para  $a \notin \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$  tendremos una función multivaluada que toma infinitos valores.

### Derivada de $z^a$ y $a^z$

i) La derivada de  $[z^a] : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$  es  $\frac{d[z^a]}{dz} = a[z^{a-1}]$ .

ii) La derivada de  $[a^z] : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es  $\frac{d[a^z]}{dz} = \text{Log}(a)[a^z]$ .

DEMOSTRACIÓN. i) Usando la regla de la cadena con  $[z^a] = e^{a \text{Log} z}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d[z^a]}{dz} &= e^{a \text{Log} z} a \frac{d \text{Log} z}{dz} = e^{a \text{Log} z} a \frac{1}{z} = a e^{a \text{Log} z} e^{-\text{Log} z} \\ &= a e^{(a-1) \text{Log} z}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $z^{-1} = e^{-\log z}$ .


ii) Aplicamos la regla de la cadena a  $e^{(\text{Log} a)z}$  y obtenemos el resultado.  $\square$

**Dificultades con la notación exponencial** Procede ahora hacernos la siguiente pregunta ¿qué pasa si escojo la base de la exponencial  $a^z$  cómo el número  $e$ ? tendremos la función multivaluada  $e^z$ , pero hemos visto anteriormente que la función  $e^z$  es univaluada. Estamos ante un problema notacional. La función exponencial  $e^z$ , que definimos al principio de esta sección, es la determinación principal de la función exponencial con base  $e$  definida ahora. Por tanto, se debe de tener cuidado con esta notación. Ésta es una de las razones por la que algunos autores prefieren usar siempre la notación  $\exp(z)$  en vez de  $e^z$ . Se ve claramente, en este caso, la debilidad de la notación tipo exponencial:

$$\begin{aligned} e^z &= \exp(z \log e) \\ &= \exp(z(\log |e| + 2\pi n i)) \\ &= \exp(z) \exp(2\pi n z i). \end{aligned}$$

Que coinciden sólo cuando  $\exp(2\pi n z i) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$ , que ocurre sólo cuando  $z \in \mathbb{Z}$ .

Si tomamos una determinación  $I$ , tendremos  $[e^z]_I = \exp(z) \exp(z \arg_I(e) i)$ . Las diferentes determinaciones las podemos agrupar según  $2\pi n \in I$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces  $\arg_I(e) = 2\pi n$  y tendremos  $[e^z]_I = \exp(z) \exp(2\pi n z i)$ . Para  $n = 0$ , esto es cuando  $0 \in I$ , tendremos  $\arg_I e = 0$ , y por ende  $[e^z]_I = \exp(z)$ . Si  $n \neq 0$  entonces  $[e^z]_I = \exp(z)$  sólo para aquellos  $z$  tales que  $nz \in \mathbb{Z}$ , esto es  $z = \frac{m}{n}$ , donde  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Ejemplo:** Supongamos que  $n = 1$ , esto es  $2\pi \in I$ , entonces en general tendremos que  $[e^z]_I \neq \exp(z)$  salvo cuando  $z \in \mathbb{Z}$ , si  $n = -3$ , esto es  $-6\pi \in I$  entonces  $[e^z]_I \neq \exp(z)$  salvo que  $z \in \frac{1}{3}\mathbb{Z}$ . 

A pesar de estas dificultades seguiremos usando ambas notaciones cuando el contexto lo permita, que ocurrirá, como veremos, en la mayoría de las ocasiones

**II.7.3.3. Función  $\sqrt[n]{z}$**  Es la función multivaluada  $\sqrt[n]{z} := e^{\frac{1}{n} \log z}$  que puede tomar  $n$  valores. Es la raíz  $n$ -ésima de  $z$ , en el sentido de que  $(\sqrt[n]{z})^n = z$ . Efectivamente,  $(\sqrt[n]{z})^n = \left( e^{\frac{1}{n} \log z} \right)^n = e^{n \cdot \frac{1}{n} \log z} = e^{\log z} = z$ . Dada la determinación principal  $f(z) = [\sqrt[n]{z}]$  es una holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  con derivada dada por  $f'(z) = \frac{1}{n}(z)^{\frac{1-n}{n}}$ .

**II.7.4. Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas** Las funciones inversas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas se determinan por las condiciones

$$\begin{aligned} w = \arcsen z &\Leftrightarrow z = \sen w, & w = \arccos z &\Leftrightarrow z = \cos w, \\ w = \operatorname{arcsenh} z &\Leftrightarrow z = \operatorname{senh} w, & w = \operatorname{arcosh} z &\Leftrightarrow z = \operatorname{cosh} w. \end{aligned}$$

Estas relaciones conducen a la siguiente identificación de estas funciones inversas con expresiones que involucran el logaritmo y la raíz cuadrada.

### Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas

Las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas satisfacen las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,sen} z &= -i \log(\sqrt{1-z^2} + iz), & z \in \mathbb{C}, \\ \operatorname{arc\,cos} z &= -i \log(i\sqrt{1-z^2} + z), & z \in \mathbb{C}, \\ \operatorname{arc\,tan} z &= \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}, \\ \operatorname{arc\,senh} z &= \log(\sqrt{z^2+1} + z), & z \in \mathbb{C}, \\ \operatorname{arc\,cosh} z &= \log(\sqrt{z^2-1} + z), & z \in \mathbb{C}, \\ \operatorname{arc\,tanh} z &= \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}, \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Sólo demostraremos la primera relación, ya que las demás se demuestran de manera similar (¡hacerlo!). Estudiemos pues la primera ecuación  $z = \operatorname{sen} w$ , esto es

$$2iz = e^{iw} - e^{-iw} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0.$$

De donde, resolviendo la ecuación cuadrática en  $Z = e^{iw}$ , obtenemos  $e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}$ , donde la raíz cuadrada se entiende como función bivaluada. Por tanto,  $w = -i \log(\sqrt{1-z^2} + iz)$ .  $\square$

De estas fórmulas uno puede evaluar las derivadas de estas funciones inversas

### Derivadas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas

Las funciones trigonométricas e hiperbólicas satisfacen las siguientes identidades

$$\begin{aligned} (\operatorname{arc\,sen} z)' &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : |z| > 1\}, \\ (\operatorname{arc\,cos} z)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : |z| > 1\}, \\ (\operatorname{arc\,tan} z)' &= \frac{1}{1+z^2}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in i\mathbb{R} : |z| > 1\}, \\ (\operatorname{arc\,senh} z)' &= \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in i\mathbb{R} : |z| > 1\}, \\ (\operatorname{arc\,cosh} z)' &= \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : |z| > 1\}, \\ (\operatorname{arc\,tanh} z)' &= \frac{1}{1-z^2}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : |z| > 1\}. \end{aligned}$$

### Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas

Las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas están vinculadas como sigue

$$\operatorname{arc\,senh} z = -i \operatorname{arc\,sen} i z$$

$$\operatorname{arc\,cosh} z = -i \operatorname{arc\,cos} z$$

$$\operatorname{arc\,tanh} z = -i \operatorname{arctan} i z.$$

DEMOSTRACIÓN. Si  $w = \operatorname{senh} z$ , entonces  $z = \operatorname{arc\,senh} w$ , pero como  $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen} i z$  deducimos que  $w = -i \operatorname{sen} i z$  y así  $\operatorname{arc\,sen} i w = i z$  y por lo tanto  $\operatorname{arc\,senh} w = -i \operatorname{arc\,sen} i w$ . La de la arco tangente se hace igual. Como  $\operatorname{cosh} z = \operatorname{cos} i z$  si  $w = \operatorname{cosh} z$ , de modo que  $z = \operatorname{arc\,cosh} w$ , entonces  $\operatorname{arc\,cos} w = i z$  y  $z = -i \operatorname{arc\,cos} w$ , de donde deducimos que  $\operatorname{arc\,cosh} w = -i \operatorname{arc\,cos} w$ .  $\square$

## §II.8. Ejercicios

- i) Hallar los valores de  $\log(-e)$ ,  $1^i$ ,  $\operatorname{cos} i$  y  $\operatorname{tanh}(\log 3 + i \frac{\pi}{4})$ .

**Solución:**

- $\log(-e) = \log e + i \operatorname{arg}(-e) = 1 + i\pi \pmod{2\pi i}$ .

- $1^i = e^{i \log 1} = e^{i(\log 1 + i \operatorname{arg} 1 + 2\pi k)} = e^{-2\pi k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

- $\operatorname{cos} i = \frac{e^{ii} + e^{-ii}}{2} = \frac{e^{-1} + e^1}{2} = \frac{e^2 + 1}{2e}$

- En primer lugar, observamos que  $\operatorname{tanh} z = \frac{\operatorname{senh} z}{\operatorname{cosh} z} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$  y como  $e^{2(\log 3 + i \frac{\pi}{4})} = e^{\log 9 + i \frac{\pi}{2}} = 9i$  queda  $\operatorname{tanh}(\log 3 + i \frac{\pi}{4}) = -\frac{1-9i}{1+9i} = -\frac{(1-9i)^2}{1+9^2} = \frac{1}{41}(40 + 9i)$ .

- ii) Comparar los valores de  $(2^i)^2$ ,  $(2^2)^i$  y  $2^{2i}$ .

**Solución:**

- En primer lugar,  $2^i = e^{i \log 2} = e^{i \log |2| + i \operatorname{arg} 2} = e^{-2\pi k} e^{i \log 2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto,  $(2^i)^2 = e^{-4\pi k} e^{i \log 4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

- Por otro lado,  $4^i = e^{i \log 4} = e^{i(\log |4| + i \operatorname{arg} 4)} = e^{-2\pi k} e^{i \log 4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Así que, como conjuntos  $(2^i)^2 \subsetneq 4^i$ .

- Por último,  $2^{2i} = e^{2i \log 2} = e^{2i(\log |2| + i \operatorname{arg} 2)} = e^{-4\pi k} e^{i \log 4}$

En definitiva, como subconjuntos en  $\mathbb{C}$  tenemos  $2^{2i} = (2^i)^2 \subsetneq 4^i$ .

- iii) Resolver  $e^{4z} = i$ ,  $\operatorname{sen} z = 3$ ,  $\operatorname{sen} z + \operatorname{cos} z = 2$ .

**Solución:**

- Como  $e^{4z} = i$  concluimos que  $4z = \log i = \log |i| + i \operatorname{arg} i = i \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi i}$ , esto es  $z = i \frac{\pi}{8} \pmod{\frac{\pi}{2} i}$ .

- La condición  $\operatorname{sen} z = 3$  se escribe  $e^{iz} - e^{-iz} = 6i$ , esto es  $Z^2 - 6iZ - 1 = 0$ , donde  $Z := e^{iz}$ . Así que  $Z = \frac{6i \pm \sqrt{(6i)^2 + 4}}{2} = \frac{6i \pm \sqrt{-36 + 4}}{2} = (3 \pm 2\sqrt{2})i$ . Ahora bien,  $z = -i \log Z = -i(\log |Z| + i \operatorname{arg} Z) = \operatorname{arg} Z - i \log |Z|$ , y como  $|Z| = 3 \pm 2\sqrt{2}$  con  $\operatorname{arg} Z = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$  (debido a  $3 > 2\sqrt{2}$ , ya que  $\sqrt{9} > \sqrt{8}$ ). Por todo ello,  $z = \frac{\pi}{2} - i \log(3 \pm 2\sqrt{2}) \pmod{2\pi}$ .

- La relación  $\operatorname{sen} z + \cos z = 2$  se escribe

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$$

que con  $Z = e^{iz}$  se lee

$$(1 - i)Z^2 - 4Z + 1 + i = 0.$$

La solución de esta ecuación cuadrática es

$$Z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1 - i)(1 + i)}}{1 - i} = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1 + i)$$

con  $|Z| = \sqrt{2} \pm 1$  y  $\arg Z = \frac{\pi}{4}$  mód  $2\pi$ . Por lo tanto,  $z = \frac{\pi}{4} - i \log(\sqrt{2} \pm 1)$  mód  $2\pi$ .

- iv) Estudiar la derivabilidad compleja de las funciones  $\sqrt{|xy|}$ ,  $|z|$ ,  $|z|^2$ ,  $z \operatorname{Re} z$  y  $e^{\frac{z^3}{z+3}}$ .

**Solución:** Tenemos funciones  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ , donde  $z = x + iy$ , y hay que verificar las ecuaciones de Cauchy–Riemann  $u_x = v_y$  y  $u_y = -v_x$ . Otra posibilidad es utilizar el operador  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right)$  y verificar que  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ .

- En este caso  $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$  y  $v(x, y) = 0$ . Cuando  $v = 0$  las condiciones de Cauchy–Riemann nos exige que  $u$  sea constante, que no es el caso, y por tanto no existe la derivada compleja.
- Ahora  $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $v(x, y) = 0$ . El argumento anterior asegura que la función no es holomorfa. Otra posibilidad para deducirlo es escribir  $f(z) = \sqrt{z\bar{z}}$ , y como  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} \neq 0$ , y así pues no es derivable.
- Si  $f(z) = z\bar{z}$  tenemos  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$  y la función no es derivable.
- Ahora  $f(z) = z \operatorname{Re} z$ , que podemos escribir como  $f(z) = \frac{1}{2}z(z + \bar{z})$ . Por ello,  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{2} \neq 0$  y la función no es holomorfa. Se puede ver también, de modo alternativo, que  $f(z) = (x + iy)x$ , así que  $u(x, y) = x^2$ ,  $v(x, y) = xy$ , por ello  $u_x = 2x$  y  $v_y = x$  y la primera ecuación de Cauchy–Riemann no se satisface, además  $u_y = 0$  y  $v_x = y$  y vemos que tampoco se verifica la segunda.
- Por último, la función  $f(z) = e^{\frac{z^3}{z+3}}$  satisface que  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  allí donde esta definida, esto es cuando  $z \neq -3$ . Así que es derivable en su dominio de definición. En este caso la aplicación directa de las ecuaciones de Cauchy–Riemann conducen a complejo cálculo. Aunque se podría haber razonado usando que la composición de funciones derivables es derivable, y que el cociente de funciones derivables también lo es donde no se anule el denominador.

- v) Dada una función  $f(t)$  de la variable  $t$  con valores complejos ¿Son derivables  $f(x)$  y  $f(y)$ ?

**Solución:** No, en general no lo son. En el primer caso tenemos que  $u, v$  solo dependen de  $x$  y no de  $y$ . En el segundo caso, no dependen de  $x$  y solo dependen de  $y$ . Por lo tanto, de acuerdo con las condiciones de Cauchy–Riemann, solo si fueran funciones constantes serían holomorfas.

- vi) Determinar funciones holomorfas  $f(z)$  con las siguientes partes reales:  $u(x, y) = ax + by + c$ ,  $u(x, y) = e^{-y} \cos x$ ,  $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Solución:**

- En el primer caso,  $u(x, y) = ax + by + c$ , nos queda que  $u_x = a$  y  $u_y = b$  así que  $u(x, y)$  es una función armónica. Por otro lado, sabemos que los armónicos conjugados  $v(x, y)$  satisfacen  $v_y = a$  y  $v_x = -b$ . Por ende,  $v = ay + V(x)$ , donde  $V(x)$  es una función de la variable  $x$  a determinar por la segunda condición de Cauchy–Riemann:  $v_x = V' = -b$ , así que  $V(x) = -bx + d$ , donde  $d$  es una constante de integración arbitraria. Por lo tanto,  $v(x, y) = -bx + ay + d$  y

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + i v(x, y) = ax + by + c + i(-bx + ay + d) \\ &= (a - ib)(x + iy) + c + id \\ &= (a - ib)z + c + id. \end{aligned}$$

- Para el segundo caso,  $u(x, y) = e^{-y} \cos x$ , tenemos  $u_x = -e^{-y} \sin x$ ,  $u_y = -e^{-y} \cos x$ , y por ello  $u_{xx} = -e^{-y} \cos x$ ,  $u_{yy} = e^{-y} \cos x$  y  $u(x, y)$  es una función armónica,  $\Delta u = 0$ . Existen, consecuentemente, armónicos conjugados  $v(x, y)$  que se determinan mediante las condiciones de Cauchy–Riemann:  $v_y = -e^{-y} \sin x$ ,  $v_x = e^{-y} \cos x$ . De la primera de éstas obtenemos  $v(x, y) = e^{-y} \sin x + V(x)$  y de la segunda que  $e^{-y} \cos x + V'(x) = e^{-y} \cos x$ , y  $V(x) = C$  es una constante, no dependiendo de  $x$ . Por ello,  $v(x, y) = e^{-y} \sin x + C$  y concluimos que

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + i v(x, y) = e^{-y} \cos x + i(e^{-y} \sin x + C) \\ &= e^{-y} e^{ix} + iC = e^{i(x+iy)} + iC \quad \text{ya que } e^{iy} = \cos y + i \sin y \\ &= e^{iz} + iC. \end{aligned}$$

- En el tercer caso, con  $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ , debemos suponer que  $z \neq 0$ , y se tienen las siguientes derivadas

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & u_y &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ u_{xx} &= \frac{2(x^3 - 3xy^2)}{(x^2 + y^2)^3}, & u_{yy} &= -\frac{2(x^3 - 3xy^2)}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

y  $u$  es una función armónica para  $z \neq 0$ . Así pues, existen sus armónicos conjugados  $v(x, y)$ , que por las condiciones de Cauchy–Riemann deben cumplir

$$v_y = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v_x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Por simplicidad, consideremos en primer lugar la segunda condición de Cauchy–Riemann, que integramos para obtener

$$v = y \int dx \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + V(y).$$

Derivando esta expresión con respecto de  $y$  para compararlo el resultado con la primera condición de Cauchy–Riemann:

$$\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + V'(y)$$

y así deducimos que  $V(y) = C$  es una función constante. Por ende, para  $z \neq 0$  concluimos que

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + i v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-iy}{x^2 + y^2} + iC = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + iC \\ &= \frac{1}{z} + iC. \end{aligned}$$

- Finalmente, para  $u = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ , debemos tener  $z \neq 0$ , y se obtienen las siguientes derivadas

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{x}{x^2 + y^2}, & u_y &= \frac{y}{x^2 + y^2}, \\ u_{xx} &= -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & u_{yy} &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Así que  $u$  es armónica y, usando las condiciones de Cauchy–Riemann, podemos calcular sus armónicos conjugados  $v(x, y)$ . Integrando

$$v_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

obtenemos

$$v = \int dy \frac{x}{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x} + V(x).$$

Así que, como de las condiciones de Cauchy–Riemann sabemos que

$$v_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

nos queda que  $V'(x) = 0$  y por ello

$$v(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + C,$$

donde  $C$  es una constante. Por todo ello, concluimos que

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + i v(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \frac{y}{x} + iC = \log |z| + i \operatorname{Arg} z + iC \\ &= \operatorname{Log} z + iC. \end{aligned}$$

En todos los casos anteriores una vez encontrada la forma explícita  $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$  podemos escribir  $f(z) = u(z, 0) + i v(z, 0)$ , esto es  $x \rightarrow z$  y  $y \rightarrow 0$ . La razón para ello se basa en la teoría de la extensión analítica, que no veremos en estas notas.

- VII) Probar la regla L'Hôpital para límites complejos: Si  $f(z)$  y  $g(z)$  son derivables en  $z = z_0$  y se anulan en ese punto, con  $\lim_{z \rightarrow z_0} g'(z) \neq 0$ , entonces  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$ .

**Solución:**

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z_0+h) - g(z_0)}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h)}{g(z_0 + h)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}.$$



VIII) Encontrar las funciones armónicas de la forma  $u(x, y) = g(ax + by)$  ó  $u(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ .

**Solución:**

■ Claramente,

$$u_{xx} = a^2 g''(ax + by), \quad u_{yy} = b^2 g''(ax + by)$$

y el laplaciano es  $\Delta u = (a^2 + b^2)g''$ . Así para que esta  $u$  sea armónica es imprescindible que, o bien,  $g'' = 0$  o que  $a^2 + b^2 = 0$  esto es que  $b = \pm ia$ . En el primer caso, tendremos

$$u(x, y) = A(ax + by) + B,$$

con  $A, B$  constantes. En el segundo caso,  $g$  es una función arbitraria de  $a(x \pm iy)$  y así  $u = g(az)$  ó  $u = g(a\bar{z})$ .

■ En este caso,

$$\begin{aligned} u_x &= -g'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{y}{x^2}, & u_y &= -g'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{x}, \\ u_{xx} &= g''\left(\frac{x}{y}\right)\frac{y^2}{x^4} + g'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{2y}{x^3}, & u_{yy} &= g''\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

y la condición de armonicidad es

$$g''\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x^2 + y^2}{x^4} + g'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{2y}{x^3} = 0.$$

Esto es,

$$\frac{g''\left(\frac{x}{y}\right)}{g'\left(\frac{x}{y}\right)} = -\frac{2xy}{x^2 + y^2} = -\frac{2\frac{x}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}.$$

Así que, en términos de  $t := \frac{y}{x}$ , la función a determinar  $g$  es solución de

$$\frac{d}{dt} \log\left(\frac{dg}{dt}\right) = -\frac{2t}{1 + t^2},$$

que implica

$$\frac{dg}{dt} = \frac{C_1}{1 + t^2},$$

donde  $C_1$  es una constante arbitraria. Por lo tanto,

$$g(t) = C_1 \arctan t + C_0,$$

donde  $C_0$  es otra constante arbitraria. Esto es, la función será armónica si tiene la forma

$$g\left(\frac{x}{y}\right) = C_1 \arctan \frac{y}{x} + C_0.$$

Si escribimos  $z = x + iy = |z|e^{i\arg z}$  queda  $g = C_1 \arg z + C_2$ . Obsérvese que sobre el eje real,  $x = 0$ , la función se evalúa sobre infinito.

IX) Escribir las condiciones de Cauchy–Riemann en polares, ya sea para las variables independientes como las dependientes.

**Solución:** Al usar coordenadas polares para las variables independientes

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, & r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\y &= r \operatorname{sen} \theta, & \theta &= \arctan \frac{y}{x},\end{aligned}$$

tenemos las derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},\end{aligned}$$

y así las condiciones de Cauchy–Riemann (CR) se escriben como sigue

$$\begin{aligned}\cos(\theta)u_r - \operatorname{sen}(\theta)\frac{v_\theta}{r} &= \operatorname{sen}(\theta)v_r + \cos(\theta)\frac{v_\theta}{r}, \\ \operatorname{sen}(\theta)u_r + \cos(\theta)\frac{v_\theta}{r} &= -\cos(\theta)v_r + \operatorname{sen}(\theta)\frac{v_\theta}{r}.\end{aligned}$$

Es conveniente escribirlas en la forma matricial

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ \frac{v_\theta}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{v_\theta}{r} \\ -v_r \end{pmatrix}$$

que permite despejar, eliminado la matriz de rotación  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ , que es invertible, y llegar a la forma polar de las ecuaciones CR

$$\boxed{ru_r = v_\theta, \quad u_\theta = -rv_r.}$$

Si las variables dependientes están polares

$$u = R \cos \Theta, \quad v = R \operatorname{sen} \Theta,$$

las condiciones de Cauchy–Riemann se leen

$$\begin{aligned}R_x \cos \Theta - R\Theta_x \operatorname{sen} \Theta &= R_y \operatorname{sen} \Theta + R\Theta_y \cos \Theta, \\ R_x \operatorname{sen} \Theta + R\Theta_x \cos \Theta &= -R_y \cos \Theta + R\Theta_y \operatorname{sen} \Theta,\end{aligned}$$

que adopta la forma matricial siguiente

$$\begin{pmatrix} \cos \Theta & -\operatorname{sen} \Theta \\ \operatorname{sen} \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_x \\ R\Theta_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\operatorname{sen} \Theta \\ \operatorname{sen} \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R\Theta_y \\ -R_y \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones CR serán

$$\boxed{(\log R)_x = \Theta_y, \quad (\log R)_y = -\Theta_x.}$$

Si además de las variables independientes en polares, también tenemos las variables dependientes en polares de la forma polar de las CR obtenemos

$$\begin{aligned}r(R_r \cos \Theta - R\Theta_r \operatorname{sen} \Theta) &= R_\theta \operatorname{sen} \Theta + R\Theta_\theta \cos \Theta, \\ r(R_r \operatorname{sen} \Theta + R\Theta_r \cos \Theta) &= -R_\theta \cos \Theta + R\Theta_\theta \operatorname{sen} \Theta\end{aligned}$$

que se escribe en forma matricial como sigue

$$\begin{pmatrix} \cos \Theta & -\operatorname{sen} \Theta \\ \operatorname{sen} \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} rR_r \\ rR_{\Theta_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\operatorname{sen} \Theta \\ \operatorname{sen} \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{\Theta_\theta} \\ -R_\theta \end{pmatrix}$$

que conduce a

$$r(\log R)_r = \Theta_\theta, \quad (\log R)_\theta = -r\Theta_r.$$

- x) Hallar una funciones holomorfas  $f(z)$  que tengan por módulo a  $e^{r^2 \cos \theta}$  y que tenga por argumento a  $xy$ .

**Solución:**

- En este primer caso tenemos  $R = e^{r^2 \cos 2\theta}$ , y por tanto usaremos las ecuaciones de CR en el caso polar-polar. Por tanto, la función holomorfa  $f(z) = R e^{i\Theta}$  debe ser tal que  $\Theta$  satisface  $r(\log R)_r = \Theta_\theta$ ,  $(\log R)_\theta = -r\Theta_r$  con la función  $R$  prescrita. Como  $\log R = r^2 \cos 2\theta$  tenemos

$$\Theta_\theta = 2r^2 \cos 2\theta, \quad \Theta_r = 2r \operatorname{sen} 2\theta.$$

Así, de la primera obtenemos  $\Theta = r^2 \operatorname{sen} 2\theta + C(r)$  que derivada con respecto a  $r$  conduce a  $\Theta_r = 2r \operatorname{sen} 2\theta + C'(r)$  y por ello  $C(r) = C$  es constante en  $r$ . En definitiva,  $f(z) = R e^{i\Theta} = e^{r^2 \cos 2\theta} e^{i r^2 \operatorname{sen} 2\theta} c$ , donde  $c$  es una constante arbitraria. Esto es,  $f(z) = c e^{z^2}$ .

- Ahora  $\Theta = xy$ , y las ecuaciones CR a satisfacer,  $(\log R)_x = \Theta_y$ ,  $(\log R)_y = -\Theta_x$ , implican  $(\log R)_x = x$ ,  $(\log R)_y = -y$ . Integrando la primera llegamos a  $\log R = \frac{x^2}{2} + C(y)$  que insertada en la segunda conduce a  $C(y) = -\frac{y^2}{2} + K$ , donde  $K$  es una constante arbitraria. Así que  $\log R = \frac{x^2 - y^2}{2} + K$  y  $R = c e^{\frac{x^2 - y^2}{2}}$ , donde  $c = e^K$  es una constante. En definitiva,  $f(z) = c e^{\frac{x^2 - y^2}{2} + ixy} = c e^{\frac{z^2}{2}}$ .

- xI) Suponer que  $f(z)$  es holomorfa en el disco unitario  $D(0, 1)$ . Estudiar la holomorfía de  $g(z) := f(\bar{z}), \overline{f(z)}, \overline{f(\bar{z})}$ .

**Solución:**

- $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z=\bar{z}}$  que no se anula salvo que  $f(z)$  sea constante. Por lo tanto  $g$  no es holomorfa.
- $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \overline{f(z)} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} \neq 0$ , salvo que  $f$  sea constante, y no es holomorfa.
- $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \overline{f(\bar{z})} = \overline{\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}} = 0$ , así que sí es holomorfa.

- xII) Asumir que  $f(z)$  es  $C^2$  en un abierto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  y además es holomorfa en  $\mathcal{A}$ . Demostrar que  $f'(z)$  es holomorfa en  $\mathcal{A}$ .

**Solución:** Si  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  es holomorfa sabemos que su derivada compleja es  $f'(z) = U(x, y) + i V(x, y)$  donde  $U = u_x = v_y$  y  $V = v_x = -u_y$ . Si la función es  $C^2$  existen las segundas derivadas parciales de  $u, v$  y podemos calcular

$$\begin{aligned} U_x &= v_{yx}, & V_y &= v_{xy}, \\ U_y &= u_{xy}, & V_x &= -u_{yx}. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Schwarz para la igualdad de derivadas cruzadas (existen y son continuas por hipótesis) obtenemos las ecuaciones CR para  $U$  y  $V$

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x,$$

y por tanto  $f'$  es derivable.

XIII) Si  $f(z)$  es holomorfa probar que  $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$ .

**Solución:** Como  $\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial(u+iv)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(u_x + v_y + i(v_x - u_y))$ , usando las ecuaciones CR llegamos a  $\frac{\partial f}{\partial z} = u_x + i v_x = f'$ , como queríamos.

XIV) Demostrar que una función  $u(x, y)$  es armónica si y sólo si  $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ .

**Solución:**

$$4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

en donde hemos usado la igualdad las derivadas cruzadas.

xv) Obtener la serie de Taylor de  $\text{Log}(1+z)$  como sigue. Llamar  $L(z) = \text{Log}(1+z)$ , recordar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$  y por tanto que  $1 + \frac{L(z)}{n} \sim (1+z)^{\frac{1}{n}}$  para  $n \sim \infty$ . La condición  $L(0) = 1$  indica la determinación a escoger. Usar ahora la fórmula del binomio de Newton generalizada para exponentes fraccionarios, que dará una suma infinita (una serie) y hacer el límite para  $n \rightarrow \infty$  para obtener  $\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$ .

**Solución:** Procedemos como se indica y observamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{L(z)}{n}\right)^n = 1+z$  y así  $1 + \frac{L(z)}{n} \sim (1+z)^{\frac{1}{n}}$  para  $n \sim \infty$ , como  $L(0) = 1$  queda  $1 + \frac{1}{n} \sim (1)^{\frac{1}{n}}$  y la raíz  $n$ -ésima a tomar es 1. Ahora, la fórmula del binomio generalizada nos informa de que

$$(1+z)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}z - \frac{1}{2!} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) z^2 + \frac{1}{3!} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) z^3 - \frac{1}{4!} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(3 - \frac{1}{n}\right) z^4 + \dots,$$

y así

$$n((1+z)^{\frac{1}{n}} - 1) = z - \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) z^2 + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) z^3 - \frac{1}{4!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(3 - \frac{1}{n}\right) z^4 + \dots$$

Por ello,

$$\begin{aligned} L(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n((1+z)^{\frac{1}{n}} - 1) \\ &= z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 + \dots \end{aligned}$$

xvi) Encontrar el armónico conjugado  $v(x, y)$  a  $u(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ . ¿Se puede extender a  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ?

**Solución:** Como  $u = \log r$ , recordamos las ecuaciones CR en su forma cartesiana-polar,  $ru_r = v_\theta$ ,  $u_\theta = -rv_r$ , lo que lleva a que  $v_\theta = 1$  y por ende  $v = \theta + C(r)$ . Como  $u_\theta = 0$ , obtenemos  $-rC'(r) = 0$  y  $C$  no depende de  $r$ , es una constante. En definitiva, el armónico conjugado es  $v = \theta + C$  y la correspondiente función holomorfa es  $f(z) = \log r + i\theta + C = \log z + C$ . Normalmente, la determinación de las coordenadas polares es  $\theta \in [0, 2\pi)$ , y ese sería el logaritmo escogido como función holomorfa,  $f(z) = \log_{[0, 2\pi)} z + C$ , con dominio de holomorfía  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ . Para la determinación principal, deberíamos haber escogidos coordenadas polares con  $\theta \in (-\pi, \pi]$ , en ese caso la correspondiente función holomorfa será  $f(z) = \text{Log } z + C$  con dominio de holomorfía  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ .

XVII) Encontrar los dominios de holomorfía y la correspondiente derivada compleja de las siguientes funciones:  $3^z$ ,  $\log(z+1)$ ,  $z^{1+i}$  y  $\sqrt[3]{z}$ .

**Solución:**

- Tenemos  $3^z = e^{z \log 3} = e^{z(\log |3| + 2\pi i k)} = e^{(x+iy)(\log |3| + 2\pi i k)} = e^{\log(3)x - 2\pi k y} e^{i(\log(3)y + 2\pi k x)}$ , donde  $k \in \mathbb{Z}$ . Una vez escogido un  $k$ , que (habitualmente se toma como  $k = 0$ ) la función es entera.
- Ahora  $f(z) = \log(1+z)$  esto es  $f(z) = \log |1+z| + i \arg(1+z)$ , y los cortes aparecen debido a la presencia del argumento, dependiendo de la determinación escogida, tendremos que el dominio de holomorfía sera todo el plano complejo menos una semirrecta que emerge de  $z = -1$  con dirección dada por la determinación escogida. Por ejemplo, para la determinación principal  $f(z) = \text{Log}(1+z)$  tendremos el dominio será  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ .
- En este caso  $f(z) = z^{1+i} = e^{(1+i)\log z} = e^{(1+i)(\log |z| + i \arg z)} = e^{\log |z| - \arg z} e^{i(\log |z| + \arg z)} = e^{\log |z| - \arg z} e^{i(\log |z|)} \frac{z}{|z|}$ . De nuevo, aparece un corte en el semieje que comienza en el origen con dirección dada por la determinación del argumento escogida. Para la determinación principal tenemos holomorfía en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ .
- Finalmente, analizamos  $f(z) = \sqrt[3]{z} = e^{\frac{1}{3}\log z} = e^{\log \sqrt[3]{|z|} + i\frac{1}{3}\arg z} = \sqrt[3]{|z|} e^{i\frac{\arg z}{3}}$  y de nuevo el corte lo da la determinación de logaritmo. En el caso de escoger la determinación principal la función es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ .

XVIII) Determinar todos los valores de  $\arcsen z$  cuando  $z = i\sqrt{5}$ .

**Solución:** Nos piden que encontremos  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $\sen w = i\sqrt{5}$ , por tanto, llamando  $W = e^{iw}$ , tenemos  $W^2 + 2\sqrt{5}W - 1 = 0$  que tiene como solución  $W = \frac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{20+4}}{2} = \pm\sqrt{6} - \sqrt{5}$ . Hemos visto anteriormente que  $w = \arg W - i \log |W|$ , lo que en este caso conduce a dos posibilidades  $w = 2\pi k - i \log(\sqrt{6} - \sqrt{5})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ó a  $w = \pi(2k+1) - i \log(\sqrt{6} + \sqrt{5})$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

XIX) ¿Dónde las funciones  $\arcsen z$  y  $\arctan z$  son reales? ¿Dónde es  $\text{arc senh } z$  imaginario puro?

**Solución:**

- Queremos saber donde la función  $\arcsen z$  toma valores reales. Esto es buscamos  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z = \sen w$  con  $w \in \mathbb{R}$ , así que  $z \in [-1, 1]$ .
- Queremos saber ahora donde la función  $\arctan z$  toma valores reales. Así, buscamos  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z = \tan w$  con  $w \in \mathbb{R}$ , así que  $z \in \mathbb{R}$ .

- Finalmente, queremos ver donde  $\operatorname{arc} \operatorname{senh} z$  toma valores imaginarios. Equivalentemente, queremos encontrar los  $z \in \mathbb{C}$  tales que  $z = \operatorname{senh} w$  con  $w \in i\mathbb{R}$ , esto es  $z = \operatorname{senh} ix = i \operatorname{sen} x$ , con  $x \in \mathbb{R}$ , luego  $z \in i[-1, 1]$ .



# III. INTEGRALES COMPLEJAS

## Contenidos

III.1 Integración sobre arcos . . . . .	73
III.2 Teorema de Cauchy . . . . .	81
III.3 Fórmula integral de Cauchy . . . . .	97
III.4 Teorema de Liouville . . . . .	106
III.5 Fórmula de Cauchy–Green . . . . .	111
III.6 ¿Teorema de Green? ¿Teorema de Gauss? ¿Teorema de Stokes? . . . . .	113
III.7 Homología . . . . .	118
III.8 Ejercicios . . . . .	123



### §III.1. Integración sobre arcos



NALIZAMOS, en el tema anterior, como extender el concepto de derivada en  $\mathbb{R}$  al plano complejo  $\mathbb{C}$  usando, para ello, el cociente incremental. Recordemos el importante papel que juegan las integrales en el cálculo real y, en particular, el Teorema Fundamental del Cálculo que la liga con la derivada. ¿Existen desarrollos similares en el caso de cantidades complejas? Veremos aquí que se puede llegar mucho más lejos en  $\mathbb{C}$  que en  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^2$ .

Dadas dos funciones reales  $h_1, h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrables en el intervalo cerrado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , definimos la función  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  con valores complejos cómo  $t \mapsto h(t) = h_1(t) + ih_2(t)$ . Por consiguiente, podemos considerar

$$\int_a^b h(t) dt = \int_a^b h_1(t) dt + i \int_a^b h_2(t) dt.$$

#### III.1.1. Arcos y cadenas

##### Arcos I

- I) Un arco continuo es una aplicación  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , continua en  $[a, b]$ . Esto es, tanto  $\operatorname{Re} \gamma$  cómo  $\operatorname{Im} \gamma$  son funciones continuas.
- II) Sea una sucesión creciente de números reales  $\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}$  con  $a_0 = a, a_n = b$  y  $a_i < a_{i+1}$   $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Un arco continuo es suave a trozos si existe una tal sucesión de modo que  $\gamma(t)$  es  $C^1$  (diferenciable y con derivada continua) en  $[a, b] \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$  y existen los límites laterales de la derivada  $\dot{\gamma}(t)$ .
- III) A la imagen de  $[a, b]$  del arco  $\gamma(t)$ , su rango o recorrido, lo denotamos por  $\gamma^* := \gamma([a, b])$ .

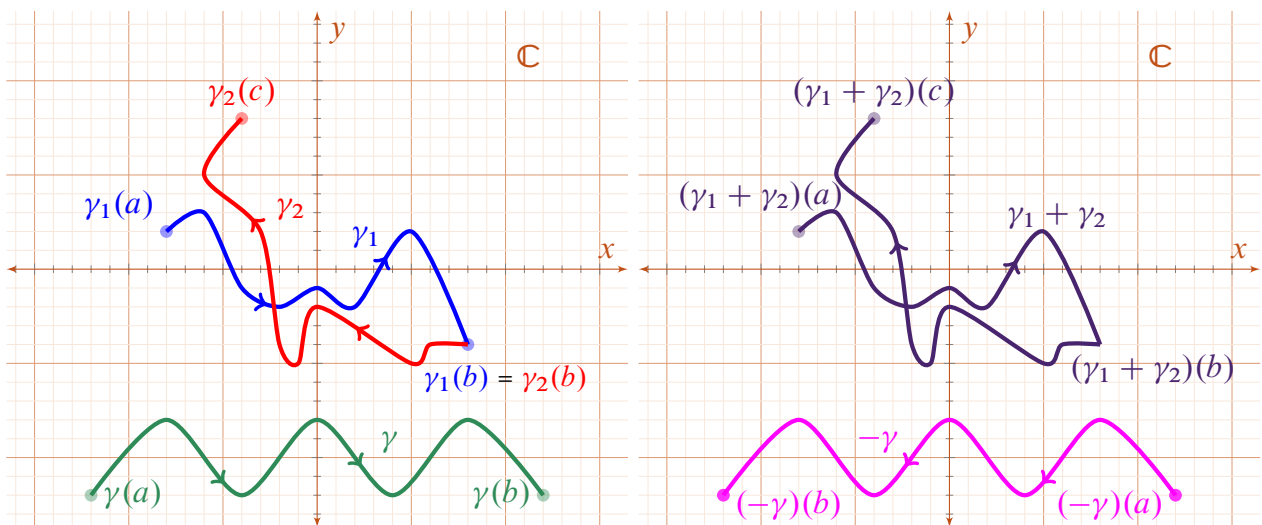
Los arcos suaves a trozos tienen inversos y se pueden componer y reparametrizar, con estas operaciones, que ahora describiremos, forman un conjunto que llamaremos *cadena*.

### Arcos II

- I) **Arco inverso.** Dado un arco  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , suave a trozos, definimos el arco  $-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  como  $t \mapsto (-\gamma)(t) := \gamma(a + b - t)$ .
- II) **Composición de arcos.** Dados dos arcos  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ , definimos el arco  $\gamma_1 + \gamma_2 : [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b], \\ \gamma_2(t), & t \in [b, c]. \end{cases}$$

- III) **Cadenas.** Dado el conjunto  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  de arcos suaves a trozos, tales que  $b_i = a_{i+1}$  y  $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$ , se considera la cadena  $\gamma_1 + \dots + \gamma_n$ .
- IV) **Reparametrización de arcos.** Dado un arco suave a trozos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\phi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$  una función sobreyectiva creciente y  $C^1$  en  $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ , definimos el arco reparametrizado  $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) := \gamma(\phi(t))$



Cadenas de arcos: suma e inverso



### Observaciones:

- I) Por construcción vemos que  $\gamma_2 + \gamma_1$  puede que no tenga sentido, pero siempre se lo podemos dar con una reparametrización adecuada. Y que cuando le damos sentido no se tiene, como arcos parametrizados que  $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_2 + \gamma_1$ . Este problema se resolverá cuando consideremos la teoría homológica.
- II) Fijémonos en que  $(-\gamma)(a) = \gamma(b)$  y  $(-\gamma)(b) = \gamma(a)$  y  $\frac{d(-\gamma)}{dt}(t) = \dot{\gamma}(t)$ . Es decir  $-\gamma$  es el arco recorrido a la inversa.
- III) Dado un arco cerrado  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $\gamma(a) = \gamma(b)$  podemos considerar el arco  $\tilde{\gamma} : [b, 2b - a] \rightarrow \mathbb{C}$ , definido por  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t - b + a)$ , que recorre el mismo camino que recorre el primer arco, pero a partir del tiempo final del primero. Obviamente podemos componer estas dos arcos, y escribimos  $2\gamma = \gamma + \tilde{\gamma}$ . De este modo, dado un entero  $n \in \mathbb{Z}$  y un arco cerrado  $\gamma$  tiene sentido hablar de la cadena  $n\gamma$ .



- iv) Dados dos arcos  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$  tales que  $b_1 = a_2$  podemos considerar la cadena  $\gamma_1 - \gamma_2 := \gamma_1 + (-\gamma_2)$  siempre que  $\gamma_1(b_1) = (-\gamma_2)(a_2) = \gamma_2(b_2)$ . Por tanto, dado el conjunto  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  de arcos suaves a trozos, y las condiciones necesarias sobre los extremos de los mismos, podemos considerar expresiones del tipo  $\gamma_1 \pm \gamma_2 \pm \dots \pm \gamma_n$ . Por ejemplo,  $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4$  o bien  $-\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ . Y de forma más general, cuando intervienen arcos cerrados de expresiones  $\sum_{i=1}^p n_i \gamma_i$ , siempre que los arcos empalmen bien, y en particular, para  $|n_i| > 1$  que el arco  $\gamma_i$  sea cerrado.
- v) Una reparametrización  $\phi$  siempre tiene  $\phi' > 0$  y al ser sobreyectiva cumplirá que  $\phi(\tilde{a}) = a$  y  $\phi(\tilde{b}) = b$ .
- vi) Un arco reparametrizado tiene el mismo grafo que el original,  $\tilde{\gamma}([\tilde{a}, \tilde{b}]) = \gamma([a, b])$ . Los caminos son los mismos y se recorren en el mismo sentido.

**III.1.2. Integrales a lo largo de arcos** Una vez definidos los arcos vamos a proceder a introducir el concepto de integración compleja sobre los mismos.

### Integral sobre arcos

Dado el conjunto abierto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ , consideremos un arco  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{A}$ , suave a trozos, y la función compleja  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , continua en  $\mathcal{A}$ . Entonces, definimos la integral de  $f$  sobre el arco  $\gamma$  como sigue

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

#### Observaciones:

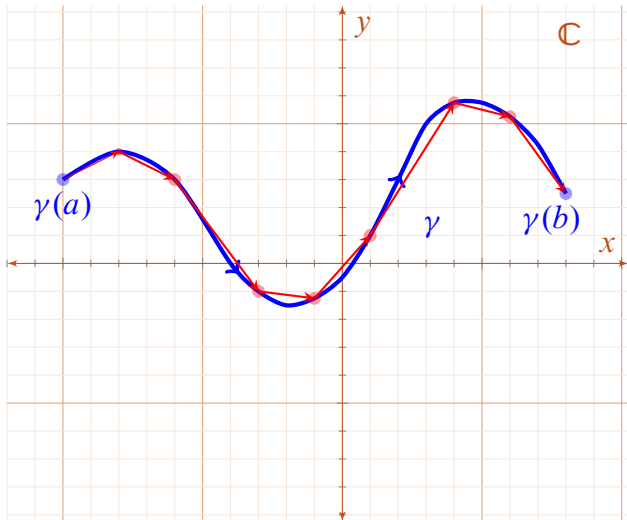
- i) Si  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  y  $t \in [a, b] \mapsto \gamma(t) = x(t) + i y(t)$  es un arco suave, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t))) (\dot{x}(t) + i \dot{y}(t)) dt \\ &= \int_a^b \left( u(x(t), y(t)) \dot{x}(t) - v(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \right. \\ &\quad \left. + i (u(x(t), y(t)) \dot{y}(t) + v(x(t), y(t)) \dot{x}(t)) \right) dt \\ &= \int_{\gamma} (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \int_{\gamma} (v(x, y) dx + u(x, y) dy) \end{aligned}$$

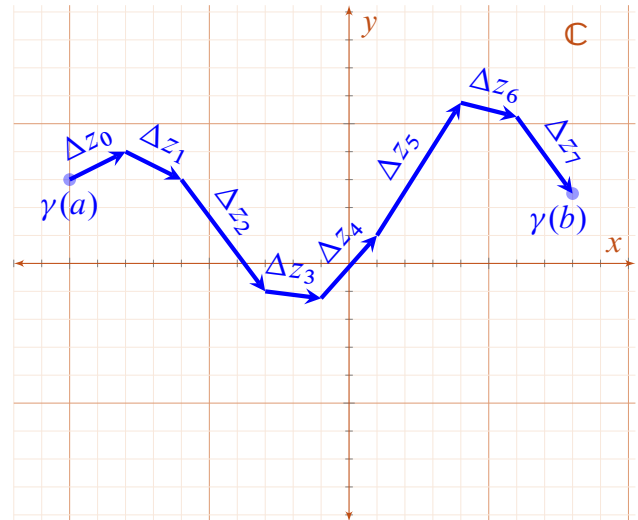
en términos de diferenciales en el plano.

- ii) Las integrales que estamos usando son integrales de Riemann, esto es  $\int_a^b h(t) dt$  se aproxima como sigue: dada una partición  $\{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$  con  $t_{i+1} > t_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  y valores intermedios  $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$  la idea es considerar las sumas  $\sum_{j=0}^{n-1} h(\tau_j)(t_{j+1} - t_j)$ . Se consideran sumas superiores e inferiores las particiones se van *refinando* cada vez más para finalmente, en el límite, obtener la integral de Riemann. La integración sobre arcos se realiza de modo similar, tendremos sumas

del tipo  $\sum_{j=0}^{n-1} f(\gamma(\tau_j)) \dot{\gamma}(\tau_j)(t_{j+1} - t_j)$ , donde observamos que  $\dot{\gamma}(\tau_j)(t_{j+1} - t_j)$  se puede aproximar por  $\Delta z_j = z_{j+1} - z_j$ ,  $z_j = \gamma(t_j)$ . Esto es, las sumas de Riemann son del tipo  $\sum_{j=0}^{n-1} f(\zeta_j) \Delta z_j$  donde  $\zeta_j := \gamma(\tau_j)$ . Estamos partiendo el recorrido del arco, sustituyéndolo por una línea quebrada, y considerando sumas de Riemann sobre estas particiones del arco, o quebradas, luego las refinamos y hacemos el límite. Esa es nuestra integral de arco, que obviamente tiene carácter vectorial ya que los  $\Delta z_j$ , que determinan la quebrada, son números complejos, i.e. vectores en  $\mathbb{R}^2$ .



Arco en azul y una poligonal en rojo



Línea quebrada que aproxima al arco orientado

### Propiedades de las integrales sobre arcos

- I) **Linealidad en el integrando.** La integración sobre arcos es lineal, esto es para cualesquiera números complejos  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  se cumple que

$$\int_{\gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z)) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz.$$

- II) **Aditividad sobre cadenas.** Dados dos arcos suaves a trozos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  tales que se puede formar la cadena  $\gamma_1 + \gamma_2$  entonces

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

- III) **Arco inverso.** Para el arco inverso tenemos

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

- IV) **Invariancia bajo reparametrización.** La integral sobre arcos es invariante bajo reparametrizaciones

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

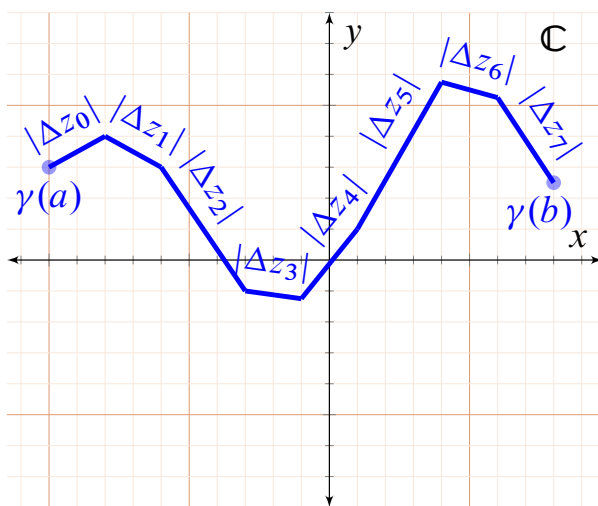
DEMOSTRACIÓN. Probaremos III) para un arco suave. Tenemos  $\int_{-\gamma} f(z) dz = -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\dot{\gamma}(a+b-t) dt = -\int_a^b f(\gamma(s))\dot{\gamma}(s) ds = -\int_{\gamma} f(z) dz$ , donde hemos usado el cambio de variable  $s = a + b - t$ . Para demostrar IV) procedemos como sigue:  $\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(s))\dot{\tilde{\gamma}}(s) ds = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\gamma(\phi(s)))\dot{\gamma}(\phi(s))\dot{\phi}(s) ds = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt$ , donde hemos usado el cambio de variable  $t = \phi(s)$ .  $\square$

**Observación:** A pesar de que como arcos  $\gamma_1 + \gamma_2$  y  $\gamma_2 + \gamma_1$  son en general distintos, vemos cuando intervienen en la integrales son lo mismo  $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_2+\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$ . ☞

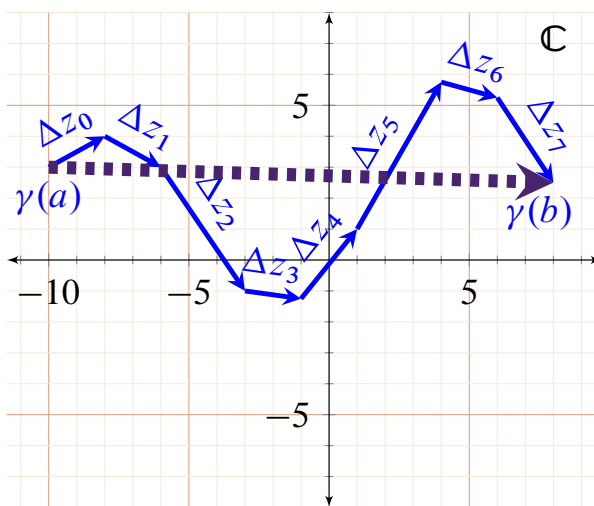
**Integral de longitud de arco**

Dado un conjunto abierto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ , consideramos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{A}$ , un arco suave a trozos y la función compleja  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , continua en  $\mathcal{A}$ . Entonces, la integral en longitud de arco se define como sigue

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| := \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt.$$



Longitud de arco: midiendo la quebrada



Línea quebrada y vector suma final

Las sumas de Riemann son, en este contexto, de la forma  $\sum_{j=0}^{n-1} f(\zeta_j) |\Delta z_j|$ . Seguimos aproximando el arco por una línea quebrada, y considerando sumas de Riemann sobre estas quebradas para luego refinarlas y hacer el límite. La diferencia estriba en que, en vez de los números complejos  $\{\Delta z_j\}_{j=0}^{n-1}$ , consideramos sus módulos  $\{|\Delta z_j|\}_{j=0}^{n-1}$ , que ya no son vectores sino distancias, y la integral no es un número complejo, sino un número real no negativo. Esto es, estamos midiendo longitudes, de ahí la denominación de longitud de arco. La suma  $\sum_{j=0}^{n-1} |\Delta z_j|$  es la longitud de la quebrada, en tanto que la suma  $\sum_{j=0}^{n-1} \Delta z_j = \gamma(b) - \gamma(a)$  es el vector, número complejo, que une los extremos del arco. Obviamente,  $|\gamma(b) - \gamma(a)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta z_j|$ .

### Propiedades de la integral de longitud de arco

I) **Longitud del arco.** La integral de longitud de arco  $\ell(\gamma) := \int_{\gamma} |dz| = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$  es la longitud del arco  $\gamma$ . Cuando la longitud del arco es finita se dice que es un arco rectificable. **Los arcos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  suaves a trozos son rectificables.**

II) **Linealidad en el integrando.** La integración en longitud de arco es lineal, esto es para cualesquiera números complejos  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  se cumple que

$$\int_{\gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z)) |dz| = \lambda \int_{\gamma} f(z) |dz| + \mu \int_{\gamma} g(z) |dz|.$$

III) **Aditividad sobre cadenas.** Dados  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , dos arcos suaves a trozos tales que se puede formar la cadena  $\gamma_1 + \gamma_2$ , entonces las correspondientes integrales de longitud de arco satisfacen la siguiente condición de aditividad

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) |dz| = \int_{\gamma_1} f(z) |dz| + \int_{\gamma_2} f(z) |dz|.$$

IV) **Arco inverso.** La integral de longitud de arco es invariante bajo la inversión del arco

$$\int_{-\gamma} f(z) |dz| = \int_{\gamma} f(z) |dz|$$

v) **Acotación.** Si  $M = \max_{z \in \gamma^*} |f(z)|$  entonces

$$(14) \quad \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$$

$$(15) \quad \leq M \ell(\gamma).$$

DEMOSTRACIÓN. Probemos la aseveración V). Tenemos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| e^{i \arg \int_{\gamma} f(z) dz} \implies \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left( \int_{\gamma} f(z) dz \right) e^{-i \arg \int_{\gamma} f(z) dz}.$$

Por tanto, si llamamos  $\Theta := i \arg \int_{\gamma} f(z) dz$ , podemos escribir

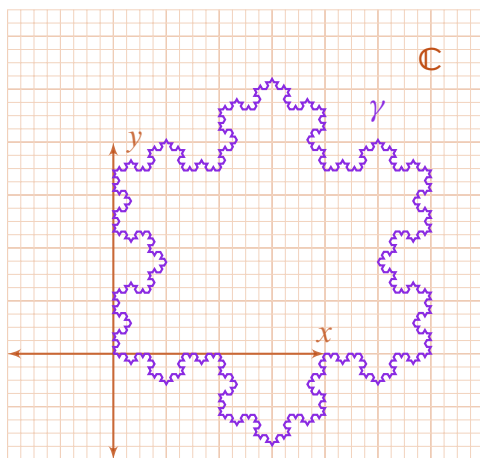
$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \operatorname{Re} \left( e^{-i\Theta} \int_{\gamma} f(z) dz \right) = \int_a^b \operatorname{Re} \left( e^{-i\Theta} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \right) dt \\ &\leq \int_a^b \left| e^{-i\Theta} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \right| dt = \int_a^b |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_{\gamma} |f(z)| |dz|. \end{aligned}$$

□

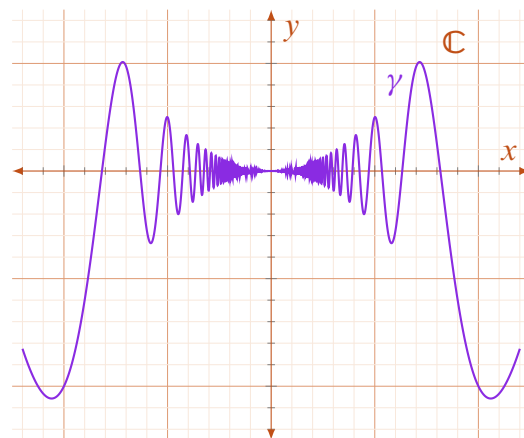


**Observación:** No todas los arcos son rectificables, de hecho los arcos suaves a trozos piden lo justo para que si lo sean. Ejemplos de arcos no rectificables hay muchos. Un arco continuo, derivable en ningún punto, es la curva de Koch, que no es rectificable, esta se construye por un método iterativo, se puede considerar un fractal, dado un segmento lo divides en tres trozos iguales, retiras la parte central y añades dos lados de un triangulo equilátero, y así sucesivamente.

El seno del topólogo, que vimos en el tema anterior como ejemplo de conjunto cerrado, conexo pero no conexo por arcos, es un ejemplo de arco  $C^1$  fuera del origen, continua pero no derivable en  $x = 0$  y sin límites laterales para la derivada, además no es rectificable. Por último, el arco  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \gamma(t) :=$



**Arco continuo no rectificable**  
Curva de Koch



**Arco diferenciable no rectificable**  
 $\nexists$  límites laterales derivada en  $x = 0$

$\begin{cases} 0, & t = 0, \\ t + it^2 \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right), & t \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \end{cases}$  es un arco diferenciable en  $[-1, 1]$ , de hecho su derivada en el origen es cero, pero la derivada es discontinua en el origen, los límites laterales no existen. Tampoco es rectificable.

**III.1.3. Teorema Fundamental del Cálculo complejo** Del cálculo en una variable real recordamos el importante *Teorema Fundamental del Cálculo* que liga la derivada con la integral de Riemann. Una es la *inversa* de la otra; esto es, la integración se puede entender como la anti-derivada, y calcular integrales reales se consigue hallando la primitiva del integrando. Vamos a presentar un resultado análogo para una variable compleja, que nos va a abrir la puerta a avenidas mucho más anchas y frondosas, a una teoría con diferencia más rica que la ya conocida del caso real.

**Teorema Fundamental del Cálculo en  $\mathbb{C}$**

Sea  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en el conjunto abierto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  con derivada  $F'(z)$  continua en  $\mathcal{A}$ . Consideremos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  un arco suave a trozos tal que  $\gamma^* \subset \mathcal{A}$ . Entonces,

$$(14) \quad \int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Y si el arco es un lazo, i.e.,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , entonces  $\int_{\gamma} F'(z) dz = 0$ .



DEMOSTRACIÓN. Se sigue de

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \frac{d(F \circ \gamma)(t)}{dt} dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

**III.1.4. Independencia con respecto al camino de integración** El Teorema Fundamental del Cálculo en variable compleja nos dice que el valor de la integral a lo largo de un arco de la derivada de una función no depende del arco en si mismo, sino más bien de los puntos de partida y llegada. Es decir que existe una independencia del arco o camino que elijamos.

Este hecho, cuando se da, vamos a ver que es equivalente a la existencia de una antiderivada (o primitiva).

### Independencia del camino de integración

Sea  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua en la región  $\mathcal{A}$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes

I) El valor de la integral  $\int_{\gamma} f(z) dz$  es independiente del arco escogido:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz,$$

para toda pareja  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$ , de arcos suaves a trozos, con  $\gamma_1([a_1, b_1]), \gamma_2([a_2, b_2]) \subset \mathcal{A}$ , y que unan los puntos  $z_1 = \gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2) \in \mathcal{A}$  con  $z_2 = \gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2) \in \mathcal{A}$ .

II) La integral sobre arcos cerrados es nula

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

para todo  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  arco suave a trozos,  $\gamma^* \subset \mathcal{A}$ , cerrado,  $\gamma(a) = \gamma(b) \in \mathcal{A}$ .

III) La función  $f(z)$  admite una antiderivada –una primitiva– en  $\mathcal{A}$ . Esto es, existe una función  $z \mapsto F(z)$  holomorfa en  $\mathcal{A}$  tal que  $f(z) = F'(z)$  para todo  $z \in \mathcal{A}$ .

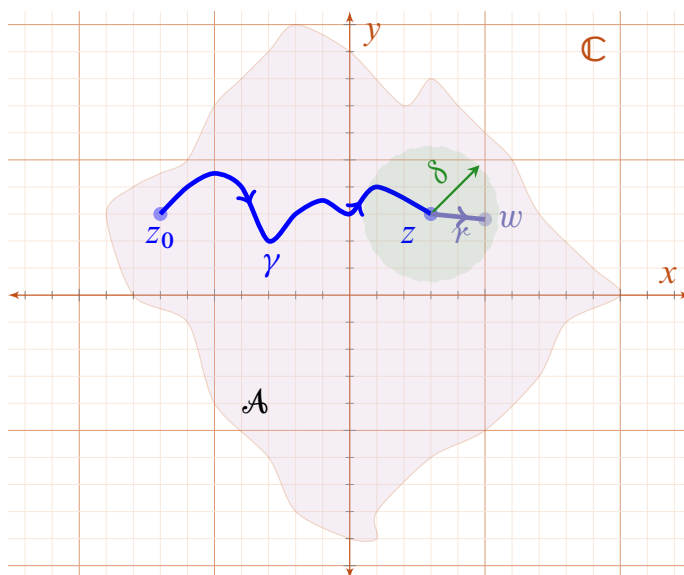


#### DEMOSTRACIÓN.

**I)  $\Leftrightarrow$  II).** Para toda pareja  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$  de arcos suaves a trozos en  $\mathcal{A}$  uniendo  $z_1$  con  $z_2$  tenemos que la cadena  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  es cerrada. Y viceversa, dado  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  un arco suave a trozos en  $\mathcal{A}$  cerrado, podemos escoger dos puntos distintos  $\{z_1, z_2\} \subset \gamma^*$ , y  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , arcos suaves a trozos, que unen  $z_1$  con  $z_2$  y tales que  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ . Para ambas situaciones tendremos  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz$ , lo que implica el resultado.

**III)  $\Rightarrow$  I).** Hemos supuesto  $f(z) = F'(z)$  es una función continua en  $\mathcal{A}$ , por tanto el teorema fundamental del cálculo (14) nos conduce a que  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$  para todo arco suave a trozos  $\gamma$  que una los dos puntos distintos  $z_1$  y  $z_2$  de  $\mathcal{A}$ .

**I)  $\Rightarrow$  III).** Sea  $z_0 \in \mathcal{A}$  y  $z \in \mathcal{A}$  otro punto cualquiera en el dominio  $\mathcal{A}$  de  $f(z)$ , que hemos supuesto es una región y por lo tanto conexa por arcos. Existirá pues  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  un arco suave a trozos que una  $z_0$  con  $z$ , denotemos tal arco por  $\gamma$ . Entonces, la integral  $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$ , dada la



Construcción de la antiderivada

suposición de independencia del camino de integración elegido, sólo depende de los puntos inicial y final. Definamos pues la función  $z \mapsto F(z) := \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$ , que no depende de  $\gamma$ . Veamos que esta  $F(z)$  es una función holomorfa con derivada  $F'(z) = f(z)$ ,  $\forall z \in \mathcal{A}$ , y así habremos demostrado la implicación que hemos enunciado.

Para ello es necesario cierta preparación. En primer lugar, la continuidad de  $f(z)$  implica que, dado cualquier  $\epsilon$  positivo podemos encontrar un  $\delta$  positivo tal que  $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$  para todos los puntos  $\zeta$  del disco  $D(z, \delta)$ . En segundo lugar, para discutir el comportamiento del cociente incremental  $\frac{F(w) - F(z)}{w - z}$  cuando  $w \rightarrow z$ , vamos a considerar como arco  $\mathcal{r}$  que une a  $z$  con  $w$ , el segmento rectilíneo entre ambos y, dado que  $w \rightarrow z$ , se puede asumir  $\mathcal{r} \subset D(z, \delta) \subset \mathcal{A}$ , así que la cadena  $\gamma + \mathcal{r}$  es un arco suave a trozos que une  $z_0$  con  $w$ . Tendremos pues, dada la independencia del camino de integración, que  $F(w) = \int_{\gamma + \mathcal{r}} f(\zeta) d\zeta$  y por tanto


$$\begin{aligned} F(w) - F(z) &= \int_{\gamma + \mathcal{r}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma + \mathcal{r}} f(\zeta) d\zeta + \int_{-\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma + \mathcal{r} - \gamma} f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{r}} f(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

En tercer lugar, observamos que:  $\int_{\mathcal{r}} f(z) d\zeta = f(z) \int_{\mathcal{r}} d\zeta = f(z)(w - z)$ . Esto es cierto ya que la integral a lo largo del arco  $\gamma$  de una función constante es el valor de esa función multiplicada por el vector, número complejo, que une los extremos del arco. Finalmente, ya estamos preparados para estudiar el comportamiento del cociente incremental de  $F(z)$  frente a  $f(z)$ . ¡A por ello!

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| &= \left| \frac{F(w) - F(z) - (w - z)f(z)}{w - z} \right| = \left| \frac{\int_{\mathcal{r}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\mathcal{r}} f(z) d\zeta}{w - z} \right| \\ &= \frac{\left| \int_{\mathcal{r}} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right|}{|w - z|} \leq \frac{\int_{\mathcal{r}} |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta|}{|w - z|} \leq \epsilon \frac{\ell(\mathcal{r})}{|w - z|} = \epsilon. \end{aligned}$$

siempre que  $|w - z| < \delta$ , aquí hemos usado (14), la continuidad de  $f(z)$ , (15) y que  $\ell(\mathcal{r}) = |w - z|$ . Por tanto,  $F'(z) = f(z)$  como queríamos demostrar.  $\square$

## §III.2. Teorema de Cauchy

 El teorema de Cauchy es una de las piedras angulares de la teoría de funciones de variable compleja, viniendo a ser una forma global de las ecuaciones, de carácter local, de Cauchy–Riemann. De las muchas formas y demostraciones que tiene nosotros veremos sólo algunas. El resultado fundamental que subyace a todas las versiones es el siguiente:

### ¿Qué dice el Teorema de Cauchy?

Si una función es holomorfa en el interior de un arco, cerrado, y también sobre él, entonces  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

Un ejemplo paradigmático, en donde no es aplicable, aparece cuando se toma  $f(z) = \frac{1}{z}$  y se integra en el arco simple  $t \mapsto \gamma(t) = e^{it}$ . Efectivamente,  $\int_{S^1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = 2\pi i$ . El

problema en este caso, es que  $\frac{1}{z}$  no tiene antiderivada en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , sería el logaritmo, ¡pero no en esa región!

**III.2.1. Una aproximación simple al teorema** Queremos mostrar como el bien conocido teorema de Green implica el teorema de Cauchy en sus versiones más sencillas. Una noción preliminar es la de arco simple o de Jordan.

### Arcos simples o de Jordan

Un arco  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  se dice simple o de Jordan si no se interseca a si mismo. Esto es, si cuando para  $s, t$  tales que  $a \leq s < t \leq b$  se cumple que  $\gamma(s) = \gamma(t)$  necesariamente se debe tener que  $s = a$  y  $t = b$  (i.e.,  $\gamma$  es inyectiva).

### Teorema de Green. I. Versión simple

Dada una región  $R \subset \mathbb{R}^2$  con una frontera  $\partial R$  que es un arco de Jordan suave a trozos, orientado, recorrido en sentido antihorario, y dadas dos funciones  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  diferenciables en  $R$  y con derivada continua, se tiene la fórmula

$$\oint_{\partial R} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$

Este resultado se puede entender como una reducción del teorema de Kelvin–Stokes en  $\mathbb{R}^3$  restringido al plano  $xy$ . Esto es,  $\oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  para  $\mathbf{F} = (P, Q, 0)$ , con  $\text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ . También, el teorema de Green es equivalente al teorema de la divergencia de Ostrogradski–Gauss reducido a  $2D$ , con  $\mathbf{F} = (-Q, P)$  y  $\iint_D \text{div } \mathbf{F} dA = \int_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .

Vamos a considerar una versión simple del teorema de Cauchy, que demostraremos con ayuda una versión simple del teorema de Green y de las condiciones de Cauchy–Riemann. A pesar de que es demasiado exigente en sus condiciones, captura la esencia del Teorema y su demostración es fácil de entender. Como veremos más adelante el teorema de Cauchy en su versión general no requiere que los arcos sean simples ni la derivada continua pero, para la demostración que presentaremos ahora basada en el teorema de Green, si que son suposiciones necesarias.

### Teorema de Cauchy. I. Versión simple

Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  un arco suave a trozos, cerrado y simple, con  $D \subset \mathbb{C}$  el interior delimitado por el arco,  $\partial D = \gamma^*$ , y la función compleja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , holomorfa y con **derivada continua** sobre el arco  $\gamma$  y su interior  $D$ . Entonces,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$





DEMOSTRACIÓN. Usando el Teorema de Green para el arco  $\gamma$  recorrido en sentido antihorario una vez obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \int_{\gamma} (u(x, y) dy + v(x, y) dx) \\ &= - \int_D \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \right) dx dy && \text{teorema de Green} \\ &\quad + i \int_D \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right) dx dy \\ &= 0 && \text{Cauchy-Riemann.} \end{aligned}$$

□

Una pregunta que cabe hacerse es ¿qué entendemos por interior/exterior de un arco cerrado? La responderemos más adelante.

**III.2.2. Teorema de Cauchy para un rectángulo** Vamos a simplificar la situación sobre el circuito de integración lo que nos permitirá, como veremos, prescindir de la hipótesis de continuidad de la derivada. Para ello seguiremos la técnica de la bisección introducida por Édouard Goursat en dos entregas, la primera en 1884 y 16 años después, en 1900, con una versión que corrige la primera entrega. Más adelante, trataremos la complicada historia ¿cómo no? de estos avances. Por ello, a este resultado a veces se le denomina *Teorema de Cauchy-Goursat*. Centrémonos, por ahora, en el contenido matemático. Por cierto, el Teorema de Cauchy que sigue tiene una versión correspondiente del Teorema de Green para un rectángulo, en donde los que se asume es que  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  es continuo o integrable, depende.

### Teorema de Cauchy. II. Para un rectángulo

Sea  $R \subset \mathbb{C}$  un rectángulo cerrado,  $\bar{R} = R$ , con sus lados paralelos a los ejes, y denotemos su frontera por  $\partial R$ . Si  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en el conjunto abierto  $\mathcal{A}$ , con  $R \subset \mathcal{A}$ , entonces  $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$ .



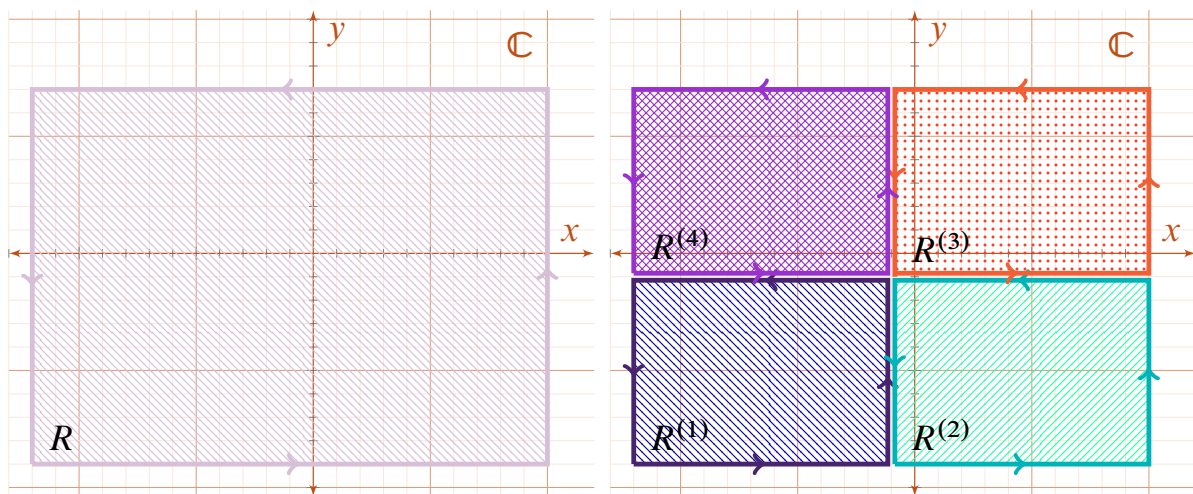
DEMOSTRACIÓN. Vamos a dividir el rectángulo  $R$  en cuatro rectángulos congruentes

$$\{R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}\},$$

que se recorren en sentido antihorario. Por tanto, tendremos que

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial R^{(1)}} f(z) dz + \int_{\partial R^{(2)}} f(z) dz + \int_{\partial R^{(3)}} f(z) dz + \int_{\partial R^{(4)}} f(z) dz,$$

ya que las contribuciones de la cruz central se cancelan entre sí. Sea  $R_1 \subset R$  uno de los cuatro rectángulos donde se alcanza el máximo valor para el módulo de la integral.



Esto es,  $|\int_{R_1} f(z) dz| = \max_{i \in \{1,2,3,4\}} |\int_{R^{(i)}} f(z) dz|$ . Pero,  $|\int_{\partial R} f(z) dz| \leq |\int_{\partial R^{(1)}} f(z) dz| + |\int_{\partial R^{(2)}} f(z) dz| + |\int_{\partial R^{(3)}} f(z) dz| + |\int_{\partial R^{(4)}} f(z) dz| \leq 4 |\int_{R_1} f(z) dz|$ .

Podemos repetir este proceso otra vez para el rectángulo  $R_1$ , partiéndolo en cuatro rectángulos congruentes  $\{R_1^{(1)}, R_1^{(2)}, R_1^{(3)}, R_1^{(4)}\}$  y elegir aquel donde el módulo de la integral a lo largo del correspondiente arco es mayor, que llamaremos  $R_2$ ,  $R_2 \subset R_1 \subset R$ , para el que tendremos

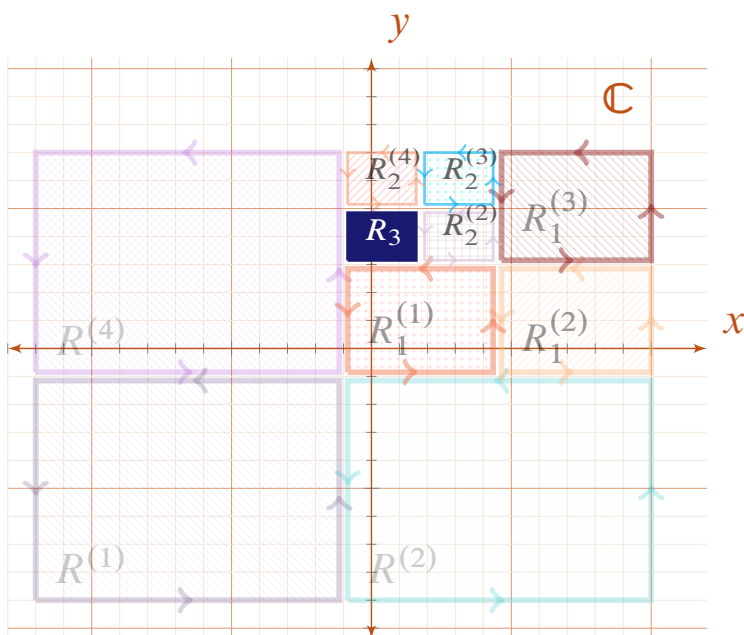
$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| &\leq 4 \left| \int_{\partial R_1} f(z) dz \right| \\ &\leq 4^2 \left| \int_{\partial R_2} f(z) dz \right|. \end{aligned}$$

Volviendo a partir  $R_2$  en cuatro rectángulos congruentes y seleccionando uno, digamos  $R_3$ , donde se alcanza el máximo valor del módulo de la integral  $|\int_{\partial R} f(z) dz| \leq 4^3 |\int_{\partial R_3} f(z) dz|$ . Este argumento lleva a una secuencia de rectángulos encajados  $R \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_n \supset \dots$  con  $|\int_{\partial R} f(z) dz| \leq 4^n |\int_{\partial R_n} f(z) dz|$ .

Si denotamos por  $p_n = \ell(R_n)$  al perímetro del rectángulo  $n$ -ésimo y por  $d_n$  a la diagonal de  $R_n$ , se satisface que  $p_n = 2^{-n} p_0$  y  $d_n = 2^{-n} d_0$ , y por ello  $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  y  $d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Por lo tanto,

$\bigcap_{n=0}^{\infty} R_n = \{a\} \in R$ . Cómo  $a \in R_n$ , para todo  $n$ , tendremos para  $z \in R_n$  que  $|z-a| \leq d_n = 2^{-n} d_0$ .

Dado un  $\epsilon > 0$  arbitrario busquemos un  $\delta > 0$ , suficientemente pequeño, tal que  $f(z)$  es holomorfa en el disco  $D(a, \delta)$ , centrado en la intersección de nuestra familia de rectángulos encajados, que cumple  $|f(z) - f(a) - (z-a)f'(a)| < \epsilon|z-a|$ ,  $\forall z \in D(a, \delta) \setminus \{a\}$ . Esto siempre se puede conseguir dado el carácter holomorfo de  $f(z)$ . Va a existir un  $N$  tal que si  $n \geq N$  entonces  $d_n \leq \delta$  y  $R_n \subset D(a, \delta)$ . También, debemos recordar que  $\int_{\partial R_n} dz = \int_{\partial R_n} z dz = 0$  y por ello  $\int_{\partial R_n} f(z) dz = \int_{\partial R_n} (f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)) dz$ . Por tanto, podemos escribir, para



**Bisección de Goursat**

$n \geq N$ , que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right| = 4^n \left| \int_{\partial R_n} (f(z) - f(a) - f'(a)(z - a)) dz \right| \\ &\leq 4^n \int_{\partial R_n} \epsilon |z - a| |dz| \leq 4^n \epsilon d_n \rho_n \\ &\leq \epsilon \rho_0 d_0. \end{aligned}$$

Cómo esto es cierto para todo  $\epsilon$  positivo, concluimos que  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ . □

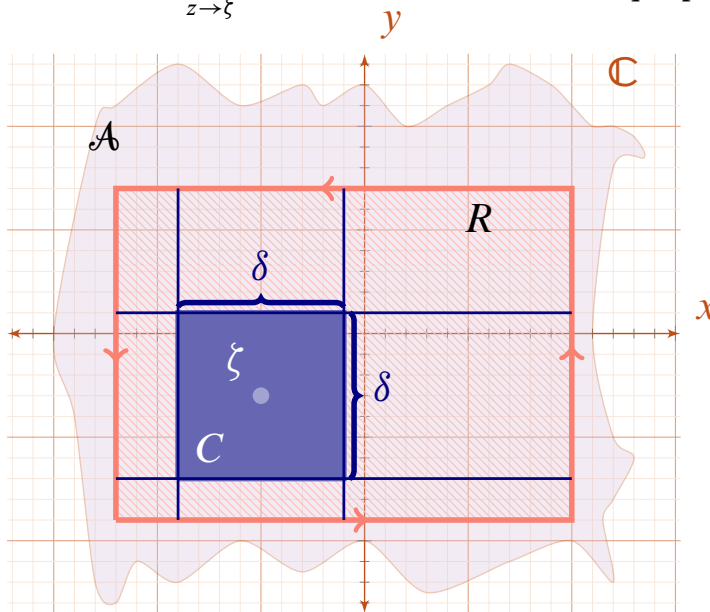
**Teorema de Cauchy. III. Generalizado para un rectángulo**

Sean  $R \subset \mathbb{C}$  un rectángulo cerrado,  $\bar{R} = R$ , con sus lados paralelos a los ejes, con frontera  $\partial R$ , un abierto  $\mathcal{A}$  que contiene al rectángulo  $R$ ,  $R \subset \mathcal{A}$  y una función  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en  $\mathcal{A} \setminus \{\zeta\}$ , donde  $\zeta \notin \partial R$  no yace en la frontera del rectángulo, que además satisface  $\lim_{z \rightarrow \zeta} ((z - \zeta)f(z)) = 0$ . Entonces,  $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$ .

**DEMOSTRACIÓN.**

El caso  $\zeta \notin (R \setminus \partial R)$  cae en la situación ya contemplada en el Teorema de Cauchy para el rectángulo. Supongamos pues que  $\zeta \in R \setminus \partial R$ . De  $\lim_{z \rightarrow \zeta} (z - \zeta)f(z) = 0$  deducimos que para

todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que  $|z - \zeta||f(z)| < \epsilon$  si  $|z - \zeta| < \delta$  y  $z \neq \zeta$ . Escojamos un número positivo  $\delta$ , suficientemente pequeño, de modo que el cuadrado  $C \subset R$  de lados paralelos a los ejes con centro en  $\zeta$  y lado de longitud  $\delta > 0$ , es tal que  $|f(z)(z - \zeta)| < \epsilon$  cuando  $z \in C \setminus \{\zeta\}$ . Esto es,  $|f(z)| < \frac{\epsilon}{|z - \zeta|}$  para todo  $z \in C \setminus \{\zeta\}$ . Partamos ahora el rectángulo en nuevos rectángulos, tal cómo se indica en la figura. En total hay 9 rectángulos. Por el Teorema de Cauchy para rectángulos, recién demostrado, sabemos que las integrales en 8 de esos contornos se anulan, sólo sobrevive la de  $C$ . Por tanto,  $\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial C} f(z) dz$ . Pero en  $\partial C$  se verifica que  $|f(z)| < \frac{\epsilon}{|z - \zeta|} \leq \frac{\epsilon}{\frac{\delta}{2}} = \frac{2\epsilon}{\delta}$ , ya que  $|z - \zeta| \geq \frac{\delta}{2}, \forall z \in \partial C$ . Por tanto, podemos acotar el módulo de la



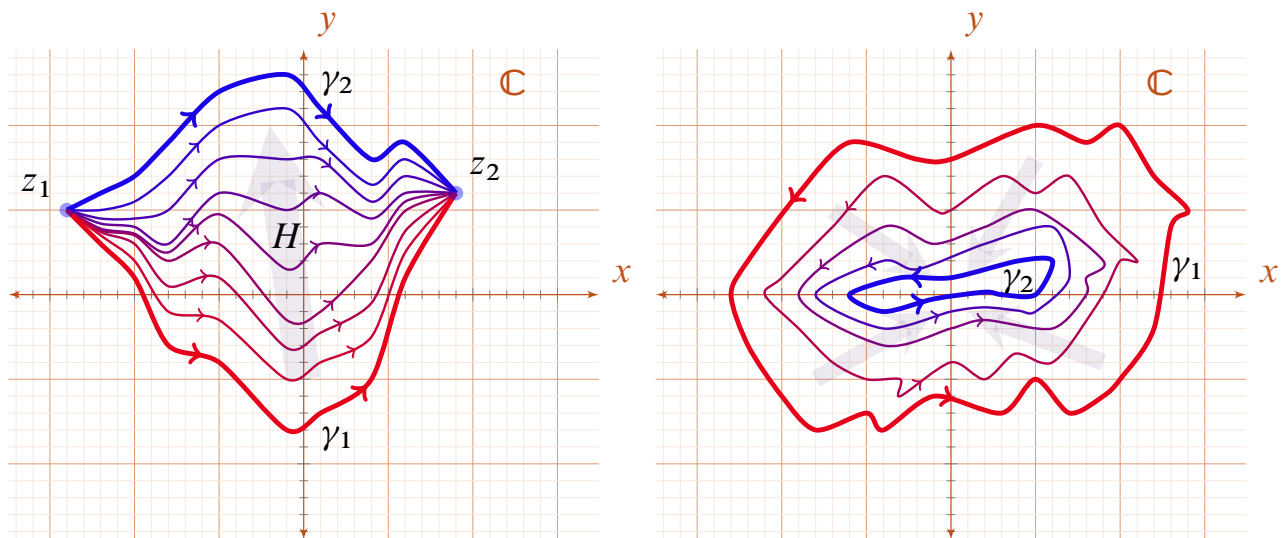
**Bisección de Goursat para el caso generalizado**

integral como sigue  $\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial C} f(z) dz \right| \leq \ell(\partial C) \max_{z \in \partial C} |f(z)| \leq \ell(\partial C) \frac{2\epsilon}{\delta} = 8\epsilon$ . Así pues, al ser cierto para cualquier  $\epsilon > 0$ , por muy próximo que sea a cero, deducimos que  $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$ .  $\square$

**III.2.3. Homotopía** Vamos a discutir a ver una versión más moderna y geométrica del resultado de Cauchy. Se basa en un concepto topológico profundo, el de la homotopía, del griego *homos* (similar) y *tópos* (lugar). En Topología dos funciones continuas entre dos espacios topológicos son homótopas si una puede ser deformada de forma continua en la otra.

### Homotopía de arcos

Dada una región  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ , consideramos dos arcos continuos  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , cuyas imágenes están incluidas en la región  $\mathcal{A}$ . Además suponemos que, o bien tienen extremos iguales  $z_1 = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$  y  $z_2 = \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ , con  $z_1 \neq z_2$ , o bien son dos curvas cerradas continuas. Diremos que ambos arcos son homótopos en  $\mathcal{A}$  si podemos deformar continuamente uno en el otro permaneciendo en  $\mathcal{A}$ ; esto es, existe una aplicación continua  $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathcal{A}$ , tal que  $H(0, t) = \gamma_1(t)$  y  $H(1, t) = \gamma_2(t)$ . En el caso de arcos abiertos tendremos  $H(s, a) = z_1$  y  $H(s, b) = z_2$ ,  $\forall s \in [0, 1]$  y cuando son cerrados  $\{H(s, t)\}_{s \in [0, 1]}$  es una familia de arcos continuos y cerrados.

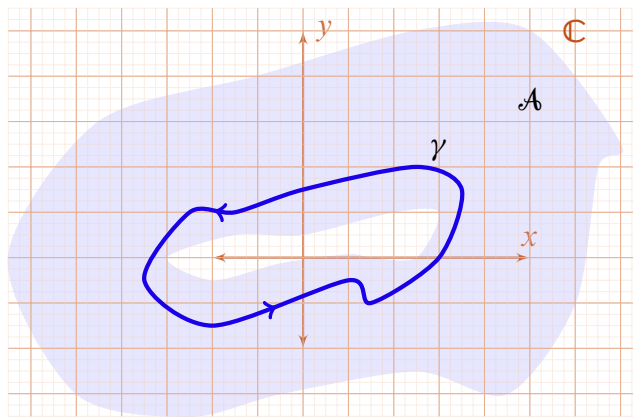


Homotopía de arcos

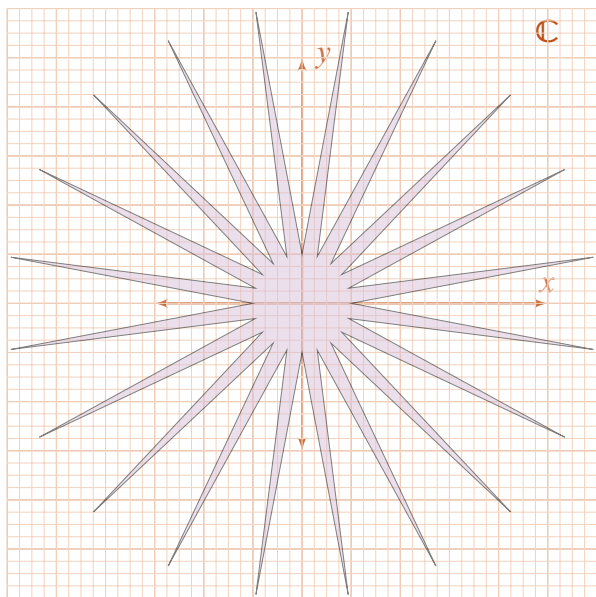
### Región simplemente conexa

Una región  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  se dice simplemente conexa si todo arco cerrado continuo  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma^* \subset \mathcal{A}$ , es homótopo a un punto.

Es decir una región simplemente conexa no sólo es conexa es que además *no tiene agujeros*, tal como se muestra en la figura. La curva  $\gamma$  que rodea el agujero no es deformable, no es homótopa a un punto, ya que rodea el agujero que no pertenece a la región  $\mathcal{A}$ . **Si una región es simplemente conexa su complementario es conexo.** También es cierto que **la frontera de una región simplemente conexa es conexa**, no tiene más de una componente conexa. Una región  $\mathcal{A}$  es *convexa* si dados dos puntos del mismo  $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$  el arco, rectilíneo, que los une,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \gamma(t) = (t-1)z_1 + tz_2$ , pertenece al conjunto  $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{A}$ . Una región  $\mathcal{A}$  se dice *estrellada* si contiene al menos un punto que pueda unirse con cualquier otro de la región mediante un segmento rectilíneo que está contenido en la región.



Región no simplemente conexa



Región estrellada no convexa

Una región convexa es estrellada pero, en general, el recíproco no es cierto, existen regiones estrelladas no convexas. **Las regiones estrelladas son ejemplos de regiones simplemente conexas.** Efectivamente, dado un arco cerrado en un conjunto estrellado existe al menos un punto tal que de él irradian segmentos rectilíneos a todos y cada uno de los puntos de arco, con estos segmentos construimos la homotopía. El concepto de simplemente conexo y la presencia de agujeros se debe revisar cuando se trata de dimensiones superiores a  $D = 2$ . Por ejemplo, en el espacio tridimensional, ya no es equivalente a no tener agujeros. Por ejemplo, una bola de radio  $R$  centrada en el origen a la que se le extrae una bola de radio  $r$ ,  $r < R$ , centrada en el origen es simplemente conexa, ya que siempre podemos deformar un arco en otro. Esto lo podemos hacer debido a la existencia de

una tercera dimensión. Sin embargo, si cambiamos esfera centrado en el origen por cilindro con eje el eje  $z$  tendremos una región no simplemente conexa.

**Teorema de Cauchy. IV. Versión homotópica**

Sean  $\gamma$  un arco suave a trozos cerrado y homótopo a un punto en la región  $\mathcal{A}$  y  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $\mathcal{A}$ . Entonces,  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

**Teorema de Cauchy. V. Versión homotópica generalizada**

Sean  $\gamma$  un arco suave a trozos cerrado y homótopo a un punto en la región  $\mathcal{A}$  y  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $\mathcal{A} \setminus \{\zeta\}$ , donde  $\zeta \in \mathcal{A} \setminus \gamma^*$ , cumpliendo que  $\lim_{z \rightarrow \zeta} (z - \zeta) f(z) = 0$ . Entonces,  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

Para regiones simplemente conexas podemos ampliar el resultado, incluyendo la existencia de antiderivadas.

**Teorema de Cauchy. VI. En regiones simplemente conexas**

Sean  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  una región simplemente conexa,  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $\mathcal{A}$  y  $\gamma$  un arco suave a trozos y cerrado con  $\gamma^* \subset \mathcal{A}$ . Entonces,

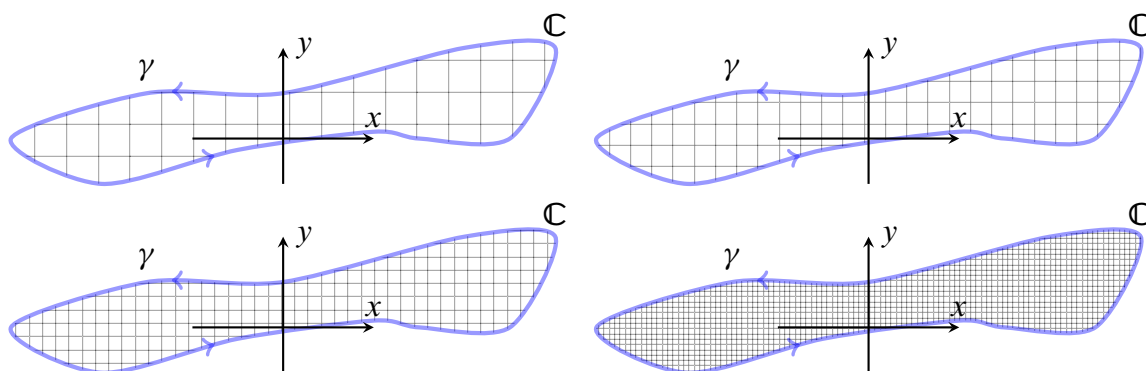
- i)  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .
- ii) La función  $f(z)$  tiene antiderivada.



Cuando los arcos no son cerrados, pero son homótopos entre si, llegamos a la siguiente versión del Teorema de Cauchy.

**Teorema de deformación**

Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos arcos suaves a trozos homótopos en una región  $\mathcal{A}$  y  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $\mathcal{A}$ . Entonces,  $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$ .

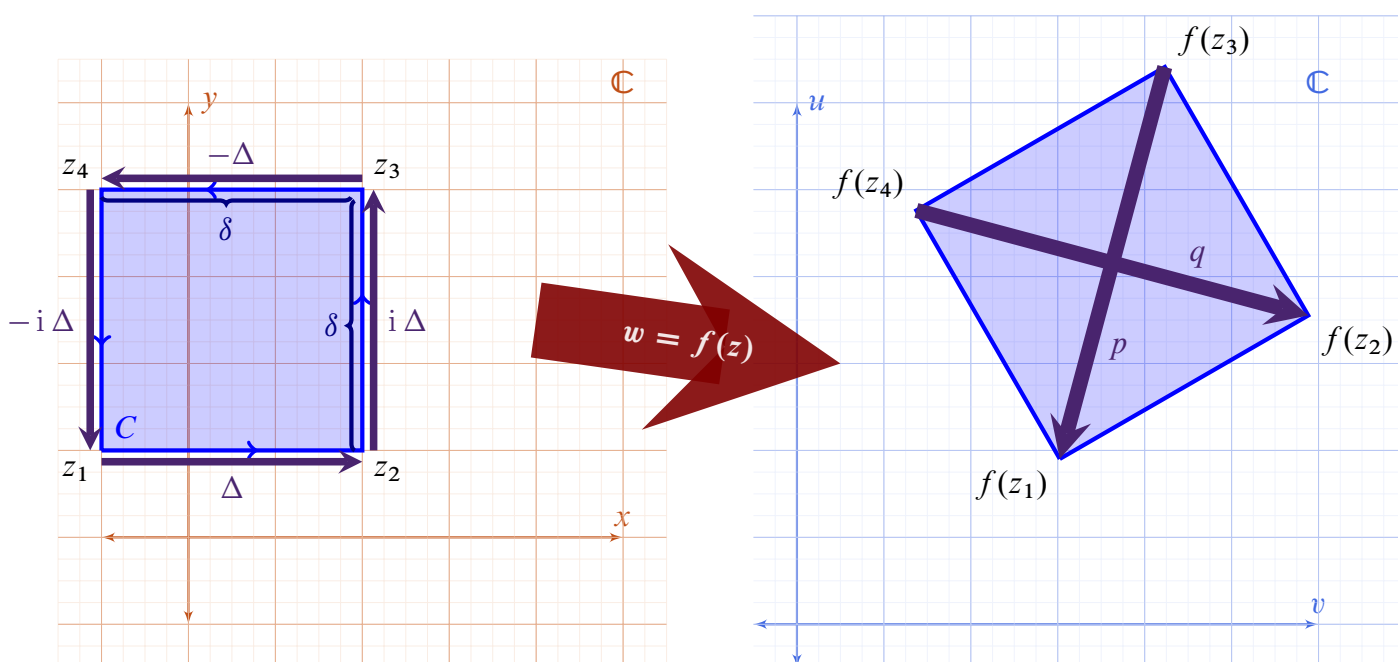


**Partición en cuadrados infinitesimales**

Subrayemos que todas las extensiones del Teorema de Cauchy que hemos discutidos son igualmente aplicables al teorema de Green. Por tanto, se podía haber discutido el teorema de Green homotópico y después deducir de él el Teorema de Cauchy homotópico. El Teorema de Cauchy para el rectángulo (la versión de Goursat) sugiere la demostración del Teorema

de Cauchy homotópico. En efecto, se trata de recubrir el interior de la curva  $\gamma$  por baldosas cuadradas  $\{C_j\}_j$  de lado  $\delta$ , y considerar el emaladosado interior  $C = \cup_j C_j$ . Su frontera  $\partial C$  será una línea quebrada. Hay que refinar, y así para todo  $\epsilon > 0$ , buscar una longitud del lado  $\delta$  suficientemente pequeño, para que  $\partial C$  y  $\gamma$  se parezcan lo suficiente, y tengamos  $\left| \int_\gamma f(z) dz - \int_{\partial C} f(z) dz \right| < \epsilon$ . Pero, como  $\int_{\partial C} f(z) dz = \sum_j \int_{\partial C_j} f(z) dz$ , y por el Teorema de Cauchy-Goursat todos los sumandos  $\int_{\partial C_j} f(z) dz$  son cero, la integral final también será cero.

**III.2.4. La idea *amplitwist* para explicar el Teorema de Cauchy** Como se aprecia del argumento anterior para entender el Teorema de Cauchy basta con hacerlo a nivel infinitesimal en un cuadrado suficientemente pequeño de lado  $\delta$  y analizar como actúa la función  $f(z)$  sobre él. Para simplificar asumiremos que  $f(z)$  es conforme en el cuadrado infinitesimal, i.e.,  $f'(z) \neq 0$ .



Interpretación *amplitwist* del teorema de Cauchy

La figura ilustra –para  $\delta$  suficientemente pequeño– como la transformación  $z \mapsto w = f(z)$  amplifica y rota el cuadrado infinitesimal original, el *amplitwist*. La integral  $\int_C f(z) dz$  para este cuadrado infinitesimal se podrá aproximar por la suma de Riemann siguiente

$$\int_C f(z) dz \approx f(z_1)(z_2 - z_1) + f(z_2)(z_3 - z_2) + f(z_3)(z_4 - z_3) + f(z_4)(z_1 - z_4),$$

que en términos de  $\Delta := z_2 - z_1$ , es

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &\approx f(z_1)\Delta + f(z_2)i\Delta - f(z_3)\Delta - f(z_4)i\Delta \\ &= (p + iq)\Delta \end{aligned}$$

donde  $p := f(z_1) - f(z_3)$  y  $q := f(z_2) - f(z_4)$ . Pero, dado que la transformación es un *amplitwist*, solo amplifica y rota, ya que es holomorfa, tendremos que  $p + iq = 0$ , como se ve en la figura arriba. Por tanto,  $\int_C f(z) dz \approx 0$ . Cómo esto es cierto para todo cuadrado infinitesimal, su *suma*, que es la integral debe ser también cero. (Este cálculo es valido para otras sumas de Riemann convenientemente escogidas.)

### Teorema de Cauchy vs amplitwist

El teorema de Cauchy no es más que una manifestación global de que una función holomorfa es localmente un *amplitwist*. Que a su vez que es equivalente a las condiciones, que son locales, de Cauchy–Riemann.



**III.2.5. La carta de Gauss a Bessel de diciembre de 1811 y el Teorema de Cauchy** En la mencionada carta de Gauss a Bessel del 18 de diciembre de 1811 se puede leer: “*La integral  $\int \varphi x \cdot dx$  tendrá siempre el mismo valor a lo largo de dos diferentes caminos si nunca  $\varphi x = \infty$  en el espacio entre las curvas que representan los caminos. Este es un bello teorema que no es difícil de demostrar que daré en una oportunidad adecuada ... En cualquier caso esto hace inmediatamente claro porque cualquier función que provenga de una integral  $\int \varphi x \cdot dx$  puede tener muchos valores para un único valor de  $x$ , ya que uno puede ir alrededor de un punto donde  $\varphi x = \infty$  o nunca, o una vez, o varias veces. Por ejemplo, si uno define  $\log x$  por  $\int \frac{dx}{x}$ , comenzando en  $x = 1$ , uno llega al logaritmo o bien sin dar la vuelta  $x = 0$  ó dando vueltas alrededor de él una o varias veces; cada vez la constante  $+2\pi i$  ó  $-2\pi i$  entra; de modo que la multiplicidad de los logaritmos está bastante clara.*” Gauss, parece que no tuvo esa oportunidad de desarrollar estos temas. Sin embargo, es meridianamente claro que acababa de hacer un hallazgo fundamental en la teoría de integración de funciones complejas. En cualquier caso, por el descubrimiento e, igualmente importante, publicación y demostración, el crédito por el descubrimiento del Teorema de Cauchy se lo merece Cauchy.

unendlich viele Arten möglich. Ich behaupte nun, dass das Integral  $\int \varphi x \cdot dx$  nach zweien verschiedenen Übergängen immer einerlei Werth erhalte, wenn innerhalb des zwischen beiden die Übergänge repräsentirenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends  $\varphi x = \infty$  wird. Dies ist ein sehr schöner Lehrsatz\*), dessen eben nicht schweren Beweis ich bei einer schicklichen Gelegenheit geben werde. Er hängt mit schönen andern Wahrheiten, die Entwicklungen in Reihen betreffend, zusammen. Der Übergang nach jedem Punkte lässt sich immer ausführen, ohne jemals eine solche Stelle wo  $\varphi x = \infty$  wird zu berühren. Ich verlange daher, dass man solchen Punkten ausweichen soll, wo offenbar der ursprüngliche Grundbegriff von  $\int \varphi x \cdot dx$  seine Klarheit verliert und leicht auf Widersprüche führt. Übrigens ist zugleich hieraus klar, wie eine durch  $\int \varphi x \cdot dx$  erzeugte Function für einerlei Werthe von  $x$  mehrere Werthe haben kann, indem man nemlich beim Übergange dahin um einen solchen Punkt wo  $\varphi x = \infty$  entweder gar nicht, oder einmal, oder mehrermale herumgehen kann. Definirt man z. B.  $\log x$  durch  $\int \frac{1}{x} dx$ , von  $x = 1$  anzufangen, so kommt man zu  $\log x$  entweder ohne den Punkt  $x = 0$  einzuschliessen oder durch ein- oder mehrmaliges Umgehen desselben; jedesmal kommt dann die Constante  $+2\pi i$  oder  $-2\pi i$  hinzu: so sind die vielfachen Logarithmen von jeder Zahl ganz klar. Kann  $\varphi x$  nie für einen endlichen Werth

Párrafo de la carta de Gauss a Bessel, 18/12/1811

Werke 8, 90-92





**III.2.6. La demostración de Cauchy del Teorema de Cauchy: usando cálculo variacional** Fue en 1825 cuando Cauchy publica su *Mémoire sur les intégrales définies*, a la que se puede considerar su obra maestra, y que fue consecuencia de una memoria que presentó a la *Académie des Sciences* el 28 de febrero de ese mismo año. Como veremos, no se basa en el Teorema de Green sino en un argumento variacional, ya que toma variaciones de los arcos y observa que la derivada variacional es nula para todo arco. Para ello se requiere, tácitamente, que la derivada del integrando sea continua. También publicó en abril de ese mismo año un breve resumen del trabajo, que tenía más de 70 páginas, en el *Bulletin de Férussac*. En octubre de 1825 volvió a realizar otro resumen añadiendo ejemplos y lo publicó en *Annales de Gergonne*. En esta memoria analiza como extender los resultados de trabajos suyos previos sobre el significado de  $\int_{x_0}^X f(x) dx$ , donde  $x_0$  y  $X$  son números reales y  $f(x)$  es una función real o imaginaria. Parece que, motivado por analogía, Cauchy avanza hacia el caso complejo y considera expresiones del tipo  $\int_{x_0+i y_0}^{X+i Y} f(z) dz$ , como el límite de sumas de productos de la forma  $\sum_n (x_n - x_{n-1} + i(y_n - y_{n-1})) f(x_{n-1} + i y_{n-1})$  que converge a medida que  $n$  crece. Las secuencias de valores  $\{x_n\}_n$  y  $\{y_n\}_n$  se pueden obtener considerando dos funciones reales  $x = \phi(t)$ ,  $y = \chi(t)$ , monótonas y continuas en el intervalo  $[t_0, T]$ , tales que  $\phi(t_0) = x_0$ ,  $\phi(T) = x$ ,  $\chi(t_0) = y_0$  y  $\chi(T) = y$  y con valores  $x_j = \phi(t_j)$ ,  $y_j = \chi(t_j)$ , que corresponden a valores  $t_0 < t_1 < \dots < T$ . (Esto es, ha introducido un arco y una partición del mismo.) Lo que le permite escribir para el valor de la integral  $\int_{x_0+i y_0}^{X+i Y} f(z) dz$  la siguiente expresión  $A + i B = \int_{t_0}^T (\phi'(t) + i \chi'(t)) f(\phi(t) + i \chi(t)) dt$ ; esto es, una integral de una función

reçoit des valeurs numériques de plus en plus petites. Donc, pour embrasser dans la même définition les intégrales prises entre des limites réelles, et les intégrales prises entre des limites imaginaires, il convient de représenter par la notation

$$(4) \quad \int_{x_0 + j_0 \sqrt{-1}}^{X + Y \sqrt{-1}} f(z) dz$$

la limite ou l'une des limites vers lesquelles converge la somme des produits de la forme

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} [(x_1 - x_0) + (j_1 - j_0) \sqrt{-1}] f(x_0 + j_0 \sqrt{-1}), \\ [(x_2 - x_1) + (j_2 - j_1) \sqrt{-1}] f(x_1 + j_1 \sqrt{-1}), \\ \text{etc.} \\ [(X - x_{n-1}) + (Y - j_{n-1}) \sqrt{-1}] f(x_{n-1} + j_{n-1} \sqrt{-1}), \end{array} \right.$$

lorsque, chacune des deux suites

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X, \\ j_0, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, Y, \end{array} \right.$$

(5)

ou, ce qui revient au même, à l'intégrale définie

$$\int_{t_0}^T [\phi'(t) + \sqrt{-1} \chi'(t)] f[\phi(t) + \sqrt{-1} \chi(t)] dt.$$

On aura donc

$$(12) \quad A + B \sqrt{-1} = \int_{t_0}^T [\phi'(t) + \sqrt{-1} \chi'(t)] f[\phi(t) + \sqrt{-1} \chi(t)] dt;$$

et, si l'on fait, pour abrégier,

$$(13) \quad \phi'(t) = x', \quad \chi'(t) = y',$$

on trouvera simplement

$$(14) \quad A + B \sqrt{-1} = \int_{t_0}^T (x' + y' \sqrt{-1}) f(x + y \sqrt{-1}) dt.$$

**Párrafos de Cauchy**

*Mémoire sur les intégrales définies* (1825)

imaginaria entre límites reales, de las que hemos mencionado y que ya había estudiado dos años atrás. Suponiendo que  $f(z)$  es *finita y continua* entre los límites de integración, procede

§ 3. Concevons maintenant que la fonction  $f(x + y\sqrt{-1})$  reste finie et continue, toutes les fois que  $x$  reste comprise entre les limites  $x_0, X$ , et  $y$  entre les limites  $y_0, Y$ . Dans ce cas particulier, on prouvera facilement que la valeur de l'intégrale (4), c'est-à-dire, l'expression imaginaire  $A + B\sqrt{-1}$ , est indépendante de la nature des fonctions

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t).$$

En effet, si l'on attribue à ces fonctions des accroissements infiniment petits et de la forme

$$(15) \quad \epsilon u, \quad \epsilon v,$$

second ordre, ou d'un ordre plus élevé. Il est aisé d'en conclure que, si chacune des fonctions  $x, y$ , reçoit successivement des accroissements infiniment petits du premier ordre dont la somme présente un accroissement fini, l'accroissement correspondant de  $A + B\sqrt{-1}$  sera infiniment petit du premier ordre, c'est-à-dire nul. On peut remarquer d'ailleurs que l'intégrale (16) n'est autre chose que la variation totale de l'intégrale (14) par rapport aux variables  $x, y$ , considérées comme des fonctions inconnues de  $t$ . Si, en adoptant les notations de Lagrange, on posait

$$(17) \quad u = \delta x, \quad v = \delta y,$$

l'intégrale (16) se présenterait sous la forme

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{t_0}^T [(x' + y'\sqrt{-1}) \delta f(x + y\sqrt{-1}) + f(x + y\sqrt{-1}) \delta (x' + y'\sqrt{-1})] dt \\ & = \delta \int_{t_0}^T (x' + y'\sqrt{-1}) f(x + y\sqrt{-1}) dt. \end{aligned} \right.$$

Ainsi la démonstration du principe ci-dessus énoncé repose sur cette seule observation que la variation de l'intégrale (14) est nulle, ce qu'on pouvait prévoir, d'après les principes du calcul des variations, attendu que la fonction sous le signe  $f$  se réduit, dans cette intégrale, à une différentielle exacte.

### Párrafos de Cauchy

*Mémoire sur les intégrales définies* (1825)

a demostrar, usando el cálculo de variaciones, que la integral es independiente de la naturaleza de las funciones  $\phi(t)$  y  $\chi(t)$ . Las variaciones infinitesimales que considero eran del tipo  $\epsilon u(t)$ ,  $\epsilon v(t)$ , siendo  $\epsilon$  un parámetro pequeño y  $u(t) = v(t) = 0$  en los extremos  $t = t_0, T$ . Calcula la variación de la integral como serie de potencias en  $\epsilon$  y prueba, integrando por partes, que la primera variación, el coeficiente que acompaña al término lineal en  $\epsilon$ , dado por  $\int_0^T ((u + iv)(x' + iy')f'(x + iy) + (u' + iv')f(x + iy)) dt$ , es cero. Es decir la variación de la integral es nula ante cambio de arcos. Esta es su demostración del *Teorema de Cauchy*. Obsérvese que el cálculo de la primera variación requiere, implícitamente, la existencia de  $f'(z)$  y de sea integrable (que se consiguiera si la derivada es continua).

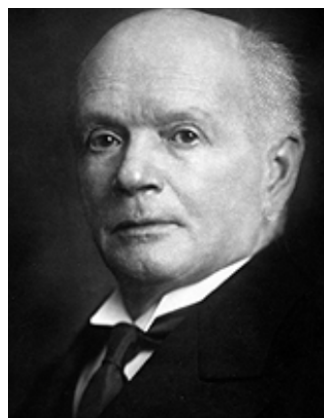
**III.2.7. Una tensión matemática y el debate americano** El Teorema de Cauchy fue demostrado muchas veces a lo largo del siglo XIX, desde Cauchy, utilizando cálculo de variaciones a Goursat, cómo hemos visto. Habitualmente se asume que la simplificación esencial de poder relajar la continuidad de la derivada a la mera holomorfía de la función  $f(z)$  se debe al matemático francés Édouard Jean-

Baptiste Gourstat. Sin embargo, en realidad, la mayor parte del crédito habría que otorgárselo al matemático alemán Alfred Pringsheim.





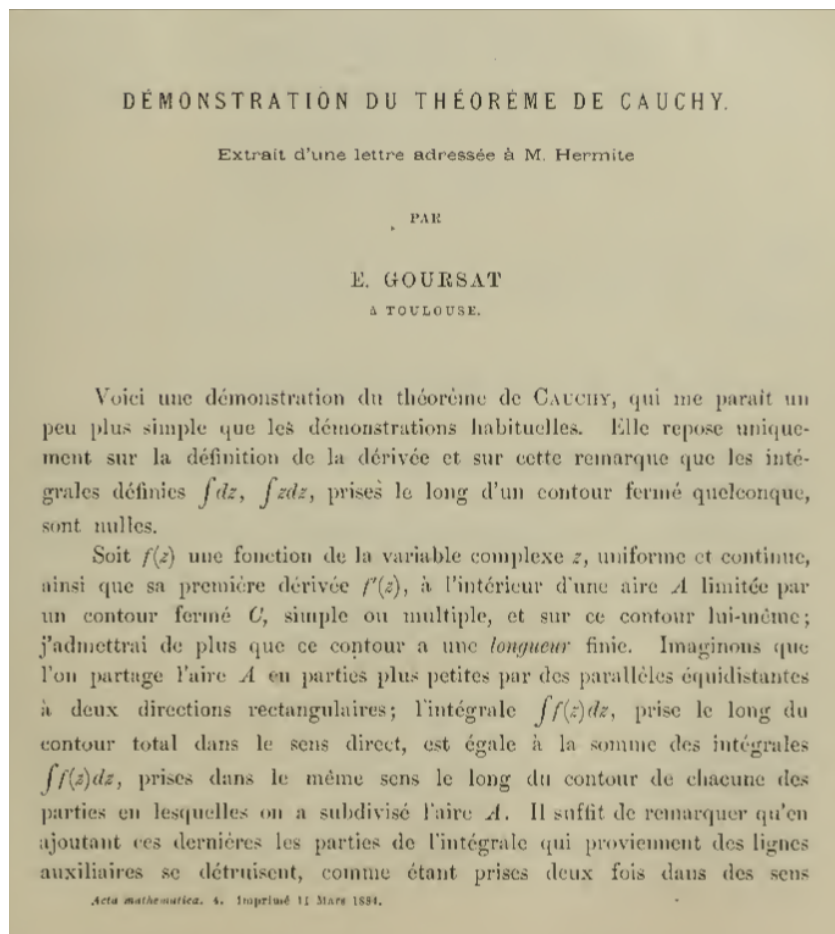
**Édouard Goursat**  
(1858-1936)



**Alfred Pringsheim**  
(1850-1941)

Posiblemente la primera demostración clara y general del Teorema de Cauchy aparece en el ya mencionado libro *Théorie des fonctions elliptiques* de Charles Briot y Jean-Claude Bouquet. No en su primera edición de 1859 sino en la edición revisada de 1875, que contenía una demostración rigurosa del teorema de Cauchy en regiones estrelladas. Para demostrarlo consideraron un arco cerrado en la misma y luego reescalaron la curva. Esta prueba asumía tácitamente la continuidad de la derivada. Las contribuciones de Goursat en el tema tienen dos momentos. En primera instancia publica en 1884 un artículo breve, de cuatro páginas, titulado *Démonstration du théorème de Cauchy*. En este trabajo se asumía la existencia de la derivada y la verdad del Teorema de Cauchy para  $\int_{\gamma} dz$  y  $\int_{\gamma} z dz$ . Dividía la región delimitada por el arco cerrado  $\gamma$  en cuadrados de lado de longitud  $\lambda$ , determinados por dos familias de líneas paralelas. Para cada cuadrado  $C_i$  escogía un punto en su interior  $z_i$  y llamaba

$\varepsilon_i = f'(z_i) - \frac{f(z) - f(z_i)}{z - z_i}$ . Entonces, para cuadrados en el interior de la curva, los que no contienen trozos el arco, demostraba que  $\int_{\partial C_i} f(z) dz = (f(z) - z_i f'(z_i)) \int_{\partial C_i} dz + f'(z_i) \int_{\partial C_i} z dz$



**Goursat: *Démonstration du théorème de Cauchy***  
Acta Mathematica 4 (1884) 197–200

+  $\int_{\partial C_i} \varepsilon_i(z - z_i) dz$ . Las dos primeros términos a la derecha se anulan y el tercero se acota por  $|\int_{\partial C_i} \varepsilon_i(z - z_i) dz| < \frac{4\varepsilon_i \lambda^2}{\sqrt{2}}$ . Razonaba de forma similar para aquellos cuadrados que intersecaban al arco, obteniendo para ellos una acotación. Esto le condujo a  $|\int_\gamma f(z) dz| < (\max_i \varepsilon_i) \sqrt{2}(4A' + S)$ , donde  $A'$  es el área de todos los cuadrados encerrados por el arco y  $S$  la longitud del arco. Esto es, la integral la podemos hacer tan pequeña como queremos. El Teorema de Cauchy estaba demostrado, decía Goursat.

## Ueber den Cauchy'schen Integralsatz.

Von Alfred Pringsheim.

(Eingelau'en 7. Januar.)

Der Satz, dass ein über eine complexe Wertheurthe ausgehntes Integral von der Form  $\int_{z_0}^z f(z) \cdot dz$  unter gewissen Bedingungen von der Wahl der zwischen  $z_0$  und  $z$  gelegenen Zwischenwerthe, dem „Integrationswege“, unabhängig ist, oder, was im Wesentlichen dasselbe besagt, dass unter analogen Bedingungen das Integral  $\int f(z) \cdot dz$ , erstreckt über einen geschlossenen Integrationsweg, verschwindet, wird wohl ziemlich allgemein schlechthin als der Cauchy'sche Integralsatz bezeichnet und zwar wohl nicht lediglich darum, weil er von Cauchy zuerst ausgesprochen und bewiesen wurde<sup>1)</sup> (denn so verstanden gibt es eine ganze Anzahl Cauchy'scher Integralsätze), sondern weil er als die eigentliche Grundlage der modernen

<sup>1)</sup> Soviel mir bekannt ist, in dieser Form zum ersten Male in dem 1825 als besonderes Heft herausgegebenen „Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires“, § 3. — In Laurent's *Traité d'Analyse* (T. III, p. 257) und Kronecker's *Vorlesungen über Integrale* (p. 52) wird das Jahr 1814 als Publicationsjahr angegeben. Obschon dieser Bemerkung eine nähere Quellenangabe nicht beigefügt ist, so lässt sich doch mit ziemlicher Sicherheit annehmen, dass dieselbe auf das im Jahre 1814 der Pariser Akademie vorgelegten „Mémoire sur les intégrales définies“ (*Oeuvres complètes*, T. I, p. 399—506) zurückzuführen sein dürfte. Sollte dies aber wirklich der Fall sein, so muss jene Angabe als

### Pringsheim: Ueber den Cauchy'schen Integralsatz

Sitzungsberichte der math-phys. Classe der Königl. Akademie der Wissenschaften zu München 25 (1895) 39—720

para Pringsheim, el trabajo de Goursat contenía una demostración más simple de un gran resultado pero, en ningún caso, suponía una relajación en las exigencias de continuidad de la derivada.

**El debate americano y las *Transactions*** Y entonces llegó el debate americano. En el primer número de una revista, que después se convertiría en una de las mejores en Matemáticas, las *Transactions* de la American Mathematical Society. Publicaron sendos artículos, por invitación, Goursat y Eliakim Hastings Moore (un matemático americano que también invento los quasideterminantes).

Pero Pringsheim discrepaba, y en 1895 en el artículo *Ueber den Cauchy'schen Integralsatz* afirmo que no, que el francés se equivocaba. El problema estribaba en que Goursat asumía, implícitamente, que el cociente incremental convergía uniformemente a la derivada en la región delimitada por el arco. Esto es equivalente a afirmar que la derivada es una función continua. Ese fue el talón de Aquiles del primer artículo de Goursat, justo al final, donde realizaba esta suposición *peligrosa*. Continúa el prusiano con su prueba del teorema de Cauchy. Considera arcos continuos y demuestra el teorema para regiones acotadas por *arcos tipo escalera* y, a continuación, lo extiende a curvas continuas, que son límites de estos *arcos escalonados*. En un segundo artículo ese mismo año Pringsheim, titulado *Zum Cauchy'schen Integralsatz*, en la misma revista múniquesa, aclara la relación entre el cociente incremental y la derivada, dando una prueba sencilla de que la continuidad de la derivada implicaba la convergencia uniforme del cociente incremental a la derivada. Esto es,

El de Goursat se titulaba *Sur la définition générale des fonctions analytiques d'après Cauchy* y el de Moore *A simple proof of the fundamental Cauchy–Goursat Theorem* (Transactions of the American Mathematical Society 1 (1900) 499-506). Ambos fueron contestados por Pringsheim, un año más tarde, en la misma revista, con el artículo *Ueber den Goursat'schen Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes*. En su artículo, Goursat establece el lema de Goursat: para cualquier  $\epsilon > 0$  cualquier región acotada  $\mathcal{R}$  por un arco cerrado simple  $\gamma$  se puede dividir en porciones tal que se cumple  $|f(z) - f(z') - (z - z')f'(z')| < |z - z'|\epsilon$  con  $z$  recorriendo la frontera de la porción y  $z'$  un punto fijo en el interior de la misma. Con ella pudo probar finalmente el teorema de Cauchy exigiendo solamente la holomorfía de la función. El teorema de Cauchy que presentó Moore era para una función univaluada continua y con derivada univaluada en una región acotada por un arco. Asumía que: 1) El arco se encontraba con líneas paralelas a los ejes a lo sumo en un número finito de puntos, 2) Que si una secuencia de cuadrados de lados paralelos a los ejes convergía a un punto  $A$  del arco, entonces el cociente de la suma de las longitudes de los trozos de arco en cada porción con respecto al perímetro de los cuadrados se podía acotar convenientemente.

SUR LA DÉFINITION GÉNÉRALE DES FONCTIONS ANALYTIQUES,  
D'APRÈS CAUCHY\*

PAR

E. GOURSAT

J'ai reconnu depuis longtemps que la démonstration du théorème de Cauchy, que j'ai donnée en 1883†, ne supposait pas la continuité de la dérivée. Pour répondre au désir qui m'a été exprimé par M. le Professeur W. M. F. OSGOOD, je vais indiquer ici rapidement comment on peut faire cette extension.

Soit  $z$  une variable complexe et  $u = f(z)$  une autre quantité complexe qui varie avec  $z$ . La fonction  $f(z)$  est dite *continue* pour la valeur  $z_0$  de la variable si la différence  $f(z_0 + h) - f(z_0)$  tend vers zéro en même temps que le module de  $h$ , ou, d'une façon plus précise, si à tout nombre positif  $\epsilon$ , pris arbitrairement, on peut faire correspondre un autre nombre positif  $\eta$ , de telle façon que l'inégalité

$$|h| < \eta$$

entraîne la suivante :

$$|f(z_0 + h) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Une fonction continue  $f(z)$  admet, pour  $z = z_0$ , une dérivée  $f'(z_0)$  si le rapport

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

tend vers  $f'(z_0)$  lorsque le module de  $h$  tend vers zéro ; cela revient encore à dire qu'à tout nombre positif  $\epsilon$ , pris arbitrairement, on peut faire correspondre un autre nombre positif  $\eta$  tel que l'inégalité

$$|h| < \eta$$

entraîne la suivante :

$$|f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)| \leq |h| \epsilon.$$

Ces définitions étant rappelées, je définirai encore une expression que j'emploierai, pour abréger la démonstration. Soit  $A$  une portion du plan limitée par un contour fermé  $C$ , et  $f(z)$  une fonction continue et admettant une dérivée

\* Presented to the Society April 29, 1899. Received for publication May 5, 1899.

† Acta Mathematica, tome 4, p. 197-200; Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Stockholm, 1884.

**Goursat**

*Sur la définition générale des fonctions analytiques, d'après Cauchy*  
Transactions of the American Mathematical Society 1 (1900) 14-16

UEBER DEN GOURSAT'SCHEN BEWEIS  
DES CAUCHY'SCHEN INTEGRALSATZES\*

VON

ALFRED PRINGSHEIM

Der CAUCHY'sche Satz über das Verschwinden eines geschlossenen Integrals von der Form  $\int f(z) dz$  hat durch die in Bd. 1, pp. 14–16 dieser Zeitschrift von Herrn GOURSAT publicirte Note eine ausserordentlich bemerkenswerthe Erweiterung erfahren, insofern alle bisherigen Beweise, um vollständig und exakt zu sein, die *Stetigkeit* von  $f'(z)$  oder, was im wesentlichen auf dasselbe hinausläuft, † die *gleichmässige* Differenzirbarkeit von  $f(z)$ , entweder schlechthin oder zum mindesten in gewissem Umfange ‡ zur unentbehrlichen Voraussetzung hatten. In jener Note zeigt nun Herr GOURSAT, dass man denjenigen Hauptschluss, welcher bei dem früher (Acta math., T. IV (1884), pp. 197–200) von ihm mitgetheilten Beweise auf der Voraussetzung der *gleichmässigen* Differenzirbarkeit beruht, mit Hülfe einer weniger speciellen, jeder (im complexen Sinne) *differenzirbaren* Function *eo ipso* zukommenden Eigenschaft herleiten kann. Dieselbe ist enthalten in dem folgenden LEMMA:

*Es sei  $f(z)$  für alle Stellen eines von der geschlossenen Curve  $C$  begrenzten Bereiches  $A$  stetig und mit einer endlichen Derivirten  $f'(z)$  begabt. Wird dann  $\epsilon > 0$  beliebig vorgeschrieben, so lässt sich  $A$  (auf unendlich viele Arten) in hinlänglich kleine Theilstücke  $A_v$  zerlegen, derart dass:*

$$(I) \quad |f(z_v) - f(\xi_v) - (z_v - \xi_v) f'(\xi_v)| \leq \epsilon |z_v - \xi_v|.$$

*Dabei bedeutet  $z_v$  jeden beliebigen Punkt auf der Begrenzung von  $A_v$ ,  $\xi_v$  einen bestimmten, im Innern oder auf der Begrenzung von  $A_v$  allemal wirklich vorhandenen Punkt.*

Nachdem Herr GOURSAT dieses Lemma bewiesen, begnügt er sich im übrigen mit der Bemerkung, man könne nun auf Grund desselben die für seinen oben citirten, ersten Beweis erforderliche Theilung des Gesamtbereiches immer so

\* Presented to the Society at the Ithaca meeting, August 19, 1901. Received for publication May 24, 1901.

† Vgl. Münchener Berichte, Bd. 25 (1895), p. 295.

‡ Vgl. Münchener Berichte, Bd. 29 (1899), p. 61. W. F. OSGOOD, American M. S. Bulletin, Bd. 5 (1898), p. 85.

Pringsheim

*Ueber den Goursat'schen Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes*

Transactions of the American Mathematical Society 2 (1901) 413-421

Pringsheim de nuevo objetó sobre ambos trabajos en la misma revista al año siguiente. En su artículo titulado *Ueber den Goursat'schen Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes* criticaba de Goursat el hecho de escoger cuadrados congruentes, ya que esto conduce a una restricción innecesaria sobre las curvas que se pueden tratar. Sobre el de Moore señaló que su primera condición era insuficiente, poniendo el ejemplo de la curva  $y = x^2 \operatorname{sen}(x^{-1})$ . Finalmente, Pringsheim, en 1903, en el artículo titulado *Der Cauchy-Goursat'sche Integralsatz und seine Obertragung auf reelle Kurven-Integrale*, Sitzungsberichte der math-phys. Classe der Königl. Akademie der Wissenschaften zu München 33, 673-682, demostró que dadas dos funciones  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  diferenciables en el interior y sobre el borde de un triángulo  $\Delta$ , suponiendo que  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , se tiene  $\int_{\Delta} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = 0$ . El teorema de Cauchy se sigue tomando  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  como las partes real e imaginarias de la función  $f(z)$ .

A pesar de la contribuciones notables de Goursat en este campo, parece que fue Pringsheim el que dio con la demostración precisa relajando la continuidad de la derivada. De hecho, al final, volvió al teorema de Green, pero relajando las condiciones sobre los campos, no pidiendo la continuidad de las derivadas. Estos temas los trataremos someramente cuando discutamos la teoría homológica.

### §III.3. Fórmula integral de Cauchy



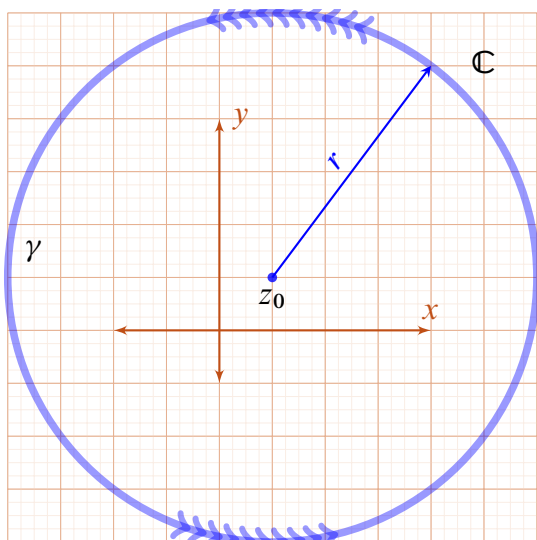
CONSECUENCIAS del Teorema de Cauchy hay muchas, variadas y de gran alcance. Una primera e importante conclusión que extraemos es la fórmula integral de Cauchy, que permite conocer el valor de una función holomorfa en el interior de un arco cerrado en términos de la integral sobre el arco. De la fórmula integral de Cauchy se cosechan, a su vez, infinidad de frutos. Por ejemplo, que la holomorfía implica la existencia de todas las derivadas, y las correspondientes fórmulas integrales para las derivadas, y de aquí las cotas de Cauchy, y el Teorema de Liouville y el Teorema Fundamental del Álgebra.

**III.3.1. Índice de un arco cerrado** Discutimos ahora como contar cuantas vueltas da un arco alrededor de un punto dado.

#### Índice

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  un arco suave a trozos cerrado y  $z_0 \notin \gamma^*$  un punto en  $\mathbb{C}$  que no yace en el arco. Definimos el índice de  $z_0$  respecto a  $\gamma$  (o de  $\gamma$  con respecto a  $z_0$ , como se desee) como

$$n(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$



Arco circular que da 10 vueltas en sentido antihorario

Por ejemplo, si  $\gamma : [0, 2n\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  con  $t \mapsto \gamma(t) := z_0 + r e^{it}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$ , un simple cálculo nos lleva a  $n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi n} \frac{ir e^{it} dt}{r e^{it}} = n$ . El índice es justo el número de vueltas que se dan alrededor de  $z_0$ , el centro del círculo, sobre la circunferencia de radio  $r$  con ese mismo centro. Si la curva fuera  $t \mapsto \gamma(t) := z_0 + r e^{-it}$ , es decir gira en sentido horario, al contrario que antes, obtenemos  $n(\gamma, z_0) = -n$ . Parece pues que el valor absoluto de este índice mide el número de vueltas, y su signo determina el sentido en que se gira.

También, observamos que si  $z_0$  es un punto en el exterior del arco  $\gamma$ , el índice debe ser cero,  $n(\gamma, z_0) = 0$ . Esto es necesariamente así por el Teorema de Cauchy, ya que  $\frac{1}{z - z_0}$  es holomorfa en  $\mathcal{A} = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  y el arco es homótopo a un punto en la región  $\mathcal{A}$  —ya que no contiene a  $z_0$  en su interior. Veamos que efectivamente este es un buen candidato para medir el número de vueltas de un

arco alrededor de un punto dado.

#### El índice es un número entero

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  un arco suave a trozos cerrado y  $z_0 \notin \gamma^*$  un punto en  $\mathbb{C}$  que no yace en el arco. Entonces, el índice toma valores enteros  $n(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$ .

DEMOSTRACIÓN. La función  $h(t) := \int_a^t \frac{\dot{\gamma}(s)}{\gamma(s) - z_0} ds$  satisface  $h(a) = 0$  y  $h(b) = 2\pi i n(\gamma, z_0)$ . Además, cómo  $\dot{h}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t) - z_0}$  podemos deducir que  $e^{-h(t)} (\gamma(t) - z_0)$  es una función constante. Luego  $e^{-h(a)} (\gamma(a) - z_0) = e^{-h(b)} (\gamma(b) - z_0)$ , esto es  $e^{-2\pi i n(\gamma, z_0)} = 1$ .  $\square$

**III.3.2. El índice y el Teorema de Cauchy** El índice de un punto con respecto a un arco es un elemento importante para construir la fórmula integral de Cauchy, como veremos en las próximas subsecciones. Pero también nos da una nueva perspectiva sobre el Teorema de Cauchy. Discutamos un momento sobre el concepto *el interior de un arco cerrado*. En principio, para las curvas de Jordan, es decir curvas cerradas y simples se puede afirmar, según reza el teorema de Jordan, que  $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$  se divide en dos componentes conexas, una de ellas acotada, que se llama interior, y otra no acotada, el complementario, que se llama exterior. El problema radica en que nosotros hemos permitido curvas no simples, que se autointersecan, ¿Cómo se extiende este concepto de interior a curvas no simples? Una interesante posibilidad es la siguiente.

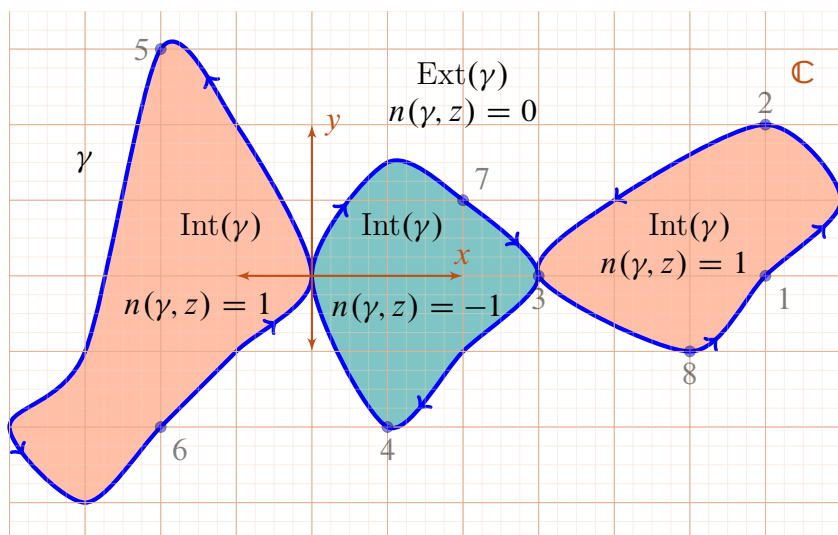
#### Interior/exterior de un arco

Sean  $\gamma$  un arco suave a trozos cerrado en la región  $\mathcal{A}$ , su interior se define como

$$\text{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} : n(\gamma, z) \neq 0\},$$

y su exterior

$$\text{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} : n(\gamma, z) = 0\} = \mathbb{C} \setminus \text{Int}(\gamma).$$



Arco con tres autointersecciones, pero con interior y exterior claros

Es decir, un punto es exterior a un arco  $\gamma$  si éste no gira alrededor de él, en tanto que un punto es interior al arco, si tenemos que  $\gamma$  da al menos una vuelta alrededor de él.

Veamos algunos ejemplos. En la figura adjunta vemos tres puntos de autointersección, las regiones salmón y verde son el interior y tienen índices 1 y  $-1$ , respectivamente, la región blanca es el exterior. Se han numerado ocho puntos del arco para que quede claro el sentido en que se recorre. Se observa que las regiones salmón tienen como frontera dos arcos de Jordan suaves cerrados, digamos  $\gamma_1, \gamma_3$  que se recorren en sentido antihorario una vez, en tanto que la región verde está encerrada por

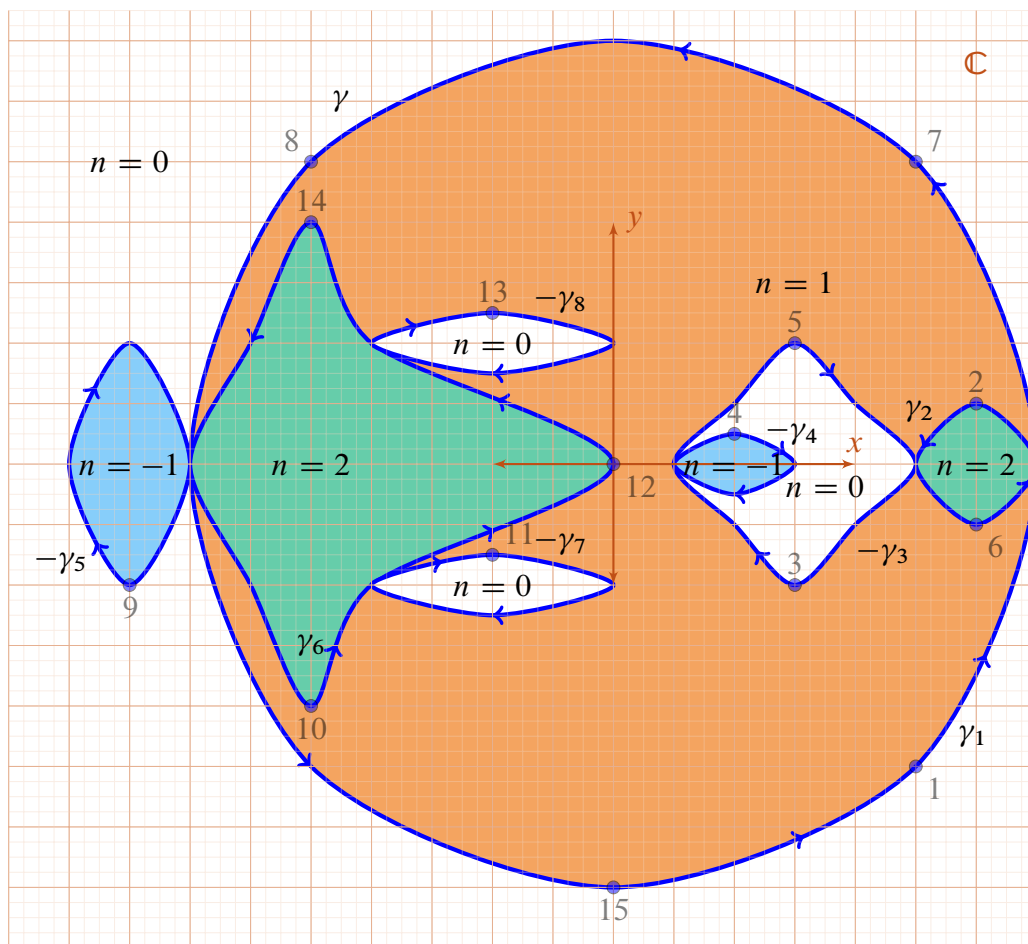
un arco suave de Jordan cerrado  $-\gamma_2$ , que se recorre en sentido horario una vez. Como cadenas podemos escribir,  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3$ .

Veamos ahora un ejemplo más complicado, en donde ya no es tan claro que es el interior o el exterior y el índice permite una clasificación sistemática. Este es un arco que tiene una variedad de autointersecciones y no es obvio lo que es interior o exterior. Para que sea vea claramente el sentido en que se recorre hemos marcado los puntos  $\{1, 2, \dots, 15\}$  que serán consecutivos al recorrer el camino.



El criterio del índice, sin embargo, nos informa claramente de lo que es exterior, lo que está coloreado en blanco, y la curva no da ninguna vuelta alrededor de sus puntos. El resto de colores corresponden a a puntos del interior, que tienen diferentes índices, 2 el conjunto de color verde marino, 1 el coloreado de marrón arenoso y  $-1$  el conjunto coloreado de azul celeste. También, vemos que el arco es una cadena  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 - \gamma_5 + \gamma_6 - \gamma_7 - \gamma_8$ .

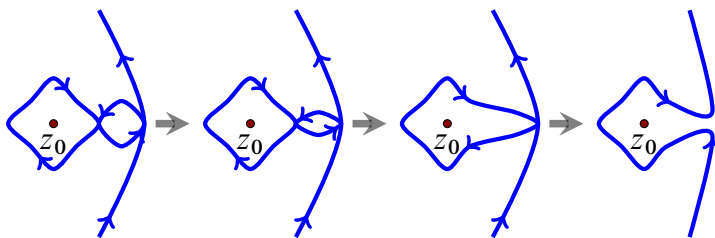
Una vez que tenemos claro el concepto de interior y exterior para una curva cerrada no simple formulamos el Teorema de Cauchy como sigue. (Es un adelanto de la versión homológica que veremos más adelante.)



**Arco con seis autointersecciones, pero con interior y exterior menos claramente definidos**

**Teorema de Cauchy. VII. El índice**

Sean  $\gamma$  un arco suave a trozos cerrado y  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $\text{Int}(\gamma) \subset \mathcal{A}$ , el interior del arco  $\gamma$ . Entonces,  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .



**Homotopía del arco: liberando a  $z_0$**

Esto es, para aplicar el teorema de Cauchy, en el interior de la curva no puede haber singularidades, pero en el exterior sí. Fijémonos en la región blanca marcada por los puntos  $\{3, 5\}$  y en la región marcada por  $\{2, 6\}$ . ¿Por qué si tengo  $f(z)$  holomorfa con una única singularidad en  $z_0$ , donde no es holomorfa,

en la región blanca  $\{3, 5\}$  tenemos  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ ? Porque, dado donde se sitúa el agujero o la

singularidad, el arco se deforma continuamente a uno que no lo contenga. Esto no lo podemos hacer con la región  $\{2, 6\}$ , ya que el arco atravesaría la zona prohibida, la singularidad, en su deformación continua ¡coger papel y lápiz y dibujarlo!

**III.3.3. La fórmula integral** Vamos a estudiar la fórmula integral de Cauchy y su extensión para expresar las derivadas de una función holomorfa en una región.

### Fórmula integral de Cauchy. I

Sean una región  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ , una función  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en  $\mathcal{A}$  y un arco  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{A}$  que es suave a trozos y homótopo a un punto en  $\mathcal{A}$ . Entonces, para todo número complejo  $z_0 \in \mathcal{A}$  que no yazca en el arco,  $z_0 \notin \gamma^*$ , se cumple que

$$n(\gamma, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$



DEMOSTRACIÓN. La función cociente incremental

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0, \\ f'(z_0), & z = z_0, \end{cases}$$

es holomorfa en  $\mathcal{A} \setminus \{z_0\}$  y satisface  $\lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)g(z)) = 0$ . Por ello, al aplicar el teorema de Cauchy generalizado a  $g(z)$  se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz && \text{ya que } z_0 \notin \gamma^* \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0)n(\gamma, z_0). \end{aligned}$$

□



### Observaciones:

- Cuando el arco de integración sólo da una vuelta alrededor de  $z_0$  la fórmula integral de Cauchy adopta la forma

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

- Llama la atención que, conociendo sólo los valores de  $f(z)$  sobre el arco cerrado, podamos conocer todos los valores de  $f(z)$  en la región delimitada por este arco.
- En particular, si  $f(z)$  tiene un valor constante  $C \in \mathbb{C}$  sobre el arco,  $f(z) = C, \forall z \in \gamma^*$  y  $n(\gamma, z_0) \neq 0$  entonces  $f(z_0) = C$ . Esto es, si el arco es cerrado y  $f(z)$  es constante sobre el arco lo es en todo su interior. Ciertamente esto es excepcional, una función diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ , constante sobre un arco cerrado, no es, en general, constante en su interior, por ejemplo  $u(x, y) = x^2 + y^2$  es constante sobre los círculos concéntricos con centro en el origen, y obviamente no es una función constante.

- También es llamativo que al derivar, *formalmente*, la fórmula de integral de Cauchy deducimos

$$\frac{d^k f}{dz^k}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dz,$$

y parece que existen todas las derivadas. Para ver que esta manipulación formal es correcta necesitamos aprender como se derivan las integrales de tipo Cauchy, que llamaremos transformadas de Cauchy.

**Ejemplo:** Si se nos requiere evaluar la integral  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1}$ , donde  $\gamma$  recorre la circunferencia  $\{z : |z| = 2\}$  en sentido antihorario una vez, podemos proceder de la siguiente manera. En primer lugar, observamos que  $z^2+1 = (z+i)(z-i)$ , y que por ello deducimos la descomposición en fracciones simples siguiente  $\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2} \left( \frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right)$ . Por tanto,  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{i}{2} \left( \int_{\gamma} \frac{dz}{z+i} - \int_{\gamma} \frac{dz}{z-i} \right)$ . Pero, la fórmula integral de Cauchy nos dice que  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z+i} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i$  y, por tanto, concluimos que  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{i}{2} 2\pi i (1-1) = 0$ . Más aún, si lo que se nos pide es calcular  $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+1} dz$ , un razonamiento análogo nos conduce a

$$\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+1} dz = \frac{i}{2} \left( \int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z+i} dz - \int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z-i} dz \right),$$

la fórmula integral de Cauchy implica que  $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z+i} dz = -\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z-i} dz = 2\pi i \operatorname{sen} i = \frac{\pi}{e}(1-e^2)$ . Por lo que  $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+1} dz = \frac{\pi}{e}(1-e^2)i$ .

### III.3.4. Transformadas de Cauchy y formula integral de Cauchy para las derivadas. Teorema de Morera

#### Transformada de Cauchy. I

Dado un arco  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y una función integrable  $g : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ , la función

$$\mathcal{C}_g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta,$$

definida para  $z \notin \gamma^*$ , se dice transformada de Cauchy de  $g$  en  $\gamma$ .

Vamos a ver que la transformada de Cauchy toma una función integrable y acotada sobre un arco rectificable y devuelve una función compleja infinitamente derivable.

#### Transformada de Cauchy. II. Derivadas

Sea un arco  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  suave a trozos y una función integrable y acotada  $g : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces, la transformada de Cauchy  $\mathcal{C}_g(z)$  es una función compleja infinitamente derivable en  $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ , estando la derivada  $k$ -ésima,  $k \in \{1, 2, \dots\}$ , para  $z \notin \gamma^*$ , dada por la fórmula

$$\frac{1}{k!} (\mathcal{C}_g)^{(k)}(z) = \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta.$$

DEMOSTRACIÓN.

Veamos el caso de la primera derivada. Sea  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$  y consideremos la distancia de la curva al punto en cuestión,  $d := \min_{t \in [a, b]} |\gamma(t) - z_0|$ , así como el máximo valor del módulo de la función  $g$  sobre el arco,  $M := \max_{t \in [a, b]} |g(\gamma(t))|$ , que siempre existe ya que  $[a, b]$  es un intervalo compacto y  $g$  es continua. Sea un punto  $z \in D(z_0, \frac{d}{2}) \setminus \{z_0\}$  y analicemos el cociente incremental

$$\frac{\mathcal{C}_g(z) - \mathcal{C}_g(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} \left( \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) g(\zeta) d\zeta,$$

que recordando que (¡comprobarlo!)

$$\frac{1}{z - z_0} \left( \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) = \frac{1}{(\zeta - z_0)^2} \left( 1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z} \right),$$

se escribe como sigue

$$\frac{\mathcal{C}_g(z) - \mathcal{C}_g(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{(\zeta - z_0)^2} \left( 1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z} \right) g(\zeta) d\zeta.$$

Luego

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathcal{C}_g(z) - \mathcal{C}_g(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right| &= \frac{|z - z_0|}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{|z - z_0|}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|g(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^2 |\zeta - z|} |d\zeta| \\ &\leq |z - z_0| \frac{M \ell(\gamma)}{\pi d^3}, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $|g(\zeta)| \leq M$ ,  $|\zeta - z_0| \geq d$  y  $|\zeta - z| \geq \frac{d}{2}$ . Todo ello nos conduce a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\mathcal{C}_g(z) - \mathcal{C}_g(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta.$$

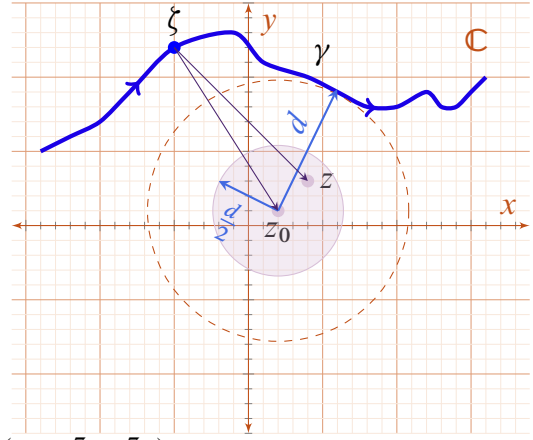
Para el caso de las derivadas de orden superior, que no discutiremos aquí, se procede de igual modo y aplicando inducción.  $\square$

### Fórmula integral de Cauchy. II. Para las derivadas

Una función  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en una región  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  es infinitamente derivable en cualquier punto de la región. Dado  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  un arco suave a trozos homótopo a un punto en  $\mathcal{A}$ , un punto  $z_0 \notin \gamma^*$ , y un entero positivo  $k$ , se tiene la siguiente expresión integral para las derivadas

$$(14) \quad n(\gamma, z_0) f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

DEMOSTRACIÓN. ¿Cuál es la transformada de Cauchy de  $g(z) = 1$  en  $\gamma$ ? La respuesta es sencilla  $\mathcal{C}_1(z) = n(\gamma, z)$ . Por tanto, al ser el índice una transformada de Cauchy deducimos que



es holomorfo, y por ende continuo. Esto implica que es una función constante en un entorno de  $z_0$  que tenga intersección vacía con el arco, ya que su posible variación, al tomar el índice sólo valores enteros, es a saltos discontinuos. En particular, el índice se mantendrá constante en el disco  $D(z_0, \frac{d}{2})$ . Por ello, recordando la fórmula integral de Cauchy, para  $z \in D(z_0, \frac{d}{2})$  se satisfará,  $n(\gamma, z_0)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \mathcal{C}_f(z)$ . Pero, el término de la derecha es una transformada de Cauchy de una función continua sobre el arco, luego existen todas sus derivadas que están dadas, por tanto, por (14).  $\square$

Observamos que si  $f(z)$  es holomorfa en un conjunto arbitrario  $C$  entonces será infinitamente derivable en ese conjunto, consecuencia de aplicar el resultado anterior a un entorno de  $z \in C$ .

Giacinto Morera, en *Un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di una variabile complessa*, Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere **19** (1886) 304-307, encontró el siguiente resultado recíproco al Teorema de Cauchy.

#### Teorema de Morera

Si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es continua en una región  $\mathcal{A}$  y para todo arco suave a trozos y cerrado  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{A}$  se tiene  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ , entonces  $f(z)$  es holomorfa en la región y existe una antiderivada holomorfa  $F$ ,  $f(z) = F'(z)$ , en  $\mathcal{A}$ .



DEMOSTRACIÓN. La independencia del camino nos asegura la existencia de una función antiderivada  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , holomorfa en  $\mathcal{A}$ , con  $f(z) = F'(z)$ . Como  $F(z)$  es holomorfa, existirá  $f'(z) = F''(z)$  y  $f(z)$  es, por ello, holomorfa.  $\square$



Eugène Delacroix

*La liberté guidant le peuple* (1830)

**III.3.5. El calcul des limites o cómo Cauchy obtuvo su fórmula integral** Tras la abdicación en 1814 de Napoleón, la alianza situó como rey de Francia a Luis XVIII, al que posteriormente sucedió en el trono su hermano pequeño, coronado como Carlos X. En julio de 1830 tuvo lugar la *Trois Glorieuses*, por los tres días gloriosos que duró, la segunda revolución francesa, que destronó a Carlos X, un rey borbón, para situar como rey de Francia a Luis Felipe de Orleans (los Orleans era una rama de los borbones) que restableció la Carta Magna y procedió con reformas liberales y burguesas, de ahí el apodo del rey burgués. Estudiantes uniformados de la *École Polytechnique* tomaron parte activa en los disturbios revolucionarios y protestaron delante de la



casa de su profesor M. Cauchy, católico, conservador y, sobre todo, partidario de Carlos X. Todo ello marcó un punto de inflexión en la vida de Cauchy y paralizó su actividad matemática. Cauchy, que procesaba un profundo desprecio por los liberales —que en eso momento habían tomado el poder— se fue de París, dejando su familia atrás para ir a Friburgo (Suiza). Pronto, el gobierno francés le exigió jurar lealtad al nuevo régimen, a lo que él se negó, por ello perdió todas sus puestos en París, excepto su sillón en la *Académie des Sciences*, para el que no se requiere un juramento.

## FORMULES POUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES.

*Calcul des limites (1).*

Soient  $p$  un arc réel et  $n$  un nombre entier. On trouvera, en supposant  $n > 0$ ,

$$(1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{np\sqrt{-1}} dp = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}} dp = 0,$$

(1) Le Mémoire qu'on va lire est une partie de celui qui a été lithographié à Turin

## ET SUR LE CALCUL DES LIMITES.

59

et, en supposant  $n = 0$ ,

$$(2) \quad \int_{-\pi}^{\pi} dp = 2\pi.$$

Soit de plus

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

une fonction entière de la variable  $x$ . Si l'on attribue à cette variable une valeur imaginaire  $\bar{x}$  dont le module soit  $X$ , en sorte qu'on ait

$$\bar{x} = X e^{p\sqrt{-1}},$$

on tirera des formules (1) et (2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}) dp = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{x}\right) dp = 2\pi a_0;$$

on aura donc

$$(3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}) dp = 2\pi f(0).$$

Il est d'ailleurs facile d'étendre la formule (3) au cas où  $f(\bar{x})$  cesse d'être une fonction entière de  $x$ . En effet, on a généralement

$$D_x f(\bar{x}) = \frac{1}{X\sqrt{-1}} D_p f(\bar{x}).$$

Or, si l'on intègre les deux membres de l'équation précédente : 1° par rapport à  $X$  et à partir de  $X = 0$ ; 2° par rapport à  $p$  entre les limites

## Párrafos de Cauchy

*Mémoire sur mécanique céleste et sur un nouveau calcul, appelé calcul des limites* (1831)

segunda parte de la memoria dedica unas 90 páginas a la mecánica celeste y que sustancian

En 1831 Cauchy fue a Turín (Italia) y aceptó una oferta del rey de Cerdeña (que gobernaba Turín y la región de Piamonte) para ser catedrático de Física Teórica, plaza creada especialmente para él. Fue profesor en Turín durante los dos años siguientes. En agosto de 1833 Cauchy dejó Turín para dirigirse a Praga y así convertirse en el tutor científico del nieto de Carlos X. Esta tarea, que no satisfizo ni a Cauchy ni al noble tutelado, se prolongó hasta 1838. Obtuvo el título de barón por ello y regresó a París en 1838. Curiosamente, tuvo que esperar a la revolución de 1848 para que en 1849 se le restituyera como profesor en la universidad, Francia era de nuevo una república, la tercera, gobernada por Luis Napoleón Bonaparte, sobrino de Napoleón, que en 1852 se convirtió en emperador de Francia.

En el trabajo *Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul qui s'applique à un grand nombre de questions diverses* de 1831 (Bulletin Férussac 15 (1831) 260-269), Cauchy solo esboza parte del contenido de su gran *Mémoire sur mécanique céleste et sur un nouveau calcul, appelé calcul des limites* publicada en Turín. A esta memoria se le agrega el 6 de marzo de 1832 una *Addition*. En la §2 de la primera parte de la memoria Cauchy discutió el problema del desarrollo en serie de potencias y estableció métodos para evaluar los restos a partir de un determinado orden (en la

el interés de estos desarrollos).

Cauchy hace notar que  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inp} d p =$

$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inp} d p = 0$  para cualquier

entero positivo  $n$ , mientras que

$\int_{-\pi}^{\pi} d p = 2\pi$ . Si esto se aplica a

un polinomio  $f(x) = a_0 + a_1x +$

$a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , tras las susti-

tuciones  $x = \tilde{x}$  (Cauchy utiliza

$\bar{x}$  pero, dado que es la notación

habitual para el complejo con-

jugado de un número complejo,

hemos preferido cambiarla a  $\tilde{x}$ )

con  $\tilde{x} = X e^{p i}$ , las formulas an-

teriores implican  $\int_{-\pi}^{\pi} f(\tilde{x}) d p =$

$\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{\tilde{x}}\right) d p = 2\pi a_0 = 2\pi f(0)$ .

Cauchy, afirma que esto se pue-

de *fácilmente* extender a funcio-

nes finitas y continuas distintas

de los polinomios. Sigue dicien-

do que como uno tiene en *ge-*

*neral* que  $\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial X} = \frac{1}{iX} \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial p}$ , es-

to es, Cauchy asume tácitamen-

te las condiciones de Cauchy-

Riemann,<sup>1</sup> la integración de am-

bos lados de la ecuación, con res-

pecto a  $X$  y a  $p$ ,<sup>2</sup> le conducen

a  $\int_{-\pi}^{\pi} f(\tilde{x}) d p = 2\pi f(0)$ . Aho-

ra, asumiendo que las derivadas

$f'(\tilde{x}), f''(\tilde{x}), \dots, f^{(n)}(\tilde{x})$  son fi-

nititas y continuas para  $-\pi \leq p \leq$

$\pi$  y  $|\tilde{x}| \leq X$ , reiterando integra-

ciones por partes, concluye que

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\tilde{x})}{\tilde{x}^n} d p = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(\tilde{x})}{\tilde{x}^{n-1}} d p =$

$\dots = \frac{1}{n!} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(\tilde{x}) d p$  y, por

tanto, que  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\tilde{x})}{\tilde{x}^n} d p =$

$\frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ . En particular, obser-

va que si  $f(0) = 0$  entonces

$\int_{-\pi}^{\pi} f(\tilde{x}) d p = 0$ . Cauchy retoma su objetivo inicial, la obtención *fácilmente*, según afirma él, de

las series de potencias. Reemplaza  $f(\tilde{x})$  por  $\tilde{x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x}$ , donde  $|x| < X$  y  $x \neq \tilde{x}$ , en la ecuación

## ET SUR LE CALCUL DES LIMITES.

61

$x$  étant différent de  $\bar{x}$ , et le module de  $x$  inférieur à  $X$ , on en conclura

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x} f(\bar{x})}{\bar{x} - x} d p = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x} f(x)}{\bar{x} - x} d p = f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 + \frac{x}{\bar{x}} + \frac{x^2}{\bar{x}^2} + \dots \right) d p = 2\pi f(x),$$

et par suite on retrouvera la formule connue

$$(6) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x} f(\bar{x})}{\bar{x} - x} d p.$$

L'équation (6) suppose, comme les équations (3) et (5), que la fonction de  $X$  et de  $p$  représentée par  $f(\bar{x})$  reste finie et continue pour la valeur attribuée à  $X$  et pour des valeurs plus petites.

Il suit encore de la formule (6) que, dans le développement de  $f(x)$  suivant les puissances ascendantes de  $x$ , le terme général sera

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n}{\bar{x}^n} f(\bar{x}) d p = \frac{x^n}{1.2.3. \dots n} f^{(n)}(0).$$

Donc, lorsque la fonction  $f(x)$  sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $x$ , on aura

$$(8) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \dots$$

conformément au théorème de Maclaurin.

### Párrafos de Cauchy

Mémoire sur mécanique céleste et sur un nouveau calcul ... (1831)

<sup>1</sup>En coordenadas polares, las condiciones de Cauchy-Riemann son  $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$  y  $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$ , que son equivalentes a  $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{i r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$ . Aquí tenemos  $X = r$  y  $p = \theta$ .

<sup>2</sup>La integración de la condición de Cauchy-Riemann en polares a  $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{i r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$  en un disco de radio  $R$  conduce, por un lado, a la integral del término de la izquierda,  $\int_0^R d r \int_0^{2\pi} d \theta \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = \int_0^{2\pi} (f(R, \theta) - f(0, \theta)) d \theta = \int_0^{2\pi} f(z) d \theta - 2\pi f(0)$  y, por otro lado, al integrar el lado izquierdo, a  $\int_0^R d r \frac{1}{i r} \int_0^{2\pi} d \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} = \int_0^R d r \frac{1}{i r} (f(r, 2\pi) - f(r, 0)) = 0$ . Luego  $\int_0^{2\pi} f(z) d \theta = 2\pi f(0)$ .

$\int_{-\pi}^{\pi} f(\tilde{x}) d p = 0$ .<sup>3</sup> y desarrolla  $\frac{\tilde{x}}{\tilde{x}-x}$  como una serie geométrica convergente, para así escribir

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{x}f(\tilde{x})}{\tilde{x}-x} d p &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{x}f(x)}{\tilde{x}-x} d p = f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{x}{\tilde{x}} + \frac{x^2}{\tilde{x}^2} + \dots\right) d p \\ &= 2\pi f(x), \end{aligned}$$

y, por ende, llega a la *fórmula conocida*<sup>4</sup> siguiente

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{x}f(\tilde{x})}{\tilde{x}-x} d p \quad (\tilde{x} = X e^{i p}).$$

Esta es la forma en que Cauchy encontró por primera vez su afamada fórmula integral, que nosotros escribiríamos como  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d \zeta$ , donde  $C$  es una circunferencia recorrida una vez en sentido antihorario. Cuando hablemos de las series de Taylor contaremos como continua Cauchy estas ideas.

### §III.4. Teorema de Liouville



UNA consecuencia importante de la fórmula integral de Cauchy y, por tanto, del Teorema de Cauchy, es el Teorema de Liouville. Este resultado nos muestra claramente lo demandante que es ser holomorfa, ya que si solicitas a una función entera un crecimiento acotado en el infinito, te quedas con una única posibilidad, tu función será constante. Corolarios de este resultado de Liouville son, entre otros, los siguientes: si el módulo de tu función no se anula nunca, entonces la función misma es constante, o que si la parte real (o la parte imaginaria) es no negativa la función es necesariamente constante. También el Teorema de Liouville permite una demostración sencilla (analítica, que no algebraica), cómo veremos en un momento, del Teorema Fundamental del Álgebra.

**III.4.1. El teorema** Para la demostración del teorema de Liouville necesitamos establecer ciertas acotaciones de la fórmula integral de Cauchy.

#### Desigualdades de Cauchy para las derivadas

Sea  $f(z)$  es una función holomorfa en una región  $\mathcal{A}$  y  $z_0 \in \mathcal{A}$ . Dado el cierre del disco  $\overline{D(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset \mathcal{A}$  llamamos  $M = \max_{z \in \overline{D(z_0, r)}} |f(z)|$  al

máximo valor que alcanza el módulo de la función  $|f(z)|$  en el disco en consideración. Entonces, se verifican las siguientes acotaciones para el módulo de la derivada  $k$ -ésima,  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , en el punto  $z_0$ :

$$(14) \quad |f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} M.$$

<sup>3</sup>Esto es,  $\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{x} \frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x} d p = 0$ .

<sup>4</sup>Se refiere a un resultado suyo anterior, de 1822, para el disco  $\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left( \frac{f(e^{p i})}{1-a e^{-p i}} + \frac{f(e^{-p i})}{1-a e^{p i}} \right) d p = \pi f(a)$ ,  $0 < a < 1$ .



DEMOSTRACIÓN. Consideramos el arco  $\gamma$  que recorre una vez en sentido antihorario la frontera del disco  $\partial D(z_0, r)$ . Dado que  $D(z_0, r) \subset \mathcal{A}$ , el arco  $\gamma$  es homótopo a un punto en  $\mathcal{A}$ . Por ello, las fórmulas integrales de Cauchy para las derivadas nos proveen con la ecuación  $f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$ . Por ende, podemos escribir

$$|f^{(k)}(z_0)| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{k+1}} |dz| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{M 2\pi r}{r^{k+1}}.$$

□

### Teorema de Liouville

La únicas funciones  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  enteras y acotadas son las funciones constantes.



DEMOSTRACIÓN. Como  $f(z)$  está acotada sabemos que existe un número positivo  $M$  tal que  $|f(z)| < M$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ . Podemos aplicar para todo punto  $z_0$  las desigualdades de Cauchy (14) para la primera derivada y obtener, para cualquier disco centrado en ese punto y de radio  $r > 0$ , que  $|f'(z)| < \frac{M}{r}$ . Es decir que para todo  $\epsilon > 0$ , aunque sea muy pequeño, tendremos que  $|f'(z)| < \epsilon$ . Por ello  $f'(z) = 0$ , y en cada componente conexa la función tomara un valor constante. Como  $\mathbb{C}$  es conexo encontramos que  $f(z)$  es constante en el plano complejo. □



**Joseph Liouville**  
(1809-1882)

**III.4.2. La historia del principio general de Liouville** Corría el verano de 1844, cuando el matemático francés Joseph Liouville se planteó el siguiente objetivo: “Dada la expresión más general de toda función periódica, a saber  $\sum_{i=0}^{\infty} A_i \cos i\pi x + B_i \sin i\pi x$ . Determinar para la misma las condiciones más generales para que ella posea un segundo período.” Fue Liouville el primero en estudiar las funciones elípticas como funciones doblemente periódicas sin recurrir a las funciones inversas de las funciones elípticas. El 9 de diciembre de 1844 presentó, en *l'Académie des Sciences*, las líneas maestras de la teoría. Lo hace como un comentario a la ponencia de Chasles sobre funciones elípticas y secciones cónicas. Liouville invitó a Chasles a extender sus consideraciones a integrales hiperelípticas y, en particular, enunció un “*principe général*” que, cómo dice el propio Liouville, “*dota al estudio de las funciones elípticas de un carácter de unicidad y simplicidad muy particular*”. Esto es, enuncia el Teorema de Liouville para funciones doblemente periódicas: “*Sea  $z$  una variable compleja bien determinada, yo me referiré a*



*una función que, para cada valor de  $x + iy$  y de  $z$  toma un único valor, que sigue siendo el mismo, cuando  $x$  e  $y$  vuelven a ser el mismo. Si una función de este tipo es doblemente periódica, y si reconocemos que nunca es infinita, por este hecho exclusivamente, podemos afirmar para ella que se reduce a una simple constante.*” Todos esto se recoge en los *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* (1844) **19** 1261-63. En la misma sesión Liouville da la idea de caracterizar una función por sus ceros y sus polos. Cauchy, que asistía a la presentación, a pesar de no estar familiarizado con la teoría de las funciones elípticas, inmediatamente reconoció el carácter general del resultado de Liouville y dio, a lo largo de ese año, nada menos que cinco demostraciones del mismo, que como hemos visto son una consecuencia de las desigualdades de Cauchy. Para ello, Cauchy, lo deduce de las fórmulas que el mismo obtuvo para el cálculo de residuos.

A pesar de que Cauchy hubiera estado muy cerca del resultado, fue Liouville quien lo descubrió. Cauchy fue reacio a otorgar a Liouville el hallazgo del principio general, ya que, al verlo reconoció su importancia, y al mismo tiempo que lo había tenido al alcance de las manos bastantes veces. Cauchy, finaliza la discusión diciendo que “no recordaba haber publicado ninguna formula, ni en el caso general o en un caso particular”, sin embargo, más tarde añadiría “tal formula existe en una de mis memorias”. La discusión fue retomada en 1851, esta vez estaba involucrado un antiguo estudiante de Liouville, Charles Hermite, y a M. Cauchy de nuevo. Ese mismo año, para zanjar el tema, Liouville decide impartir lecciones sobre la teoría de funciones doblemente periódicas en el *Collège de France*.

Liouville nunca publicó la demostración de su teorema, sin embargo si lo explicaba en lecciones privadas. Cuando los matemáticos alemanes Borchardt y Joachimstahl visitan París en 1847 asisten a uno de estas serie de lecciones privadas de Liouville. A Borchardt, como editor del la revista *Crelle*, le fue sencillo publicar, con el permiso de Liouville, estas lecciones en 1880. A parte de una demostración muy esquemática y basada en series de Fourier, se han encontrado en los cuadernos personales de Liouville hasta dos demostraciones más.

**III.4.3. Teorema Fundamental del Álgebra** Dado un polinomio con coeficientes reales sabemos que no siempre existen raíces para el mismo. Por ejemplo, el polinomio  $p(x) = x^2 + 1$ , no se anula nunca para  $x \in \mathbb{R}$ . De hecho un polinomio real de grado  $n$  puede tener desde ninguna raíz a  $n$  raíces. La situación es radicalmente diferente en el contexto de los números complejos, como sabemos el polinomio  $p(z) = z^2 + 1$  tiene dos posibles raíces  $\{i, -i\}$ . Ese es el contenido del Teorema Fundamental del Álgebra.

*Remarques de M. LIOUVILLE.*

« La communication intéressante de M. Chasles est relative aux seules fonctions elliptiques. Il serait bien à désirer que M. Chasles pût étendre ses ingénieuses considérations géométriques aux transcendentes d'un ordre plus élevé, et d'abord aux fonctions abéliennes de première classe, qui proviennent d'intégrales relatives à un radical carré portant sur un polynôme du cinquième ou du sixième degré. Ces fonctions se présentent dans un grand nombre de problèmes. On les rencontre, par exemple, dans l'équation de la ligne géodésique (la ligne la plus courte) sur un ellipsoïde à trois axes inégaux, et dans l'expression d'un arc quelconque de cette ligne. Dès lors, à l'aide d'un célèbre théorème d'Abel, on peut conclure pour certaines combinaisons de pareils arcs, des théorèmes analogues à ceux que l'on connaît pour les arcs d'ellipse. Mais une discussion géométrique détaillée

167..

» Puisqu'il vient d'être question de fonctions elliptiques, je profiterai de l'occasion pour donner l'énoncé d'un principe général qui me paraît imprimer à l'étude de ces fonctions un caractère d'unité et de simplicité tout particulier. Soient  $z$  une variable quelconque, réelle ou imaginaire, et  $\psi(z)$  une fonction de  $z$  bien déterminée, je veux dire une fonction qui, pour chaque valeur  $x + y\sqrt{-1}$  de  $z$ , prenne une valeur unique toujours la même, lorsque  $x$  et  $y$  redeviennent les mêmes. Si une telle fonction est doublement périodique, et si l'on reconnaît qu'elle n'est jamais infinie, on pourra affirmer par cela seul qu'elle se réduit à une simple constante.

**Párrafos de Liouville**

*Comptes rendus* (1844) **19** 1261-63

### Teorema Fundamental del Álgebra. I

Un polinomio con coeficientes complejos de grado  $n > 0$  tiene al menos una raíz compleja.



DEMOSTRACIÓN. Si el polinomio  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ ,  $\deg p(z) = n$  no tiene raíces complejas la función  $f(z) := \frac{1}{p(z)}$  es entera. Ahora bien, como  $p(z) - a_{n-1}z^{n-1} - \dots - a_0 = a_n z^n$  recordando la desigualdad triangular tendremos que

$$|p(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0|.$$

Para  $|z| > 1$ , se deberá cumplir que  $|a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| \leq na|z|^{n-1}$ ,  $a := \max(|a_{n-1}|, \dots, |a_0|)$ , y así deducimos que

$$|p(z)| \geq |a_n||z|^n - na|z|^{n-1}.$$

Teniendo en cuenta que  $|a_n||z|^n - na|z|^{n-1} = (|a_n||z| - na)|z|^{n-1} \geq 0$  cuando  $|z| \geq \frac{na}{|a_n|}$ , concluimos que  $|f(z)| \leq \frac{1}{|a_n||z|^n - na|z|^{n-1}}$  para  $|z| \geq \max(1, \frac{na}{|a_n|})$ , así que  $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$ , y por ende existe algún  $M > 0$  tal que  $|f(z)| < M$  en todo el plano complejo. Por tanto, del Teorema de Liouville, concluimos que  $f(z)$  es constante; esto es,  $p(z)$  es constante y  $n = 0$ . Obtenemos pues que para cualquier polinomio de grado mayor o igual que 1 debemos tener algún cero complejo.  $\square$

Esta demostración, que se apoya en el teorema de Liouville, fue indicada por primera vez por Herr Weierstrass en sus lecciones sobre funciones analíticas, *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen*, impartidas en la universidad de Berlín en 1878 (según transcripción de Adolf Hurwitz).

### Teorema Fundamental del Álgebra. II

Un polinomio con coeficientes complejos de grado  $n$  tiene  $n$ , contando multiplicidades, raíces complejas.

DEMOSTRACIÓN. Dado el polinomio  $p(z)$ , la división euclídeana por  $z - z_0$  da  $p(z) = q(z)(z - z_0) + c$ , donde  $c \in \mathbb{C}$  es una constante. Si  $z_0$  es una raíz de  $p(z)$  tendremos que  $c = 0$ . Pero  $q(z)$  es un polinomio de grado  $n - 1$ , y por ello debe tener una raíz compleja, digamos  $z_1$ . Repetimos el proceso  $n$  veces y obtenemos  $n$  raíces.  $\square$

### Teorema Fundamental del Álgebra. III. Versión en $\mathbb{R}$

Un polinomio con coeficientes reales se factoriza en un producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $r$  una raíz de  $p(z)$ . Si es real tenemos  $p(z) = (z-r)q(z)$  donde  $q(z) \in \mathbb{R}[z]$ , y repetimos el argumento. Si  $r \notin \mathbb{R}$  entonces cómo  $0 = \overline{p(r)} = \overline{p(\bar{r})} = p(\bar{r})$  tenemos que  $\bar{r}$  es otra raíz. Así tendremos  $p(z) = (z-r)(z-\bar{r})q(z)$ , pero  $(z-r)(z-\bar{r}) = z^2 - 2(\operatorname{Re} r)z + |r|^2$  es un polinomio cuadrático de coeficientes reales.  $\square$




**Notas históricas sobre el teorema Fundamental del Álgebra** Ya en 1608 Peter Roth publicaba su *Arithmetica Philosophica* donde recogía su convicción sobre la existencia de  $n$  soluciones para una ecuación polinómica de grado  $n$ . Veinte años después, en 1649, Albert Girard afirma lo mismo en *L'invention nouvelle en l'Algebre*. Ya en 1702, Leibniz va en sentido contrario y dice que  $x^4 + a^4$  no podía ser factorizado en términos de polinomios lineales y cuadráticos, y más tarde Nicolas Bernoulli, sobrino de Johann, dijo lo mismo de  $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$ . Sin embargo, Euler le escribe a Nicolas, sobrino de su maestro, y le muestra que

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4 &= (x^2 - (2 + \alpha)x + 1 + \sqrt{7} + \alpha)(x^2 - (2 - \alpha)x + 1 + \sqrt{7} - \alpha), \\ x^4 + a^4 &= (x^2 + a\sqrt{2}x + a^2)(x^2 - a\sqrt{2}x + a^2), \end{aligned}$$

donde  $\alpha := \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}$ . Diferentes intentos para demostrar el teorema Fundamental del Álgebra fueron abordados a lo largo del S XVIII, mencionamos algunas pruebas debidas a d'Alambert (1746), Euler (1749), de Foncenex (1759), Lagrange (1772), Laplace (1795), Wood (1798) y Gauss (1799). Todas ellas incompletas, las de Euler, de Foncenex, Lagrange y Laplace asumían la existencia de una solución y lo que demostraban es que se podía escribir como una cantidad imaginaria. La de d'Alambert sufría el mismo problema y además asumía un resultado demostrado más tarde por Puiseux. La de Wood, tenía un problema algebraico. Gauss, que criticaba las anteriores (d'Alambert, Euler, Lagrange y Laplace), también tiene un grave problema de carácter topológico. Gauss asumía como obvio que una curva algebraica plana no podía penetrar en un disco sin abandonarlo. Eso fue probado mucho más tarde, en 1920, por Alexander Ostrowski. Como dice Stephen Smale: "*I wish to point out what an immense gap Gauss' proof contained. It is a subtle point even today that a real algebraic plane curve cannot enter a disk without leaving. In fact even though Gauss redid this proof 50 years later, the gap remained. It was not until 1920 that Gauss' proof was completed. In the reference Gauss, A. Ostrowski has a paper which does this and gives an excellent discussion of the problem as well*)" De hecho, Gauss realizó tres pruebas más del Teorema. La primera demostración completa conocida se debe a Argand, que la publicó en 1806, revisada en 1813, en el mismo texto donde introduce la interpretación de los números complejos como puntos del plano. El curso de Cauchy *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique* (1821) reproducía la prueba de Argand por primera vez en un manual docente, aunque no rendía crédito a Argand. La segunda y tercera pruebas de Gauss son ambas de 1816, e ignoran la demostración algebraica de Laplace recogida en sus *Leçons* en la *École Normale*. La cuarta prueba de Gauss data de 1849, en donde trabaja con polinomios con coeficientes complejos, cosa que por cierto ya había hecho Argand en 1806 y 1813. En *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés* (1798), Lagrange expone con profundidad las diferentes aproximaciones por él conocidas al problema. Desde d'Alambert a Laplace, pero obvia a Gauss. Lagrange considera la demostración de Laplace, de carácter algebraico y como hemos comentado incompleta, una obra maestra.

La demostración de Argand se basa, implícitamente, en un argumento del mínimo y una desigualdad, que en términos modernos sería que para un polinomio no constante  $p(z)$  y cualquier complejo  $z \in \mathbb{C}$  existe otro complejo  $z'$  tal que  $|p(z')| < |p(z)|$ . Argand afirma que dado un polinomio  $Y(X) = X^m + aX^{m-1} + bX^{m-2} + \dots + fX + g$ , donde  $a, b, c, \dots, f, g$  son números complejos se puede factorizar en factores de grado 1. Él asume que  $X = p$  y  $X = p + \rho h$  donde  $h$  es arbitrario y  $\rho$  es una raíz de la unidad, y considera los valores correspondientes  $Y(p)$  y  $Y(p + \rho h) = Y(p) + h\rho Q + h^2\rho^2 R + h^3\rho^3 S + \dots$ , con  $Q, R, S, \dots$  cantidades conocidas obtenidas del desarrollo  $(p + \rho h)^k$ . Suponiendo  $h$  tendiendo a cero, le queda, en primer orden de  $h$ , que  $Y(p + \rho h) = Y(p) + h\rho Q$ . Usando la interpretación geométrica de los números complejos, que tan bien conocía Argand, se da cuenta de que habrá una raíz  $\rho$  tal que  $|Y(p + \rho h)| < |Y(p)|$ . Argand itera este proceso, e implícitamente acepta un principio del mínimo, para así concluir que se tendrá que alcanzar un  $X$  tal que  $Y(X) = 0$ .

### §III.5. Fórmula de Cauchy–Green

NTERIORMENTE, en la §2 de este tema, hemos discutido como el teorema de Green permite, junto con las ecuaciones de Cauchy–Riemann deducir el teorema de Cauchy para arcos de Jordan y derivadas parciales continuas. Posteriormente hemos tomado otros caminos y discutido las demostraciones a la Goursat y una aproximación homotópica al problema. Vamos a retomarlo ahora. Fijémonos en que el teorema de Green se puede reformular, ver la demostración de Teorema de Cauchy en su versión simple, como sigue.

#### Teorema de Green. II. Versión compleja simple


Sean una región  $R \subset \mathbb{R}^2$  con una frontera  $\gamma$  que es un arco suave a trozos, orientado, recorrido en sentido antihorario y simple, y una función  $f(z)$  que tiene derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  continua en  $R$ . Entonces, se tiene la fórmula

$$(14) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = 2i \iint_R \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x, y) dx dy.$$

Aquí  $dx dy$  es el elemento de área, que también se puede escribir como  $dA(z) := dx \wedge dy = \frac{1}{4i} d(z + \bar{z}) \wedge d(z - \bar{z}) = \frac{1}{4i} dz \wedge d\bar{z}$ ; esto es,  $dA(z) := dx \wedge dy = -\frac{1}{2i} dz \wedge d\bar{z}$  y el Teorema de Green se puede escribir como

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \iint_R \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

Que, cuando estamos con funciones holomorfas, i.e.,  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ , se reduce al teorema de Cauchy  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

**Ejemplo:** si  $f(z) = \bar{z}$ , que no es holomorfa (se dice antiholomorfa ya que cumple  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ) tendremos  $\int_{\gamma} \bar{z} dz = 2i A(R)$ , siendo  $A(R)$  el área de la región encerrada por el arco  $\gamma$ . 

Análogamente, existe una versión tipo fórmula de Cauchy, pero en este caso generalizada.

### Fórmula de Cauchy–Green. I. Versión simple

Sean una región  $R \subset \mathbb{R}^2$  con una frontera  $\gamma$  que es un arco suave a trozos, orientado, recorrido en sentido antihorario y simple, una función  $f(z)$  que tiene derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  continua en  $R$  y un punto  $z_0 \in R \setminus \gamma^*$ . Entonces, se tiene la fórmula

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \iint_R \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) dz \wedge d\bar{z}.$$



DEMOSTRACIÓN. Sea  $\delta > 0$  tal que  $D(z_0, \delta) \subset R$  y consideremos la región  $R_\delta := R \setminus D(z_0, \delta)$  y su frontera  $\gamma - \gamma_\delta$ , donde  $\gamma_\delta$  es la circunferencia de radio  $\delta$  centrada en  $z_0$  que se recorre en sentido antihorario una vez. Luego aplicando la fórmula de Green (14) a la función  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  tendremos para el módulo del segundo término del lado derecho que

$$(14) \quad \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2i \iint_{R_\delta} \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x, y) dx dy,$$

ya que  $\frac{1}{z - z_0}$  no depende de  $\bar{z}$ . Ahora calculamos

$$\int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \delta e^{i\theta})}{\delta e^{i\theta}} i \delta e^{i\theta} d\theta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 2\pi i f(z_0),$$

en donde, para hacer el límite, hemos recordado que la función  $f(z)$  es continua y que podemos intercambiar límites e integrales, siempre que los dominios de integración sean acotadas, como es el caso. Por otro lado,

$$\iint_{R_\delta} \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x, y) dx dy = \iint_R \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x, y) dx dy - \iint_{D(z_0, \delta)} \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x, y) dx dy.$$

Pero, integrando en polares, tendremos

$$\left| \iint_{D(z_0, \delta)} \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x, y) dx dy \right| = \left| \int_0^\delta r dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{r e^{i\theta}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \right| \leq \int_0^\delta dr \int_0^{2\pi} d\theta \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(r, \theta) \right|,$$

y como  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  es continua en una región acotada, se tendrá  $\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq M < \infty$ ; por tanto,

$$\left| \iint_{D(z_0, \delta)} \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x, y) dx dy \right| \leq 2\pi M \delta$$

y  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{R_\delta} \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x, y) dx dy = \iint_R \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x, y) dx dy$ . Así pues, el límite  $\delta \rightarrow 0$  en (14) conduce a  $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) = 2i \iint_R \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x, y) dx dy$ .  $\square$



**Comentarios históricos** Esta fórmula integral generalizada no era conocida en la teoría clásica de las funciones de una variable compleja. Aparece que aparece por primera vez en 1912 en un artículo del matemático rumano de Dimitrie Pompeiu *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe et sur certaines équations intégrales*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **35** (1912) 277–281. Posteriormente, en la década de 1950 de la mano de Dolbeault y de Grothendieck, se convirtió en un habitual de la teoría de las funciones de varias variables complejas.

### §III.6. ¿Teorema de Green? ¿Teorema de Gauss? ¿Teorema de Stokes?



**H**EMOS visto en este capítulo como el Teorema de Green implica el Teorema de Cauchy, y como cada extensión homotópica o homológica (que veremos en la siguiente sección) se aplica a ambos teoremas y que si hay una fórmula de Cauchy, también la hay de Cauchy–Green. Pero, ¿fue Green quien descubrió el teorema de Green? La respuesta es no. Ocurre exactamente lo mismo con el Teorema de Stokes, y con el teorema de la divergencia de Gauss. No fueron ellos sus descubridores.

**III.6.1. Mr. Green** Pero antes de ello, contemos algo sobre la romántica lucha de Green por la Ciencia. George Green (1793-1841) era un científico inglés, autodidacta, que trabajaba, desde los nueve años, toda la jornada en el molino de trigo que construyó su padre. Sus numerosas visitas a la biblioteca le permitieron cimentar una solida formación matemática y, en 1828, publica *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism* (de forma privada, sólo se imprimieron 100 copias) sobre la aplicación del cálculo matemático a la electricidad y el magnetismo, que tuvo una difusión contenida. Finalmente, a los 40 años, Green ingresa como estudiante en la Universidad de Cambridge, pero muere cuatro años después de su graduación, siendo ya *fellow* de la universidad. William Thompson (Lord Kelvin) en 1846 rescata una copia del ensayo de Green y, dada su relevancia, encarga una reimpresión.

Puede pensarse que Green se adelanto a Cauchy pero haríamos mal. Debemos recordar que Cauchy publicó su famosa *Mémoire sur les intrégales définies*, donde aparece por primera vez el Teorema de Cauchy, tres años antes, en 1825. Por tanto, la demostración de Cauchy del Teorema de Cauchy, no podía basarse en el resultado de Green, de hecho, Cauchy usaba argumentos variacionales. Pero no sólo eso, cómo veremos a continuación, fue casi al contrario.

#### III.6.2. El teorema de la divergencia

Los tres teoremas mencionados, excepcionalmente importantes para la Física, relacionan integrales en  $k$  dimensiones con integrales en una dimensión menor, en  $k - 1$ . Eso es, justo lo que hace el Teorema Fundamental del Cálculo, que relaciona una integral para  $k = 1$  con otra para  $k = 0$ . Luego no es de extrañar que el origen de estos tres teoremas se remonte a finales del S XVII. En la década de 1790 Laplace y Lagrange usaban el teorema fundamental del cálculo para reducir integrales multidimensionales. Los teoremas, tal como los conocemos hoy, aparecen a mediados del S XIX. El Teorema de la divergencia, llamado por muchos de Gauss, es quizás el más relevante



4.

Quum volumina partium cylindri a plano nostro usque ad puncta  $P', P'', P'''$  etc resp. sint  $= d\Sigma.(x' - \alpha), d\Sigma.(x'' - \alpha), d\Sigma.(x''' - \alpha)$  etc., pars voluminis corporis ea, quae intra cylindrum sita est, erit

$$= -x'd\Sigma + x''d\Sigma - x''d\Sigma + \text{etc.}$$

$$= ds'.x' \cos QX' + ds''.x'' \cos QX'' + ds'''.x''' \cos QX''' + \text{etc.}$$

unde summando pro omnibus  $d\Sigma$  obtinemus

#### THEOREMA SECUNDUM.

*Volumen integrum corporis exprimitur per integrale  $\int ds.x \cos QX$  per totam superficiem extensum.*

Manifesto idem volumen etiam per  $\int ds.y \cos QY$  vel per  $\int ds.z \cos QZ$  exprimere licebit.



#### Párrafo de Gauss

Commentationes societatis regiae scientiarum  
Gottingensis recentiores II (1813)  
*Werke 5, 1-22, 1813*

de todos. Versiones preliminares del teorema de la divergencia aparece en tres situaciones particulares en el trabajo de Gauss titulado *Teoria Attractionis Corporum Sphaeroidicorum Ellipticorum Homogeneorum Methodo nova tractat*.

— 131 —

Si l'on désigne par  $P$  et  $Q$  ce que deviennent  $p$  et  $q$  à la superficie du volume par  $\mu$  et  $\lambda$  les angles que la normale à la surface, prolongée du dedans au dehors du sphéroïde, fait avec les demi-axes des  $x$  et des  $y$  positifs, on aura aussi:

$$\int \frac{dp}{dx} \omega = \int P \cos. \lambda s$$

$$\int \frac{dq}{dy} \omega = \int Q \cos. \mu s,$$

et par suite

$$(1) \quad \int \left( \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} \right) \omega = \int (P \cos. \lambda + Q \cos. \mu + R \cos. \nu) s.$$

L'intégrale du second membre de cette équation nè doit être étendue qu'aux points de la surface.

#### Párrafo de Ostrogradski

Memoires de l'Académie de St. Petersburg 1 (1831) 123-138.

no publicó ni este ni otros enviados por Mikhail, pero fueron rescatados del olvido en 1963 por A. P. Yushkevich cuando encontró varios trabajos de Ostrogradski, escritos a mano, en los archivos en París de la *Académie*. Dos contenían el teorema de la divergencia, el primero ya lo hemos citado y el segundo se titulaba *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans l'intérieur des corps solides*, de 1827, y daba otra formulación del teorema sin prueba. El teorema de la divergencia fue enunciado y probado por Ostrogradski en su primera contribución. Ostrogradski considera en este trabajo una superficie con elemento de área  $\varepsilon$  que encierra un sólido con elemento de volumen  $\omega$ , y deduce para tres funciones diferenciales  $p, q, r$  que  $\int \left( a \frac{\partial p}{\partial x} + b \frac{\partial q}{\partial y} + c \frac{\partial r}{\partial z} \right) \omega = \int (ap \cos \alpha + bq \cos \beta + cr \cos \gamma) \varepsilon$ . Aquí  $a, b, c$  son constantes,  $\alpha, \beta, \gamma$  son ángulos que tienen que ver con la normal a la superficie donde se integra el término de la derecha de la igualdad. Los tres resultados previos de Gauss, son casos particulares de este,

Él es capaz de expresar volúmenes de cuerpos tridimensionales en términos de integrales de superficie, lo que es un ejemplo de su teorema de la divergencia. Gauss volvió al tema en 1833 y 1839, pero para entonces el matemático ucranio Mikhail Vasilievich Ostrogradski, que estaba en París al finalizar 1820, presentó el 13 de febrero de 1826 a la *Académie des Sciences* un trabajo titulado *Démonstration d'un théorème du calcul intégral*. La *Académie*

On trouvera de même

$$\iiint \frac{dP_1}{dy} dx dy dz = \int \varepsilon P_1 ds, \quad \iiint \frac{dP_2}{dx} dx dy dz = \int \alpha P_2 ds,$$

en appelant  $\varepsilon$  et  $\alpha$  les cosinus des angles que fait la partie extérieure de la normale en un point quelconque de la surface, avec les axes des  $y$  et des  $x$  positives. Il en résultera donc

$$\int X dm = \int (\gamma P_1 + \varepsilon P_2 + \alpha P_3) ds;$$

et en opérant de la même manière sur les deux dernières équations (3), on en conclura

$$\int Y dm = \int (\gamma Q_1 + \varepsilon Q_2 + \alpha Q_3) ds,$$

$$\int Z dm = \int (\gamma R_1 + \varepsilon R_2 + \alpha R_3) ds.$$

#### Párrafo de Poisson

Memoires de l'Academie Royale des Sciences de l'Institut de France VIII (1829) 357-571



donde siempre  $a = b = c$  y  $p = 1, q = r = 0$  para el primer caso de Gauss,  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial z} = 0$  para el segundo, y  $p = x, q = r = 0$  para el tercero. Posteriormente, Ostrogradski recolecta estos resultados en el trabajo titulado *Note sur la théorie de la Chaleur* que envía a publicar en 1828, *Memoires de l'Académie de St. Petersburg* **1** (1831) 123-138.

Dos años más tarde, Siméon Denis Poisson presenta a la misma *Académie des Sciences* el 14 de abril 1828 un trabajo titulado *Memoire sur l'Equilibre et le Mouvement des Corps Elastiques* (*Memoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, **VIII** (1829) 357-571) en donde se puede encontrar el mismo resultado que Ostrogradski, aunque Poisson no reclama la autoridad sobre el mismo pero tampoco cita al autor ucranio. Poisson escribía para el elemento diferencial de masa  $dm = \rho dx dy dz$  y  $ds$  un elemento diferencial de la superficie  $\int X dm = \int (\gamma P_1 + \beta P_2 + \alpha P_3) ds$ , donde  $X = \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} + \frac{\partial P_3}{\partial z}$ . También Frederic Sarrus, en *Memoire sur les oscillations des corps flottans* (*Annales de mathematiques pures et appliquees* (Nismes) **XIX** (1828) 185-211) llega, de un modo menos claro, a resultados parecidos.

Finalmente, George Green, en el ensayo ya mencionado, escribe en 1828 lo que después se ha dado en llamar la primera identidad de Green

$$\int u \delta v dy dz + \int u \frac{dv}{dw} d\sigma = \int v \delta u dy dz + \int v \frac{du}{dw} d\sigma.$$

Aquí  $\delta$  es el laplaciano  $\Delta$ ,  $u, v$  son funciones de tres variables en un cuerpo sólido, de cualquier forma,  $\frac{d}{dw}$  denota la derivada normal, la integral de la izquierda es sobre la región sólida y la de la derecha sobre la superficie que la limita. Green demostró este teorema usando las mismas ideas que Ostrogradski. De hecho, aunque la demostración de Ostrogradski es general, él la aplica en su trabajo a casos en que

$$p = v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad q = v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad r = v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z},$$

que transforma el teorema de la divergencia de Ostrogradski en la primer identidad de Green. Otra opción que reduce el teorema de la divergencia a la primera identidad es

$$p = u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad r = u \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Let  $U$  and  $V$  be two continuous functions of the rectangular co-ordinates  $x, y, z$ , whose differential co-efficients do not become infinite at any point within a solid body of any form whatever; then will

$$\int dx dy dz U \delta V + \int d\sigma U \left( \frac{dV}{dw} \right) = \int dx dy dz V \delta U + \int d\sigma V \left( \frac{dU}{dw} \right);$$

the triple integrals extending over the whole interior of the body, and those relative to  $d\sigma$ , over its surface, of which  $d\sigma$  represents an element:  $dw$  being an infinitely small line perpendicular to the surface, and measured from this surface towards the interior of the body.

To prove this let us consider the triple integral

$$\int dx dy dz \left\{ \left( \frac{dV}{dx} \right) \left( \frac{dU}{dx} \right) + \left( \frac{dV}{dy} \right) \left( \frac{dU}{dy} \right) + \left( \frac{dV}{dz} \right) \left( \frac{dU}{dz} \right) \right\}.$$

#### Párrafo de Green

*An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism* (1828)

En cualquier caso, la primera identidad de Green es un caso particular del teorema de la divergencia de Ostrogradski. Además, Green no lo manifiesta, y sólo usa su resultado en la forma que lo enuncia.

Podemos concluir que Gauss dio con algo importante en 1813 pero no lo llegó a descubrir en toda su amplitud. Más de una década después aparecen los resultados Ostrogradski (1826) y Poisson (1828). Se acompañan con los resultados cercanos de Green (1828) y Sarrus (1828). Parece pues, que el mayor mérito del teorema de la divergencia se lo merece Ostrogradski. Por lo tanto en vez de teorema de Gauss deberíamos decir teorema de Ostrogradski, o como mucho, si se le quiere conceder mérito a Gauss, que lo tiene, teorema de Ostrogradski–Poisson–Gauss–Sarrus–Green, un poco largo ¿no? Mejor, teorema de la divergencia, y ya está. Por cierto, el tratado *Electricity and Magnetism* de James Clerk Maxwell atribuye a Ostrogradski el teorema de la divergencia. Aunque cita un artículo equivocado de Ostrogradski, del mismo volumen, pero donde no se trata el teorema de la divergencia.

Lorsque, la surface  $S$  étant plane,  $x, y$  se réduisent à deux coordonnées rectilignes, ou polaires, ou de toute autre nature, propres à déterminer la position d'un point dans le plan de la surface  $S$ , alors, en désignant par  $x, y$  deux fonctions continues des variables  $x, y$ , et supposant

$$L = x D_x y + y D_x x,$$

on a

$$(S) = \pm \iint (D_x x - D_x y) dx dy,$$

l'intégrale double s'étendant à tous les points de la surface  $S$ . Ajoutons que, si l'on nomme  $x, y$  deux longueurs mesurées, à partir d'un point quelconque  $P$  correspondant aux coordonnées  $x, y$ , sur les directions dans lesquelles il faudrait déplacer ce point pour faire croître positivement la seule coordonnée  $x$  ou  $y$ , on devra, dans la formule précédente, réduire le double signe au signe  $+$  ou au signe  $-$ , suivant que le mouvement de rotation de  $x$  en  $y$  sera ou ne sera pas de l'espèce du mouvement de rotation qu'offrirait un point mobile assujéti à tourner autour de l'aire  $S$  de manière à faire croître la variable  $x$ .

#### Párrafo de Cauchy

*Sur les intégrales qui s'étendent tous les points d'une courbe fermée*  
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences

23 (1846) 251-55

encontrado dicho resultado. Efectivamente, fue así y sorpresa, de nuevo Cauchy al ataque. En 1846, Cauchy publica *Sur les intégrales qui s'étendent tous les points d'une courbe fermée* en donde afirma que

$$\int \left( p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds = \pm \iint \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx dy,$$

III.6.3. ¿Quién descubrió el Teorema de Green? ¿Green o Cauchy? Acabamos de discutir cómo Green demostró su primera identidad, que es una consecuencia del teorema de la divergencia. Una reducción dimensional de tres dimensiones a dos conduce de la primera identidad de Green a lo que se conoce como teorema de Green. Sin embargo, no existe una sola mención en el trabajo de Green a lo que después ha devenido en llamarse como Teorema de Green. Así que Green no considero, al menos por escrito, el teorema de Green, el de dos dimensiones útil para el Teorema de Cauchy.

Entonces ¿a quien otorgar el mérito de descubrir el Teorema de Green? Siendo el el teorema de Green tan crucial en la teoría funciones de una variable compleja, deberíamos esperar que alguien, uno que trabajará en este ámbito, hubiera

en donde el signo  $\pm$  corresponde al sentido en que se recorre la curva. No hay demostración, aunque prometió que aparecería en su publicación privada *Exercices d'analyse et de physique mathématique*. Aún estamos esperando.

Riemann presentó en 1851 el teorema de Green en su tesis doctoral *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, de nuevo en relación a la variable compleja y lo demuestra como se suele hacer hoy en día. Esencialmente se utiliza el teorema fundamental del cálculo y se integra a lo largo

de líneas paralelas al eje  $x$ , entre los límites de la región, luego se hace lo mismo en  $y$ .

Por tanto, el teorema de Green se debería llamar de Cauchy–Riemann, pero ¡eso sería un lío! Ya tenemos las condiciones de Cauchy–Riemann. Y, además, Cauchy ya tiene demasiados teoremas en su lista, la historia en este caso ha sido injusta con Cauchy y Riemann, pero ha sido práctica y eficiente.

**III.6.4. ¿Teorema de Stokes o de Lord Kelvin?** Ya que hemos despojado a Gauss y a Green de dos teoremas muy importantes, hagamos lo mismo con Stokes. William Thompson, también conocido como Lord Kelvin, envió una carta a George Stokes el 2 de julio de 1850, en donde le comunica el teorema que después se llamará de Stokes. El teorema se publicó por primera vez en forma de problema de examen. Por varios años Stokes había sido el responsable del Smith's Prize de la Universidad de Cambridge. En 1854, cuatro años después de la carta de Lord Kelvin, apareció en dicho examen, como cuestión #8 lo siguiente:

*"If  $X, Y, Z$  be functions of the rectangular coordinates  $x, y, z$ ,  $dS$  be an element of any limited surface,  $l, m, n$  the cosines of the inclinations of the normal at  $dS$  to the axes,  $ds$  an element of the boundary line, shew that*

$$\iint \left\{ l \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + m \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + n \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \right\} dS = \int \left( X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right)$$

*... the single integral being taken all around the perimter of the surface."*

En 1861 Hermann Hankel da la primera prueba del teorema de Stokes en el trabajo titulado *Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten* (Dieterische Univ. Buchdruckerei, Göttingen), Hankel no da crédito a nadie por el teorema. Sólo se refiere a Riemann en relación al teorema de Green.



7.

Sind  $X$  und  $Y$  zwei in allen Punkten der über  $A$  ausgebreiteten Fläche  $T$  stetige Functionen von  $x, y$ , so ist das über alle Elemente  $dT$  dieser Fläche ausgedehnte Integral

$$\int \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} \right) dT = - \int (X \cos. \xi + Y \cos. \eta) ds,$$

wenn in jedem Punkte der Begrenzung die Neigung einer auf sie nach Innen gezogenen Normale gegen die  $x$ -Axe durch  $\xi$ , gegen die  $y$ -Axe durch  $\eta$  bezeichnet wird, und sich diese Integration auf sämtliche Elemente  $ds$  der Begrenzungslinie erstreckt.

Um das Integral  $\int \frac{dX}{dx} dT$  zu transformiren, zerlegen wir den von der Fläche  $T$  bedeckten



**Párrafo de Riemann**

*Werke, 3-48, 1851*

## §III.7. Homología



EMPEZAMOS este tema sobre integrales complejas hablando de cadenas y así los concluiremos. Hemos definido lo que entendemos por sumar arcos e invertirlos. Así mismo, hemos considerado arcos de Jordan y también arcos con autointersecciones. Para esa discusión el concepto de homotopía fue clave, ya que nos permitió formular el teorema de Cauchy y la fórmula de Cauchy en términos de homotopías e índices. En esta sección presentamos otro punto de vista sobre las cadenas, basado en la homología (del griego *homós*=similar y *lògos*=sentido) en vez de en homotopía. La homología tiende a crear objetos y estructuras algebraicas asociados a otros espacios, como pueden ser espacios topológicos.

**III.7.1. Homología de cadenas** Trabajamos con los mismos arcos suave a trozos que hemos usado en el desarrollo de este capítulo. Sin embargo, extendemos la noción de cadena, y no nos preocuparemos de que los arcos empalmen bien para considerar su suma, por ejemplo. Vamos a ser mucho más formales, ya que, como hemos visto, lo importante es la forma de los arcos y que regiones rodean, no sus parametrizaciones.

### Cadenas III

- i) Dados un conjunto de arcos suaves a trozos  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  en una región  $\mathcal{A}$  y un conjunto de enteros  $\{m_1, \dots, m_k\} \subset \mathbb{Z}$  consideramos la combinación lineal de ellos

$$\Gamma \equiv \sum_{j=1}^k m_j \gamma_j,$$

que llamaremos cadena.

- ii) Si  $\gamma_j^* = \gamma([a_j, b_j]) \subset \mathcal{A}$  denota el rango del arco  $j$ -ésimo escribiremos  $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \dots \cup \gamma_k^*$ .
- iii) Si  $f(z)$  es una función continua en  $\Gamma^*$  definimos

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \sum_{j=1}^k m_j \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

- iv) Dos cadenas,  $\Gamma = \sum_{j=1}^k m_j \gamma_j$  y  $\tilde{\Gamma} = \sum_{j=1}^k \tilde{m}_j \tilde{\gamma}_j$ , con  $\Gamma^*, \tilde{\Gamma}^* \subset \mathcal{A}$ , tales que  $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz$  para toda función  $f(z) \in C(\mathcal{A})$  se dicen cadenas equivalentes en  $\mathcal{A}$ .

Luego el conjunto de cadenas en la región  $\mathcal{A}$  formalmente es un grupo conmutativo generado libremente por los arcos suaves.

Obviamente dos cadenas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  se pueden combinar  $\Gamma = m_1 \Gamma_1 + m_2 \Gamma_2$ ,  $\{m_1, m_2\} \subset \mathbb{Z}$ . En este caso  $\Gamma = \Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*$  y, para una función continua  $f \in C(\Gamma^*)$  tenemos la integral  $\int_{\Gamma} f(z) dz = m_1 \int_{\Gamma_1} f(z) dz + m_2 \int_{\Gamma_2} f(z) dz$ .

El índice lo extendemos a cadenas cerradas como sigue.

**Índice de ciclos**

- i) Una cadena  $\Gamma = \sum_{j=1}^k m_j \gamma_j$ ,  $\{m_j\}_{j=1}^k \subset \mathbb{Z}$ , es una cadena cerrada o ciclo si los arcos  $\{\gamma_j\}_{j=1}^k$  son todos arcos suaves a trozos y cerrados.
- ii) Dado un ciclo  $\Gamma$  y  $z_0 \notin \Gamma^*$  definimos el índice

$$n(\Gamma, z_0) := \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{j=1}^k m_j n(\gamma_j, z_0).$$

- iii) El índice de un ciclo  $\Gamma$  es un entero,  $n(\Gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$ .

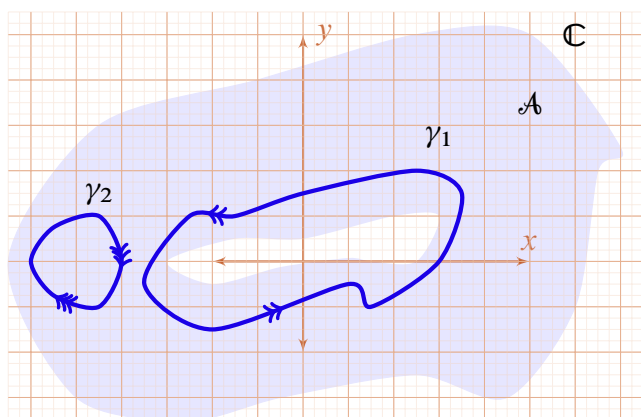
Dados dos ciclos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  la cadena  $m_1\Gamma_1 + m_2\Gamma_2$  es un ciclo con

$$n(\Gamma, z_0) = m_1 n(\Gamma_1, z_0) + m_2 n(\Gamma_2, z_0), \quad z_0 \notin \Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*.$$

Dadas dos cadenas, no necesariamente ciclos, su suma puede ser un ciclo. Cuando describimos la teoría de la homotopía vimos cómo los arcos homótopos a un punto eran especialmente relevantes. Vamos a introducir el concepto correspondiente en el contexto homológico.

**Ciclos homólogos a cero**

- i) Dada una región  $\mathcal{A}$ , un ciclo  $\Gamma$  con  $\Gamma^* \subset \mathcal{A}$  se dice homólogo a cero con respecto a  $\mathcal{A}$ , y se escribe  $\Gamma \sim 0(\mathcal{A})$ , si  $n(\Gamma, z) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{A}$ .
- ii) Dos cadenas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , con  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathcal{A}$  son homólogas en  $\mathcal{A}$  si  $\Gamma_1 - \Gamma_2$  es un ciclo homólogo a cero con respecto a  $\mathcal{A}$ .



**Arco  $\gamma_1$  no homólogo a cero,  $\gamma_2 \sim 0(\mathcal{A})$**

Dos ciclos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son homólogos con respecto a  $\mathcal{A}$  si sus índices son iguales,  $n(\Gamma_1, z) = n(\Gamma_2, z)$ , para  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{A}$ . Esto es, y menos formal, un ciclo es homólogo a cero en una región si no da vueltas alrededor de puntos fuera de esa región. En la ilustración podemos ver una región  $\mathcal{A}$  y dos arcos cerrados  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , formamos el ciclo  $\Gamma = 2\gamma_1 - 3\gamma_2$ , donde las flechas sobre la curva indican el número de veces que se recorren. Vemos, que  $n(\Gamma, z) = 2$  para aquellos puntos de la región en blanco interior a  $\mathcal{A}$ , luego este ciclo no es homólogo a cero. Debemos subrayar, que la definición de ciclos homólogos depende sólo del índice del ciclo con respecto a puntos fuera de la región.

Esto es, no depende de la representación particular de la clase de equivalencia del ciclo.

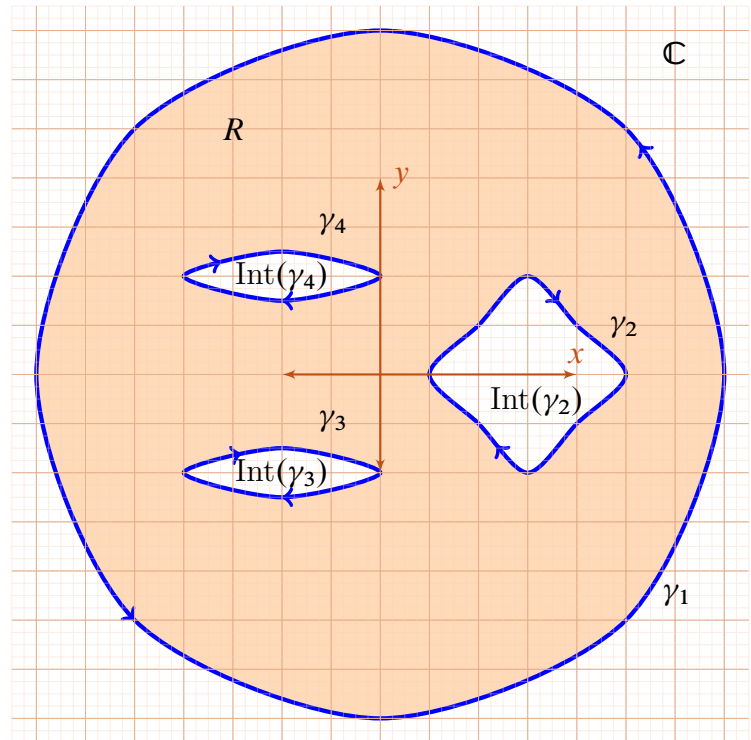
### Regiones regulares

Dada una región acotada  $R$  con una frontera regular a trozos, orientada positivamente, entonces  $\partial R = \gamma_1^* \cup \dots \cup \gamma_p^*$ , donde  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$  son arcos de Jordan (sin autointersecciones). Además, dado  $z \in R$  se tiene  $n(\gamma_1, z) = 1$  y  $n(\gamma_j, z) = 0$  si  $j \neq 1$ . También se cumple

- I)  $\gamma_j^* \subset \text{Int}(\gamma_1)$  y  $\text{Int}(\gamma_j) \subset \text{Int}(\gamma_1)$  para  $j \in \{2, \dots, p\}$ .
- II)  $\text{Int}(\gamma_2), \dots, \text{Int}(\gamma_p)$  son disjuntos.
- III)  $R = \text{Int}(\gamma_1) \setminus (\overline{\text{Int}(\gamma_2)} \cup \dots \cup \overline{\text{Int}(\gamma_p)})$

Si  $\tilde{R}$  es una región que incluye al cierre de  $R$ ,  $\overline{R} \subset \tilde{R}$ , entonces  $\partial R = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_p$  es un ciclo homólogo a cero en  $\tilde{R}$ . Efectivamente, tal como se ve en la ilustración, para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \tilde{R}$  tenemos que  $n(\Gamma, z) = 0$ . Si estamos en el exterior de  $\gamma_1$  porque el arco no gira en torno suyo, y si estamos en  $\text{Int}(\gamma_2) \cup \text{Int}(\gamma_3) \cup \text{Int}(\gamma_4)$  también, ya que los giros se compensan en un sentido y en el contrario.

El ciclo  $\Gamma$  es homólogo a cero en  $\mathcal{A}$  si y sólo si las componentes de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$  con índices no nulos yacen en  $\mathcal{A}$ . Recordemos que una región  $\mathcal{A}$  es simplemente conexa si su conjunto complementario  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{A}$  es un conjunto conexo. Parece que esto debe ser lo mismo que pedir que todo ciclo  $\Gamma$  con  $\Gamma^* \subset \mathcal{A}$  sea homólogo a cero,  $\Gamma \sim 0(\mathcal{A})$ .



Región acotada con frontera regular

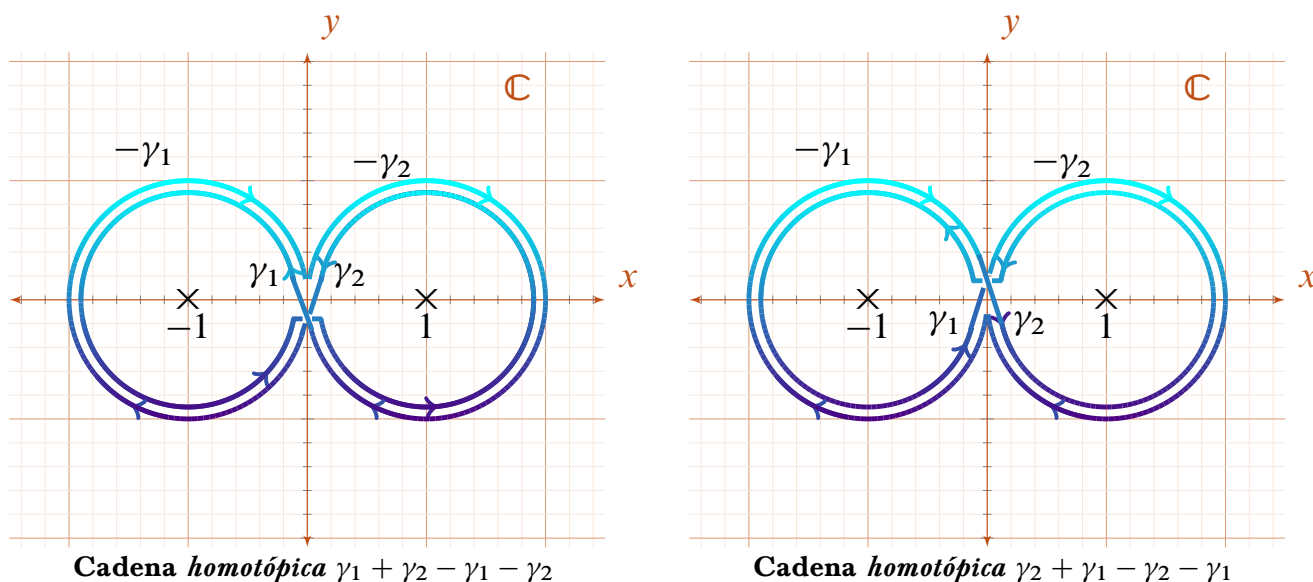
### Regiones simplemente conexas y homología

Una región  $\mathcal{A}$  es simplemente conexa si y sólo si todos los ciclos contenidos en la región son homólogos a cero con respecto a  $\mathcal{A}$

**III.7.2. Homología versus homotopía** La homología y la homotopía son conceptos cercanos pero no equivalentes. Un arco homótopo a un punto en  $\mathcal{A}$  es homólogo a cero en  $\mathcal{A}$ , ya que si no lo fuera el arco circundaría una o varias veces puntos fuera de  $\mathcal{A}$  y sería por tanto imposible colapsarlo de forma continua a un punto en  $\mathcal{A}$ . Así que dos arcos cerrados homótopos en la región  $\mathcal{A}$  son homólogos en la región  $\mathcal{A}$ . Sin embargo, el contrario no es cierto, existen ciclos homólogos que no son homótopos. Por ejemplo, consideremos  $\mathcal{A} \setminus \{-1, 1\}$  y sean  $\gamma_1$  el arco que recorre una circunferencia centrada en  $-1$  en sentido antihorario una vez,  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \gamma_1(t) = -1 + e^{2\pi i t}$  y  $\gamma_2$  el arco que recorre una circunferencia centrada en  $1$  en sentido antihorario una vez,  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \gamma_2(t) = 1 - e^{2\pi i t}$ . Consideramos las cadenas  $\Gamma_1 := \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_2$  y  $\Gamma_2 := \gamma_2 + \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_1$ , que podemos parametrizar por

$$\Gamma_1(t) := \begin{cases} -1 + e^{2\pi i t}, & t \in [0, 1), \\ 1 - e^{2\pi i(t-1)}, & t \in [1, 2), \\ -1 + e^{-2\pi i(t-2)}, & t \in [2, 3), \\ 1 - e^{-2\pi i(t-3)}, & t \in [3, 4), \end{cases} \quad \Gamma_2(t) := \begin{cases} 1 - e^{2\pi i t}, & t \in [0, 1), \\ -1 + e^{2\pi i(t-1)}, & t \in [1, 2), \\ 1 + e^{-2\pi i(t-2)}, & t \in [2, 3), \\ -1 + e^{-2\pi i(t-3)}, & t \in [3, 4). \end{cases}$$

Obviamente ambos ciclos son homólogos, sin embargo no existe una deformación continua en  $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$  de un arco al otro arco. Este es un ejemplo de un caso donde la *ideología* homotópica no se puede aplicar y hay que usar la *ideología* homológica.



La dificultad de este ejemplo estriba en que la suma de arcos de la teoría homológica es conmutativa y la homotópica no lo es. Más formalmente, desde el punto de vista homológico las cadenas son un grupo conmutativo libre. En particular, la relación de homología entre ciclos  $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$  define una relación de equivalencia, y el conjunto de clases de ciclos homólogos entre si conforma  $H^1(\mathcal{A})$ , el **primer grupo de homología** de  $\mathcal{A}$ , que es un grupo abeliano. Desde el punto de vista de la homotopía, fijado un punto  $a \in \mathcal{A}$ , en el conjunto de todos los arcos suaves cerrados que comienzan y terminan en  $a$  tenemos la relación de equivalencia dada por la homotopía de arcos. El conjunto de clases de equivalencia de arcos cerrados sobre  $a$  homótopos forma el primer grupo de homotopía  $\Pi(\mathcal{A}, a)$  con base en  $a$ . Dados dos puntos cualesquiera  $a, b \in \mathcal{A}$  los grupos  $\Pi(\mathcal{A}, a)$  y  $\Pi(\mathcal{A}, b)$  son isomorfos, y por tanto, una vez identificados, podemos hablar del grupo fundamental  $\Pi(\mathcal{A})$ . En general, el **grupo fundamental no es abeliano**. Más aún, un resultado básico de la Topología Algebraica es que el **primer grupo de homología  $H^1(\mathcal{A})$  es la abelianización del grupo fundamental  $\Pi(\mathcal{A})$**  (el cociente del grupo con su conmutador; esto es, hacer que  $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_2 + \gamma_1$ ). De hecho, en nuestro ejemplo hemos

capturado el ejemplo más básico de grupo fundamental no abeliano. En efecto  $\Pi(\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\})$  es isomorfo al grupo libre con dos generadores  $F_2$ , cada generadores es un arco cerrados, el primero rodea una vez a  $-1$ , y el otro una vez  $1$ .

**III.7.3. Teoremas de Cauchy, de Green y la fórmula de Cauchy–Green** Tal como hicimos con la homotopía se pueden demostrar versiones homológicas de los grandes teoremas, que ya hemos visto con técnicas homotópicas.

#### Teorema de Cauchy. VIII. Versión *homológica*

- i) Sean una región  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ , una ciclo  $\Gamma$  homólogo a cero con respecto a  $\mathcal{A}$  y una función holomorfa en  $\mathcal{A}$ . Entonces  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ .
- ii) Si  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son dos cadenas homólogas en  $\mathcal{A}$  y  $f(z)$  es holomorfa en  $\mathcal{A}$  se saistface que  $\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$ .



Para el siguiente resultado recordar que  $dA(z) = dx dy (= \frac{1}{2i} d\bar{z} \wedge dz)$ , es la medida de Lebesgue en el plano, el elemento infinitesimal de área.

#### Teorema de Green. III. Versión *homológica*

Sean una región  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ ,  $f(z)$  una función diferenciable tal que  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)$  es continua en  $\mathcal{A}$  y  $\Gamma$  un ciclo homólogo a cero en  $\mathcal{A}$ . Entonces, se saistface

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2i \iint_{\mathcal{A}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) n(\Gamma, z) dA(z).$$

Dicho tal como enunciamos el teorema de Green tenemos que la forma diferencial  $P dx + Q dy$  donde  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  es una función continua tendremos

$$\int_{\Gamma} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \iint_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) n(\Gamma, x, y) dx dy.$$

También tenemos la correspondiente versiones de la fórmulas de Cauchy

#### Fórmula de integral de Cauchy. III. Versión *homológica*

Sean una región  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ ,  $f(z)$  una función holomorfa en  $\mathcal{A}$ ,  $\Gamma$  un ciclo homólogo a cero en  $\mathcal{A}$  y  $z_0 \notin \Gamma^*$ . Entonces, se verifica

$$n(\Gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Además la función  $f(z)$  es infinitamente derivable con

$$n(\Gamma, z_0) f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz,$$

para  $k \in \{2, 3, \dots\}$ .



Por último, también tenemos una versión homológica de la fórmula de Green–Cauchy



### Fórmula de Cauchy–Green. II. Versión *homológica*

Sean una región  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ ,  $f(z)$  una función diferenciable tal que  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)$  es continua en  $\mathcal{A}$ ,  $\Gamma$  un ciclo homólogo a cero en  $\mathcal{A}$  y  $z_0 \notin \Gamma^*$ . Entonces, se verifica

$$n(\Gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) n(\Gamma, z) dA(z).$$



## §III.8. Ejercicios

- i) Calcular las siguientes integrales: 1)  $\int_{\gamma} x dz$  donde  $\gamma$  es el segmento orientado que une 0 con  $1 + i$ . 2)  $\int_{\gamma} |z| \bar{z} dz$  donde  $\gamma$  es el círculo de radio  $r$  centrado en el origen recorrido en sentido antihorario una vez. 3)  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$  donde el arco es  $\gamma(t) = t^2 + it$ ,  $0 \leq t \leq 2$ . 4)  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$  donde el arco es  $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ . 5)  $\int_{\gamma} (z - a)^n dz$ , con  $n$  entero y  $\gamma$  una circunferencia que no pasa por  $a$  recorrida en sentido antihorario una vez.

**Solución:**

- a) En este caso  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  con  $t \mapsto \gamma(t) = (1 + i)t$ , con  $\dot{\gamma} = 1 + i$ , así que  $\int_{\gamma} x dz = \int_0^1 t(1 + i) dt = (1 + i) \int_0^1 t dt = \frac{1+i}{2}$ .
- b) Ahora  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = r e^{it}$  y por ello  $\dot{\gamma}(t) = i r e^{it}$  y  $|\gamma(t)| = r$ . Así que,  $\int_{\gamma} |z| \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} r r e^{-it} i r e^{it} dt = i r^3 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i r^3$ .
- c) Integramos ahora en el arco  $\gamma(t) = t^2 + it$ ,  $0 \leq t \leq 2$ , con  $\dot{\gamma}(t) = 2t + i$ . Por lo tanto,  $\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^2 (t^2 - it)(2t + i) dt = \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t) dt = \left( \frac{t^4}{2} - \frac{it^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^2 = 10 - i \frac{8}{3}$ .
- d) Si  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ , entonces  $\dot{\gamma}(t) = i e^{it}$  y tenemos  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = 2\pi i$ .
- e) Si  $n \neq -1$  tenemos que una primitiva para  $(z - a)^n$  es  $\frac{1}{n+1} (z - a)^{n+1} + C$ , que es una función holomorfa, por lo tanto, el teorema fundamental del cálculo conduce a que la integral, al ser en un arco cerrado, se anula. Sin embargo, si  $n = -1$  la primitiva es  $\log(z - a)$ , que en cualquiera de sus determinaciones es discontinua en un semieje que emerge de  $z = a$ . Como sabemos, en este caso la integral vale  $2\pi i n(\gamma, a)$ , en términos del índice. Así que si  $a$  se encuentra en el interior de la circunferencia la integral es no nula y vale  $2\pi i$  y si  $a$  se encuentra en el exterior la integral es nula.
- ii) Dado el arco  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$  demostrar que  $\left| \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \right| \leq \pi e$ .

**Solución:** Tenemos que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \right| \leq \int_{\gamma} \left| \frac{e^z}{z} \right| |dz| \leq M\pi, \quad M := \sup_{z \in \gamma} \left| \frac{e^z}{z} \right|.$$

Pero  $\left| \frac{e^z}{z} \right| = \frac{e^x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = e^x \leq e$  cuando  $x \in [-1, 1]$ , que es donde varía la parte real del arco recorrido. De aquí se infiere el resultado.

- iii) Sea  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$  una circunferencia recorrida una vez en sentido antihorario calcular  $\frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{3z^2 - 24z + 52}{z^3 - 10z^2 + 32z - 32} dz$ .

**Solución:** La descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{2} \frac{3z^2 - 24z + 52}{z^3 - 10z^2 + 32z - 32} = \frac{2}{z - 2} + \frac{1}{(z - 4)^2}$$

nos permite escribir

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{3z^2 - 24z + 52}{z^3 - 10z^2 + 32z - 32} dz = 2\pi i 2n(\gamma, 2) -$$

en donde hemos utilizado el índice y el teorema fundamental del cálculo para deducir que  $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-4)^2} = 0$ . Ahora bien, como  $n(\gamma, 2) = 1$  obtenemos

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{3z^2 - 24z + 52}{z^3 - 10z^2 + 32z - 32} dz = 4\pi i.$$

iv) Probar que no existe una antiderivada en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  de  $\frac{1}{z}$ .

**Solución:** Supongamos la existencia de dicha primitiva, esto es la existencia de una función holomorfa  $F(z)$  con  $F'(z) = \frac{1}{z}$  en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . El teorema fundamental del cálculo implicaría, si ese fuera el caso, que  $n(\gamma, 0) = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 0$ , lo que anularía el índice con respecto al origen de cualquier arco cerrado. Como es falso, la suposición inicial también lo es.

v) Sea  $\gamma$  el arco constituido por recorrer una vez en sentido antihorario la circunferencia unidad. Encontrar los valores de  $\int_{\gamma} \text{Log } z \, dz$  y  $\int_{\gamma} z^2 \text{Log } z \, dz$ .

**Solución:**

- Obsérvese que  $I := \int_{\gamma} \text{Log } z \, dz = \int_{\gamma} (\log |z| + i \text{Arg } z) \, dz$  y como  $|z| = 1$  en el arco de integración  $I = i \int_{\gamma} \text{Arg } z \, dz$ , usando la parametrización  $\gamma(t) = e^{it}$  con  $\dot{\gamma}(t) = ie^{it}$  concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \text{Log } z \, dz &= i \int_{-\pi}^{\pi} t i e^{it} \, dt = - \int_{-\pi}^{\pi} t e^{it} \, dt \\ &= -(1 - it) e^{it} \Big|_{-\pi}^{\pi} = -2\pi i. \end{aligned}$$

- Razonando como antes obtenemos  $\int_{\gamma} z^2 \text{Log } z \, dz = i \int_{\gamma} z^2 \text{Arg } z \, dz$  y, usando la parametrización dada, que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 \text{Log } z \, dz &= i \int_{-\pi}^{\pi} e^{2it} t i e^{it} \, dt = - \int_{-\pi}^{\pi} t e^{3it} \, dt \\ &= -\frac{1}{9} (1 - i3t) e^{3it} \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{3} \pi i. \end{aligned}$$

vi) Para el mismo arco del ejercicio anterior hallar  $\int_{\gamma} z^n \log_I z \, dz$ , siendo  $I$  la determinación principal ó la determinación  $I = [0, 2\pi)$ .

**Solución:** Tenemos que  $\int_{\gamma} z^n \log_I z \, dz = i \int_{\gamma} z^n \arg_I z \, dz$  así que si la determinación es de la forma  $I = (\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$  y usamos la parametrización  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  con  $t \mapsto e^{it}$

llegamos a

$$\int_{\gamma} z^n \log_I z \, dz = i \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} e^{int} t i e^{it} \, dt = - \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} t e^{i(n+1)t} \, dt = 2\pi i \frac{e^{i(n+1)\theta_0}}{n+1}.$$

- VII) Usando las fórmulas integrales de Cauchy evaluar las siguientes integrales: 1)  $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} \, dz$ .  
 2)  $\int_{|z|=2} \frac{|z|e^z}{z^2} \, dz$ . 3)  $\int_{|z|=3} \frac{ze^{zt}}{(z+1)^3} \, dz$ .

**Solución:**

- a) Como  $\cos z$  es entera y el círculo unitario es homótopo a un punto en  $\mathbb{C}$  es válida la fórmula integral de Cauchy con

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} \, dz = n(\gamma, 0) \cos 0$$

y por ello la integral pedida es  $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} \, dz = 2\pi i$ .

- b) El valor de la integral al tener  $|z| = 2$  es igual a  $2 \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2} \, dz$ , y como  $e^z$  es entera podemos usar la fórmula integral de Cauchy para la derivada

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} \, dw$$

y así

$$2 \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2} \, dz = 2(2\pi i (e^z)'|_{z=0}) = 4\pi i.$$

- c) En este caso, como  $ze^{zt}$  es una función entera en  $z$ , usamos la fórmula

$$f''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^3} \, dw$$

y obtenemos que la integral pedida es  $\pi i (ze^{zt})|_{z=-1} = i\pi e^{-t} t(2-t)$ .

- VIII) Dada una función armónica en una región  $\mathcal{A} \supset D(z_0, 1)$  probar que  $u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{it}) \, dt$ .

**Solución:** Si el arco de integración es un círculo de radio  $r$  recorrido una vez en sentido antihorario y centrado en  $z_0$  la fórmula integral de Cauchy para una función holomorfa en el interior de dicho círculo nos dice que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) \, dt.$$

- IX) Demostrar que  $\int_0^{2\pi} \cos(\cos \theta) \cosh(\sin \theta) \, d\theta = 2\pi$ .

**Solución:**

Si ponemos  $f(z) = \cos z$  en el problema anterior obtenemos

$$\cos z_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(z_0 + r e^{it}) \, dt.$$

y, en particular, para  $z_0 = 0$  y  $r = 1$

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\cos t + i \operatorname{sen} t) dt.$$

Si aplicamos la fórmula de adición para el coseno llegamos a

$$\begin{aligned} 1 = 1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(\cos t) \cos(i \operatorname{sen} t) - \operatorname{sen}(\cos t) \operatorname{sen}(i \operatorname{sen} t)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(\cos t) \cosh(\operatorname{sen} t) - i \operatorname{sen}(\cos t) \operatorname{senh}(\operatorname{sen} t)) dt \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} 2\pi &= \int_0^{2\pi} \cos(\cos t) \cosh(\operatorname{sen} t) dt, \\ 0 &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\cos t) \operatorname{senh}(\operatorname{sen} t) dt. \end{aligned}$$

- x) Sea  $f(z)$  una función holomorfa en  $D(0, R_0)$  y  $r, R$  tales que  $0 < r < R < R_0$ . Demostrar que  $f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} f(Re^{i\phi}) d\phi$ . Deducir el mismo resultado para cualquier función armónica  $u(x, y)$  en  $D(0, R_0)$

**Solución:** En primer lugar, para cualquier  $a \in D(0, R)$ , podemos escribir

$$\frac{R^2 - |a|^2}{(z - a)(R^2 - \bar{a}z)} = \frac{1}{z - a} + \frac{\bar{a}}{R^2 - \bar{a}z}.$$

En donde se ven que existen dos singularidades en los puntos  $a \in D(0, R)$  y  $\frac{R^2}{\bar{a}} \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)}$ . Por ello, si  $\gamma = \partial D(0, R)$  recorrido una vez en sentido antihorario, de acuerdo con la fórmula integral de Cauchy, y recordando  $n(\gamma, a) = 1$  y  $n(\gamma, \frac{R^2}{\bar{a}}) = 0$ ,

$$\int_{\gamma} \frac{R^2 - |a|^2}{(z - a)(R^2 - \bar{a}z)} f(z) dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i f(a)$$

Si ponemos  $a = re^{i\theta}$  y  $z = Re^{i\phi}$  llegamos a

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{(Re^{i\phi} - re^{i\theta})(R^2 - rRe^{-i(\phi - \theta)})} f(Re^{i\phi}) i Re^{i\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{(R - re^{i(\theta - \phi)})(R - re^{-i(\theta - \phi)})} f(Re^{i\phi}) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{|R - re^{i(\theta - \phi)}|^2} f(Re^{i\phi}) d\phi \end{aligned}$$

y como  $|R - re^{i(\theta - \phi)}|^2 = (R - r \cos(\theta - \phi))^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta - \phi) = R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + rR^2 \cos^2(\theta - \phi) + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta - \phi) = R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + rR^2 \cos^2(\theta - \phi) + r^2$ , lo que demuestra el resultado.

Por otro lado, si tengo una función armónica  $u(x, y)$  en  $D(0, R)$  al ser este disco un conjunto simplemente conexo, se puede encontrar una armónica conjugada de forma

global, digamos  $v(x, y)$ . Entonces  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  es holomorfa en  $D(0, R)$  y aplicando el resultado recién probado concluimos

$$u(r e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} u(R e^{i\phi}) d\phi$$

- x1) Dada una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  entera demostrar que: 1) Si  $|f(z)| \geq 1$  entonces  $f(z)$  es constante, 2) Que si  $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$  entonces  $f(z)$  es constante. 3) Si  $\operatorname{Re} f(z)$  no se anula entonces  $f(z)$  es constante.

**Solución:**

- a) Si  $|f(z)| \geq 1$  entonces  $f(z) = |f(z)| e^{i \arg f(z)} \neq 0$  para  $z \in \mathbb{C}$ , así que la función  $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{|f(z)|} e^{-i \arg f(z)}$  es entera y además está acotada  $\left| \frac{1}{f(z)} \right| \leq 1$  y por tanto, recordando el teorema de Liouville,  $\frac{1}{f(z)}$  es constante y así  $f(z)$  es constante.
- b) Si  $f(z)$  es entera también lo es  $e^{f(z)}$  con  $|e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \geq 1$  ya que  $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ . Por lo tanto, como hemos demostrado en el punto anterior, la función  $e^{f(z)}$  es constante y también lo es  $f(z)$ .
- c) Si  $\operatorname{Re} f(z)$  no se anula entonces o bien  $\operatorname{Re} f > 0$  ó  $\operatorname{Re} f(z) < 0$ . El primer caso lo acabamos discutir. Veamos que ocurre en el caso no tratado con  $\operatorname{Re} f(z) < 0$ . Como  $f(z)$  es entera también lo es  $e^{-f(z)}$  con  $|e^{-f(z)}| = e^{-\operatorname{Re} f(z)} \geq 1$ , y de nuevo el primer resultado implica que  $e^{-f(z)}$  es constante y por ello lo es  $f(z)$ .





# IV. SERIES COMPLEJAS

## Contenidos

IV.1 Sucesiones y series de funciones complejas . . . . .	129
IV.2 Series de potencias y desarrollos de Taylor . . . . .	142
IV.3 Historias sobre las series de potencias . . . . .	147
IV.4 Series de Laurent y singularidades . . . . .	159
IV.5 Ejercicios . . . . .	170



### §IV.1. Sucesiones y series de funciones complejas



STUDIAREMOS en esta sección como se extienden a los complejos las técnicas, bien conocidas para el caso real, para el análisis de las sucesiones y series de funciones complejas. Hablaremos, en primer lugar, de las sucesiones y series de números complejos y sus convergencia. A continuación trataremos las sucesiones y series de funciones complejas y los conceptos de convergencia puntual y, sobre todo, de convergencia uniforme y convergencia normal.

#### IV.1.1. Sucesiones y series de números complejos

##### Límites de sucesiones

Dada una sucesión de números complejos  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$  decimos que tiene como límite a  $z \in \mathbb{C}$  y escribimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z, \quad \text{ó bien} \quad z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z,$$

siempre que para todo  $\epsilon$  positivo existe un entero  $N > 0$  tal que si  $n > N$  entonces  $|z - z_n| < \epsilon$ .

Un criterio clásico es el criterio de Cauchy, equivalente a la convergencia en espacios completos, como  $\mathbb{C}$ .

##### Criterio de Cauchy para convergencia de sucesiones

Existe el límite de una sucesión de números complejos  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$  si y sólo si para todo  $\epsilon$  positivo existe un entero  $N > 0$ , tal que sin  $n, m > N$  entonces  $|z_n - z_m| < \epsilon$ .

Toda sucesión compleja  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$  tiene asociada otra sucesión, la sucesión de sumas parciales  $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ , donde  $\sigma_n := \sum_{m=1}^n z_m$ .

### Serie de números complejos

Dada una sucesión de números complejos  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$  diremos que existe la serie correspondiente, que denotaremos por  $\sum_{m=1}^{\infty} z_m$ , siempre que la sucesión de sumas parciales tenga un límite, que denotaremos por

$$\sum_{m=1}^{\infty} z_m := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n z_m.$$

Obviamente, para que la serie exista será necesario que el término general de la serie,  $z_n$ , tienda a cero,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ , ya que de lo contrario el criterio de Cauchy no se cumpliría.

### Serie absolutamente convergente

- i) Dada una sucesión de números complejos  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ , diremos que la serie correspondiente converge absolutamente si la sucesión de sumas parciales de los valores absolutos  $\left\{ \sum_{m=1}^n |z_m| \right\}_{n=1}^{\infty}$ , converge.
- ii) Si una serie es absolutamente convergente entonces es convergente.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar vemos que, para  $n < m$ , se tiene

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k - \sum_{k=1}^m z_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |z_k| = \left| \sum_{k=1}^n |z_k| - \sum_{k=1}^m |z_k| \right|.$$

Por tanto, dada la convergencia de la sucesión de sumas parciales de los valores absolutos, y la completitud del espacio, esa sucesión debe de ser de Cauchy, y va a existir para todo  $\epsilon > 0$  un entero  $N > 0$  tal que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k - \sum_{k=1}^m z_k \right| < \epsilon, \quad \forall n, m > N.$$

Esto es, la serie es convergente. □

Veamos ahora unas tablas con diversos criterios de convergencia que pueden ser de utilidad.



### Criterios de convergencia I

I) **Criterio de comparación:** Sean dos series  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  tales que  $|z_n| < |w_n|$ ,  $\forall n > N$ . Entonces, la convergencia absoluta de  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  implica la de  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ .

II) **Criterio del cociente de d'Alambert:** Sea la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  con  $z_n \neq 0$  siempre que  $n > N$ . Entonces:

a) Si  $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq r < 1$ ,  $\forall n > N$  podemos asegurar que la serie converge absolutamente.

b) Si  $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \geq 1$ ,  $\forall n > N$  podemos asegurar que la serie diverge.

Un criterio más simple, que se deduce del criterio de d'Alambert es el siguiente. Supongamos que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ . Entonces, si  $L < 1$  la serie converge absolutamente, si  $L = 1$  el criterio no decide, si  $L > 1$  la serie diverge.

III) **Criterio de Raabe:** Sea la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  con  $z_n \neq 0$  siempre que  $n > N$ , y supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) = \Lambda$ . Entonces, si  $\Lambda < 1$  la serie converge y si  $\Lambda > 1$  la serie diverge.

IV) **Criterio de Bertrand:** Sea la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  con  $z_n \neq 0$  siempre que  $n > N$ , y sea  $\{c_n\}_{n=N}^{\infty}$  la secuencia definida por  $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = 1 + \frac{1}{n} + \frac{c_n}{n \log n}$ ,  $n > N$ . Entonces, si  $\liminf_{n \rightarrow \infty} c_n > 1$  la serie converge y si  $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n > 1$  la serie diverge.

V) **Criterio de Gauss:** Sea la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  con  $z_n \neq 0$  siempre que  $n > N$ , y  $h$ ,  $r$  y  $\{c_n\}_{n=N}^{\infty}$  definidos por  $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = 1 + \frac{h}{n} + \frac{c_n}{n^r}$ . Supongamos que  $r > 1$  y que  $\{c_n\}_{n=N}^{\infty}$  está acotada. Entonces la serie converge si  $h > 1$  y diverge si  $h \leq 1$ .

VI) **Criterio de la raíz de Cauchy:** Sea la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ , entonces

a) Si  $\sqrt[n]{|z_n|} \leq r < 1$ ,  $\forall n > N$  podemos asegurar que la serie converge absolutamente.

b) Si  $\sqrt[n]{|z_n|} \geq 1$ ,  $\forall n > N$  podemos asegurar que la serie diverge.

El criterio de Cauchy implica lo siguiente. Supongamos que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$ . Entonces, si  $L < 1$  la serie converge absolutamente, si  $L = 1$  el criterio no decide, sin  $L > 1$  la serie diverge.

VII) **Criterio de Mertens para el producto de Cauchy:** Sean dos series  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

y  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  convergentes y al menos una de ellas absolutamente convergente.

Entonces, la serie producto de Cauchy de ambas series  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^n z_m w_{n-m} \right)$  converge.

### Criterios de convergencia II

VIII) Sean las series  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ , y la serie de sumas parciales de la primera

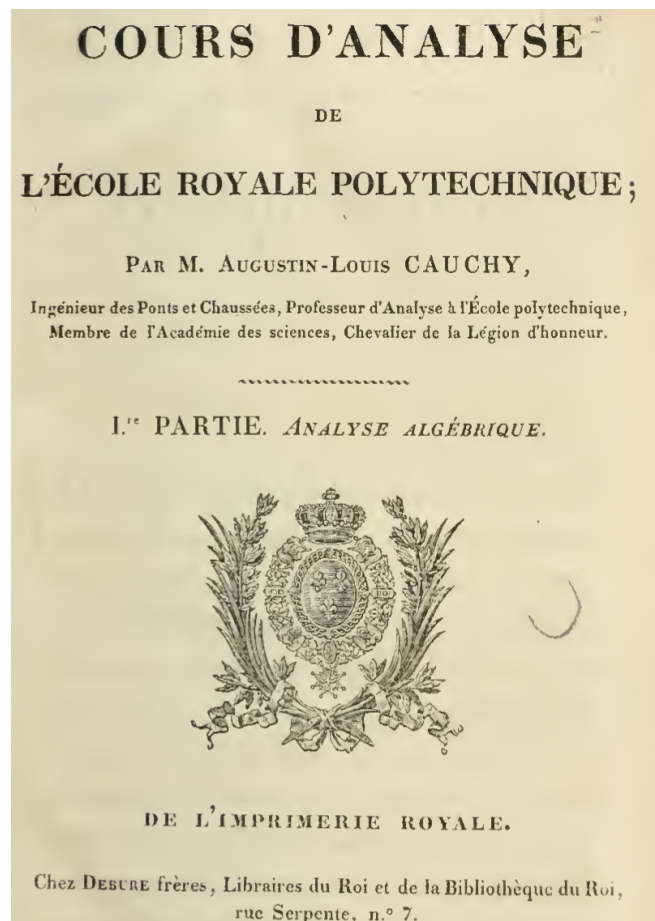
$\sigma_n = \sum_{m=1}^n z_m$ . Entonces, si la sucesión  $\{\sigma_n w_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n (w_{n+1} - w_n)$  convergen, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n w_n$  converge.

IX) **Criterio de Dirichlet:** Sean las sucesiones  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$  y  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ , y las sumas parciales  $\sigma_n = z_1 + \dots + z_n$ . Entonces, si la sucesión  $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$  es acotada y  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es decreciente y converge a 0, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n$  es convergente.

X) **Criterio de Abel:** Dadas la serie convergente  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \subset \mathbb{C}$  y la sucesión monótona convergente  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n$  es convergente.



**IV.1.2. Cauchy y la convergencia** Durante el S XVIII se había demostrado la convergencia de algunas series sencillas, entendiéndose una serie como una suma en el orden prescrito de los términos que conformaban la serie. Por ejemplo, a veces se decía que una serie era *convergente* si su término general tendía a cero (cosa que hoy en día no se hace, ¡la serie armónica no es convergente!). Por ejemplo, en relación al mencionado criterio de d'Alambert, podemos encontrar en el trabajo de d'Alambert *Réflexions sur les suites et sur les racines imaginaires* de 1768 que al desarrollar  $(1 + \mu)^m$  decía de la serie resultante que si  $m = -2$  y  $\mu = \frac{99}{100}$  la serie divergía hasta el término 99 pero convergía desde el término 100 en adelante. No muy parecido al concepto de convergencia actual. El mayor problema de aquellos años fue la proliferación de diferentes e ingeniosas formas de sumar, reordenando los términos, y que podían conducir a diferentes resultados para las series. Esta situación llevo a que un grupo de matemáticos entre los que estaban Fourier y Gauss empezaran a tratar con más cuidado el concepto de que se debe entender cuando hablamos de una serie. Pero fue Cauchy el que profundizo de modo definitivo en esa forma de trabajar.



*Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique de Cauchy*

§. 1.<sup>er</sup> *Considérations générales sur les Séries.*

ON appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \&c. \dots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différents termes de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

la somme des  $n$  premiers termes,  $n$  désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de  $n$  toujours croissantes, la somme  $s_n$  s'approche indéfiniment d'une certaine limite  $s$ , la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que  $n$  croît indéfiniment, la somme  $s_n$  ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente*, et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice  $n$ , savoir  $u_n$ , sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce

1.<sup>re</sup> PARTIE. CHAP. VI.

125

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \&c. \dots + u_{n-1}$$

vers une limite fixe  $s$ : en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre  $n$ , les sommes

$$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \&c. \dots$$

diffèrent de la limite  $s$ , et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les diffé-

Así en 1821 salía a la luz la primera edición de su manual *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique; I.re Partie. Analyse algébrique* dedicado, no sólo a sus alumnos, sino también a sus compañeros profesores. En él, Cauchy introducía ideas inéditas hasta entonces como: *Una serie divergente no tiene suma* o "si, para valores siempre crecientes de  $n$ , la suma parcial  $s_n$  se va acercando indefinidamente a cierto valor límite  $s$ , entonces la serie se llamará convergente, y el límite en cuestión recibirá el nombre de suma de la serie. Por otra parte si la suma  $s_n$  no se aproxima a ningún límite fijo cuando  $n$  crece indefinidamente la serie se llamará divergente y no tendrá suma" para pasar casi inmediatamente al criterio de Cauchy "para que una serie sea convergente es necesario y suficiente que, para valores infinitamente grandes del número  $n$ , las sumas  $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \&c. \dots$  difieran del límite  $s$ , y en consecuencia entre ellas, en cantidades infinitamente pequeñas." Este es un resultado notable, ya que no hace falta saber quien es el límite, si se cumple la condición, el límite debe existir. En su curso, Cauchy recogía muchos de los criterios que hoy se suelen estudiar: el de la raíz, el del cociente, el de condensación, el del logaritmo y el del producto, entre otros.

**IV.1.3. Sucesiones y series de funciones** Si Cauchy fue el que sentó las bases del rigor en el estudio de las series numéricas hubo que esperar unos veinte años, como veremos, para que se observará, que si bien la convergencia puntual era interesante y rigurosa, cuando se pasaba al campo de las funciones esto cambiaba, y había, al menos un forma de converger más potente que la puntual. Darse cuenta de esto no fue tarea fácil. Vamos a con-

siderar pues la convergencia puntual y la convergencia uniforme. Luego, más adelante, aparecerá la convergencia normal. Estos conceptos son prácticamente idénticos para el caso real y el complejo.

**Párrafos de Cauchy**

*Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*

### Convergencia puntual y uniforme

Sean un conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  y una sucesión  $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$  de funciones complejas,  $f_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ . Diremos que

- i) La sucesión converge puntualmente en  $\mathcal{A}$  a la función  $f(z)$  si para  $z \in \mathcal{A}$  existe el límite de la sucesión numérica de evaluaciones de la funciones en ese punto:

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z).$$

- ii) La sucesión converge uniformemente a la función  $f(z)$  en  $\mathcal{A}$  si para  $\epsilon$  positivo existe un entero positivo  $N$  tal que  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$  para  $n > N$  y  $z \in \mathcal{A}$ .

La convergencia uniforme y la convergencia puntual son cosas distintas y es importante entender la diferencia entre ambas. La convergencia puntual es mucho más débil, ya que lo que hace es evaluar la sucesión de funciones en cada punto  $z$ , y en ese punto  $z$  analiza el límite de la sucesión numérica correspondiente. Así que, para ese  $z$  y para un  $\epsilon$  positivo va existir un entero positivo  $N_z$ , tal que  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$  cuando  $n > N_z$ . Es importante observar que  $N_z$  depende de  $z$ . Es decir, para cada grado de aproximación deseado al límite, marcado por  $\epsilon$ , tendremos un  $N_z$  que asegura que a partir de ese término estamos en la aproximación pedida. Pero ese  $N_z$  depende del punto  $z$ , no es el mismo para todo  $z \in \mathcal{A}$ , cómo sí que ocurre en el caso uniforme. Por ello, pueden ocurrir patologías en donde ese número  $N_z$  tenga un comportamiento curioso, por ejemplo no acotado, a medida que nos acercamos a la frontera de  $\mathcal{A}$ .

### Convergencia puntual vs uniforme

La convergencia uniforme implica la puntual pero no a la inversa.

Para la convergencia uniforme existe también un criterio de Cauchy, similar al que satisfacen las sucesiones numéricas de Cauchy.

### Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme

Sean el conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  y una sucesión  $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  de funciones complejas  $f_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces,  $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  converge uniformemente si y sólo si para todo  $\epsilon$  positivo existe un entero positivo  $N$ , independiente de  $z$ , tal que  $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$ ,  $\forall n, m > N$ ,  $\forall z \in \mathcal{A}$ .



DEMOSTRACIÓN. Si la sucesión  $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  converge uniformemente a  $f(z)$  entonces para todo  $\frac{\epsilon}{2} > 0$  va existir un  $N$ , independiente de  $z$ , tal que para  $n, m > N$  se satisface  $|f_n(z) - f_m(z)| = |f_n(z) - f(z) + f(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_m(z)| \leq \epsilon$ , que es el criterio de Cauchy. Recíprocamente, el criterio de Cauchy implica la convergencia puntual de la sucesión de funciones en  $\mathcal{A}$ , denotemos el límite por  $f(z)$ . Se tendrá que  $|f_n(z) - f(z)| = |f_n(z) - f_m(z) + f_m(z) - f(z)| \leq |f_n(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f(z)|$ . Pero el criterio de Cauchy asegura que existe  $N$ , tal que  $|f_n(z) - f_m(z)| < \frac{\epsilon}{2}$  sin  $n, m > N$ ,  $\forall z \in \mathcal{A}$ ; por otro lado, dada la convergencia puntual, que implica el criterio de Cauchy, sabemos que existe  $N_z$  tal que para cada  $z \in \mathcal{A}$  se tiene  $|f_m(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}$  para  $m > N_z$ . Concluimos pues que siempre podemos encontrar un  $m$  tal que  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$  para  $n > N$ ,  $\forall z \in \mathcal{A}$ .  $\square$

**Ejemplo:** Un primer ejemplo a considerar es la clásica serie geométrica  $1 + z + z^2 + \dots$ , que sabemos converge a  $\frac{1}{1-z}$  siempre que  $z \in D(0, 1)$ . Pero **su disco de convergencia puntual no es un disco de convergencia uniforme**. En efecto, la suma parcial en este caso es  $\sum_{n=0}^N z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$ , y el módulo de la diferencia entre el límite y la suma parcial es  $\frac{|z|^{N+1}}{|1-z|}$ , que no se puede acotar uniformemente en el disco  $D(0, 1)$ .<sup>1</sup> Sin embargo, si que hay convergencia uniforme en el disco cerrado  $\overline{D(0, r)}$ ,  $r < 1$ , ya que el resto es siempre menor  $\frac{r^{N+1}}{1-r}$ .<sup>2</sup> Luego la serie geométrica **presenta convergencia normal en su disco de convergencia**  $D(0, 1)$  pero no uniforme.

Dada una sucesión de funciones complejas  $\{f_n(z)\}_{n=0}^\infty$  podemos analizar, como en el caso numérico, la correspondiente sucesión de sumas parciales  $\{\sigma_n(z)\}_{n=0}^\infty$ ,  $\sigma_n(z) = \sum_{m=1}^n f_m(z)$ . Esto nos conduce a series de funciones, siempre que los límites, uniforme o puntual, de las correspondientes sucesiones de sumas parciales converjan. En particular, la serie  $\sum_{n=0}^\infty f_n(z)$  converge uniformemente a  $f(z) = \sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ , si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $N$  tal que  $|\sum_{m=1}^n f_m(z) - f(z)| < \epsilon$ ,  $\forall n > N, \forall z \in \mathcal{A}$ .

**Prueba de M de Weierstrass**

Sean el abierto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  y una sucesión  $\{f_n(z)\}_{n=0}^\infty$  de funciones complejas  $f_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , acotadas en  $\mathcal{A}$ ,  $|f_n(z)| < M_n, \forall z \in \mathcal{A}, \forall n \in \{1, 2, \dots\}$ . Si la serie numérica  $\sum_{n=1}^\infty M_n$ , converge entonces la serie  $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$  converge absolutamente y uniformemente en  $\mathcal{A}$ .



DEMOSTRACIÓN. Por la desigualdad triangular tendremos

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k.$$

Dada la convergencia de la serie de cotas  $\sum_{n=1}^\infty M_n$ , sabemos que para todo  $\epsilon$  positivo existe un entero positivo  $N$  tal que  $|\sum_{k=n+1}^m M_k| < \epsilon$  si  $n, m > N$ . De aquí deducimos la convergencia absoluta y la convergencia uniforme. □

**Ejemplo:** Consideremos la serie  $\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-in^3z}}{n^4+1}$ , con  $f_n(z) = \frac{e^{-in^3z}}{n^4+1}$ . Tenemos  $|f_n(z)| = \frac{e^{n^3y}}{n^4+1}$ . Por tanto, para  $R > 0$ , tendremos  $|f_n(z)| \leq \frac{e^{-n^3R}}{n^4+1} < \frac{1}{n^4+1} < \frac{1}{n^4}$ , si  $\text{Im } z < -R < 0$ . Llamemos  $M_n := \frac{1}{n^4}$ , entonces la serie  $\sum_{n=1}^\infty M_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$  que es una serie hiperarmónica que converge, usar el criterio de condensación de Cauchy o el integral.<sup>3</sup> Luego la prueba M de Weierstrass nos dice que la serie converge uniformemente en el semiplano  $\text{Im } z < -R$ .

Discutimos ahora que ocurre con la continuidad, la integración y la holomorfía cuando tratamos con sucesiones y series de funciones. Comenzamos con la continuidad.

<sup>1</sup>En efecto, para  $z \in \mathbb{R}$  encontramos que  $\frac{z^{N+1}}{1-z} \xrightarrow{z \rightarrow 1^-} \infty$  y no se puede dar una cota uniforme.

<sup>2</sup>De  $1 \leq |1-z| + |z|$  obtenemos que  $1-|z| \leq |1-z|$ , y por ende  $|1-z| \geq 1-|z| \geq 1-r$  cuando  $|z| < r$ .

<sup>3</sup>**Criterio de condensación de Cauchy:** Una serie de números no negativos  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  converge si y sólo si  $\sum_{n=1}^\infty 2^n a_{2^n}$  converge. **Criterio integral de Maclaurin–Cauchy:** Dados  $m \in \mathbb{N}$  y una función continua  $f : [m, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  que es monótona creciente. Entonces la serie  $\sum_{n=m}^\infty f(n)$  converge si y sólo si la integral impropia  $\int_m^\infty f(x) dx$  converge.

### Continuidad y convergencia uniforme

Sean el conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  y una sucesión  $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  de funciones complejas  $f_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , continuas en  $\mathcal{A}$ .

- i) Si  $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  converge uniformemente en  $\mathcal{A}$ , entonces su límite uniforme  $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$  es una función continua.
- ii) Si la serie  $\sum_n f_n(z) = f(z)$  converge uniformemente en  $\mathcal{A}$ , entonces  $f(z)$  es una función continua.



DEMOSTRACIÓN. ¿Es la función límite  $f(z)$  continua en  $z_0 \in \mathcal{A}$ ? Para que así fuera deberíamos tener, para todo  $\epsilon > 0$ , un  $\delta > 0$  de modo que si  $|z - z_0| < \delta$  se puede asegurar que  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ . Pero, dada la convergencia uniforme de  $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$  en  $\mathcal{A}$ , sabemos que podemos encontrar un entero positivo  $N$  tal que  $|f_N(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}$ ,  $\forall z \in \mathcal{A}$ . También, dada la continuidad de  $f_N(z)$ , sabemos que existe un  $\delta > 0$  que asegura que cuando  $|z - z_0| < \delta$  se tiene  $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ . Por tanto

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

para todo  $z \in D(z_0, \delta)$ . □

Pasamos a las integrales

### Integración sobre arcos y convergencia uniforme

Sean una región  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ ,  $\gamma$  un arco suave a trozos con  $\gamma^* \subset \mathcal{A}$  y una sucesión  $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  de funciones complejas  $f_n : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ , continuas en  $\gamma^*$ . Entonces,

- i) Si  $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  converge uniformemente en  $\gamma^*$ , entonces su límite uniforme  $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$  satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

- ii) Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$  converge uniformemente en  $\gamma^*$ , entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz \text{ converge y}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$



DEMOSTRACIÓN. Solo abordamos la primera afirmación, ya que de ella se sigue, inmediatamente, la segunda. Como tenemos convergencia uniforme,  $f(z)$  es una función continua y por tanto integrable. Además, dada la convergencia uniforme, sabemos que para cada  $\epsilon$  positivo podemos encontrar un entero positivo  $N$  de manera que  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$  si  $n > N$ ,  $\forall z \in \mathcal{A}$ .

Por tanto

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) \, dz - \int_{\gamma} f(z) \, dz \right| = \left| \int_{\gamma} (f_n(z) - f(z)) \, dz \right| \leq \int_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| \, dz \leq \epsilon \ell(\gamma).$$

□

Otro tipo de convergencia que está íntimamente ligada a la convergencia uniforme es la así conocida como convergencia normal.

### Convergencia normal

Dada una secuencia de funciones  $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$  definidas en la región  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  decimos que converge normalmente en  $\mathcal{A}$  si para todo  $z_0 \in \mathcal{A}$  existe un  $\delta > 0$  tal que la secuencia  $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$  restringida al disco cerrado  $\overline{D}(z_0, \delta)$  converge uniformemente en ese disco.



La convergencia normal es conocida en el contexto de la topología como convergencia compacta.

### Teorema de Weierstrass de convergencia holomorfa

Sean el abierto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  y una sucesión  $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  de funciones complejas  $f_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfas en  $\mathcal{A}$ .

- i) Supongamos que la sucesión converge normalmente en  $\mathcal{A}$  a  $f(z)$ . Entonces,  $f(z)$  es una función holomorfa en  $\mathcal{A}$  y la sucesión de derivadas  $\{f_n^{(k)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$  converge puntualmente y normalmente en  $\mathcal{A}$  con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z).$$

- ii) Supongamos que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  converge normalmente en  $\mathcal{A}$  a  $f(z)$ .

Entonces,  $f(z)$  es una función holomorfa en  $\mathcal{A}$  y la serie de derivadas  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$  converge puntualmente y normalmente en  $\mathcal{A}$  con

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z).$$



## DEMOSTRACIÓN.

Cada disco cerrado de  $\mathcal{A}$  está contenido en un conjunto abierto incluido en  $\mathcal{A}$ . Luego,  $f_n(z)$  es holomorfa en cada  $\overline{D(z_0, r)} \subset \mathcal{A}$  y por ello continua en ese disco. La convergencia uniforme de  $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  a  $f(z)$  en el disco cerrado  $\overline{D(z_0, r)}$  asegura su convergencia uniforme en  $D(z_0, r)$  a  $f(z)$ . Por tanto, cómo hemos visto anteriormente, para todo arco  $\gamma$  cerrado y  $C^1$  a trozos con  $\gamma^* \subset D(z_0, r)$  la convergencia uniforme de  $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$  en  $D(z_0, r)$  implica que  $\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz$ , pero el teorema de Cauchy nos asegura que  $\int_{\gamma} f_n(z) dz = 0$  (el disco es simplemente conexo) y así deducimos que  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  para todo arco en  $D(z_0, r)$ , y el teorema de Morera nos asegura que  $f(z)$  es holomorfa en el disco  $D(z_0, r)$ . Cómo ésto es cierto para todo  $z_0 \in \mathcal{A}$ , deducimos la holomorfía en el abierto  $\mathcal{A}$ .

Ya hemos demostrado que la función  $f(z)$  es holomorfa, ahora debemos probar que  $f'_n(z)$  converge uniformemente en discos cerrados de  $\mathcal{A}$  con el límite uniforme dado por  $f'(z)$ . Dado un disco cerrado  $\overline{D(z_0, r)} \subset \mathcal{A}$  existe  $h > 0$  tal que  $\overline{D(z_0, r)} \subset \overline{D(z_0, r+h)} \subset \mathcal{A}$ .

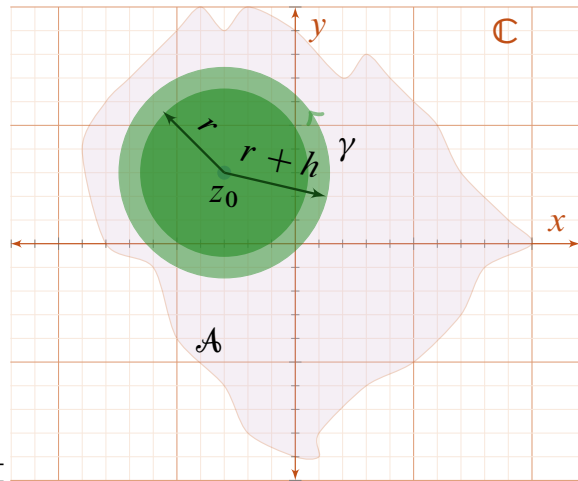
Efectivamente, para  $z \in \overline{D(z_0, r)}$  la función distancia de  $z$  al complementario  $\mathcal{A}^c$  es una función continua en un compacto que alcanza su mínimo, mayor que  $r$ ; cualquier disco de radio menor que esta distancia mínima nos valdrá. Sea  $\gamma$  la circunferencia de radio  $r+h$  centrada en  $z_0$ , frontera de  $D(z_0, r+h)$ . Dado que  $f_n(z)$  y  $f(z)$  son funciones holomorfas en  $\mathcal{A}$  las fórmulas de Cauchy para la derivada nos permiten escribir, para  $z \in \overline{D(z_0, r)}$ ,  $f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta$  y  $f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta$ . Por otro lado, dada la supuesta convergencia uniforme  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  en cada disco cerrado, y en particular en  $\overline{D(z_0, r+h)}$ , podemos asegurar que para cada  $\epsilon > 0$  seremos capaces de encontrar un entero positivo  $N$  tal que  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$  para todo  $n > N$  y para todo  $z$  en el disco  $\overline{D(z_0, r+h)}$ . En particular, seguirá siendo cierto en la frontera  $\gamma$  del disco. Luego tendremos las acotaciones

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\epsilon}{|\zeta-z|^{k+1}} |d\zeta|.$$

La menor distancia, que es  $h$ , entre un punto de  $D(z_0, r)$  y un punto de la circunferencia  $\gamma$  se alcanza cuando ambos están situados sobre el mismo rayo que parte de  $z_0$ . Por tanto,  $|\zeta-z| > h$  cuando  $\zeta \in \gamma$  y  $z \in D(z_0, r)$ , y podemos escribir

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{\epsilon}{h^{k+1}} \ell(\gamma) = k! \frac{r+h}{h^{k+1}} \epsilon$$

cuando  $n > N$  y  $z \in D(z_0, r)$ . Donde se deduce la convergencia puntual y en discos cerrados anunciada.  $\square$



Disco que contiene a un disco cerrado



**Ejemplo:** Estudiamos un caso de **convergencia normal pero no uniforme** en el disco unidad abierto. La serie  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  converge uniformemente en los discos  $\overline{D(0, r)}$  siempre que  $0 < r < 1$ . Efectivamente, se tiene  $\left| \frac{z^n}{n} \right| < M_n := \frac{r^n}{n}$  para  $z \in \overline{D(0, r)}$ . Como  $M_n < r^n$  y la serie geométrica  $\left( \sum_{n=0}^{\infty} r^n \right) - 1$  converge, también lo hace  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ , y por la prueba  $M$  de Weierstrass sabemos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  converge uniformemente en cada disco cerrado  $\overline{D(0, r)}$ ,  $r < 1$ . También converge puntualmente en el disco abierto  $D(0, 1)$ , ya que cualquier  $z \in D(0, 1)$ , pertenece a algún  $\overline{D(0, r)}$ , con  $r < 1$ . Pero no converge uniformemente en  $D(0, 1)$ . Supongamos convergencia uniforme en  $D(0, 1)$ , entonces la serie real  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  converge uniformemente en  $[0, 1]$ . Esto implica que para todo  $\epsilon > 0$  existe un entero positivo  $N$  tal que  $\frac{x^n}{n} + \dots + \frac{x^m}{m} < \epsilon$ , para toda pareja de enteros positivos  $n, m$ , con  $m > n > N$ , y todo  $x \in [0, 1]$ . Pero la serie armónica diverge, por lo que no cumple el criterio de Cauchy, esto es  $\frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N+m} > 2\epsilon$  para  $m$  suficientemente grande. Elijamos ahora un  $x$  tal que  $1 > x^{N+m} > 1/2$ , entonces  $\frac{x^N}{N} + \dots + \frac{x^{N+m}}{N+m} > x^{N+m} \left( \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N+m} \right) > \epsilon$ . Luego no hay convergencia uniforme en  $D(0, 1)$ . Pero si hay convergencia normal en  $D(0, 1)$ , ya que cualquier para cualquier disco cerrado  $\overline{D(z_0, \tilde{r})} \subset D(0, 1)$  siempre puedo encontrar un disco cerrado  $\overline{D(0, r)} \supset \overline{D(z_0, \tilde{r})}$ , en donde hemos visto que si hay convergencia uniforme. En definitiva, podemos aplicar el Teorema de Weierstrass para convergencia holomorfa, ya que  $f_n(z) = \frac{z^n}{n}$  es holomorfa en  $D(0, 1)$  y  $f'_n(z) = z^{n-1}$ , así que  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$  si  $z \in D(0, 1)$ , siendo la convergencia normal.



**IV.1.4. Orígenes de la convergencia uniforme** En 1847 el matemático alemán Philipp Ludwig von Siedel, estudiante de Dirichlet en Berlín y que posteriormente estuvo con Jacobi y con Neumann en Königsberg, se dio cuenta de un grave problema de la convergencia puntual, tal como la entiende Cauchy en su *Course d'Analyse*, cuando se aplica a funciones continuas. Seidel dice, en su artículo *Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Funktionen darstellen* (Abhandlungen Bayerische Akademie der Wissenschaften 5 (1847) 381–394) que “Uno encuentra en el 'Course d'Analyse algebräique... un teorema que asegura que una serie convergente cuyos miembros individuales son funciones de una cantidad  $x$  y continuas en una vecindad de un valor particular de  $x$ , es asimismo una función continua en ese entorno. Se sigue que series de este tipo no están adaptadas para representar funciones discontinuas en la vecindad de puntos donde ellas tienen sus valores de salto.” Y después de desarrollar esquemáticamente las ideas de Cauchy sigue diciendo que “Sin embargo, este teorema contradice que lo que Dirichlet nos ha mostrado, que, por ejemplo, las series de Fourier también convergen si uno las fuerza a representar funciones discontinuas —de hecho, la discontinuidad se encuentra frecuentemente en forma de aquellas series cuyos miembros son también funciones continuas... Cuando uno tiene la certeza de que la proposición no puede ser válida de forma general, entonces su demostración básicamente debe basarse en alguna suposición oculta. Cuando esto se somete a un análisis preciso, entonces no es difícil descubrir la hipótesis oculta. Entonces uno puede razonar hacia atrás que esto no puede ocurrir con series que representan funciones discontinuas”. El resultado de Seidel es el siguiente “Si uno tiene una serie convergente que representa una función discontinua de una cantidad  $x$ , cuyos miembros individuales son funciones continuas, entonces uno debe de ser capaz de dar valores de  $x$  en un entorno del punto donde la función salta para los que la serie converge arbitrariamente despacio.” Ese *arbitrariamente despacio*, es decir que allí se converge de una manera distinta de los puntos donde hay continuidad es lo que más tarde se llamaría ausencia de convergencia uniforme.



THÉORÈME II. — *Si les différents termes de la série*

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

*sont des fonctions de la variable imaginaire  $z$ , continues par rapport à cette variable pour les diverses valeurs de l'affixe  $z$  correspondantes aux divers points d'une aire  $S$  renfermée dans un certain contour, si d'ailleurs, pour chacune de ces valeurs, la somme*

$$u_n + u_{n+1} + \dots + u_n$$

*devient toujours infiniment petite, quand on attribue des valeurs infiniment grandes aux nombres entiers  $n$  et  $n' > n$ , la série (1) sera convergente, et la somme  $s$  de la série sera, entre les limites données, fonction continue de la variable  $z$ .*

#### Parráfos de Cauchy

*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (1853) 36 30-63*

*lieu à aucune exception. C'est ce que je vais expliquer en peu de mots").*

Fue Weierstrass el que definitivamente impulso la convergencia uniforme como una herramienta indispensable para el estudio de las funciones. Parece que estas ideas las pudo discutir con su maestro Christoph Gudermann, estudiante a su vez de Gauss en Göttinga. Gudermann después de ser maestro escolar en Kleve se fue a Münster, de 1839 a 1841, en donde recibió como pupilo de secundaria a Weierstrass, estudiando, entre otra cosas funciones elípticas y series de potencias, y enseñándolas, fue uno de los pioneros en ese campo. De hecho algunos de los trabajos más influyentes de Weierstrass en funciones de variable compleja que aparecieron a partir de 1857, aparecen explícitamente en los trabajos no publicados de su tiempo en Münster, bajo la tutela de Gudermann. Y la transformación de su idea inicial de función holomorfa o analítica como función derivable a la de función desarrollable en serie de potencias ocurrió en ese periodo.

Gudermann usaba la series de potencias para estudiar sus funciones favoritas las funciones elípticas, y estaba interesado en comparar los distintos "grados de convergencia" de esas series para distintos valores de las variables independientes. De hecho, en su artículo *Theorie der Modular-Funktionen und der Modular Integralen* de 1838, publicado en la revista de *Crelle*, se puede leer "tienen un tipo de convergencia que considerada globalmente es del mismo grado"

Fue en 1853 cuando Cauchy en su artículo *Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données*, introduce su criterio de convergencia uniforme, sin llamarla uniforme, Aunque reconoce que su resultado sobre la convergencia de funciones continuas en su *Course d'Analyse...* es erróneo, también dice, en su descarga, "Además, es fácil ver cómo debemos modificar el enunciado del teorema, para que no haya ninguna excepción. Esto es lo que voy a explicar en pocas palabras" ("Au reste, il est facile de voir comment on doit modifier l'énoncé du théorème, pour qu'il n'y ait plus

252 15. Gudermann, *Theorie der Mod.-Funct. und der Mod.-Integr.* §. 60.

**nen Reihen einen im Ganzen gleichen Grad der Convergenz haben, welcher nicht von der Größe der Amplituden  $\varphi$  und  $\psi$ , sondern lediglich von der Größe des Moduls  $k$  oder  $k'$  abhängt. Ist der Modul der gegebenen Amplitude  $< \sin \frac{\pi}{4}$ , so wird man sie  $= \varphi = \text{am } u$  setzen, und also**

#### Párrafo de Gudermann

*Journal für die reine und angewandte Mathematik* 18 (1838) 220-258

(*einen im Ganzen gleichen Grad der Convergenz*). La suma parcial se aproxima al valor de la serie de forma similar en los diferentes puntos del intervalo, de forma global. Claramente, a pesar de que probablemente fuera el origen de la idea de convergencia uniforme aún estaba lejos de nuestras ideas actuales. Fue Weierstrass quien construyó ese edificio conceptual y ya en 1841, hablaba de *convergencia uniforme* (*gleichmässig Convergenz*). Por ejemplo, nos dice en *Zur Theorie der Potenzreihen* (en Werke, I, 67–74) lo siguiente: “*Debido a que la serie de potencias estudiada . . . . converge de manera uniforme, dada una cantidad positiva arbitraria  $\delta$ , un número finito de términos de la serie se pueden descartar de modo que la suma de todos los términos restantes es, para cada valor en el dominio especificado . . . en valor absoluto  $< \delta$ .*”

La convergencia uniforme fue objeto de un profunda discusión a lo largo de los cursos que Weierstrass impartió en Berlín. En particular, en su artículo *Zur Functionenlehre* de 1880, en su primera anotación a pie de página podemos leer “*Una serie infinita  $\sum_{v=0}^{\infty} f_v(x)$  cuyos miembros son funciones de una cantidad de variables arbitraria converge uniformemente en una cierta parte (B) de su región de convergencia, si supuesta dada una cantidad positiva arbitrariamente pequeña  $\delta$  se puede determinar un número natural  $m$ , tal que el valor absoluto de la suma  $\sum_{v=n}^{\infty} f_v(x)$  es menor que  $\delta$  para todo valor de  $n$  que sea  $\geq m$ , y para toda colección de valores de las variables pertenecientes a la región B.*” No sólo esto, inmediatamente, y ya en el texto principal, dice: “*Por otra parte, supongamos dada una magnitud positiva  $\rho$  para un cierto punto  $a$  de esta región, tal que la serie converge uniformemente para todos los valores de  $x$  correspondientes a la condición  $|x - a| < \rho$ , entonces diremos que la serie converge uniformemente en un entorno del punto  $a$* ”. Vemos como introduce el concepto de convergencia uniforme en discos cerrados o de convergencia normal. Un poco más adelante escribe su test  $M$ .

1.

Es seien unendlich viele rationale Functionen einer Veränderlichen  $x$  in bestimmter Aufeinanderfolge gegeben:

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$$

Die Gesammtheit derjenigen Werthe von  $x$ , für welche die Reihe

$$\sum_{v=0}^{\infty} f_v(x)$$

einen endlichen Werth hat, nenne ich den Convergenzbereich dieser Reihe. Lässt sich ferner für eine bestimmte Stelle  $a$  dieses Bereichs eine positive Grösse  $\varrho$  so annehmen, dass die Reihe für die der Bedingung

$$|x - a| \leq \varrho$$

entsprechenden Werthe von  $x$  gleichmässig<sup>1)</sup> convergirt, so will

<sup>1)</sup> Eine unendliche Reihe

$$\sum_{v=0}^{\infty} f_v,$$

deren Glieder Functionen beliebig vieler Veränderlichen sind, convergirt in einem gegebenen Theile (B) ihres Convergenzbereichs gleichmässig, wenn sich nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse  $\delta$  stets eine ganze Zahl  $m$  so bestimmen lässt, dass der absolute Betrag der Summe

$$\sum_{v=n}^{\infty} f_v$$

720

Gesamtsitzung

ich sagen, die Reihe convergire gleichmässig in der Nähe der Stelle  $a$ . Die Grösse  $\varrho$  hat dann eine obere Grenze; ist diese  $R$ , so möge — in Beziehung auf die betrachtete Reihe — die Gesammtheit derjenigen Werthe von  $x$ , für welche

$$|x - a| < R$$

ist, die Umgebung von  $a$ , und  $R$  deren Halbmesser genannt werden. Nimmt man in dieser Umgebung eine Stelle beliebig an, so ist klar, dass auch in der Nähe der letztern die Reihe gleichmässig convergirt. Daraus ergibt sich, dass die Gesammtheit der Stellen, in deren Nähe die Reihe gleichmässig convergirt, in der Ebene der Veränderlichen  $x$  durch eine einfache<sup>1)</sup> Fläche repräsentirt wird, welche aber aus mehreren, von einander getrennten Stücken bestehen kann.

Angenommen nämlich, es gebe überhaupt Stellen der in Rede stehenden Art, deren Gesammtheit mit  $A$  bezeichnet werde, so denke man sich eine von ihnen willkürlich angenommen, in der Umgebung derselben eine beliebige zweite, in der Umgebung die-

für jeden Werth von  $n$ , der  $\geq m$ , und für jedes dem Bereiche B angehörige Werthsystem der Veränderlichen kleiner als  $\delta$  ist. Soll die Reihe in dem-

### Párrafos de Weierstrass

Monatsberichte der Königlich Preuß. Akademie der Wissenschaften zu  
Berlin. (1880) 719-743.

## §IV.2. Series de potencias y desarrollos de Taylor



ERIES de funciones aparecen en diferentes y variados contextos. Basta con recordar las series de Fourier, los desarrollos en autofunciones, y las series de Taylor. Nos centramos ahora en un caso más sencillo, pero también profundo en sus implicaciones en el estudio de funciones de variable compleja. Abordamos el caso en que las funciones son de la forma  $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ , donde  $a_n \in \mathbb{C}$  y  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Es decir, manipularemos series de potencias centradas en cierto punto.

### Función analítica

Una función  $f(z)$  se dice analítica en punto  $z_0$  si se puede representar como una serie de potencias  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , que converge en algún entorno de  $z_0$ . Una función es analítica en un abierto  $\mathcal{A}$  si es analítica en cada uno de sus puntos.

**IV.2.1. ¿Cómo convergen las series de potencias?** El siguiente resultado es vital en toda la teoría.

### Lema de Abel–Weierstrass

Sea  $r_0 > 0$  y supongamos que  $\{|a_n|(r_0)^n\}_{n=0}^{\infty}$  está acotada. Entonces, la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  converge absolutamente y uniformemente en el disco cerrado  $\overline{D}(z_0, r)$ , para todo  $r < r_0$ .



DEMOSTRACIÓN. Como la sucesión  $\{|a_n|(r_0)^n\}_{n=0}^{\infty}$  está acotada tenemos que existe  $C > 0$  tal que  $|a_n|(r_0)^n \leq C, \forall n \in \mathbb{Z}_+$ . Por tanto, siempre que  $z \in \overline{D}(z_0, r)$ , podemos escribir

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n|r^n \leq M_n \quad M_n := C \left(\frac{r}{r_0}\right)^n.$$

Pero la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  es convergente cuando  $r < r_0$ , y aplicando la prueba  $M$  de Weierstrass deducimos el resultado.  $\square$

### Convergencia normal de series de potencias

Para toda serie de potencias  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , existe un único  $R \geq 0$ , llamado radio de convergencia, tal que

- i) Si  $z \in D(z_0, R)$  la serie  $f(z)$  converge, siendo a convergencia absoluta y uniforme en todos los discos cerrados  $\overline{D}(z_0, r)$  con  $r < R$ .
- ii) Si  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(z_0, R)$  la serie  $f(z)$  diverge.



DEMOSTRACIÓN. Si existe  $R$  satisfaciendo estas condiciones debe ser único, ya que de existir dos distintos  $R_1$  y  $R_2$ , con  $R_1 < R_2$ , tendríamos una región  $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$  en donde

la serie diverge y converge a la vez, absurdo. Consideremos

$$R := \sup \left\{ r \geq 0 : \{ |a_n| r^n \}_{n=0}^{\infty} \text{ es una sucesión acotada} \right\}.$$

El lema de Abel–Weierstrass implica para todo  $r_0$ , con  $r_0 < R$ , que la serie de potencias converge absoluta y uniformemente en  $\overline{D(z_0, r)}$ , siempre que  $r < r_0 < R$ . ¿Qué ocurre si  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, R)}$ ? Ahora tenemos  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z - z_0| > R$ , así que la sucesión  $\{ |a_n| |z - z_0|^n \}_{n=0}^{\infty}$  no está acotada, haciendo imposible que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (z - z_0)^n = 0$ , y por tanto la serie de potencias es divergente.  $\square$

### Observaciones:



- i) Al disco  $D(z_0, R)$  se le denomina disco de convergencia de la serie de potencias.
- ii) Cuando  $R = +\infty$  tenemos que la serie de potencias converge en todo  $\mathbb{C}$ , en tanto que si  $R = 0$  la serie diverge en todo  $\mathbb{C}$ . Para situaciones intermedias, tenemos convergencia en un disco centrado en  $z_0$ .
- iii) Dado  $R$ , el radio de convergencia de la serie, sabemos que para  $0 \leq r < R$  se tendrá  $r^n |a_n| \leq C$ , para algún  $C > 0$ . Estas se conocen como *estimaciones de Cauchy*. Y si somos capaces de encontrar un  $r$  y un  $C$  verificando una acotación de Cauchy, sabremos que  $R \geq r$ .
- iv) Vemos que la convergencia de la serie de potencias es una convergencia normal en el disco de convergencia.
- v) En la demostración hemos visto que el radio de convergencia es  $R := \sup \left\{ r \geq 0 : \{ |a_n| r^n \}_{n=0}^{\infty} \text{ es una sucesión acotada} \right\}$ . También, lo podemos expresar como  $R := \sup \left\{ r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$ , que aunque parece más exigente no lo es. Efectivamente, si  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$  entonces claramente  $\{ |a_n| r^n \}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión acotada. Para comprobar el inverso basta con recordar que para  $r < R$  se tiene convergencia absoluta en los discos  $\overline{D(z_0, r)}$ , por tanto  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$  converge.

### IV.2.2. Series de potencias y holomorfía

#### Holomorfía de las series de potencias

Una serie de potencias es holomorfa en el interior de su disco de convergencia.



DEMOSTRACIÓN. Recordando el Teorema de Weierstrass de convergencia holomorfa y el resultado recién demostrado sobre la convergencia normal de las series potencias deducimos inmediatamente que la serie de potencias es una función holomorfa en el interior de su disco de convergencia.  $\square$

### Derivadas de las series de potencias

Las derivadas de la serie de potencias  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  en su disco de convergencia  $D(z_0, R)$  son las series de potencias

$$(15) \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} (n)_k a_{n+1} (z - z_0)^{n-k}, \quad (n)_k := n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1),$$

con discos de convergencia dados por  $D(z_0, R)$ , idénticos al de la serie  $f(z)$ . Los coeficientes de la serie de potencias se pueden calcular de acuerdo con

$$(16) \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$



**DEMOSTRACIÓN.** Del Teorema de Weierstrass sobre la convergencia holomorfa sabemos que  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$  converge en  $D(z_0, R)$ . Podría pasar que la derivada convergería en regiones mayores. Veamos que esto no ocurre. Supongamos pues que la serie derivada tiene un radio de convergencia  $R' > R$ , donde  $R' := \sup \{r \geq 0 : \{n|a_n|r^{n-1}\}_{n=0}^{\infty} \text{ es una sucesión acotada}\}$ . Luego podemos escoger  $R < r < R'$  con  $\{n|a_n|r^n\}_{n=0}^{\infty}$  no acotada y  $\{n|a_n|r^{n-1}\}_{n=0}^{\infty}$  acotada. Pero, si existe  $C'$  tal que se da la estimación de Cauchy  $n|a_n|r^{n-1} \leq C'$ , concluiríamos que  $|a_n|r^n \leq \frac{C'r}{n} \leq C'r$ , y por ello  $C = C'r$  daría una estimación de Cauchy para la serie de potencias original con  $r > R$ , lo que es contradictorio.

Las derivadas sucesivas y sus discos de convergencia se encuentran por inducción. Por último, al evaluar (15) en  $z = z_0$  obtenemos (16).  $\square$



**Observaciones** El número  $(n)_k$  se conoce símbolo de Pochhammer o factorial descendente.

### IV.2.3. Unicidad y fórmulas para el radio de convergencia

#### Unicidad de las series de potencias

Dos series de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$  que coinciden en algún disco  $D(z_0, r)$  con  $r > 0$  deben ser la misma; i.e.,  $a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{Z}_+$ .



**DEMOSTRACIÓN.** Es una consecuencia inmediata de (16), que diría  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$  y  $b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ , y por ende  $a_n = b_n$ .  $\square$

### Criterios y radios de convergencia

Sea la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ .

- I) **Criterio del cociente:** Si existe el límite de la secuencia de cocientes consecutivos  $\left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\}_{n=0}^{\infty}$ , entonces

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

- II) **Criterio de la raíz:** Si existe el límite de la secuencia de raíces  $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}_{n=0}^{\infty}$ , entonces

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$



**DEMOSTRACIÓN.** Hemos observado anteriormente  $R := \sup \{ r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ converge} \}$ . La aplicación del criterio de d'Alambert para series numéricas conduce a discriminar según  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| r^{n+1}}{|a_n| r^n} \gtrless 1$ , para la divergencia/convergencia. Aplicando el criterio de la raíz para series numéricas la discriminación la da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| r^n} \gtrless 1$ .  $\square$

**Observaciones:** El matemático francés Jacques Hadamard introdujo, a principios del SXX, una mejora al criterio de Cauchy (aparentemente Hadamard no conocía el criterio de la raíz) el llamado criterio de **Cauchy–Hadamard**:  $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|^{1/n})$ .

**Ejemplos:** Analicemos diferentes ejemplos de series de potencias y sus discos de convergencia

- I) Consideremos la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{2n}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ . Los coeficientes de la serie de potencias son  $a_{2n} = a^n$  y  $a_{2n+1} = 0$ . Por ello, el criterio del cociente no se puede aplicar directamente. En vez de esta serie, podemos estudiar  $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \zeta^n$ , con coeficientes  $a_n = a^n$  y donde hemos usado  $\zeta = z^2$ . Cómo  $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{|a|}$ , el disco de convergencia es  $\{ \zeta : |\zeta| < \frac{1}{|a|} \}$ , en donde la serie suma  $\frac{1}{1-a\zeta}$ . Dado que  $\zeta = z^2$ , concluimos que  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{2n} = \frac{1}{1-az^2}$  para  $|z| < \frac{1}{\sqrt{|a|}}$ .
- II) Estudiamos ahora  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} z^n$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , nos queda que  $R = \frac{1}{0} = \infty$ . Luego la serie converge en todo  $\mathbb{C}$ . Si hubiéramos puesto  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n} z^n$ , hubiéramos obtenido  $R = 0$  y la serie diverge en todo el plano.
- III) Aplicamos a la serie de potencias  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{7n^3 + 2in^2 - 2 + 5i}{in^3 + 2n^2} \right)^n (z - 2i)^n$  el criterio de la raíz.

Se tiene  $\sqrt[n]{\left| \frac{7n^3 + 2in^2 - 2 + 5i}{in^3 + 2n^2} \right|^n} = \left| \frac{7n^3 + 2in^2 - 2 + 5i}{in^3 + 2n^2} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 7$ , así que el disco de convergencia es  $D(2i, \frac{1}{7})$ .

**IV.2.4. El Teorema de Taylor** Hemos visto que las funciones analíticas son holomorfas, vamos a demostrar que el inverso también es cierto: las funciones holomorfas son analíticas.

### Teorema de Taylor

Sean un abierto  $\mathcal{A}$ ,  $z_0 \in \mathcal{A}$ ,  $r_0 > 0$  tal que  $D(z_0, r_0) \subset \mathcal{A}$  y una función  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Entonces,

i) La serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge en  $D(z_0, r)$ .

ii) En  $D(z_0, r_0)$  se tiene el desarrollo de Taylor de  $f(z)$  alrededor de  $z_0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$



#### DEMOSTRACIÓN.

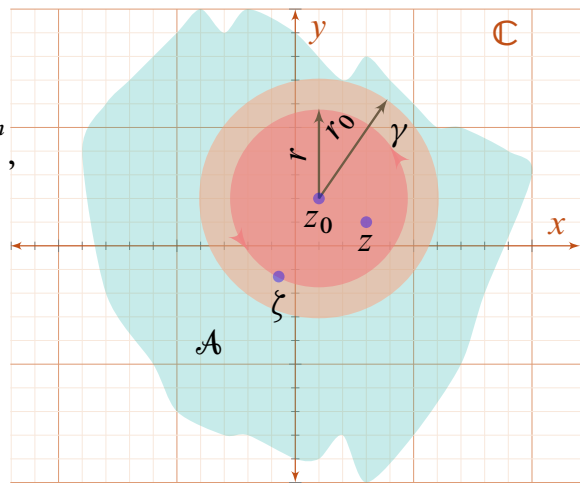
Consideremos un disco  $D(z_0, r)$  con  $r < r_0$  y usemos su frontera  $\gamma^* = \partial D(z_0, r)$ , recorrida una vez en sentido antihorario, como arco de integración  $\gamma$ . Entonces, por la fórmula integral de Cauchy sabemos que  $f(z) =$

$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  para  $z \in D(z_0, r)$ . Escribimos  $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$ , que recordando la serie

geométrica conduce a  $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$ ,

que converge uniformemente siempre que  $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ , i.e.,  $z \in D(z_0, r)$ , que es nuestro caso. También, como  $f(\zeta)$  es continua en  $\gamma^*$ , un conjunto acotado, se puede asegurar que existe  $M > 0$  tal que  $|f(\zeta)| < M$ ,  $\forall \zeta \in \gamma^*$ . Por tanto,  $\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \right| \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^n < \frac{M}{r} \frac{|z - z_0|^n}{r^n}$

y la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \right| \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^n$  converge siempre que  $|z - z_0| < r$ . Así que, para cada  $z \in D(z_0, r)$ , podemos afirmar que la serie  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}$  converge uniformemente y absolutamente para  $\zeta \in \gamma^*$ . Por ende, podemos integrar término a término



Disco de convergencia  $D(z_0, r_0)$  y arco  $\gamma$

Por ende, podemos integrar término a término

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \end{aligned}$$



en donde hemos recordado las fórmulas de Cauchy para las derivadas.  $\square$

Y llegamos a uno de los grandes hitos de las funciones de una variable compleja, los conceptos de analiticidad y de holomorfa son equivalentes en este contexto:

### Holomorfa $\iff$ Analítica

Una función es analítica en una región  $\mathcal{A}$  si y sólo si es holomorfa.

Este increíble resultado es el que llevo a Weierstrass y a otros autores a construir el cuerpo del análisis en variable compleja sobre el concepto de analiticidad y evitar la aproximación inicial de Cauchy y de Riemann de cimentar el edificio teórico sobre la derivabilidad o holomorfa, esto es en las ecuaciones de Cauchy–Riemann. La guía de Weierstrass fue siempre el rigor, y en ese momento su aproximación era la más rigurosa. Eso ya no es cierto hoy en día y ambas aproximaciones son completamente equivalentes desde el punto de vista del rigor matemático.

### Series de Taylor habituales

$$\text{I) } \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, z \in D(0, 1).$$

$$\text{II) } \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, z \in D(0, 1).$$

$$\text{III) } \frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)n z^n, z \in D(0, 1).$$

$$\text{IV) } e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}.$$

$$\text{V) } \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C}.$$

$$\text{VI) } \operatorname{cos} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C}.$$

$$\text{VII) } \operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, z \in D(0, 1).$$

$$\text{VIII) } (1+z)^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} z^n, z \in D(0, 1)$$

(si  $\alpha \notin \mathbb{N}$  y  $z \in \mathbb{C}$ ),

Aquí  $(\alpha)_n = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$  es el símbolo de Pochhammer.

## §IV.3. Historias sobre las series de potencias



RAZAR el devenir de las series de Taylor es complicado, en cualquier caso la tarea reservada a Taylor no es la del hallazgo y descubrimiento sino la del proselitismo, la consolidación y extensión.

**IV.3.1. Madhava de Sangamagrama (circa 1350 – circa 1425)** A este matemático indio se le puede atribuir el descubrimiento de las series de potencias de las funciones trigonométricas. Él fue el fundador de la escuela de astronomía y matemáticas de Kerala, en el

sur de la India. En los versos conservados por tradición oral de la escuela de Kerala, se pueden encontrar las series  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ ,  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ ,  $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$  y también la serie numérica  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ . Nilakantha Somayaji (1444-1544) en su *Aryabhatia Bhashya* ya reconoce la existencia de las series del seno y el coseno atribuyéndoselas a Madhava. Recogió, Nilakantha, en versos sánscritos, dichas series en su obra *Tantrasamgraha*, que también aparecen en un comentario de su obra *Tantrasamgraha-vyakhya* por Sankara Variar (circa 1500-1560). Las series no se demuestran, sólo se muestran. Pero posteriormente, Jyesthadeva (circa 1500-circa 1610) incluyó una prueba en su trabajo *Yuktidipika* escrito en Malayalam, una lengua hablada en Kerala. Los trabajos de la escuela de Kerala fueron mencionados brevemente en el tratado *Kala Sankalita* de J. Warren y tratados con más profundidad por el inglés C. M. Whish en 1835. Por ejemplo, en los versos 2440 y 2441 se puede leer *Multiplifica el arco por el cuadrado del arco y toma el resultado de repetirlo (cualquier número de veces). Divide (cada uno de los numeradores anteriores) por los cuadrados de los números pares sucesivos aumentado por ese número y multiplicado por el cuadrado del radio. Coloca el arco y los sucesivos resultados obtenidos uno por debajo del otro, y sustrae cada uno de los anteriores. Estos juntos dan el jiva, como se recopilan en el versículo que comienza con "vidvan", etc.* Este verso se traduce a  $r \sin \frac{x}{r} = x - x \cdot \frac{x^2}{(2^2+2)r^2} + x \cdot \frac{x^2}{(2^2+2)r^2} \cdot \frac{x^2}{(4^2+4)r^2} - \dots$ , que para  $r = 1$  da la conocida serie de Taylor del seno. En versos similares se tratan los otros casos mencionados, 2442 y 2443 versan sobre la serie del coseno, y los 2206-2209 versan sobre la serie del arcotangente. En ellos se obtienen las expresiones  $r \left(1 - \cos \frac{x}{r}\right) = r \frac{x^2}{(2^2-2)r^2} - r \frac{x^2}{(2^2-2)r^2} \cdot \frac{x^2}{(4^2-4)r^2} + \dots$  y  $r \arctan \left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1} \cdot \frac{ry}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{ry^3}{x^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{ry^5}{x^5} - \dots$ , donde  $\frac{y}{x} < 1$ .

गणितपादः । ५५

“इष्टदोःकोटिधनुषोः स्वसमीपसमीरिते ।  
ज्ये द्वे सावयवे न्यस्य कुर्याद्नाधिकं धनुः ॥  
द्विमतल्लिसिकासैकशरशैलशिखीन्दवः ।  
न्यस्याच्छेदाय च मियस्तत्संस्करविधित्सया ॥  
छित्त्वेकां प्रक्षिपेज्जघ्नात् तद्धनुष्यधिकोन के ।  
अन्यस्यामय तां द्विशां तथास्यामिति संस्कृतिः ॥  
इति ते कृतसंस्कारे स्वगुणौ धनुषोस्तयोः ।”

इति । तेनैव विबुधनेत्रादिना प्रोक्तपरिधिव्यासाभ्यां चक्रकलात्मकपरिधि-  
पादचतुर्विंशतिं चापखण्डे समानीय पठिता यास्तत्परान्ता ज्यार्षिषिग्धाः,  
“श्रेष्ठं नाम वरिष्ठानां हिमाद्रिवेदभावनः ।  
तपनो भानुसूक्तज्ञो मध्यमं विद्धि दोहनम् ॥  
धिगाज्योनाशनं कष्टं छन्नभोगाशयाम्बिका ।  
सृगाहारो नरेशोयं धीरो रणजयोत्सुकः ॥  
मूलं विशुद्धं नाळस्य गानेषु विरळा नराः ।  
अशुद्धिगुणा चारश्रीः शङ्कुकर्णो नगेश्वरः ॥  
तनूजो गर्भजो मित्रं श्रीमानत्र सुखी सखे ! ।  
शशी रात्रौ हिमाहारो वेगज्ञः पथि सिन्धुरः ॥  
छायालयो गजो नीलो निर्मलो नान्ति सत्कुले ।  
रात्रौ दर्पणमभ्राङ्गं नागस्तुङ्गनखो वली ॥  
धीरो युवा कथालोलः पूज्यो नारीजनैर्भगः ।  
कन्यागारे नागवल्ली देवो विश्वस्थली भृगुः ॥  
तत्परदिकलान्तास्ता महाज्या माधवोदिताः ।”

ता एवेह सावयवा ज्या विवक्षिताः । ताभिरर्षिः प्रदेशजयोः दोःकोटिजीव-  
योरानपनमिह प्रदर्श्यते । तत्रेष्टदोर्धनुषः कोटिधनुषश्च स्वैस्वसमीपचाप-  
सन्धिपठितां भुजाज्यां कोटिज्यां च सावयवे कचिद् विन्यस्य तयोरुभयोः  
साधारणमूनाधिकधनुः कुर्यात् । कथं पुनरुभयोः साधारण्यं तस्य ।

१. 'प्रा' क. पाठः. २. 'धि', ३. 'स्व' क. पाठः.

Versos en *Yuktidipika* sobre sen y cos



**James Gregory (1638-1675)**

**IV.3.2. James Gregory (1638-1675)** La historia de este matemático escocés merece ser contada. Su interés por las matemáticas le viene de estirpe, ya hemos hablado de su tío materno Alexander Anderson, que fue discípulo y traductor de la obra de Viète. Gregory publicó a los 24 años de edad el tratado *Optica Promota* en donde podemos encontrar una de las primeras descripciones por escrito de un telescopio reflectante. Para la publicación de esta obra viajó a Londres en 1663 donde conoció al contable Collins, que se convirtió en su amigo y con el que mantenía una frecuente comunicación epistolar. Debemos mencionar que Collins estaba en contacto con otros matemáticos como Newton y John Pell, lo que ayudó en las investigaciones de Gregory. Mr Gregory marcha a Italia en 1664, en donde está cuatro años aprendiendo geometría con Stefano degli Angelo y escribe dos libros, en el primero discute conceptos como la convergencia, en tanto que en el segundo *Geometriae Universalis* (1668) encontramos una versión geométrica del teorema fundamental del cálculo. Cuando Gregory regresa a Londres en el

verano de 1668 su amigo Collins le pone al día de los últimos avances de los matemáticos que trabajaban en Inglaterra. En particular, le menciona el descubrimiento de la serie de Mercator:  $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$ . Nikolaus Mercator (*circa* 1620-1687), cartógrafo<sup>4</sup> nacido en Alemania pero que marchó a Inglaterra en 1657, publicó en 1668 dicho resultado en el libro *Logarithmo-technica*, aunque probablemente lo hubiera conocido con anterioridad.<sup>5</sup> Esto condujo a Gregory a escribir en 1668 el libro *Geometriae Pars Universalis* sobre la función logarítmica y sus aplicaciones. En particular, da los primeros resultados sobre las primitivas de  $\sec x$  y  $\tan x$ . Por ejemplo, encuentra que  $\int_0^\theta \sec \phi \, d\phi = \log \tan(\frac{\pi}{4} + \theta)$ , de mucho interés por sus aplicaciones en la navegación marítima.<sup>6</sup> También parece, de la correspondencia de Newton, que alrededor de 1668 Gregory había redescubierto el teorema binomial en relación a la serie de  $\sqrt{1+x}$ .

<sup>4</sup>No confundir con Gerhard Mercator (1512-1594) y autor del *Gran Mapa del Mundo*.

<sup>5</sup>Mercator estudiaba la cuadratura (determinación del cuadrado equivalente en superficie, i.e. hallar la superficie) de la hipérbola  $y(1+x) = 1$ , como sabía que  $\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ , resolvió el problema desarrollando la serie geométrica  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$  e integrando término a término. En 1669 Wallis determinó la región de convergencia de la serie.

<sup>6</sup>La proyección de Mercator (de Gerhard) se empezó a usar en las cartas de navegación. En dichos mapas la ordenada correspondiente a una determinada latitud  $\theta$ , corresponde, como hizo notar el matemático Wright de Cambridge en *Certain Errors in Navigation corrected* en 1599, a  $c \int_0^\theta \sec \theta \, d\theta$  con  $c$  un factor de escala que se determina según la carta usada. El libro contenía también una tabla de las latitudes correspondientes a la adición de secantes consecutivas de minuto en minuto. Henry Bond, en los 1640, observa que los valores de la tabla de Wright se pueden obtener tomando el logaritmo de  $\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})$ . Nikolaus Mercator ofreció en 1666 una recompensa por demostrar que estas *matemáticas experimentales* eran correctas. Siendo Collins un experto en navegación atrajo la atención de su amigo Gregory hacia el problema. Debemos mencionar en este punto que, aunque parezca mentira, la integral  $\int \sec x \, dx$  fue la primera en hallarse, no por Gregory, sino anteriormente por Thomas Herriot (1560-1621) que la determinó usando una proyección estereográfica de un loxodromo esférico. El loxodromo esférico es una espiral tridimensional, que es conocida como *curva de los navegantes* o *curva de los rumbos* ya que da el camino más corto entre dos puntos sobre la esfera.

Sin embargo, dicha serie era conocida en 1620 por Henry Briggs como muestran sus tablas de logaritmos. El 5 de septiembre de 1670, Gregory relata a Collins algunos hallazgos relevantes y en particular “hallar el seno teniendo el arco y encontrar el número teniendo el logaritmo”. Lo último es equivalente a la serie de Newton; esto es, si se toma como  $x$  el logaritmo de  $y$ ,  $x = \log y$ , en la base  $1 + d$ , entonces  $y = (1 + d)^x$  y Gregory escribe  $(1 + d)^x = 1 + xd + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}d^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}d^3 + \dots$ . El 19 de diciembre de 1670, Collins informa a Gregory de que Newton ha encontrado las series del  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\arcsin x$  y  $x \cot x$ , y que además posee un método general, lo que lleva a Gregory a realizar un esfuerzo adicional en ese sentido. Parece que tiene éxito, y el 15 de febrero de 1671 le escribe a Collins “As for Newton’s universal method, I imagine that I have some knowledge of it, both as to geometrik and mechanik curves, however I thank you for the series ye sent me and send you the following in requital”. Gregory envía a Collins las series de  $\arctan x$ ,  $\tan x$ ,  $\sec x$ ,  $\log \sec x$ ,  $\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ ,  $\arcsin(\sqrt{2}e^x)$  y  $2 \arctan \tanh \frac{x}{2}$ . Pero Gregory, no es que hubiera encontrado la serie binomial de Newton, sino más bien la serie de Taylor que reencontraría Brook Taylor unos 40 años más tarde, del que hablaremos después. En la creencia de que efectivamente había redescubierto el método de Newton no lo publicó. Esto quedó enterrado en la biblioteca de la universidad de St Andrews hasta que en los años 30 del siglo pasado Herbert Turnbull encontró y estudió exhaustivamente la correspondencia de Gregory. Aunque en la carta del 15 de febrero no aclara como llega esas series—la carta fue reproducida en 1841 por Rigaud en la obra *Correspondence of Scientific Men of the Seventeenth Century*—, si que se ha encontrado en los huecos de otra carta a Gregory de un tal Gedeon Shaw (librero), fechada el 29 de enero de 1671. La anotaciones de Gregory contienen las derivadas sucesivas, hasta ordenes 7 y 8, de la tangente que es una clara indicación de que Gregory conocía la serie de Taylor. Por ejemplo, para la  $\tan \theta$ , él escribe  $m = y$ ,  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  y así sucesivamente, y  $q = r \tan \theta$  y llega a lo siguiente

- I)  $m = q$
- II)  $m = r + \frac{q^2}{r}$

*Extract\* of a letter from J. Gregory to Collins.*

In his letter of the 15th of Feb. 1671.

$$\text{Sit Radius} = r$$

$$\text{Arcus} = a$$

$$\text{Tangens} = t$$

$$\text{Secans} = s$$

$$\text{Erit } a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \&c.$$

$$\text{Eritque } t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{3233a^9}{181440r^8} + \&c.$$

$$\text{Et } s = r + \frac{a^2}{2r} + \frac{5a^4}{24r^3} + \frac{61a^6}{720r^5} + \frac{277a^8}{8064r^7} + \&c.$$

$$\text{Sit nunc tangens artificialis} = t$$

$$\text{et secans artificialis} = s$$

$$\text{et integer quadrans} = q$$

$$\text{Erit } s = \frac{a^2}{2r} + \frac{a^4}{12r^3} + \frac{a^6}{45r^5} + \frac{17a^8}{2520r^7} + \frac{3233a^{10}}{1814400r^9} + \&c.$$

$$\text{Sit } 2a - q = e$$

$$\text{Erit } t = e + \frac{e^3}{6r^2} + \frac{5e^5}{24r^4} + \frac{61e^7}{5040r^6} + \frac{277e^9}{72576r^8} + \&c.$$

$$\text{Sit nunc secans artificialis } 45^\circ = s.$$

$$\text{Sitque } s + L \text{ secans artificialis ad libitum.}$$

$$\text{Erit ejus arcus} =$$

$$\frac{q}{2} + L - \frac{L^2}{r} + \frac{L^3}{3r^2} - \frac{7L^4}{3r^3} + \frac{14L^5}{3r^4} - \frac{452L^6}{45r^5} + \&c.$$

$$\text{Eritque}$$

$$2a - q = t - \frac{t^3}{6r^2} + \frac{t^5}{24r^4} - \frac{61t^7}{5040r^6} + \frac{277t^9}{72576r^8} - \&c.$$

You shall here take notice that the radius artificialis = 0: and that when you find  $q > 2a$ , or the artificial secant of  $45^\circ$  to be greater than the given secant, to alter the signs, and go on in the work according to the ordinary precepts of Algebra.

\* In Collins's handwriting.

### Carta de Gregory a Collins 15/2/1671

Stephen Peter Rigaud, *Correspondence of Scientific Men of the Seventeenth Century* (1841)

- III)  $m = 2q + \frac{2q^3}{r^2}$
- IV)  $m = 2r + \frac{8q^2}{r} + \frac{6q^4}{r^3}$
- V)  $m = 16q + \frac{40q^3}{r^2} + \frac{24q^5}{r^4}$
- VI)  $m = 16r + \frac{136q^2}{r} + \frac{240q^4}{r^3} + \frac{120q^6}{r^5}$
- VII)  $m = 272q + 987\frac{q^3}{r^2} + 1680\frac{q^5}{r^4} + 720\frac{q^7}{r^6}$
- VIII)  $m = 272r + 3233\frac{q^2}{r} + 11361\frac{q^4}{r^3} + 13440\frac{q^6}{r^5} + 5040\frac{q^8}{r^7}$

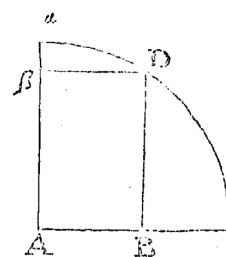
de donde es evidente que cada derivada se obtiene de la anterior multiplicando la derivada de ésta con respecto a  $q$  por el factor  $r + \frac{q^2}{r}$ . Usando  $a = r\theta$  Gregory halla la serie  $r \tan \theta = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{3233a^9}{181440r^8} + \dots$  que comunica a Collins. La suposición de que Gregory conocía la serie de Taylor no sólo se basa en la fecha de la carta de Gedeon Shaw, donde escribe sus cuentas privadas, y la fecha de la carta a Collins, y en el hecho de que escriba hasta ocho términos de las series de potencias de siete funciones, y de que en sus cuentas calcula justo ocho derivadas, sino también en una pequeña sutileza. ¡En la séptima derivada de la tangente comete un error! No es 987 sino 1232, que a su vez conduce a un error en la octava derivada, no es 3233 como aparece arriba sino 3968. Tenemos dos errores en las derivadas. Estos errores en las derivadas son justo los errores en la serie que Gregory envía a Collins. Por tanto, a pesar de que no lo publicará en la creencia de que era el mismo método binomial de Newton —Sir Isaac lo publicaría después de la muerte de Gregory— si que Mr Gregory había descubierto la serie de Taylor décadas antes que Taylor. En cualquier caso, de haber hallado las series de Taylor, cómo parece, no hay ningún indicio de la prueba de la misma.

A modo de coda, el método de Newton era bastante complicado, ya que involucraba la inversión de series, la serie binomial, la integración término a término y la llamada división larga. En 1669, escribió *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* que envió a publicar a la Royal Society pero ¡fue rechazado! Este trabajo fue uno de los pilares fundacionales del cálculo de fluxiones y de las nuevas matemáticas de Isaac Newton. Sólo

ejemplos para las funciones trigonométricas y ‘desarrollo del binomio de exponentes fraccionario’, llegaron a ser conocidos en ese momento gracias a su correspondencia, de nuevo, con Collins. Fue publicado 42 años después, en 1711 en *Analysis per Quantitatum Series Fluxiones ac Differentias: Cum Enumeratione Linearum tertii Ordinis* editado por W. Jones.

*Inventio Basis ex data Longitudine Curvæ.*

Si ex dato arcu  $aD$  Sinus  $AB$  defideratur; æquationis  $x = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \frac{1}{720}x^7$ , &c. supra inventæ, (pofito nempe  $AB = x$ ,  $aD = z$ , &  $Aa = 1$ .) radix extracta erit  $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$ , &c.  
 Et præterea fi Cofinum  $A\beta$  ex ifto arcu dato cupis, fac  $A\beta (= \sqrt{1-xx}) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 - \frac{1}{362880}x^{10}$ , &c.



**Párrafo de Newton**

*De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (1669) tal como aparece por primera vez en *Analysis per Quantitatum Series Fluxiones ac Differentias: Cum Enumeratione Linearum tertii Ordinis* (1711)

Serie del coseno y el seno



**Brook Taylor (1685-1731)**

**IV.3.3. Brook Taylor (1685-1731)** Matemático inglés de familia rica y educada, aunque inicialmente estudio leyes sus intereses se volvieron hacia las matemáticas. Taylor era conocido por su capacidad y experiencia aunque no tuviera grandes resultados. Por ello, en abril de 1712 Taylor es elegido miembro de la Royal Society. Ayudo a ello la solución proporcionada por Taylor a Machin, uno de los proponentes de su candidatura, un problema referente a la segunda ley de Kepler del movimiento planetario. Ese mismo año Taylor entró en el comité establecido para decidir si la demanda de Newton o de Leibniz por haber inventado el cálculo era correcta. En 1712 publica un trabajo titulado *De Inventione Centri Oscillationis* (escrito en 1708) en *Philosophical Transactions of the Royal Society* **28** (1712-13) 11-21, donde se da una solución al problema del centro de oscilación de un cuerpo, este fue el comienzo de una larga disputa vital con Johann Bernoulli. En este artículo de mecánica clásica se utilizan de forma intensiva las técnicas del cálculo de fluxiones de Mr Newton. El 1714

es elegido secretario de la Royal Society, cargo al que renunció en 1718, en parte por razones de salud, en parte debido a su falta de interés. Este período fue su etapa, matemáticamente hablando, más productiva. En particular, dos libros aparecieron en 1715, *Methodus incrementorum directa e inversa* y *Linear Perspective*, que jugaron un papel importante en el devenir de las matemáticas. Las segundas ediciones aparecerían en 1717 y 1719 respectivamente. *Methodus incrementorum directa et inversa* reflejaba claramente su papel, mencionado anteriormente, como divulgador y propagador de la teoría newtoniana. Aplicando el cálculo newtoniano a la mecánica, aborda el estudio de la cuerda vibrante, de los centros de oscilación, de la trayectoria de un rayo de luz refractado en la atmósfera, (de este último Edmund Halley dijo “uno de los (problemas) más complejos e intrincados que puede ser propuesto, como ha demostrado el Dr. Brook Taylor...”). Taylor sigue el estilo de Newton, pero el contenido de su libro y el análisis empleado eran más representativo de la matemática continental de Leibniz y los Bernoulli. Newton había definido sus fluxiones como derivadas temporales, basadas en la suposición de que las cantidades matemáticas no debían considerarse “como compuestas de partes extremadamente pequeñas, sino como generadas por un movimiento continuo”. Taylor, si embargo, consideró que las cantidades formadas por “Una adición continua de partes de una Magnitud finita, y aquellas partes que yo llamo los Incrementos de las Cantidades a las que pertenecen”. Para demostrar que su método de los incrementos (de diferencias finitas) proveía al cálculo de fluxiones de una base más sólida Taylor probó diversos resultados. En particular, además de la famosa serie, el tratado contenía teoremas fundamentales en la teoría de las diferencias finitas, las fórmulas para los derivadas de la función inversa, la regla de la cadena, una solución singular a una ecuación diferencial, técnicas para transformar y resolver ecuaciones diferenciales y en diferencias, una discusión del número y tipo de condiciones de contorno que deben acompañar una ecuación diferencial, y una discusión sobre la cuerda vibrante. En cuanto a la serie de Taylor, su importancia no se reconoció hasta 1772 cuando Lagrange lo proclamó *el principio básico del cálculo diferencial*. El término *serie de Taylor* parece haber sido utilizado por primera vez por Lhuillier en 1786 (que ganó un premio que estableció Lagrange en la Academia de Ciencias de Berlín para sentar las bases del cálculo).



y manera que todas las  $v, \dot{v}, \dots$  son iguales y los incrementos se convierten en derivadas, para así obtener la serie  $x(z + v) = x + \frac{\dot{x}}{z}v + \frac{\ddot{x}}{z^2}\frac{v^2}{2} + \frac{\ddot{\ddot{x}}}{z^3}\frac{v^3}{2 \cdot 3} + \dots$ . Euler en *Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali*, (Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **8** (1736) 10) se refirió a este hallazgo de Taylor como *Esta serie ... que el Ilustr. Taylor primero trajo a la luz ... y que adaptó a muchos excelentes usos*.

A modo de conclusión, el uso de las series de potencias se origina en la India antes de 1500 y de forma independiente comienza en Europa en 1600, Briggs (1620), Mercator (1668), Newton (1669) (también De Moivre, Leibniz y Johann Bernoulli) pero sobre todo Gregory en 1668. Sin embargo, Taylor da una prueba en el caso general que publica y aplica de muchas maneras. A pesar de que parece que Gregory tenía la fórmula él no la publicó, por temor/respeto quizás a Newton, y Taylor si lo hizo en 1715. ¿Mi dictamen? ¡honor para todos! Vemos que la serie de Taylor que deduce Taylor está centrada en el origen, es lo que hoy se llama a menudo una serie de Maclaurin. Hay que decir que el matemático escocés Colin Maclaurin (1698-1746) en su obra *Treatise of fluxions II* de 1742 da pleno reconocimiento del hallazgo a Taylor y dice *este teorema fue dado por el Dr. Taylor en method. increm.*. Es decir Taylor, no fue el primero en hallar las series de Taylor generales, y Maclaurin lo único que hizo fue reproducir lo que había aprendido de Taylor.



**Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)**

©Photo Collections Ecole polytechnique

Leyenda: *Prend une grande part à l'organisation de l'Ecole polytechnique. Inaugure le cours d'analyse devant tout le personnel réuni le 24 mai 1795*

#### IV.3.4. Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) Nues-

tro buen Lagrange, el de la mecánica lagrangiana, fue también un gran matemático. Nació en Turín en 1736 pero era, en cierto modo, italiano y francés. Estudió en profundidad la obra de Euler, y entre sus áreas preferidas estaban el cálculo de las variaciones y ¿cómo no? la mecánica y astronomía planetaria. Si Euler era un descubridor de hechos sobresalientes, Lagrange aportaba las pruebas, y Euler, aunque nunca conoció personalmente a Lagrange, le procesaba gran admiración. Lagrange sustituyó a Euler cuando este dejó la Academia de Ciencias de Berlín, cuando éste vuelve a San Petersburgo. Allí se quedó hasta que se trasladó a París en 1787, y durante los siguientes veinte años, con la Revolución y Napoleón Bonaparte, Lagrange estableció en París los pilares para crear el centro más prestigioso a nivel mundial para las matemáticas. A principios del S XIX, cualquier persona que quisiera la mejor formación en Matemáticas iba a París. A mediados de la década de 1790 el sistema educativo francés sufrió una profunda transformación y se fundó en 1794 la *École Normale*

*de l'An III*, que atrajo a muchos estudiantes y potenciales profesores de todo el país, y se dedicaron a enseñar, en un esfuerzo por establecer normas educativas para todo el país. Entre sus profesores estaban, ni más ni menos que Lagrange, Pierre-Simon Laplace y Gaspard Monge. Esta escuela se transformó en lo que hoy se conoce como la *École Normale Supérieure*, originalmente sólo buscaba proporcionar formación adecuada a los profesores, pero su influencia mucho mayor, y las conferencias y lecciones fueron transcritas por personas en la audiencia y, más tarde, impreso. La *École Polytechnique* también fue fundada en 1794, tenía otra misión, no la de formar profesores, su tarea era la de formar a un gran número de estudiantes en las disciplinas de la física, las matemáticas y la ingeniería. Fue la primera institución en el mundo de este tipo, y desde su creación a día de hoy, los mejores compiten por poder estudiar en



su seno. Allí estaban Monge y Lagrange enseñando y ... ¡Laplace examinando! A partir de 1799 se empezaron a impartir dos cursos anuales de iniciación y preparación previa para las *Haute Écoles* de minería, artillería, ingeniería militar, de puentes y caminos. En 1804 el mismo Napoleón ordenó que todos sus estudiantes fueran soldados cadetes del ejército francés.

Lagrange dedicó una parte importante de su actividad matemática a la fundamentación del cálculo creado por Newton y Leibniz. En 1797 empezó a enseñar cálculo en la *École Polytechnique* y publicó su *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*. Afirma que casi cualquier función se puede escribir como  $f(x+i) = fx + a_1i + a_2i^2 + \&c$ , donde  $i$  es un incremento arbitrario, siempre que uno pueda obtener  $a_1$  del conocimiento de  $fx$  (Lagrange escribe, como era usual,  $fx$  por  $f(x)$ , y cuyos vestigios los apreciamos hoy cuando escribimos por ejemplo  $\text{sen } x$  o  $\log x$ , y  $+ \&c$  para  $\dots$ ). Para él,  $f'(x)$  es simplemente el coeficiente de  $i$ , nada de límites de cocientes incrementales, infinitésimos o cantidades evanescentes. Los principios y argumentos de Lagrange eran los siguientes: En primer lugar, exige que en el desarrollo de  $f(x+i)$ , donde  $i$  es un incremento pequeño, no deben aparecer potencias fraccionarias de  $i$ , excepto para valores particulares de  $x$ . Deduce, por ello, que  $f(x+i) = fx + f'xi + f''xi^2 + \dots$  que definen  $f'(x), f''(x), \dots$ . A continuación observa que si en el desarrollo  $f(x+i) = f(x) + pi + qir + ri^3 + \dots$  se sustituye  $x$  por  $x+o$  donde  $o$  es independiente de  $x$  y se desarrolla  $f(x+i+o)$ , reemplazando  $i$  por  $i+o$  y  $x$  por  $x+o$ , puede deducir que el proceso que determina  $p$  de  $f$ , esto es  $p = f'$ , también determina  $q$  de  $p$ , mediante  $2q = p'$ , a  $r$  de  $q$  mediante  $3r = q'$ , y así sucesivamente. Finalmente, considerando ejemplos del cálculo elemental, deduce que  $f'(x) = \frac{df}{dx}$ ; i.e., la serie de Taylor,  $f(x+i) = fx + f'xi + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x}{2 \cdot 3}i^3 + \frac{f^{IV}x}{2 \cdot 3 \cdot 4}i^4 + \&c$ .

16. Après ces considérations générales sur le développement des fonctions, nous allons considérer en particulier la formule du n.º 3;

$$f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \&c,$$

et chercher comment les fonctions dérivées  $p, q, r, \&c$ . dépendent de la fonction primitive  $fx$ .

Pour cela, supposons que l'indéterminée  $x$  devienne  $x+o$ ,  $o$  étant une quantité quelconque indéterminée et indépendante de  $i$ , il est visible que  $f(x+i)$  deviendra  $f(x+i+o)$ ; et l'on voit en même temps que l'on aurait le même résultat en mettant simplement  $i+o$  à la place de  $i$  dans  $f(x+i)$ . Donc aussi le résultat doit être le même, soit qu'on mette dans la série  $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \&c$ ,  $i+o$  à la place de  $i$ , soit qu'on y mette  $x+o$  au lieu de  $x$ .

La première substitution donnera

$$fx + p(i+o) + q(i+o)^2 + r(i+o)^3 + \&c;$$

savoir, en développant les puissances de  $i+o$ , et n'écrivant, pour plus de simplicité, que les deux premiers termes de chaque puissance, parce que la comparaison de ces termes suffira pour les déterminations dont nous avons besoin,

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \&c;$$

$$+ p'o + 2qio + 3ri^2o + 4sio^2 + \&c,$$

14

THÉORIE

Pour faire l'autre substitution, soit  $fx + f'xo + \&c$ ,  $p + p'o + \&c$ ;  $q + q'o + \&c$ ,  $r + r'o + \&c$ , ce que deviennent les fonctions  $fx, p, q, r, \&c$ . en y mettant  $x+o$  pour  $x$ , et ne considérant dans le développement que les termes qui contiennent la première puissance de  $o$ , il est clair que la même formule deviendra

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \&c$$

$$+ f'xo + p'io + q'i^2o + r'i^3o + \&c.$$

Comme ces deux résultats doivent être identiques, quelles que soient les valeurs de  $i$  et de  $o$ , on aura, en comparant les termes affectés de  $o$ , de  $io$ , de  $i^2o$ , &c.  $p = f'x$ ,  $2q = p'$ ,  $3r = q'$ ,  $4s = r'$ , &c.

Maintenant, de même que  $f'x$  est la première fonction dérivée de  $fx$ , il est clair que  $p'$  est la première fonction dérivée de  $p$ , que  $q'$  est la première fonction dérivée de  $q$ ,  $r'$  la première fonction dérivée de  $r$ , et ainsi de suite. Donc, si, pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par  $f'x$  la première fonction dérivée de  $fx$ , par  $f''x$  la première fonction dérivée de  $f'x$ , par  $f'''x$  la première fonction dérivée de  $f''x$ , et ainsi de suite, on aura  $p = f'x$ , et de-là  $p' = f''x$ ; donc  $q = \frac{p'}{2} =$

$$\frac{f''x}{2}; \text{ donc } q' = \frac{f'''x}{2}, \text{ et de-là } r = \frac{q'}{3} = \frac{f'''x}{2 \cdot 3}; \text{ donc } r' = \frac{f^{IV}x}{2 \cdot 3}, \text{ et de-là } s = \frac{r'}{4} = \frac{f^{IV}x}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ et ainsi de suite.}$$

Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction  $f(x+i)$ , on aura

$$f(x+i) = fx + f'xi + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x}{2 \cdot 3}i^3 + \frac{f^{IV}x}{2 \cdot 3 \cdot 4}i^4 + \&c.$$

Párrafos de Lagrange  
Théorie des fonctions analytiques...

AVERTISSEMENT.

auteur de la *Mécanique analytique* a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des *fonctions dérivées*. Mais, malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries divergentes, et nous ajouterons que, dans plusieurs cas, le théorème de TAYLOR semble fournir le développement d'une fonction en série convergente, quoique la somme de la série diffère essentiellement de la fonction proposée [voyez la fin de la 38.<sup>e</sup> Leçon]. Au reste, ceux qui liront mon ouvrage, se convaincront, je l'espère, que les principes du calcul différentiel, et ses applications les plus importantes, peuvent être facilement exposés, sans l'intervention des séries.

230 RÉSUMÉ DES LEÇONS SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

elle-même; mais, pour s'assurer du contraire, il suffit d'observer que la seconde condition sera remplie, si l'on suppose

$$F(x) = e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2},$$

et la première, si l'on suppose

$$F(x) = e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}.$$

Cependant la fonction  $e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$  n'est pas identiquement nulle, et la série déduite de la dernière supposition a pour somme, non pas le binôme  $e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ , mais son premier terme  $e^{-x^2}$ .

Párrafos de Cauchy

*Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal* (1823)

*pesar de todo el respeto que requiere una autoridad tan grande, la mayoría de los géometras ahora están de acuerdo en reconocer la incertidumbre de los resultados a los que uno puede ser conducido por el uso de series divergentes, y mostraremos que a pesar de que en muchos casos el teorema de Taylor parece proporcionar el desarrollo de una función en serie convergente, la suma de la serie difiere esencialmente de la función propuesta [ver el final de la 38.<sup>a</sup> lección].* Vemos que Cauchy está criticando las propuestas

IV.3.5. **Cauchy: *Resumé y Le Calcul des limites*** En 1823, Cauchy en su *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal* establece con claridad su rechazo a las series de potencias como piedra fundacional del cálculo. Lo deja meridianamente claro en su *Avertissement* que dice: “*Mi principal objetivo ha sido reconciliar el rigor que yo había hecho ley para mí en mi Cours d'analyse, con la sencillez que resulta de la consideración directa de cantidades infinitamente pequeñas. Por esta razón, me he creído en el deber de rechazar los desarrollos de funciones en series infinitas, toda vez que las serie así obtenidas no sea convergentes; y me he visto obligado a posponer la fórmula de Taylor al cálculo integral, ya que esta fórmula ya no puede ser admitida como general en tanto que la serie que contiene no se reduzca a un número finito de términos y sea completada con una integral definida. Yo no ignoro de que el ilustre autor del Mecanique analytique tomó la fórmula en cuestión como base de su teoría de las funciones derivadas. Pero, a*

fundacionales de Lagrange que hemos descrito arriba. Ya que según Cauchy no se debe tomar los desarrollos en series de potencias como la *principal base* del cálculo infinitesimal, y tampoco como elemento principal en el análisis de sus propiedades. Si uno reemplaza una función por su serie de Taylor  $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \dots$ , y todas las derivadas en el origen se anulan se llega al absurdo de que la función es nula. Como dice Cauchy “*esta conclusión no puede ser exacta*” como demuestra su ejemplo, hoy en día canónico,  $f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$  y otros como  $e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$ . Por ejemplo, las funciones  $e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$  y  $e^{-x^2}$  tiene un mismo desarrollo en serie de Taylor  $1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots$ , pero la suma de la serie sólo da  $e^{-x^2}$ .

Están discutiendo sobre un hecho básico, en el caso real las funciones analíticas son una clase dentro de otras funciones, como las suaves  $C^\infty$  o las  $C^k$ . Existen muchas funciones derivables que no admiten un desarrollo de Taylor, aunque existan todas las derivadas. Esta debilidad de las series desaparece en el caso de la variable compleja, una función holomorfa y una función analítica son la misma cosa en este contexto complejo.

Volviendo al caso complejo, Cauchy en su *Calcul des limits*, del que ya hablamos de forma extensa en el capítulo anterior en relación a la formula integral de Cauchy, aborda la construcción de las series de Taylor. De hecho, como comentamos allí, ese era su objetivo principal al deducir su fórmula integral, que tenía un papel meramente instrumental. Retomamos esa discusión en donde la dejamos, y vemos como Cauchy continua haciendo notar que la serie geométrica converge siempre que  $|x| < X$  y por ello, de la fórmula integral, se deduce que  $f(x)$  se puede desarrollar en una serie de potencias convergente siempre que el módulo de la variable *real o imaginaria*, dice Cauchy,  $x$  sea menor que el valor más pequeño en donde la función  $f(x)$  deja de ser finita o continua. Menciona ahora que las funciones  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $e^x$ ,  $e^{x^2}$ ,  $\cos(1 - x^2)$  son ejemplos de funciones que siempre admiten un desarrollo en serie de potencias, mientras que  $e^{1/x}$ ,  $e^{1/x^2}$  o  $\cos(1/x)$  son discontinuas en  $x = 0$  y no admiten tales desarrollos. También menciona que estos desarrollos serán también validos, siempre que se impongan condiciones adecuadas en el dominio de las variables, para funciones como  $(1 + x)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\frac{1}{1-x}$ ,  $\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ . Cauchy hace notar que cuando la función admite un desarrollo en serie de potencias se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n f(\tilde{x})}{\tilde{x}^n} d p = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0),$$

que le lleva a la serie de Taylor correspondiente. Esta fórmula se puede considerar como la fórmula integral de Cauchy para las derivadas  $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d \zeta$ .

**iv.3.6. Weierstrass y la serie de potencias como piedra angular** En 1841, en el ya mencionado artículo *Zur Theorie der Potenzreihen*, Weierstrass demostró la convergencia analítica para series en varias variables complejas, en donde asumía convergencia uniforme y absoluta. En este trabajo se demuestran los Teoremas A, B y C. Los Teoremas A y B muestran cómo evaluar los coeficientes de las series de Laurent, que enseguida introduciremos, en una y varias variables complejas, sin necesidad de usar integrales. Weierstrass, que no conocía el *Calcul des limits* de Cauchy, derivó las series de Taylor de forma independiente a Cauchy. Los teoremas A, B y C dicen, esencialmente, lo siguiente:

- A. Sea  $F(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} A_{\mu} x^{\mu}$  una serie de potencias en la variable  $x$  con coeficientes dados y  $r$  ‘cualquier magnitud positiva determinada que yace en el dominio de convergencia de la serie’. Sea  $\sup |F(x)| = g$  con  $|x| = r$ . Entonces  $|A_{\mu}| \leq g r^{-\mu}$  para cualquier valor de  $\mu$ .

- B. Sea  $F(x_1, x_2, \dots, x_\rho) = \sum_{(v)} A_{v_1, v_2, \dots, v_\rho} x_1^{v_1} \dots x_\rho^{v_\rho}$  ( $v_1, v_2, \dots, v_\rho = 0, 1, 2, \dots$ ) una serie convergente en las variables complejas  $x_1, x_2, \dots, x_\rho$ ,  $A_{v_1, v_2, \dots, v_\rho}$  constantes dadas. Sean  $r_1, r_2, \dots, r_\rho$  cantidades positivas pequeñas tales que  $(x_1 = r_1, x_2 = r_2, \dots, x_\rho = r_\rho)$  está en el dominio de convergencia, y sea  $\sup |F(x_1, x_2, \dots, x_\rho)| = g$  cuando  $|x_1| = r_1, |x_2| = r_2, \dots, |x_\rho| = r_\rho$ . Entonces,  $|A_{v_1, v_2, \dots, v_\rho}| \leq g r_1^{-v_1} r_2^{-v_2} \dots r_\rho^{-v_\rho}$ .
- C. Dada una secuencia de series de potencias

$$F_0(x_1, x_2, \dots, x_\rho), \quad F_1(x_1, x_2, \dots, x_\rho), \quad F_2(x_1, x_2, \dots, x_\rho), \dots,$$

que convergen en un entorno  $G$  de  $(0, 0, \dots, 0)$  absoluta y uniformemente, y con coeficientes de  $x^{v_1} x^{\mu_2} \dots x^{v_\rho}$  en  $F_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\rho)$  dados por  $A_{v_1, v_2, \dots, v_\rho}^{(\mu)}$ , que se agrupan en

$$A_{v_1, v_2, \dots, v_\rho} = \sum_{(\mu)} A_{v_1, v_2, \dots, v_\rho}^{(\mu)}.$$

Entonces,

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\rho) = \sum_{(v)} A_{v_1, v_2, \dots, v_\rho} x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_\rho^{v_\rho}.$$

74

ZUR THEORIE DER POTENZREIHEN.

dass diese Function Derivirte jeder Ordnung besitzt und dass (für  $\lambda = 1, 2, \dots, \rho$ )

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\rho) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} F_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\rho),$$

und allgemein

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\rho}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_\rho^{\alpha_\rho}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\rho) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\rho}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_\rho^{\alpha_\rho}} F_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\rho)$$

ist.

Münster, im Herbst 1841.

### Párrafo de Weierstrass

Zur Theorie der Potenzreihen

Mathematische Werke 1, 67-74.

Weierstrass demuestra los teoremas A y B usando la idea de convergencia uniforme. En cuanto al tercer teorema, nos está diciendo que dadas las condiciones supuestas sobre la convergencia la serie construida en términos de las funciones, que a su vez son series de potencias, se puede expresar de nuevo como una serie de potencias. Por eso se le llama el Teorema de


las series dobles de Weierstrass. La demostración que Weierstrass aporta se basa en las estimaciones de Cauchy derivadas en los teoremas A y B. Del teorema C, Weierstrass deduce la posibilidad de hallar la derivada de una tal serie derivándola término a término. Para ello tan sólo tiene que desarrollar cada  $F_\mu$  en su serie de Taylor alrededor de cualquier punto  $(a_1, a_2, \dots, a_\rho) \in G$ , y observar que, como consecuencia del teorema C, para  $a_1, a_2, \dots, a_\rho$  fijos las series de Taylor convergen en algún disco centrado en  $(a_1, a_2, \dots, a_\rho) \in G$ . Luego la serie  $\sum_{\mu=0}^{+\infty} F_\mu(a_1, a_2, \dots, a_\rho)$  es una función analítica en ese disco y tiene derivadas de cualquier

orden allí dadas por

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\rho) = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} F_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\rho).$$

En 1881, en su *Zur Functioenlehre* obtiene el resultado sin la necesidad de la convergencia absoluta.

## §IV.4. Series de Laurent y singularidades

 ESARROLLAR en serie de potencias es válido en entornos de puntos donde la función tiene un *buen comportamiento*, por ejemplo donde es holomorfa. Sin embargo, conocemos funciones que son *singulares* en determinados puntos. Es posible estudiar el comportamiento alrededor de estos puntos introduciendo desarrollos más generales que las potencias, considerando para ello las potencias inversas. Fijémonos en que las series del tipo  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}$  se pueden considerar como una serie de potencias en la variable  $(z-z_0)^{-1}$ , y por tanto tendrá una región de convergencia de la forma  $|z-z_0|^{-1} < R$ , esto es  $|z-z_0| > R^{-1}$ . Obviamente, poseen una singularidad en  $z = z_0$ . La combinación de estas partes singulares con las series de potencias conducen a las series de Laurent.

**IV.4.1. Series de Laurent** Introduzcamos ya nuestro objeto de estudio en esta sección.

### Series de Laurent

Una serie de la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$  se dice serie de Laurent centrada en  $z_0$ .

Si la series de potencias convergen en discos, las series de Laurent tienen como dominios de convergencia a regiones un poco más complicadas, son anillos o coronas.

### Coronas de convergencia de series de Laurent

Dada una serie de Laurent  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ , existen  $R_1, R_2 \geq 0$  tales que la serie converge absoluta y uniformemente en cualquier subcorona cerrada  $\overline{C}(z_0, r_1, r_2) \subset C(z_0, R_1, R_2)$  de la corona de convergencia

$$C(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-z_0| < R_2\}.$$

Si  $R_1 \geq R_2$  la corona de convergencia es vacía y la serie no converge. Cuando la corona de convergencia es no vacía, en su interior  $f(z)$  es una función holomorfa y dado  $\gamma$  un arco cerrado suave a trozos con  $\gamma^* \subset C(z_0, R_1, R_2)$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ , se satisface que

$$(15) \quad n(\gamma, z_0)a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$



DEMOSTRACIÓN.

Es una consecuencia directa de la estructura de una serie de Laurent. Por un lado, la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  tendrá un disco de convergencia  $D(z_0, R_2)$ . En cada disco  $D(z_0, r_2)$ ,  $r_2 < R_2$ , la serie de potencias converge absolutamente y uniformemente a una función que es holomorfa en  $D(z_0, R_2)$ . Por otro lado,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ , como serie de potencias en  $(z-z_0)^{-1}$  converge para  $|z-z_0| > R_1$ . Esto es, tendremos convergencia a una función holomorfa en la corona  $C(z_0, R_1, \infty)$ , y en cada subcorona  $C(z_0, r_1, \infty)$ ,  $r_1 > R_1$ , la convergencia es absoluta y uniforme. Luego ambas series convergen absoluta y uniformemente en cada subcorona  $R_1 < r_1 < |z-z_0| < r_2 < R_2$ , incluida en la corona de convergencia, a funciones holomorfas en la corona  $C(z_0, R_1, R_2)$ , y así lo hará su suma. Por otra parte, recordando que la serie de Laurent converge uniformemente en  $\gamma^*$ , podemos integrar término a término

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(z-z_0)^{m-n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \int_{\gamma} (z-z_0)^{m-n-1} dz.$$

El teorema fundamental del cálculo asevera que  $\int_{\gamma} (z-z_0)^k = 0$  cuando  $k \neq -1$ , ya  $(z-z_0)^k = \left(\frac{(z-z_0)^{k+1}}{k+1}\right)'$ , tiene antiderivada a  $\frac{(z-z_0)^{k+1}}{k+1}$  para  $k \neq -1$ . Por todo ello, deducimos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = a_n n(\gamma, z_0).$$

□

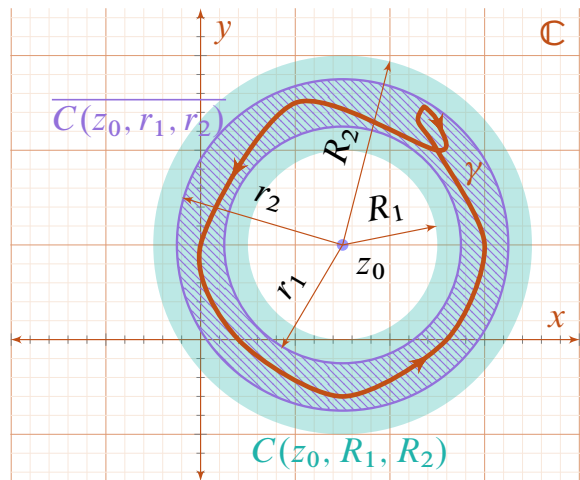
#### Unicidad de las series de Laurent

Dos series de Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  y  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$  que coinciden en alguna corona  $C(z_0, r_1, r_2)$ ,  $r_1 < r_2$ , deben coincidir:  $a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{Z}$ .



DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia inmediata de (15). □

**IV.4.2. Teorema de Laurent** Hemos visto que las series de Laurent convergen en coronas, y lo hacen absolutamente y uniformemente en las subcoronas cerradas, dando lugar a una función holomorfa en el interior de la corona de convergencia. El teorema de Laurent es a las series de Laurent lo que el teorema de Taylor es a las series de potencias. Nos asegura la afirmación inversa, i.e. si hay holomorfía en una corona abierta, entonces podemos expresar la función como serie de Laurent convergente en esa corona. Veamos una formulación más precisa.



Subcoronas de la corona de convergencia

**Teorema de Laurent**

Sean  $f : C(z_0, R_1, R_2) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $R_1 < R_2$ , una función holomorfa, y un arco  $\gamma$  dado por la circunferencia centrada en  $z = z_0$ , de radio  $r$ ,  $r \in (R_1, R_2)$ , que se recorre en sentido antihorario una vez. Entonces, la serie de Laurent

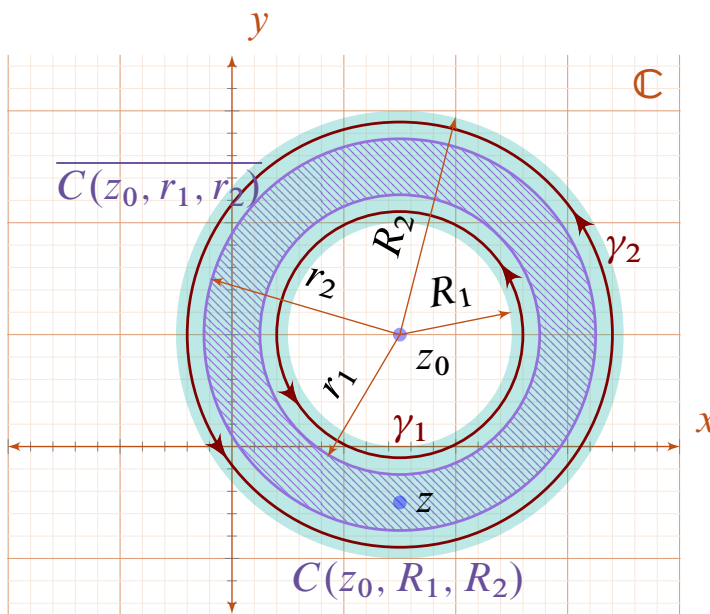
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

converge a  $f(z)$  en la corona  $C(z_0, R_1, R_2)$ , y lo hace absoluta y uniformemente en cada subcorona cerrada  $\overline{C(z_0, r_1, r_2)} \subset C(z_0, R_1, R_2)$ .



**DEMOSTRACIÓN.**

Vamos a estudiar la convergencia de la serie de Laurent para  $z \in \overline{C(z_0, r_1, r_2)} \subset C(z_0, R_1, R_2)$ , con  $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ . Para ello, consideramos dos arcos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  que son dos circunferencias centradas en  $z = z_0$  de radios  $r'_1$  y  $r'_2$ , respectivamente, con  $R_1 < r'_1 < r_1 < r_2 < r'_2 < R_2$ , que se recorren en sentido antihorario una vez. Estos dos arcos son homótopos (y homólogos) en  $C(z_0, R_1, R_2)$  ya que existe una deformación continua en la corona que lleva uno al otro (ya que  $n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z)$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus C(z_0, R_1, R_2)$ ). Esto es, la cadena  $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$  es homótopa a un punto (homóloga a cero) en la corona de convergencia  $C(z_0, R_1, R_2)$ . Por tanto, dado que  $f(z)$  es holomorfa en esa corona, la fórmula integral de Cauchy no asegura que  $n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ . Si  $z \in \overline{C(z_0, r_1, r_2)}$  tendremos  $n(\gamma, z) = 1$  y podremos escribir  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ . En primer lugar, para analizar  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ , procedemos como hicimos en la demostración del teorema de Taylor. Para cada  $z \in \overline{D(z_0, r_2)}$  tenemos el desarrollo  $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n$ , que converge uniformemente en  $\xi \in \gamma_2^*$ , y podremos integrar término a término. Luego concluimos que  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi\right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , donde hemos usado  $\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$  (ya que  $\gamma_1$  y  $\gamma$  son arcos homótopos en  $C(z_0, R_1, R_2)$  —o homólogos— como se prefiera), que al ser una serie de potencias tiene una convergencia absoluta y uniforme en el disco cerrado  $\overline{D(z_0, r_2)}$ . Para estudiar  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ , usamos la expresión  $-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}}$ , que conduce a  $-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n$ , que fijado un  $z \notin \overline{D(z_0, r'_1)}$ , como es el caso, converge uniformemente en  $\xi$  en el cerrado  $\gamma_1^*$ . Así que,  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} dz\right)(z -$



$z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ , donde, dado que  $\gamma_2 \sim \gamma$  en  $C(z_0, R_1, R_2)$ , hemos usado que  $\int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} dz = \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} dz$ , que converge absolutamente y uniformemente en las coronas  $\overline{C(z_0, r', \infty)}$ , con  $r' > r'_1$ . Por tanto, hemos obtenido la convergencia absoluta y uniforme de la serie de Laurent en la subcorona cerrada  $\overline{C(z_0, r_1, r_2)}$  a la función  $f(z)$ .  $\square$



**Ejemplo:** Para ilustrar estas construcciones, consideramos diferentes desarrollos de Laurent centrados en puntos regulares y punto singulares de la función  $f(z) = \frac{2}{1-z^2}$ . Una descomposición en fracciones simples nos lleva a  $f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}$ , que es una función holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ . Centremos nuestros desarrollos de Laurent en el origen ¿qué coronas de convergencia encontraremos? Una primera corona es  $C(0, 0, 1)$  que corresponde al desarrollo de Taylor en el origen, esto es  $\frac{2}{1-z^2} = 2 + 2z^2 + 2z^4 + \dots$ , que se obtiene sumando los desarrollos de cada término:  $(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots) + (1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \dots)$ . Pero, tenemos otra corona de convergencia,  $C(0, 1, \infty)$ , en donde la convergencia se da en una región que circunda las singularidades. En este caso, para  $|z| > 1$ , tendremos  $\frac{1}{1+z} = \mp \frac{1}{z} \frac{1}{1 \mp \frac{1}{z}} = \mp \frac{1}{z} \left( 1 \pm \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \pm \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots \right)$  y  $\frac{2}{1-z^2} = -\frac{2}{z^2} - \frac{2}{z^4} - \frac{2}{z^6} - \dots$ . Subrayamos que estos desarrollos son validos en las coronas prescritas, pero no más allá. Debemos notar que, aunque del desarrollo de Laurent parezca lo contrario, en el origen estas funciones son todas holomorfas y no tienen singularidad alguna, es por ello importante, cuando se da un desarrollo de Laurent, anunciar la corona de convergencia. Otra posibilidad es escoger, como centros del desarrollo de Laurent, alguna de las dos singularidades  $\pm 1$ . Por ejemplo, si decidimos desarrollar con centro en  $z = 1$ , el factor  $-\frac{1}{z-1}$  ya está en su forma de desarrollo de Laurent que converge en la corona  $C(1, 0, \infty)$ . El segundo factor,  $\frac{1}{1+z}$ , es más interesante: en la corona  $C(1, 0, 2)$ , i.e.,  $|z - 1| < 2$ , podemos escribir  $\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z-1) + \frac{1}{8}(z-1)^2 - \frac{1}{16}(z-1)^3 + \dots$ . Por tanto, el desarrollo de Laurent centrado en 1 con corona de convergencia  $C(1, 0, 2)$  es  $\frac{2}{1-z^2} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z-1) + \frac{1}{8}(z-1)^2 - \frac{1}{16}(z-1)^3 + \dots$ . Pasamos a la corona  $C(1, 2, \infty)$ , ahora tendremos, para  $|z - 1| > 2$ , que  $\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1+\frac{2}{z-1}} = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{4}{(z-1)^3} - \frac{8}{(z-1)^4} + \dots$  y la serie de Laurent será  $\frac{2}{1-z^2} = -\frac{2}{(z-1)^2} + \frac{4}{(z-1)^3} - \frac{8}{(z-1)^4} + \dots$  válida para  $z \in C(1, 2, \infty)$ . En definitiva, podemos resumir los resultados obtenidos en la siguiente tabla (las dos últimas filas resultan de la simetría  $z \rightarrow -z$ ).

$\frac{2}{1-z^2}$	Convergencia
$2 + 2z^2 + 2z^4 + \dots$	$ z  < 1$
$-\frac{2}{z^2} - \frac{2}{z^4} - \frac{2}{z^6} - \dots$	$ z  > 1$
$-\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z-1) + \frac{1}{8}(z-1)^2 - \frac{1}{16}(z-1)^3 + \dots$	$0 <  z-1  < 2$
$-\frac{2}{(z-1)^2} + \frac{4}{(z-1)^3} - \frac{8}{(z-1)^4} + \dots$	$ z-1  > 2$
$\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(z+1) + \frac{1}{8}(z+1)^2 + \frac{1}{16}(z+1)^3 + \dots$	$0 <  z+1  < 2$
$-\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{4}{(z+1)^3} - \frac{8}{(z+1)^4} + \dots$	$ z+1  > 2$





**IV.4.3. La triste historia del teorema de Laurent** El parisino Pierre Alphonse Laurent (1813-1854) ingresó en la *École Polytechnique* en 1830 y se graduó dos años después como uno de los mejores de su clase. Tras dos años de formación en la *Ecole d'Application* de Metz, fue destinado a Argelia como teniente del ejército. En 1840 regresa a Francia y pasa seis años trabajando como ingeniero militar en la ampliación del puerto de Le Havre. En este período se interesó por las matemáticas y envió un artículo a la *Académie des Sciences*, que fue revisado por Cauchy y Liouville, que informaron positivamente y recomendaron su publicación, sugerencia que fue ignorada y el artículo no fue publicado. Más tarde, el mismo destino llegó a un artículo sobre el cálculo de variaciones que Laurent había presentado para el *Grand Prize* en matemáticas para 1842. El manuscrito llegó fuera de plazo y no fue considerado para el *Prize*. Una vez más el trabajo de Laurent fue revisado positivamente por Cauchy y Liouville y, sin éxito, recomendado para su publicación.



**Pierre Alphonse Laurent**  
(1813-1854)

Decepcionado, Laurent comenzó a trabajar en matemática aplicada y publicó artículos, por ejemplo, sobre la teoría de la luz. y siguió trabajando como ingeniero militar.

El artículo *Note sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances entières positives et négatives des variables* (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences **17** (1843) 193–198) de Cauchy fue el que motivó a Laurent a enviar a la *Académie des sciences* una carta en la que indicaba que sus métodos podrían ser aplicados en la separación de raíces de ecuaciones alge-

On démontrerait, comme précédemment, que la formule

$$(19) \quad \mathfrak{f}(P, p) = \sum_0^\infty A_n P^n e^{np\sqrt{-1}} + \sum_0^\infty B_n \frac{1}{P^n e^{np\sqrt{-1}}},$$

étant supposée subsister pour toutes les valeurs de P relatives aux valeurs de p comprises entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , les coefficients indépendants de p,  $A_n, B_n$

124

MÉMOIRE

seront déterminés par les relations

$$A_n = - \frac{1}{2n\pi\sqrt{-1}} \int_{-\sigma}^{+\sigma} dp' \cdot \mathfrak{f}(P', p') \frac{d}{dp'} \left( \frac{1}{P'^n e^{np'\sqrt{-1}}} \right),$$

$$B_n = \frac{1}{2n\pi\sqrt{-1}} \int_{-\sigma}^{+\sigma} dp' \cdot \mathfrak{f}(P', p') \frac{d}{dp'} (P'^n e^{np'\sqrt{-1}}),$$

et que, par suite, la formule (19) coïncidera nécessairement avec la formule (18).

**Párrafos de Laurent**

*Mémoire sur la théorie des imaginaires, sur l'équilibre des températures et sur l'équilibre d'élasticité.* Journal de l'École polytechnique. **23** (1863) 75–204.

braicas sin necesidad del teorema Sturm. Esto provocó el interés inmediato de Cauchy que en

el siguiente encuentro de la *Académie des sciences*<sup>7</sup> explicó que él tenía prioridad en estos descubrimientos refiriéndose a trabajos de 1837.<sup>8</sup> En el mencionado informe conjunto con Liouville sobre el trabajo de Laurent, que presenta el 30 de octubre,<sup>9</sup> observan que Laurent había proporcionado una extensión del teorema de representación integral de Cauchy. Laurent deducía que si  $x$  es una variable real o imaginaria, una función real o imaginaria  $f(x)$  puede representarse por la suma de dos series convergentes, una en potencias ascendentes y otra en potencias descendentes  $x$  siempre que  $|x|$  yazca entre los límites dentro de los cuales la función  $f(x)$  y su derivada son continuas y finitas. Cauchy afirma que la ecuación de la que Laurent derivaba su teorema, se incluyó como un caso particular en algunas fórmulas que él mismo ya había obtenido y publicado en 1826 en su libro *Exercices de mathématiques*.<sup>10</sup> Es cierto que el Teorema de Laurent se puede deducir de dos trabajos de 1840 de Cauchy.<sup>11</sup> Más tarde, en 1843, Cauchy mostró “la manera más sencilla” para derivar el resultado de Laurent en su artículo titulado *Note sur le développement des fonctions en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières des variables* (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences **17** (1843) 940–942). Es muy notable que el artículo original de Laurent no se publicará y que de Cauchy hubiera unos cuantos. Normal que Laurent decidiera que esto no era lo suyo y abandonará. Sólo mucho más tarde, veinte años después, se publicó el trabajo original de Laurent.<sup>12</sup>

**IV.4.4. Estudio de singularidades** Después de introducir y trabajar con las series de Laurent y el teorema de Laurent para funciones holomorfas en coronas, estamos preparados para estudiar y clasificar un tipo de singularidad de las funciones complejas.

#### Singularidad aislada

Sean una región  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ , un punto  $z_0 \notin \mathcal{A}$ ,  $R > 0$  tal que  $C(z_0, 0, R) \subset \mathcal{A}$ , y una función  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en  $\mathcal{A}$ . Entonces, diremos que  $z_0$  es una singularidad aislada de  $f(z)$ .

Es decir,  $z_0$  no está en el dominio de holomorfía de la función  $f(z)$ , pero si entornos suficientemente pequeños al que se les ha sustraído el punto  $z_0$ . Esto es, en todos los puntos cerca de

<sup>7</sup>Note. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences **17** (1843) 370.

<sup>8</sup>*Extrait d’une lettre à M. Coriolis*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences **4** (1837) 216–218 y *Première lettre sur la détermination complète de toutes les racines des équations de degré quelconque*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences **4** (1837) 773–783

<sup>9</sup>*Rapport sur un mémoire de M. Laurent, qui a pour titre: ‘Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d’une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable  $x$ ’*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences **17** (1843) 938–939.

<sup>10</sup>Ver capítulo titulado *Sur quelques formules relatives à la détermination du résidu intégral d’une fonction donnée* del primer volumen, 133–139

<sup>11</sup>*Sur la détermination et la réduction des intégrales dont les dérivées renferment une ou plusieurs fonctions implicites d’une même variable*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences **12** (1840) 1029–1045 y el capítulo titulado *Résumé d’un mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites* en el segundo volumen de Exercices d’analyse et de physique mathématique, 41–49

<sup>12</sup>*Mémoire sur la théorie des imaginaires, sur l’équilibre des températures et sur l’équilibre d’élasticité*. Journal de l’École polytechnique. **23** (1863) 75–204.

$z_0$  la función  $f(z)$  es holomorfa. En estas situaciones existe una corona  $C(z_0, 0, R_2) \subset \mathcal{A}$  en donde podemos expresar la función como una serie de Taylor. Observar que  $z_0 \in \overline{\mathcal{A}}$ .

### Clasificación de singularidades aisladas

Sean  $\mathcal{A}$  una región,  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa y  $z_0$  una singularidad aislada, con un desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

convergente en una corona  $C(z_0, 0, R) \subset \mathcal{A}$ ,  $R > 0$ . Entonces, se dice que la singularidad  $z_0$  es

- I) **evitable** si  $a_n = 0, \forall n \in \{-1, -2, \dots\}$ .
- II) un **polo** de orden  $k, k \in \mathbb{N}$ , si  $a_{-k} \neq 0$  y  $a_n = 0, \forall n \in \{-k-1, -k-2, \dots\}$ .
- III) un **polo simple** si es un polo de orden 1.
- IV) **esencial** si existen un número infinito de coeficientes en  $\{a_{-n}\}_{n=1}^{\infty}$  no nulos.

Esta clasificación fue introducida por Weierstrass en la década de 1860.

### Residuo

Al coeficiente  $a_{-1}$  se llama **residuo** de  $f(z)$  en la singularidad aislada  $z_0$  y se usa la notación  $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$ .

### Parte principal

A la serie  $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z - z_0)^{-n}$  se le denomina **parte principal** en  $z_0$  de la función  $f(z)$ .

La parte principal nos cuenta cómo de singular es una función en una singularidad aislada.

### Función meromorfa

Una función  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en la región  $\mathcal{A}$  con singularidades aisladas  $\{z_0, z_1, z_2, \dots\}$  se dice **meromorfa** en  $\mathcal{A}$  si todas las singularidades aisladas son polos. Una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se dice meromorfa si es meromorfa en  $\mathbb{C}$ .

El término meromorfo viene del griego, con *méros* que significa parte o porción, en contraposición a holomorfo, donde *holos* se refiere al todo.

*IV.4.4.1. Singularidades evitables, polos y ceros* Para **singularidades evitables** el desarrollo de Laurent es un desarrollo de potencias, y podemos extender la función a  $z_0$  de forma holomorfa prescribiendo que  $f(z_0) = a_0$ .

### Caracterización de singularidades evitables

Una singularidad aislada  $z_0$  de la función  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  es una singularidad evitable si y sólo si alguna de las siguientes condiciones equivalentes se satisface:

- i) Existe  $r > 0$  tal que  $f(z)$  está acotada en  $C(z_0, 0, r)$ .
- ii) Existe  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .
- iii)  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$



DEMOSTRACIÓN. Si  $f(z)$  tiene una singularidad evitable entonces se puede desarrollar en serie de potencias centrada en  $z_0$ , que convergerá en un disco centrado en la singularidad aislada y, por tanto, se cumplen las tres condiciones. Recíprocamente, si se cumplen I) o II) se satisfará III). Veamos que III) implica que la singularidad aislada  $z_0$  es una singularidad evitable. Cuando  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$  el teorema de Cauchy generalizado nos da que  $a_{-n} = \int_{\gamma} f(z)(z - z_0)^{n-1} dz = 0$ , para  $n \in \{1, 2, \dots\}$ , y la singularidad aislada es evitable.  $\square$

La singularidad aislada es evitable o un polo de orden a lo sumo  $n$ , si y sólo si  $(z - z_0)^n f(z)$  tiene una singularidad evitable en  $z_0$ .

### Discriminación de singularidades esenciales

Una singularidad aislada  $z_0$  de la función  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  es una singularidad evitable o un polo si y sólo si se cumple alguna de las condiciones siguientes

- i) Existe  $M > 0$ ,  $r > 0$  y un entero  $n > 0$  tal que  $|f(z)| \leq \frac{M}{|z - z_0|^n}$  en  $C(z_0, 0, r)$ .
- ii) Para algún  $n \in \mathbb{N}$  existe  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z)$ .
- iii) Para algún  $n \in \mathbb{N}$  se tiene  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{n+1} f(z) = 0$ .



### Caracterización de polos

Una singularidad aislada  $z_0$  de la función  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  es un polo de orden  $n$  si y sólo si para  $F(z) := (z - z_0)^n f(z)$  existe  $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z)$  y no es cero.



DEMOSTRACIÓN. Si la singularidad aislada es un polo de orden  $n$  se tendrá para  $f(z)$  el siguiente desarrollo en serie de Laurent  $f(z) = a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$ , con  $a_{-n} \neq 0$ . Por ello, podremos escribir  $f(z) = \frac{F(z)}{(z - z_0)^n}$ , donde  $F(z)$  es la serie de potencias  $F(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \dots$ , que converge en algún disco  $D(z_0, R) \subset \mathcal{A}$  y toma el valor  $F(z_0) = a_{-n} \neq 0$  en la singularidad aislada  $z_0$ . Recíprocamente, si existe  $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z)$  y no es cero,  $z_0$  será una singularidad evitable de  $F(z)$ , y ésta tendrá un desarrollo en serie de potencias alrededor de  $z_0$ , con el término constante no nulo. Luego  $f(z) = \frac{F(z)}{(z - z_0)^n}$  tendrá un polo de orden  $n$ .  $\square$

**Observaciones:**

- I) Del anterior resultado para polos de orden  $n$ , deducimos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0|^n |f(z)| = M$ ,  $M > 0$ . Luego cerca de un polo el módulo de la función *explota*,  $|f(z)| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \infty$ , y el módulo de la función se comporta como  $|f(z)| \approx \frac{M}{|z - z_0|^n}$  cuando  $z \approx z_0$ .
- II) De la anterior demostración vemos que los ceros y los polos están relacionados, ya que han aparecido los factores primos  $(z - z_0)^n$  en que se factoriza cualquier polinomio complejo —de acuerdo con el teorema fundamental del álgebra—. Efectivamente, hemos visto que la presencia de un polo de orden  $n$  en  $z_0$  no dice que la función recíproca  $\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n \frac{1}{F(z)}$  donde  $F(z_0) \neq 0$ , tiene un cero de orden  $n$  en la singularidad aislada  $z_0$ . Resumiendo, la función  $f(z)$  tiene un polo de orden  $n$  en  $z_0$  si y sólo si la función  $\begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$  tiene un cero de orden  $n$ .

**Ceros y polos de cocientes de funciones holomorfas**

Sean dos funciones  $f(z)$  y  $g(z)$ , holomorfas en un entorno de  $z_0$  que se anulan en este punto, siendo los ceros de ordenes  $n$  y  $m$ , respectivamente, y consideremos la función  $h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$ . Entonces,

- I) Si  $n > m$  la función  $h(z)$  tiene un cero de orden  $n - m$  en  $z_0$ .
- II) Si  $n = m$  la función  $h(z)$  tiene una singularidad evitable en  $z_0$  (extendemos de forma holomorfa la función diciendo que  $h(z_0) = 0$ ).
- III) Si  $n < m$  la función  $h(z)$  tiene un polo de orden  $n - m$  en  $z_0$ .



DEMOSTRACIÓN. Existe un  $R > 0$  tal que en el disco  $D(z_0, R)$  podemos escribir  $f(z) = (z - z_0)^n F(z)$  y  $g(z) = (z - z_0)^m G(z)$ , donde  $F(z)$  y  $G(z)$  son funciones holomorfas y no nulas en ese disco. Luego observando que  $H(z) := \frac{F(z)}{G(z)}$  es holomorfa y no nula en  $D(z_0, R)$  concluimos para  $\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{n-m} H(z)$  el resultado anunciado.  $\square$

*IV.4.4.2. Singularidades esenciales* Hemos visto que cerca de un polo de orden  $n$  de cualquier orden el módulo se va a infinito siguiendo un comportamiento del tipo  $|f(z)| \approx \frac{M}{|z - z_0|^n}$  cerca de  $z_0$ . Este comportamiento deja de ser cierto para singularidades esenciales, un prototipo de tal función es  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  que tiene una singularidad esencial en  $z = 0$ , con serie de Laurent  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$ . Veamos que ocurre si nos aproximamos a cero, una primera forma es hacerlo por su derecha con la secuencia  $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ , con  $|f(\frac{1}{n})| = e^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , luego parece que la función explota por ese lado. Bien, aproximémonos ahora por su izquierda con la secuencia  $\{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$  y ahora, sorpresa,  $|f(-\frac{1}{n})| = e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . ¡La función no explota! Peor es si decidimos explorar que pasa en el eje imaginario, y nos aproximamos mediante la secuencia  $\{\frac{i}{2\pi n}\}_{n=1}^{\infty}$ , ya que  $|f(\frac{i}{2\pi n})| = 1$ . Parece que la función, cerca de una singularidad esencial, no es que explote, que lo hará por algún sitio, es que, según el camino elegido, tendremos un límite distinto.

### Teorema de Casorati–Weierstrass–Sokhotskii

Sea una singularidad esencial  $z_0$  de  $f(z)$  y  $a \in \mathbb{C}$ . Entonces, existe una secuencia  $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = z_0$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\zeta_n) = a$ .



DEMOSTRACIÓN. Si tal sucesión no existe podremos  $\forall \epsilon > 0$  encontrar un  $R > 0$  tal que  $|f(z) - a| > \epsilon$  si  $z \in C(z_0, 0, R)$ , y en esa corona  $f(z) - a \neq 0$  y, por ello, la función  $g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$  es una función holomorfa en la corona  $C(z_0, 0, R)$  y que en ella  $g(z) < \frac{1}{\epsilon}$ . por tanto, al estar acotada,  $z_0$  es una singularidad evitable para  $g(z)$ . La función  $g(z)$  puede tener un cero en  $z_0$ , pero no se puede anular en un entorno de  $z_0$ , ya que la singularidad  $f(z)$  en  $z_0$  es aislada. Luego si  $g(z)$  tiene un cero en  $z_0$  tendrá orden finito (ya que  $g(z)$  admite un desarrollo en serie de potencias  $g(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots$  con  $a_k \neq 0$ ). Entonces, dependiendo si  $k = 0$  ó  $k > 0$  la función  $f(z)$  tendrá una singularidad evitable o un polo de orden  $k$  en  $z_0$ , respectivamente, contradiciendo la hipótesis inicial de que la singularidad no era de estos tipos, sino esencial.  $\square$



Este teorema aparece por primera vez en 1868, primero en dos trabajos del matemático italiano Felice Casorati, en su monumental manual *Teorica delle funzioni di variabili complesse* (Fusi, Pavia), ver páginas 434-35, y también en el artículo *Un teorema fondamentale nella teorica delle discontinuità delle funzioni* (Rendiconte del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (2) 1 (1868) 123-125). El matemático ruso Yulian V. Sokhotskii completó su tesis de máster en 1866, pero tuvo que esperar hasta 1868 ya que Chebyshev no la aceptaba en la forma en que estaba debido al desprecio que procesaba a la teoría de los residuos, que aparecía profusamente en la disertación de tesinando. En su primer capítulo, Sokhotskii escribe “*Si una función  $f(z)$  es infinita de orden infinito en algún punto entonces la función debe tomar todos los posibles valores en ese punto*”. Más tarde, en 1876, de forma completamente independiente, Weierstrass encuentra el mismo teorema y lo publica en *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen* (Abhandlungen der Königlich Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Math. Kl. 1876. S. 11-60). Considera Weierstrass una función univaluada con un número finito de singularidades esenciales y analiza una de ellas, que llama  $c$ . Entonces, dice “*en un entorno infinitamente pequeño del punto  $c$  la función  $f(x)$  se comporta de tal modo discontinuo que puede aproximarse arbitrariamente cerca a cualquier valor arbitrario dado, para  $x = c$ , no tienen un valor determinado*”. El 21 de diciembre de 1868, Casorati envió una copia de su libro a Weierstrass, que según Casorati “*lo ha mirado cuidadosamente*”. También dice que Weierstrass “*ha ciertamente encontrado el teorema por si mismo, pero yo he enviado mi Teorica como un presente en 1868*”. Schwarz le comenta a Casorati en septiembre de 1880 cuando se encuentran en el lago Como, que Weierstrass sabía del teorema desde 1863, cuando probó que una función entera trascendente con una singularidad esencial en infinito toma valores cercanos a cualquier valor complejo. De hecho el teorema aparece en las lecciones de Weierstrass en Berlín, tanto en las notas tomadas por Pasch para el curso 1865/66 como por Killing en 1868.

Se puede incluso ser más fino en el análisis y deducir los teoremas pequeño y grande de Picard que veremos a continuación.

**Teorema pequeño de Picard**

Una función entera no puede omitir dos valores finitos distintos salvo que sea la función constante.



Émile Picard presenta este resultado en 1879 en el artículo titulado *Sur une propriété des fonctions entières*. (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences **88** (1879) 1024–1027). Poco después encuentra la siguiente versión mejorada (ver *Sur les fonctions entières*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences **89** (1879) 662–665)

**Teorema pequeño de Picard mejorado**

Una función entera no polinómica toma todo valor finito infinitas veces salvo por a lo sumo una excepción.



Finalmente demuestra su teorema grande en *Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel* (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences **89** (1879) 745–747)

**Teorema grande de Picard**

Sean  $z_0$  una singularidad esencial de  $f(z)$ ,  $R > 0$  y  $C(z_0, 0, R)$  una corona arbitraria alrededor de la singularidad. Entonces, para todo  $a \in \mathbb{C}$ , salvo por a lo sumo una excepción, la ecuación  $f(z) = a$  tiene infinitas soluciones en la corona  $C(z_0, 0, R)$ , por muy pequeño que sea  $R$ .

**Observaciones:**

- I) Vemos como, aunque reduzcamos la corona, vamos a encontrar siempre secuencias dentro de la corona que no es que tiendan en el límite a cualquier valor, es que toman ese valor de siempre, constantemente.
- II) De los resultados anteriores deducimos que si se da  $|f(z)| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \infty$  entonces  $z_0$  es un polo, ya que no es una singularidad esencial, como descartan los resultados de Casaroti–Weierstrass o de Picard.
- III) De lo dicho podemos concluir que si  $f(z)$  es entera con  $|f(z)| \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$  entonces  $f(z)$  es un polinomio. Efectivamente, al ser entera,  $f(z)$  tiene un desarrollo en serie de potencias que converge en todo  $\mathbb{C}$ ,  $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ . Por otro lado, la función  $g(z) = f(\frac{1}{z})$ , que es una función holomorfa en  $C(0, 0, \infty)$ , satisface  $|g(z)| \xrightarrow{z \rightarrow 0} \infty$ . Esto es,  $g(z)$  tiene una singularidad aislada en 0, que debe de ser un polo de algún orden, digamos  $n$ . Pero, el desarrollo de Laurent, de acuerdo con el desarrollo en serie de potencias de  $f(z)$ , será  $g(z) = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots$ , y como la singularidad es un polo de orden  $n$ , sabemos que la serie de Laurent se truncará en ese punto,  $g(z) = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}$ . Luego  $f(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ .
- IV) Del punto anterior deducimos que las funciones enteras no polinómicas tienen una singularidad esencial en  $\infty$ .

### §IV.5. Ejercicios

- i) Encontrar las series potencias centradas en 0 y sus discos de convergencia de las funciones: a)  $\cosh^2 z$ , b)  $\sqrt{1+z}$ , c)  $(1-z)^a$  con  $a \in \mathbb{C}$ , d)  $\arcsen z$ , e)  $\frac{e^z - 1 - z}{z}$ , f)  $\int_0^1 e^{t^2 z^2} dt$ , g)  $\sen^2 z$ , h)  $\arctan z$  y i)  $\log \frac{1+z}{1-z}$ .

**Solución:**

- a) En este caso  $\cosh^2 z = \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2z)$  y usando que  $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , concluimos que

$$\cosh^2 z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

- b) Ahora  $f(z) = \sqrt{1+z}$  y las derivadas serán

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - (n-1)\right) (1+z)^{1/2-n}$$

luego, evaluando en 0,

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n}$$

donde  $k!! := k(k-2)(k-4)\cdots$ , esto es, como el factorial pero de dos en dos. Así, llegamos a la serie de Taylor centrada en el origen

$$\begin{aligned} \sqrt{1+z} &= 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} - \frac{5z^4}{128} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{n!2^n} z^n. \end{aligned}$$

Como  $a_n = (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{n!2^n}$  queda  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!2^{n+1}} = \frac{2n-1}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = \frac{1}{R}$ . Así que el radio de convergencia es  $R = 1$  y la serie de Taylor converge en  $D(0, 1)$ .

- c) Tenemos para  $f(z) = (1-z)^a$ , en su determinación principal, que  $f'(z) = -a(1-z)^{a-1}$ ,  $f''(z) = a(a-1)(1-z)^{a-2}$  y en general  $f^{(n)}(z) = (-1)^n a(a-1)\cdots(a-n+1)(1-z)^{a-n}$ , por lo que  $f^{(n)}(0) = (-1)^n a(a-1)\cdots(a-n+1)$  y el desarrollo de Taylor es

$$\begin{aligned} (1-z)^a &= 1 - az + \frac{a(a-1)}{2} z^2 - \frac{a(a-1)(a-2)}{6} z^3 + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} z^n \end{aligned}$$

y aplicando el criterio de d'Alambert del cociente con  $a_n = (-1)^n \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$

llegamos a  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{(n+1)!}}{\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}} \right| = \left| \frac{a-n}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = \frac{1}{R}$ . Así que el radio de convergencia es  $R = 1$  y la serie de Taylor converge en  $D(0, 1)$ .



d) En este caso  $f'(z) = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ , así que, recordando el ejemplo anterior con  $a = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}(1 - z)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}z + \frac{3}{8}z^2 - \frac{5}{16}z^3 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} z^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} z^n,\end{aligned}$$

que converge normalmente en  $D(0, 1)$ . Concluimos pues que

$$(\arcsen(z))' = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} z^{2n},$$

que utilizando el teorema fundamental del calculo y el teorema de la convergencia normal de Weierstrass lleva a

$$\arcsen z = \arcsen z - \arcsen 0 = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n (2n+1)n!} z^{2n+1},$$

que converge normalmente en  $D(0, 1)$ .

e) Usando los desarrollos de Taylor conocidos obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{z} \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots - 1 - z \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

que converge en  $\mathbb{C}$ .

f) Ahora  $\int_0^1 e^{t^2 z^2} dt$ , como  $e^{t^2 z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} z^{2n}}{n!}$ , con convergencia uniforme en  $\mathbb{C}$ . Integrando termino a término concluimos

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{t^2 z^2} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} \int_0^1 t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!(2n+1)}\end{aligned}$$

que converge uniformemente en  $\mathbb{C}$ .

g) Como

$$\sen^2 z = \frac{1}{2} - \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{4} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z)$$

llegamos a

$$\begin{aligned}\sin^2 z &= \frac{1}{2} \left( 1 - 1 + \frac{2^2 z^2}{2!} - \frac{2^4 z^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

h) Si  $f(z) = \arctan z$ , entonces  $f'(z) = \frac{1}{1+z^2}$  y

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots$$

con convergencia normal en  $D(0, 1)$ . Aplicando, como el caso del  $\arcsen z$  tratado anteriormente, el teorema fundamental del cálculo y el teorema de la convergencia normal de Weierstrass concluimos, en la determinación principal de  $\arctan$ ,

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

i) Finalmente, la función  $f(z) = \log \frac{1+z}{1-z}$  es  $f(z) = 2 \operatorname{arctanh} z = -2i \operatorname{arctan} iz$  en  $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$  así que

$$\log \frac{1+z}{1-z} = -2i \left( iz + i \frac{z^3}{3} + i \frac{z^5}{5} + \dots \right),$$

lo que conduce a

$$\log \frac{1+z}{1-z} = 2 \left( z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right)$$

que converge normalmente en  $D(0, 1)$ .

ii) Encontrar las series de potencias centradas en 1 e indicar los radios de convergencia de: a)  $\frac{z^2}{(z+1)^2}$ , b)  $\frac{4z}{z^2-2z+5}$ , c)  $\sqrt[3]{z}$ , d)  $\operatorname{sen}(z-z^3)$ .

**Solución:**

a)

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{z+1} &= \frac{(z-1+1)^2}{z-1+2} = \frac{(z-1)^2 + 2(z-1) + 1}{z-1+2} = \frac{1}{2} \frac{(z-1)^2 + 2(z-1) + 1}{\frac{z-1}{2} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \left( ((z-1)^2 + 2(z-1) + 1) \left( 1 - \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{4} - \frac{(z-1)^3}{8} + \dots \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z-1}{2} + 2(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{2^n} + 2 \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}} \right) (z-1)^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3}{2}(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-1)^n \right)\end{aligned}$$

que converge normalmente en el disco  $D(1, 2)$ , en cuya frontera encontramos la singularidad  $z = -1$  de la función.

b)

$$\begin{aligned} \frac{4z}{z^2 - 2z + 5} &= \frac{4(z-1+1)}{(z-1+1)^2 - 2(z-1+1) + 5} = \frac{4(z-1) + 4}{(z-1)^2 + 4} = \frac{(z-1) + 1}{\left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + 1} \\ &= ((z-1) + 1) \left( 1 - \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{2}\right)^4 + \dots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{2^n} (z-1)^{2n} + \frac{(-1)^n}{2^n} (z-1)^{2n+1} \right) \end{aligned}$$

que converge en el disco  $D(1, 2)$  (observar que el denominador se anula  $z$  tal que  $\frac{z-1}{2} = \pm i$ , esto es  $z = 1 + \pm 2i$ , que distan 2 unidades de 1).

c)

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{3}} &= (1 + z - 1)^{\frac{1}{3}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\dots(\frac{1}{3}-n+1)}{n!} (z-1)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\frac{1}{3} \frac{2}{3} \dots \frac{3n-2}{3}}{n!} (z-1)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3n-2)!!!}{3^n n!} (z-1)^n \\ &= 1 + \frac{1}{3}(z-1) - \frac{1}{9}(z-1)^2 + \frac{5}{81}(z-1)^3 - \frac{10}{243}(z-1)^4 + \dots, \end{aligned}$$

donde el triple factorial salta de tres en tres  $k!!! = k(k-3)(k-6)\dots$ , esta serie de potencias converge normalmente en el disco  $D(1, 1)$ , recordar que en  $z = 0$  la raíz cubica presenta un corte, el semieje negativo en la determinación principal.

d) Tenemos  $z - z^3 = (z-1+1) - (z-1+1)^3 = 1 + (z-1) - 1 - 3(z-1) - 3(z-1)^2 - (z-1)^3 = -2(z-1) - 3(z-1)^2 - (z-1)^3$

$$\operatorname{sen}(z - z^3) = -\operatorname{sen}(2(z-1) + 3(z-1)^2 + (z-1)^3)$$

Por otro lado, recordando que  $\operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$  calculamos

$$e^{\pm i(z-z^3)} = e^{\mp 2i(z-1)} e^{\mp 3i(z-1)^2} e^{\mp i(z-1)^3}$$

que recordando la serie de Taylor de la exponencial se escribe como

$$\begin{aligned} e^{\pm i(z-z^3)} &= \left( \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{(\mp i)^{n_1} 2^{n_1}}{n_1!} (z-1)^{n_1} \right) \left( \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{(\mp i)^{n_2} 3^{n_2}}{n_2!} (z-1)^{2n_2} \right) \left( \sum_{n_3=0}^{\infty} \frac{(\mp i)^{n_3}}{n_3!} (z-1)^{3n_3} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n_1+2n_2+3n_3=k} (\mp i)^{n_1+n_2+n_3} \frac{2^{n_1} 3^{n_2}}{n_1! n_2! n_3!} \right) (z-1)^k. \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(z - z^3) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{n_1+2n_2+3n_3=k \\ n_1+n_2+n_3 \text{ es impar}}} \frac{(-1)^{n_1+n_2+n_3} - 1}{2} i^{n_1+n_2+n_3-1} \frac{2^{n_1} 3^{n_2}}{n_1! n_2! n_3!} \right) (z-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{n_1+2n_2+3n_3=k \\ n_1+n_2+n_3 \text{ es impar}}} (-1)^{\lfloor n_1+n_2+n_3 \rfloor} \frac{2^{n_1} 3^{n_2}}{n_1! n_2! n_3!} \right) (z-1)^k \end{aligned}$$

con convergencia normal en  $\mathbb{C}$ . Aquí, dado  $x \in \mathbb{R}$ , denotamos por  $\lfloor x \rfloor$  el número entero menor que  $x$  y más cercano a  $x$ . en particular, los primeros sumandos son

$$\operatorname{sen}(z - z^3) = -2(z-1) - 3(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 + 6(z-1)^4 + \frac{161}{15}(z-1)^5 + \dots$$

iii) Encontrar la serie de Taylor de la función error  $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$ .

**Solución:** La derivada de la función error es una gaussiana que tienen el siguiente desarrollo en serie de potencias convergente en  $\mathbb{C}$

$$(\operatorname{erf}(z))' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}.$$

Como  $\operatorname{erf}(0) = 0$  el Teorema Fundamental del Calculo nos lleva a

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

iv) Hallar los primeros cinco términos de los desarrollos en serie de Taylor alrededor de o de: a)  $(\log(1-z))^2$ , b)  $e^{\frac{z}{1-z}}$ , c)  $e^{e^z}$ , d)  $e^{z \operatorname{sen} z}$ , e)  $\sqrt{\cos z}$ , f)  $(1+z)^z$ .

**Solución:**

a)

$$\begin{aligned} (\log(1-z))^2 &= \left( z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \dots \right)^2 \\ &= z^2 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) z^3 + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) z^4 + \dots \\ &= z^2 + z^3 + \frac{11}{12} z^4 + \dots \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} e^{\frac{z}{1-z}} &= e^{z+z^2+z^3+z^4+\dots} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + \frac{z^2}{2}(1+z+z^2+\dots)^2 \\ &\quad + \frac{z^3}{6}(1+z+\dots)^3 + \frac{z^4}{24}(1+\dots)^4 + \dots \\ &= 1 + z + \left( 1 + \frac{1}{2} \right) z^2 + \left( 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{6} \right) z^3 + \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{6} + \frac{1}{24} \right) z^4 + \dots \\ &= 1 + z + \frac{3}{2} z^2 + \frac{13}{6} z^3 + \frac{73}{24} z^4 + \dots \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
e^{e^z} &= e^{1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\dots} = e^{e^z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\dots} \\
&= e\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\dots+\frac{z^2}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{6}+\dots\right)^2\right. \\
&\quad \left.+\frac{z^3}{6}\left(1+\frac{z}{2}+\dots\right)^3+\frac{z^4}{24}\left(1+\dots\right)^4+\dots\right) \\
&= e\left(1+z+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)z^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{1}{6}\right)z^3+\left(\frac{1}{24}+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2^2}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 6}+\frac{1\cdot 3}{6\cdot 2}+\frac{1}{24}\right)z^4+\dots\right) \\
&= e\left(1+z+z^2+\frac{5}{6}z^3+\frac{5}{8}z^4+\dots\right).
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos z} &= \sqrt{1+(\cos z-1)} = 1 + \frac{(\cos z-1)}{2} - \frac{(\cos z-1)^2}{8} + \dots \\
&= 1 + \frac{-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+\dots}{2} - \frac{\left(-\frac{z^2}{2}+\dots\right)^2}{8} + \dots \\
&= 1 - \frac{z^2}{2} + \left(\frac{1}{48} - \frac{1\cdot 1}{4\cdot 8}\right)z^4 + \dots \\
&= 1 - \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{96} + \dots
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
(1+z)^z &= e^{z \log(1+z)} = e^{z\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\dots\right)} = e^{z^2\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\frac{z^3}{4}+\dots\right)} \\
&= 1 + z^2\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\frac{z^3}{4}+\dots\right) + \frac{z^4}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\frac{z^3}{4}+\dots\right)^2 + \dots \\
&= 1 + z^2 - \frac{z^3}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)z^4 + \dots \\
&= 1 + z^2 - \frac{z^3}{2} + \frac{5z^4}{6} + \dots
\end{aligned}$$

- v) Desarrollar en serie de potencias alrededor de 0 la función  $f(z) := \log(1 + e^z)$ , hallando la relación recurrente entre sus coeficientes. Ayuda: hallar previamente los desarrollos para la derivada.

**Solución:**

La derivada es

$$f'(z) = \frac{e^z}{e^z+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^z-1}{e^z+1} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh \frac{z}{2}\right).$$

Para la tangente hiperbólica tenemos

$$\tanh'(z) = 1 - \tanh^2 z.$$

Como esta función es impar su desarrollo de Taylor solo tiene potencias impares

$$\tanh z = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots, \quad |z| < \frac{\pi}{2}$$

y deben cumplir

$$\begin{aligned} a_1 + 3a_3 z^2 + 5a_5 z^4 + \dots &= 1 - z^2(a_1 + a_3 z^2 + a_5 z^4 + \dots)^2 \\ &= 1 - a_1^2 z^2 - 2a_1 a_3 z^4 - (2a_1 a_5 + a_3^2) z^6 + \dots \end{aligned}$$

En definitiva, tendremos

$$a_1 = 1, \quad 3a_3 = -a_1^2, \quad 5a_5 = -2a_1 a_3, \quad 7a_7 = -2a_1 a_5 - a_3^2$$

y en general

$$a_{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} a_{2n-1-2k}.$$

Los primeros son  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = -\frac{1}{3}$ ,  $a_5 = \frac{2}{15}$ ,  $a_7 = -\frac{1}{7} \left( \frac{4}{15} + \frac{1}{9} \right) = \frac{17}{315}$  y así obtenemos

$$\tanh z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} - \frac{17z^7}{315} + \dots,$$

en el disco  $D(0, \frac{\pi}{2})$ .

Alternativamente, se sabe que podemos escribir

$$\tanh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}z^{2n-1}}{(2n)!}, \quad |z| < \frac{\pi}{2},$$

donde aparecen los números de Bernoulli (fueron llamados así por Abraham De Moivre, en honor de Jakob Bernoulli, primer matemático que los estudió)

$$B_m := \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} \frac{(n+l)^m}{k+1}.$$

Para más sobre los números de Bernoulli ver ejercicio VIII más adelante.

Volviendo a  $f(z)$ , tenemos

$$f'(z) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{2^{2n+2}} z^{2n+1}$$

que converge normalmente en  $D(0, \pi)$  y por ello podemos integrar término a término, en un arco que una 0 con  $z$ , con  $|z| < \pi$ , para llegar a

$$\log(1 + e^z) = \log 2 + \frac{z}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{2^{2n+2}(2n+2)} z^{2n+2}.$$

Observar que, por un lado, la función  $\log(1 + e^z)$  es singular en  $z = \pm i\pi$ , de ahí el radio de convergencia de la serie. Por otro lado,  $\log 2 = f(0)$  es la constante de integración.

- vi) Con ayuda del producto de Cauchy de series y la sustitución de una serie en otra hallar los desarrollo en serie de potencias de: a)  $(\log(1 - z))^2$ , b)  $\arctan(z) \log(1 + z^2)$ .

**Solución:**

a) Tenemos que

$$\log(1 - z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$$

Por lo tanto, el producto de Cauchy da

$$(\log(1 - z))^2 = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

con

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \frac{1}{n+1-k}.$$

Pero,

$$\frac{1}{(k+1)(n+1-k)} = \frac{1}{n+2} \left( \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n+1-k} \right).$$

y así

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n+2} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1-k} \right) \\ &= \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1-k}$$

que se ve inmediatamente con el cambio  $k \rightarrow l = n - k$  en la segunda suma. Por lo tanto, en términos de los números armónicos  $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , los coeficientes que aparecen en el producto de Cauchy son

$$c_n = \frac{2H_{n+1}}{n+2}$$

y la serie de Taylor pedida es

$$(\log(1 - z))^2 = 2z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1} z^n}{n+2}.$$

b) Como

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad \log(1 + z^2) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n+1},$$

convergiendo la primera en  $D(0, \frac{\pi}{2})$  y la segunda en  $D(0, 1)$ , el producto de Cauchy conduce a

$$\arctan(z) \log(1 + z^2) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1},$$

que converge en  $D(0, 1)$  y que tiene solo potencias impares ya que la función es impar, con

$$c_{2n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \frac{1}{n-k+1}.$$

Vamos a manipular esta expresión y expresarla en términos de números armónicos, ver el caso anterior. En primer lugar, nos damos cuenta de que

$$\frac{1}{2k+1} \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{2n+3} \left( \frac{2}{2k+1} + \frac{1}{n-k+1} \right)$$

y podemos concluir que

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+3} \left( H_{n+1} + 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1} &= \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= H_{2n+1} - \frac{1}{2} H_n \end{aligned}$$

lo que conduce a

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{2n+3} \left( H_{n+1} + 2H_{2n+1} - H_n \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2n+3} \left( \frac{1}{n+1} + 2H_{2n+1} \right). \end{aligned}$$

y, por ende,

$$\arctan(z) \log(1 + z^2) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} \left( \frac{1}{n+1} + 2H_{2n+1} \right) z^{2n+1}.$$

VII) Para el desarrollo en serie de potencias  $\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$ , demostrar que  $E_0 = 1$ ,  $E_0 + \binom{2n}{2} E_2 + \cdots + \binom{2n}{2n} E_{2n} = 0$ , y que  $E_2 = -1$  y  $E_4 = 5$ . ( $E_{2n}$  son los números de Euler.)

**Solución:** Aplicamos el producto de Cauchy a

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$$



y obtenemos

$$c_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} (-1)^{n-k} \frac{1}{(2(n-k))!} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{E_{2k}}{(2k)!(2(n-k))!}$$

que usando los números binomiales  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  se expresa como

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} E_{2k}.$$

Ahora bien, como el producto de ambas series es, por definición, la unidad tenemos  $c_0 = 1$  y  $c_n = 0$ ,  $n \in \{1, 2, \dots\}$ , de donde se sigue el resultado pedido. Además, de la segunda relación obtenemos, a primeros ordenes

$$\begin{aligned} \binom{2}{0} E_0 + \binom{2}{2} E_2 &= 0, & \implies & & E_0 + E_2 &= 0, \\ \binom{4}{0} E_0 + \binom{4}{2} E_2 + \binom{4}{4} E_4 &= 0, & \implies & & E_0 + 6E_2 + E_4 &= 0, \end{aligned}$$

de donde se deducen los valores  $E_2 = -1$  y  $E_4 = 5$ .

- VIII) Para el desarrollo en serie de potencias centrada en 0 de  $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ : a) Demostrar que  $B_0 = 1$  y  $\binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \dots + \binom{n+1}{n} B_n = 0$ . b) Usando la relación  $\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{e^{-z}-1} = -z$ , demostrar que  $B_{2m+1} = 0$  si  $m \geq 1$ . c) Desarrollar en serie de Taylor alrededor de 0, hallando su disco de convergencia, la función  $z \cot z$ . (Ayuda:  $z \cot z = iz + \frac{2iz}{e^{2iz}-1}$ .) d) Encontrar las series de Laurent centradas en el origen para  $\sec z$  y  $\operatorname{sech} z$ .

**Solución:**

- a) Dada la serie de Taylor  $e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ , consideramos el producto de Cauchy

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k, \quad n \in \{1, 2, \dots\},$$

y como  $c_1 = 1$  y  $c_n = 0$  para  $n > 1$  llegamos a  $B_0 = 1$  y a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0, \quad n \in \{1, 2, \dots\}.$$

- b) Efectivamente, como

$$\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{e^{-z}-1} = \frac{z}{e^z-1} - \frac{z e^z}{e^z-1} = \frac{z(1-e^z)}{e^z-1} = -z,$$

concluimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (-z)^n = -z,$$

esto es

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = -z,$$

y así  $B_1 = -\frac{1}{2}$  y  $B_{2n+1} = 0$ ,  $n \in \{1, 2, \dots\}$ .

c)

$$\begin{aligned} z \cot z &= iz \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} \\ &= iz + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2iz)^n = iz + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n B_n}{n!} i^n z^n \\ &= iz + 1 - 2 \frac{1}{2} iz + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

d) Por sencillez determinamos en primer lugar la serie de Laurent de  $\operatorname{sech} z$ . Para usar los números de Bernoulli, realizamos las siguientes manipulaciones algebraicas

$$\begin{aligned} z \operatorname{sech} z &= \frac{z}{\sinh z} = \frac{z}{\frac{e^z - e^{-z}}{2}} = \frac{2z}{e^z - e^{-z}} = \frac{2z e^z}{e^{2z} - 1} \\ &= \frac{2z e^z + 2z - 2z}{e^{2z} - 1} = 2z \frac{e^z - 1}{e^{2z} - 1} - \frac{2z}{e^{2z} - 1} = 2z \frac{e^z - 1}{(e^z - 1)(e^z + 1)} - \frac{2z}{e^{2z} - 1} \\ &= 2 \frac{z}{e^z - 1} - \frac{2z}{e^{2z} - 1} = 2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2z)^n \\ &= 2 \left( 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \right) - \left( 1 - \frac{2z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} z^{2n} \right) \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - 2^{2n-1}) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

Esta es la serie de Taylor de  $z \operatorname{sech} z$  que converge en  $D(0, \pi)$ , ya que el  $\sinh z$  se anula en  $\{n i \pi\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , y por tanto la singularidades de  $\operatorname{sech} z$  más cercanas al origen son  $\pm i \pi$ . Por ello, la serie de Laurent pedida es

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - 2^{2n-1}) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1},$$

con corona de convergencia  $C(0, 0, \pi)$ . Por otro lado, recordando que  $\operatorname{senh} iz = i \operatorname{sen} z$ , obtenemos  $\operatorname{sec} z = i \operatorname{sech} iz$  y así el desarrollo de Laurent pedido será

$$\begin{aligned} \operatorname{sec} z &= \frac{i}{iz} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - 2^{2n-1}) B_{2n}}{(2n)!} i (iz)^{2n-1} \\ &= \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - 2^{2n-1}) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $i^{2n} = (-1)^n$ , que converge en la corona  $C(0, 0, \pi)$ .

- IX) Considerar el desarrollo en serie de potencias alrededor de 0 de la función  $\frac{1}{1-z-z^2} = F_0 + F_1z + F_2z^2 + \dots$ , demostrar que sus coeficientes satisfacen  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , para  $n \geq 2$ . Determinar  $F_n$  y el radio de convergencia de la serie. ( $F_n$  son los números de Fibonacci).

**Solución:** De la relación

$$1 = (1 - z - z^2) \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$$

obtenemos

$$1 = F_0 + (F_0 - F_1)z + \sum_{n=2}^{\infty} (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})z^n,$$

y deducimos que  $F_0 = F_1 = 1$  y

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \in \{2, 3, \dots\}.$$

Esta es la serie de Fibonacci.

La recurrencia se puede escribir en forma matricial

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \mathcal{F} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dado el polinomio característico  $\det(\mathcal{F} - \lambda I_2) = \lambda^2 - \lambda - 1$ , los autovalores de  $\mathcal{F}$  se expresan en términos de la razón aurea  $\varphi := \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  y son  $\{-\varphi^{-1}, \varphi\}$ , donde  $-\varphi^{-1} = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$ . La correspondiente base de autovectores es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\varphi^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix} \right\}$$

que conforman la matriz de cambio de base  $P$  y su inversa

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\varphi^{-1} & \varphi \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi & -1 \\ \varphi^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

en donde hemos tenido en cuenta que  $\det P = \varphi + \varphi^{-1} = \sqrt{5}$ . Por lo tanto, como

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \mathcal{F}^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}^n = P \begin{pmatrix} (-\varphi)^{-n} & 0 \\ 0 & \varphi^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

queda, observando que  $-\varphi^{-1} + \varphi = 1$ ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} (-\varphi)^{-n} & 0 \\ 0 & \varphi^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} P \begin{pmatrix} (-\varphi)^{-n} & 0 \\ 0 & \varphi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi - 1 \\ \varphi^{-1} + 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} P \begin{pmatrix} (-\varphi)^{-n}(\varphi - 1) \\ \varphi^n(\varphi^{-1} + 1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} (-\varphi)^{-n}(\varphi - 1) + \varphi^n(\varphi^{-1} + 1) \\ (-\varphi)^{-n-1}(\varphi - 1) + \varphi^{n+1}(\varphi^{-1} + 1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -(-\varphi)^{-n-1} + \varphi^{n+1} \\ -(-\varphi)^{-n-2} + \varphi^{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y, por todo ello,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - (-\varphi)^{-n-1}).$$

Con respecto a la convergencia de la serie de Taylor observamos que las dos singularidades de la función yacen en  $\varphi$  y  $-\varphi^{-1}$ , como  $\varphi > \varphi^{-1}$  el disco de convergencia será  $D(0, \varphi^{-1})$ .

- x) Hallar los desarrollos de Laurent en  $z = 0$  y  $z = \infty$ , cuando sea posible, y las coronas de convergencia para las funciones a)  $\frac{1}{z^2-3z+2}$ , b)  $\sin(z^{-1})$ , c)  $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$  con  $ab \neq 0$ , d)  $\log \frac{z-a}{z-b}$  con  $ab \neq 0$ , e)  $\frac{\arctan z}{z^4}$ .

**Solución:**

- a) La función  $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$  tiene dos polos simples en los ceros del denominador, que son 2 y 1. Podemos escribir la siguiente descomposición en fracciones simples

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

que para el estudio del origen escribimos en la forma

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

que ya se encuentra preparada para aplicar el desarrollo en serie geométrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1, \quad \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}, \quad |z| < 2.$$

Por tanto, en el disco  $D(0, 1)$  tenemos el siguiente desarrollo de Taylor (que, como sabemos, es un caso especial de los desarrollos de Laurent)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

Si queremos un desarrollo en un entorno de  $z = \infty$  escribimos

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

y tenemos los siguientes desarrollos en forma de serie geométrica

$$\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad |z| > 1, \quad \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad |z| > 2,$$

y, por ello, en la corona  $C(0, 2, \infty)$  tenemos el siguiente desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{n-1} - 1\right) \frac{1}{z^n}.$$

Dados los desarrollos hallados, y aunque no se pregunta dejamos aquí el desarrollo de Laurent en  $C(0, 1, 2)$ ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

b) Como  $\operatorname{sen} z$  es entera con serie de Taylor dada por

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

queda el siguiente desarrollo de Laurent

$$\operatorname{sen} \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! z^{2n+1}}.$$

con convergencia normal en en la corona  $C(0, 0, \infty)$ .

c) Como

$$f(z) = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right),$$

podemos usar la serie geométrica. En primer lugar escribimos

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}$$

que converge para  $|z| < |a|$ . Por ello, llegamos a la serie de Taylor

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}} \right) z^n$$

que converge normalmente en el disco  $D(0, \min(|a|, |b|))$ . Por otro lado, si escribimos

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$$

con convergencia normal la corona  $C(0, |a|, \infty)$ . Por lo tanto,

$$f(z) = \frac{1}{a-b} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{z^n}$$

que converge normalmente en la corona  $C(0, \max(|a|, |b|), \infty)$ .

d) Ahora  $f(z) = \log \frac{z-a}{z-b}$ , y  $f'(z) = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$ . Por lo tanto, usando los resultados del ejercicio anterior queda

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}} \right) z^n, \quad z \in D(0, \min(|a|, |b|)),$$

$$f'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{z^n}, \quad z \in C(0, \max(|a|, |b|), \infty),$$

con convergencia normal. Por lo tanto, podemos integrar término a término y obtener

$$f(z) = \log \frac{a}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{b^n} - \frac{1}{a^n} \right) z^n, \quad z \in D(0, \min(|a|, |b|)),$$

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{n-1} \frac{1}{z^{n-1}}, \quad z \in C(0, \max(|a|, |b|), \infty),$$

en donde hemos tenido en cuenta para calcular las constantes de integración que

$$f(0) = \log \frac{a}{b} \text{ y } \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \log 1 = 0.$$

e) Por último,  $f(z) = \frac{\arctan z}{z^4}$ , que usando

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

lleva a

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+5} \end{aligned}$$

que converge en la corona  $C(0, 0, 1)$ .

x1) Hallar los desarrollos de Laurent de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a)  $\frac{1}{z^2+1}$  en  $i$ , b)  $e^{\frac{1}{1-z}}$  en  $1$ , c)  $\frac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)^2}$  en  $\pi$ . d)  $z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)$  en  $z = 1$ .

**Solución:**

a) Escribimos

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \left( -\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} \right);$$

como  $\frac{1}{z+i}$  es holomorfo calculamos su serie de potencias en  $i$  que convergerá en un disco  $D(i, R)$  con  $R \geq 2$ , para ello usamos la serie geométrica

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i+2i} = \frac{1}{2i} \frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} (z-i)^n$$

y el radio de convergencia es  $R = 2$ . Por lo tanto el desarrollo de Laurent pedido es

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2} \frac{1}{z-i} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} (z-i)^n,$$

que converge absolutamente en la corona  $C(i, 0, 2)$  y uniformemente en cualquier corona  $C(i, 0, r)$  con radio exterior  $r < 2$ .

b) Usamos la serie de Taylor de la exponencial que converge en todo el plano complejo y escribimos

$$e^{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(z-1)^n}$$

que converge absolutamente en la corona  $C(1, 0, \infty)$  y uniformemente en cualquier corona de la forma  $C(1, 0, R)$  con  $R > 0$ .

c) Como  $\operatorname{sen}(z-\pi) = -\operatorname{sen} z$  para hallar la serie de Laurent pedida usamos la serie de Taylor del seno

$$\frac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)^2} = -\frac{\operatorname{sen}(z-\pi)}{(z-\pi)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (z-\pi)^{2n-1}$$

que converge absolutamente en la corona  $C(\pi, 0, \infty)$  y uniformemente en cualquier corona de la forma  $C(\pi, 0, R)$  con  $R > 0$ .

d) De nuevo usamos la serie de Taylor del seno y que  $z^2 = (z - 1 + 1)^2 = (z - 1)^2 + 2(z - 1) + 1$

$$\begin{aligned} z^2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{z-1} \right) &= ((z-1)^2 + 2(z-1) + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n-1}} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}} \\ &= (z-1) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{2n+3} + 1 \right) \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}} \\ &= (z-1) + 2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+3} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} \end{aligned}$$

que converge absolutamente en la corona  $C(1, \infty)$  y uniformemente en cualquier corona de la forma  $C(1, 0, R)$  con  $R > 0$ .

XII) Hallar los desarrollos de Laurent centrados en 0 en las coronas  $C(0, 0, \infty)$  de: a)  $e^z + e^{\frac{1}{z}}$ , b)  $\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} \frac{1}{z}$

**Solución:**

a) Como  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , tenemos  $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$ , que converge uniformemente en la corona  $C(0, 0, \infty)$ . Así que,

$$e^z + e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} + 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

b) Recordando que  $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , concluimos que  $\operatorname{sen} \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}$  converge de forma uniforme en  $C(0, 0, \infty)$ . En definitiva,

$$\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

en  $C(0, 0, \infty)$ .

XIII) Si la función  $f(z)$  es meromorfa en la región  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  y  $f(z)$  tiene un cero de orden  $n$  en  $z_0$  demostrar que  $\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{n}{z-z_0}$  es una función holomorfa en un entorno de  $z_0$ .

**Solución:** Como la función es meromorfa todas sus singularidades son polos. Como la función  $f(z)$  tiene un cero en  $z_0$  de orden  $n$ , sabemos que existe algún  $\epsilon > 0$  tal que en el disco  $D(z_0, \epsilon)$  la función se expresa como

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

donde  $g(z)$  es una función holomorfa en ese disco que no se anula  $g(z) \neq 0$  en  $D(z_0, \epsilon)$ . Por lo tanto, en ese disco tenemos

$$f'(z) = n(z - z_0)^{n-1} g(z) + (z - z_0)^n g'(z)$$



así que, en la corona  $C(z_0, 0, \epsilon)$  tenemos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-z_0)^{n-1}g(z) + (z-z_0)^n g'(z)}{(z-z_0)^n g(z)} = \frac{n}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Concluimos pues que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{n}{z-z_0} = + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

es holomorfa en  $D(z_0, \epsilon)$ .

XIV) Sea la función  $f(z) = \frac{z+16}{(z-1)(z^2+16)}$

- a) ¿Se puede desarrollar  $f(z)$  en serie de Taylor alrededor de  $z = 2i$ ? ¿cual es el radio de convergencia? (no se pide el cálculo del desarrollo)
- b) Calcular el desarrollo de Laurent de  $f(z)$  en una corona  $C(0; R_1, R_2)$ , centrada en el origen y radios  $R_1 < R_2$ , convergente en  $2i$ . Hallar el menor  $R_1$  y el mayor  $R_2$ . (Recordar que  $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{z}{z^2+16}$ .)

**Solución:**

- a) La función  $f(z)$  tiene tres polos simples situados en  $z = 1, \pm 4i$  siendo holomorfa en  $z = 2i$ . Por ello, **admite un desarrollo en serie de Taylor en dicho punto**, como la singularidad más cercana es  $4i$  el radio de convergencia es

$$R = |4i - 2i| = 2.$$

- b) Buscamos una corona centrada en el origen que contenga al punto  $2i$ . Dada la disposición de los polos, las posibles coronas centradas en  $0$  serán  $C(0; 0, 1)$ ,  $C(0; 1, 4)$  y  $C(0; 4, \infty)$ , así que la corona pedida es  $C(0; 1, 4)$ . En dicha corona, recordando la serie geométrica, se tiene

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \frac{z}{z^2+16} = \frac{z}{16} \frac{1}{1+\left(\frac{z}{4}\right)^2} = \frac{z}{16} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{4^{2n}}.$$

En definitiva, en dicha corona, la función  $f(z)$  admite el desarrollo de Laurent siguiente

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{4^{2n+2}}.$$

xv) Dada la función

$$f(z) := \frac{1}{z(z^2-1)}.$$

- a) Determinar el mayor  $R > 0$  tal que  $f(z)$  admite un desarrollo en la corona  $C(0; 0, R)$  y encontrar dicho desarrollo explícitamente.
- b) Determinar el menor  $R > 0$  tal que  $f(z)$  admite un desarrollo en la corona  $C(0; R, \infty)$  y encontrar dicho desarrollo explícitamente.

**Solución**

- a) Las singularidades de  $f(z)$  son  $\{-1, 0, 1\}$ , por tanto un desarrollo de Laurent convergente en  $C(0, 0, R)$  requiere  $R \leq 1$ . En la corona  $C(0, 0, 1)$  tenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z^2} = -\frac{1}{z} (1 + z^2 + z^4 + \dots) \\ &= -\frac{1}{z} - z - z^3 - z^5 - \dots \end{aligned}$$

- b) Hay que escoger  $R \geq 1$  para que la corona  $C(0, R, \infty)$  no contenga singularidades de la función. En la corona  $C(0, 1, \infty)$  tenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3} \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z^3} \left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^7} + \dots \end{aligned}$$

xvi) Sea la función  $f(z) = \frac{z+16}{(z-1)(z^2+16)}$

- a) ¿Se puede desarrollar  $f(z)$  en serie de Taylor alrededor de  $z = 2i$ ? ¿cual es el radio de convergencia? (no se pide el cálculo del desarrollo)
- b) Calcular el desarrollo de Laurent de  $f(z)$  en una corona  $C(0; R_1, R_2)$ , centrada en el origen y radios  $R_1 < R_2$ , convergente en  $2i$ . Hallar el menor  $R_1$  y el mayor  $R_2$ . (Recordar que  $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{z}{z^2+16}$ .)

**Solución:**

- a) La función  $f(z)$  tiene tres polos simples situados en  $z = 1, \pm 4i$  siendo holomorfa en  $z = 2i$ . Por ello, **admite un desarrollo en serie de Taylor en dicho punto**, como la singularidad más cercana es  $4i$  el radio de convergencia es  $R = |4i - 2i| = 2$ .
- b) Buscamos una corona centrada en el origen que contenga al punto  $2i$ . Dada la disposición de los polos, las posibles coronas centradas en  $0$  serán  $C(0; 0, 1)$ ,  $C(0; 1, 4)$  y  $C(0; 4, \infty)$ , así que la corona pedida es  $C(0; 1, 4)$ . En dicha corona, recordando la serie geométrica, se tiene

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \frac{z}{z^2+16} = \frac{z}{16} \frac{1}{1+\left(\frac{z}{4}\right)^2} = \frac{z}{16} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{4^{2n}}.$$

En definitiva, en dicha corona, la función  $f(z)$  admite el desarrollo de Laurent siguiente

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{4^{2n+2}}.$$



## Contenidos

v.1 El Teorema de los Residuos de Cauchy . . . . .	189
v.2 Evaluación de integrales reales . . . . .	202
v.3 Ejercicios . . . . .	231



### §v.1. El Teorema de los Residuos de Cauchy



PLICAREMOS en este tema los potentes resultados deducidos en los dos anteriores capítulos para así obtener el Teorema de los Residuos. Este teorema permite evaluar integrales complejas, de integrando con singularidades aisladas, en términos de los residuos que introdujimos en el tema IV. Para poder aplicarlo, también daremos varias formas de calcular los residuos de funciones complejas.

#### v.1.1. El teorema

##### Teorema de los residuos (versión homotópica)

Sean una región  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ , un arco  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  suave a trozos, que es homótopo a un punto en  $\mathcal{A}$ , el conjunto  $\{z_1, \dots, z_n\} \subset \mathcal{A}$  de  $n$  puntos distintos de la región  $\mathcal{A}$  que no yacen en el arco,  $\{z_j\}_{j=1}^n \cap \gamma^* = \emptyset$ , y  $f : \mathcal{A} \setminus \{z_j\}_{j=1}^n \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa con singularidades aisladas en  $\{z_j\}_{j=1}^n$ . Entonces, se verifica la fórmula de los residuos

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n n(\gamma, z_j) \operatorname{Res}(f, z_j).$$



DEMOSTRACIÓN. Para  $j \in \{1, \dots, n\}$ , el Teorema de Laurent nos asegura que para la singularidad aislada  $z_j$  existirá un  $r_j > 0$  tal que en la corona  $C(z_j, 0, r_j)$  es válido el desarrollo de Laurent  $f(z) = \mathcal{P}_j(z) + f_j(z)$ , donde  $\mathcal{P}_j(z) := \frac{a_{j,1}}{z-z_j} + \frac{a_{j,2}}{(z-z_j)^2} + \dots$  es la parte principal del desarrollo de Laurent, y  $f_j(z) := a_{j,0} + a_{j,1}(z-z_j) + \dots$  es la parte regular del mismo. Observemos que  $\mathcal{P}_j(z)$  es holomorfa en la corona  $C(z_j, 0, \infty) = \mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ , siendo la convergencia absoluta en esa corona y uniforme en  $C(z_j, r, \infty)$  para cualquier  $r > 0$ . Podemos pues considerar la función

$F(z) = f(z) - \mathcal{P}_1(z) - \dots - \mathcal{P}_n(z)$ , que se encuentra definida y es holomorfa en  $\mathcal{A} \setminus \{z_j\}_{j=1}^n$ , ya que así lo son todos los sumandos. Además se cumple que  $\lim_{z \rightarrow z_j} ((z - z_j)F(z)) = 0$ , i.e. la singularidad aislada de  $F(z)$  en  $z_j$  es evitable. Efectivamente, teniendo en cuenta los desarrollos de Laurent de  $f(z) = \mathcal{P}_j(z) + f_j(z)$  y su coronas de convergencia  $C(z_j, 0, r_j)$ , sabemos que  $(z - z_j)F(z) = (z - z_j) \left( f_j(z) - \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, n\} \\ k \neq j}} \mathcal{P}_k(z) \right) \xrightarrow{z \rightarrow z_j} 0$ . Por tanto, podemos extender la función  $F(z)$  al conjunto  $\{z_j\}_{j=1}^n$  prescribiendo que  $F(z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} F(z)$ . Esta función, que también denotaremos por  $F(z)$ , está definida en  $\mathcal{A}$  y es holomorfa en esta región. Por tanto, podemos aplicar el teorema de Cauchy para arcos homótopos a un punto y obtener  $\int_{\gamma} F(z) dz = 0$ . Esto es,  $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma} \mathcal{P}_j(z) dz$ , la suma de las integrales de las partes principales. El lector debe observar que las integrales  $\int_{\gamma} \mathcal{P}_j(z) dz$  están perfectamente definidas ya que la parte principal  $\mathcal{P}_j(z)$  lo está en  $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ . Además converge uniformemente en las coronas  $C(z_j, r, \infty)$ , con  $r > 0$ . Pero, como  $z_j \notin \gamma^*$ , existirá algún  $\rho_j > 0$  tal que  $\gamma^* \subset C(z_j, \rho_j, \infty)$ , y por ella la parte principal  $\mathcal{P}_j(z)$  converge uniformemente sobre  $\gamma^*$ , lo que permite usar el desarrollo en serie de la misma e integrar término a término:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathcal{P}_j(z) dz &= \int_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{j,k}}{(z - z_j)^k} dz \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{a_{j,k}}{(z - z_j)^k} dz && \text{convergencia uniforme} \\ &= a_{j,1} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_j} && \text{teorema fundamental del cálculo.} \end{aligned}$$

Luego,  $\int_{\gamma} \mathcal{P}_j(z) dz = n(\gamma, z_j) \text{Res}(f, z_j)$  y se deduce el resultado.  $\square$

Damos ahora una versión homológica del teorema.

#### Teorema de los residuos (versión homológica)

Sean una región  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ , un ciclo  $\Gamma$  hómologo a cero con respecto a  $\mathcal{A}$ , el conjunto de puntos  $\{z_1, \dots, z_n\} \subset \mathcal{A} \setminus \Gamma^*$ , y  $f : \mathcal{A} \setminus \{z_j\}_{j=1}^n \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa con singularidades aisladas en  $\{z_j\}_{j=1}^n$ . Entonces, se verifica la fórmula de los residuos

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n n(\Gamma, z_j) \text{Res}(f, z_j).$$



DEMOSTRACIÓN. Sea  $\gamma_j$  la circunferencia centrada en  $z_j$  de radio  $\rho_j$  recorrida en sentido antihorario una vez de modo que  $\gamma_j^* \subset \mathcal{A}$  y  $\gamma_j \cap \Gamma = \emptyset$ . Entonces el ciclo  $\tilde{\Gamma} := \Gamma - \sum_{j=1}^n n(\Gamma, z_j) \gamma_j$  es hómologo a cero en  $\mathcal{A}$ . Por tanto, la versión homológica del teorema de Cauchy nos dice que  $\int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = 0$ . Esto es, podemos escribir  $\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n n(\Gamma, z_j) \int_{\gamma_j} f(z) dz$ , pero  $\int_{\gamma_j} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_j)$ .  $\square$

**v.1.2. Cálculo de residuos** Visto el teorema de los residuos parece claro que para sus aplicaciones será útil tener herramientas y técnicas que permitan el cálculo de residuos de funciones holomorfas en sus singularidades aisladas, sin tener que calcular las correspondientes series de Laurent alrededor de dichas singularidades.

*v.1.2.1. Polos simples* Veamos en primer lugar un par de resultados útiles para el cálculo de residuos cuando la singularidad es un polo simple.

### Residuos en un polo simple I

Sean dos funciones  $F_1(z)$  y  $F_2(z)$ , holomorfas en un entorno de  $z_0$  con  $F_1(z_0), F_2'(z_0) \neq 0$  y  $F_2(z_0) = 0$ . Entonces la función  $f(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)}$  tiene un polo simple en  $z_0$  con residuo dado por  $\text{Res}(f, z_0) = \frac{F_1(z_0)}{F_2'(z_0)}$ .

DEMOSTRACIÓN. Como  $F_2(z)$  es holomorfa en  $z_0$ , donde tiene un cero y su derivada no se anula, su desarrollo de Taylor será de la forma  $F_2(z) = (z - z_0)\tilde{F}_2(z)$ , donde  $\tilde{F}_2(z) := F_2'(z_0) + \frac{1}{2}F_2''(z_0)(z - z_0) + \dots$ . Luego,  $f(z) = \frac{F_1(z)}{\tilde{F}_2(z)} \frac{1}{z - z_0}$ , con  $\frac{F_1(z)}{\tilde{F}_2(z)}$  una función holomorfa en  $z_0$ . Vemos que  $z_0$  es un polo simple y del correspondiente desarrollo de Laurent, que se puede obtener, por ejemplo, del desarrollo de Taylor de  $\frac{F_1(z)}{\tilde{F}_2(z)}$  dividiendo por  $z - z_0$ , concluimos que  $\text{Res}(f, z_0) = \frac{F_1(z_0)}{F_2'(z_0)}$ .  $\square$

### Residuos en un polo simple II

Sean dos funciones  $F_1(z)$  y  $F_2(z)$ , holomorfas en un entorno de  $z_0$ , donde  $F_1(z)$  y  $F_2(z)$  tienen un cero de ordenes  $n$  y  $n+1$ , respectivamente. Entonces la función  $f(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)}$  tiene un polo simple en  $z_0$  con residuo dado por  $\text{Res}(f, z_0) = (n+1) \frac{F_1^{(n)}(z_0)}{F_2^{(n+1)}(z_0)}$ .

DEMOSTRACIÓN. Dadas las condiciones sobre las funciones  $F_1(z)$  y  $F_2(z)$ , los correspondientes desarrollos de Taylor en  $z_0$  serán de la forma  $F_1(z) = (z - z_0)^n \tilde{F}_1(z)$  con  $\tilde{F}_1(z) := \frac{F_1^{(n)}(z_0)}{n!} + \frac{F_1^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z - z_0) + \dots$ , y  $F_2(z) = (z - z_0)^{n+1} \tilde{F}_2(z)$  con  $\tilde{F}_2(z) := \frac{F_2^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} + \frac{F_2^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!}(z - z_0) + \dots$ , respectivamente. Aquí las funciones  $\tilde{F}_1(z)$  y  $\tilde{F}_2(z)$  son funciones holomorfas en un entorno de  $z_0$  y no se anulan allí, tomando los valores  $\tilde{F}_1(z_0) = \frac{F_1^{(n)}(z_0)}{n!}$  y  $\tilde{F}_2(z_0) = \frac{F_2^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}$ . Luego, tendremos para  $f(z) = \frac{\tilde{F}_1(z)}{\tilde{F}_2(z)} \frac{1}{z - z_0}$ , esto es, un polo simple en  $z_0$ , con coeficiente en su desarrollo de Laurent alrededor de  $z_0$  dado por  $\frac{\tilde{F}_1(z_0)}{\tilde{F}_2(z_0)}$ , que es el residuo anunciado.  $\square$

*v.1.2.2. Polos dobles* Procedemos ahora a discutir un caso un poco más elaborado, el de polos dobles.

## Residuos en un polo doble I

Sean dos funciones  $F_1(z)$  y  $F_2(z)$ , holomorfas en un entorno de  $z_0$  con  $F_1(z_0), F_2''(z_0) \neq 0$  y  $F_2(z_0) = F_2'(z_0) = 0$ . Entonces la función  $f(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)}$  tiene un polo doble en  $z_0$  con residuo dado por  $\text{Res}(f, z_0) = 2 \frac{F_1'(z_0)}{F_2''(z_0)} - \frac{2 F_1(z_0) F_2'''(z_0)}{(F_2''(z_0))^2}$ .

DEMOSTRACIÓN. Dadas las condiciones sobre las funciones  $F_1(z)$  y  $F_2(z)$ , los correspondientes desarrollos de Taylor en  $z_0$  serán de la forma  $F_1(z) = F_1(z_0) + F_1'(z_0)(z - z_0) + \dots$ , y  $F_2(z) = (z - z_0)^2 \tilde{F}_2(z)$  con  $\tilde{F}_2(z) := \frac{F_2''(z_0)}{2} + \frac{F_2'''(z_0)}{6}(z - z_0) + \dots$ , respectivamente. Tendremos para  $f(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)} \frac{1}{(z - z_0)^2}$ , que claramente muestra la existencia de un polo doble en  $z_0$ . Para hallar el residuo hay que desarrollar en serie de Laurent, e identificar su coeficiente en la potencia  $(z - z_0)^{-1}$ . Esto es, hay que resolver

$$\frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots = \frac{F_1(z_0) + F_1'(z_0)(z - z_0) + \dots}{\frac{F_2''(z_0)}{2} + \frac{F_2'''(z_0)}{6}(z - z_0) + \dots} \frac{1}{(z - z_0)^2}$$

o despejando

$$\begin{aligned} (a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + a_0 + a_1(z - z_0)^2 + \dots) & \left( \frac{F_2''(z_0)}{2} + \frac{F_2'''(z_0)}{6}(z - z_0) + \dots \right) \\ & = F_1(z_0) + F_1'(z_0)(z - z_0) + \dots \end{aligned}$$

Por tanto, nos queda  $a_{-2} \frac{F_2''(z_0)}{2} = F_1(z_0)$  y  $a_{-1} \frac{F_2''(z_0)}{2} + a_{-2} \frac{F_2'''(z_0)}{6} = F_1'(z_0)$  que conducen a  $a_{-2} = 2 \frac{F_1(z_0)}{F_2''(z_0)}$  y  $a_{-1} \frac{F_2''(z_0)}{2} = F_1'(z_0) - a_{-2} \frac{F_2'''(z_0)}{6}$ . Que implican el residuo anunciado.  $\square$

También se puede demostrar que

## Residuos en un polo doble II

Sean dos funciones  $F_1(z)$  y  $F_2(z)$ , holomorfas en un entorno de  $z_0$  con  $F_1'(z_0), F_2'''(z_0) \neq 0$  y  $F_1(z_0) = F_2(z_0) = F_2'(z_0) = F_2''(z_0) = 0$ . Entonces, la función  $f(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)}$  tiene un polo doble en  $z_0$  con residuo dado por  $\text{Res}(f, z_0) = 3 \frac{F_1''(z_0)}{F_2'''(z_0)} - \frac{3 F_1'(z_0) F_2^{IV}(z_0)}{(F_2'''(z_0))^2}$ .

v.1.2.3. *Polos de orden arbitrario* Cuando los ordenes de los polos crecen la dificultad en el cálculo del residuo también. Una fórmula alternativa, aunque computacionalmente a menudo costosa es la siguiente.

**Residuos en un polo múltiple I**

Si  $f(z)$  tiene un polo de orden  $n$  en  $z_0$  el residuo será

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-z_0)^n f(z)).$$



DEMOSTRACIÓN. En alguna corona  $C(z_0, 0, R)$ ,  $R > 0$ , alrededor del polo tendremos el desarrollo de Laurent  $f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + F(z)$ , donde  $F(z)$  es una serie de potencias centrada en  $z_0$  que converge en  $D(z_0, R)$ . Luego,  $(z-z_0)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + (z-z_0)^n F(z)$ , y la fórmula se deduce inmediatamente. Basta con considerar que  $(z-z_0)^n f(z)$  tiene una singularidad evitable en  $z_0$ , que nos permite extender su valor a  $z_0$  mediante la serie de potencias recién escrita. Ahora, si interpretamos este desarrollo como un desarrollo de Taylor, la fórmula para el  $(n-1)$ -ésimo coeficiente nos da la fórmula para el residuo. □

**Residuos en un polo múltiple II**

Sean  $m, n \in \mathbb{Z}_+$ , y  $F_1(z)$  y  $F_2(z)$  holomorfas en un entorno de  $z_0$  en donde tienen un cero en  $z_0$  de ordenes  $m$  y  $m+n$ , respectivamente. Entonces,  $f(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)}$  tiene un polo de orden  $n$  en  $z_0$  y el residuo se puede calcular mediante la siguiente fórmula determinantal:

$$\text{Res}(f, z_0) = \left( \frac{(m+n)!}{F_2^{(m+n)}(z_0)} \right)^n \begin{vmatrix} \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} & 0 & \dots & 0 & \frac{F_1^{(m)}(z_0)}{m!} \\ \frac{F_2^{(m+n+1)}(z_0)}{(m+n+1)!} & \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} & \ddots & \vdots & \frac{F_1^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \frac{F_2^{(m+2n-2)}(z_0)}{(m+2n-2)!} & \frac{F_2^{(m+2n-3)}(z_0)}{(m+2n-3)!} & \dots & \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} & \frac{F_1^{(m+n-2)}(z_0)}{(m+n-2)!} \\ \frac{F_2^{(m+2n-1)}(z_0)}{(m+2n-1)!} & \frac{F_2^{(m+2n-2)}(z_0)}{(m+2n-2)!} & \dots & \frac{F_2^{(m+n-1)}(z_0)}{(m+n-1)!} & \frac{F_1^{(m+n-1)}(z_0)}{(m+n-1)!} \end{vmatrix}.$$



DEMOSTRACIÓN. Dados  $m, n \in \mathbb{Z}_+$ , si  $F_1(z)$  y  $F_2(z)$  tienen un cero en  $z_0$  de ordenes  $m$  y  $m+n$ , respectivamente, esto es

$$F_1(z) = (z-z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_1^{(k+m)}(z_0)}{(k+m)!} (z-z_0)^k, \quad F_2(z) = (z-z_0)^{m+n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_2^{(k+m+n)}(z_0)}{(k+m+n)!} (z-z_0)^k,$$

convergentes en algún disco centrado en la singularidad. Por tanto, sabemos que  $f(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)}$  tiene un polo de orden  $n$  en  $z_0$ . Más aún, podemos elegir un  $R > 0$  tal que las series de Taylor convergen en el disco  $D(z_0, R)$  y la serie de Laurent

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots,$$

en la corona  $C(z_0, 0, R)$ . Luego, se deberá tener

$$\begin{aligned} & \frac{F_1^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{F_1^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0) + \dots \\ &= \left( \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} + \frac{F_2^{(m+n+1)}(z_0)}{(m+n+1)!}(z-z_0) + \dots \right) (a_{-n} + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + \dots) \end{aligned}$$

Obtenemos así un sistema lineal para los  $n$  coeficientes  $\{a_{-n}, \dots, a_{-1}\}$  de la forma

$$\begin{pmatrix} \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{F_2^{(m+n+1)}(z_0)}{(m+n+1)!} & \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{F_2^{(m+2n-1)}(z_0)}{(m+2n-1)!} & \frac{F_2^{(m+2n-2)}(z_0)}{(m+2n-2)!} & \dots & \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-n} \\ a_{-n+1} \\ \vdots \\ a_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_1^{(m)}(z_0)}{m!} \\ \frac{F_1^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} \\ \vdots \\ \frac{F_1^{(m+n-1)}(z_0)}{(m+n-1)!} \end{pmatrix}$$

La matriz de este sistema es invertible ya que su determinante es  $\left(\frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!}\right)^n$ , que hemos supuesto distinto de cero. Por tanto, en términos de la matriz inversa tendremos

$$\begin{pmatrix} a_{-n} \\ a_{-n+1} \\ \vdots \\ a_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{F_2^{(m+n+1)}(z_0)}{(m+n+1)!} & \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{F_2^{(m+2n-1)}(z_0)}{(m+2n-1)!} & \frac{F_2^{(m+2n-2)}(z_0)}{(m+2n-2)!} & \dots & \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{F_1^{(m)}(z_0)}{m!} \\ \frac{F_1^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} \\ \vdots \\ \frac{F_1^{(m+n-1)}(z_0)}{(m+n-1)!} \end{pmatrix},$$

de donde extraemos la expresión del residuo

$$\text{Res}(f, z_0) = (0, 0, \dots, 0, 1) \begin{pmatrix} \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{F_2^{(m+n+1)}(z_0)}{(m+n+1)!} & \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{F_2^{(m+2n-1)}(z_0)}{(m+2n-1)!} & \frac{F_2^{(m+2n-2)}(z_0)}{(m+2n-2)!} & \dots & \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{F_1^{(m)}(z_0)}{m!} \\ \frac{F_1^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} \\ \vdots \\ \frac{F_1^{(m+n-1)}(z_0)}{(m+n-1)!} \end{pmatrix},$$

que conduce a la siguiente expresión determinantal

$$\text{Res}(f, z_0) = - \left( \frac{(m+n)!}{F_2^{(m+n)}(z_0)} \right)^n \begin{vmatrix} \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} & 0 & \dots & 0 & \frac{F_1^{(m)}(z_0)}{m!} \\ \frac{F_2^{(m+n+1)}(z_0)}{(m+n+1)!} & \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} & \ddots & \vdots & \frac{F_1^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{F_2^{(m+2n-1)}(z_0)}{(m+2n-1)!} & \frac{F_2^{(m+2n-2)}(z_0)}{(m+2n-2)!} & \dots & \frac{F_2^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} & \frac{F_1^{(m+n-1)}(z_0)}{(m+n-1)!} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Esta expresión, una vez se desarrolla por Laplace a lo largo de la última fila, da lugar al resultado.  $\square$



Por ejemplo, pongamos  $m = 1$  y  $n = 3$ , esto es  $F_1(z)$  tiene un cero de orden 1 en  $z_0$  y  $F_2(z)$  tiene un cero de orden 4 en ese punto. Entonces,  $f(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)}$  tiene un polo triple en  $z_0$ . La fórmula anterior nos dice para el residuo que

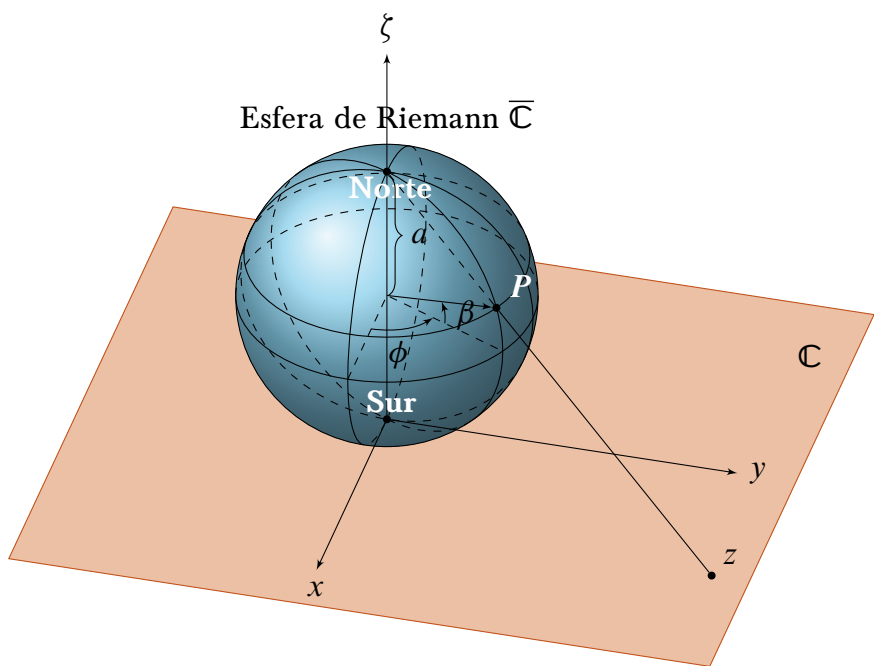
$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \left(\frac{24}{F_2^{(4)}(z_0)}\right)^3 \begin{vmatrix} \frac{F_2^{(4)}(z_0)}{24} & 0 & F_1'(z_0) \\ \frac{F_2^{(5)}(z_0)}{120} & \frac{F_2^{(4)}(z_0)}{24} & \frac{F_1''(z_0)}{2} \\ \frac{F_2^{(6)}(z_0)}{720} & \frac{F_2^{(5)}(z_0)}{120} & \frac{F_1'''(z_0)}{6} \end{vmatrix} \\ &= 4 \frac{F_1^{(3)}(z_0)}{F_2^{(4)}(z_0)} - \frac{12 F_2^{(6)}(z_0) F_1^{(1)}(z_0) + 3 F_2^{(5)}(z_0) F_1^{(2)}(z_0)}{15 (F_2^{(4)}(z_0))^2} + \frac{72 (F_2^{(5)}(z_0))^2 F_1^{(1)}(z_0)}{75 (F_2^{(4)}(z_0))^3}. \end{aligned}$$

**v.1.3. Residuos en el infinito**

Vamos a añadir al plano complejo el punto del infinito  $\infty$ , transformando  $\mathbb{C}$  en el plano complejo extendido  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .<sup>1</sup> Este proceso tiene un sentido topológico, y se construye mediante una proyección estereográfica, que envía el plano complejo a una esfera de radio unidad, en donde el cero es el polo sur y el  $\infty$  el polo norte. La proyección se consigue situando el plano complejo como si fuera un plano paralelo al plano ecuatorial de la esfera que pasa por el polo sur, soportando la esfera de Riemann, y se trazan rayos que parten del polo norte a puntos del plano complejo, siendo el punto de corte con la esfera el punto que se le asigna a ese punto del plano complejo en la esfera de Riemann. La esfera de Riemann es compacta y toda secuencia tiene una subsecuencia convergente, y por lo tanto  $\bar{\mathbb{C}}$  también es compacto, como muestra la proyección estereográfica. Hay que ser cuidadoso ya que cuando el limite es el infinito se suele decir que diverge. Diverge en el plano de Wessel–Argand y converge en la esfera de Riemann.

Si una función  $f(z)$  es holomorfa para todos los posibles  $z$ , por muy grandes que estos fueran en módulo, salvo por un conjunto acotado de singularidades, entonces es holomorfa en una corona alrededor de infinito, donde se debe entender que estamos trabajando en la esfera de Riemann. Así el  $\infty$  es una singularidad aislada, tal vez una singularidad evitable, o bien un polo o una singularidad esencial. Para tratar dichas singularidades se considera la función  $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ , y se traslada así el estudio del punto infinito para  $f(z)$  al del origen para  $F(z)$ .

<sup>1</sup>Al no existir un orden que respete la estructura de cuerpo no se introducen dos infinitos como en  $\mathbb{R}$ ,  $-\infty$  es menor que cualquier real y  $+\infty$  mayor que cualquier real. En los complejos sólo se habla de un  $\infty$ , al que se puede llegar por muchas direcciones, todas las del plano de Wessel–Argand.



**Esfera de Riemann**  
Proyección estereográfica al plano de Wessel–Argand

### Polos y residuos en el infinito

Sea  $F(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ . Entonces:

- i) Si  $F(z)$  tiene un polo de orden  $n$  en  $0$  diremos que  $f(z)$  tiene un polo de orden  $n$  en  $\infty$ .
- ii) Si  $F(z)$  tiene un cero de orden  $n$  en  $0$  diremos que  $f(z)$  tiene un cero de orden  $n$  en  $\infty$ .
- iii) Se define  $\text{Res}(f, \infty) := -\text{Res}(F(z)z^{-2}, 0)$

Hay que tener cierto cuidado, ya que no hay acuerdo sobre el signo escogido para el residuo en el  $\infty$ . Dependiendo del libro o texto se cambia el signo del mismo.

### Teorema de los residuos en el infinito

Sea  $R_0 > 0$  tal que  $f(z)$  es una función holomorfa en  $C(0, R_0, \infty)$ . Entonces, si  $R > R_0$  y  $\gamma$  es la circunferencia centrada en el origen de radio  $R$  que se recorre una vez en sentido antihorario, se tendrá

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = -2\pi i \text{Res}(f, \infty).$$



**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\tilde{\gamma}$  el arco que recorre en sentido antihorario una vez la circunferencia centrada en el origen de radio  $\frac{1}{R}$ . De este modo, si  $z$  está en el interior de  $\tilde{\gamma}$ , i.e.  $|z| < \frac{1}{R}$ , sabemos que  $\frac{1}{z}$  pertenece al exterior de  $\gamma$ , i.e.,  $|\frac{1}{z}| > R$ . Así que  $\ell(z) = \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$  es una función holomorfa en el interior de  $\tilde{\gamma}$  salvo por el origen, esto es, en la corona  $C\left(0, 0, \frac{1}{R}\right)$ , donde tiene una singularidad aislada. Luego, el teorema de los residuos asegura que  $2\pi i \text{Res}(\ell, 0) = \int_{\tilde{\gamma}} \ell(z) \, dz$ , que por definición de residuo en el infinito es equivalente a  $-2\pi i \text{Res}(f, \infty) = \int_{\tilde{\gamma}} \ell(z) \, dz$ . Un cambio de variable dentro de la integral  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , y concluimos el resultado. Efectivamente,

$$\begin{aligned} -2\pi i \text{Res}(f, \infty) &= \int_{\tilde{\gamma}} \ell(z) \, dz = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \, dz = \int_{\tilde{\gamma}} f\left(\frac{1}{z}\right) \, d\left(-\frac{1}{z}\right) \\ &= - \int_{-\tilde{\gamma}} f(\zeta) \, d\zeta, && \text{cambio de variable } \zeta = \frac{1}{z} \\ &= \int_{\gamma} f(\zeta) \, d\zeta. \end{aligned}$$

□

### Teorema de los residuos en el infinito II

Sean  $\gamma$  un arco suave a trozos, simple y cerrado que se recorre en sentido antihorario una vez y  $f(z)$  una función holomorfa en  $\mathbb{C}$  salvo por un número finito de singularidades  $\{z_i\}_{i=1}^m$  que no yacen en  $\gamma^*$ ,  $\gamma^* \cap \{z_i\}_{i=1}^m = \emptyset$ . Entonces,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \sum_{z_i \in \text{Ext}(\gamma)} \text{Res}(f, z_i) - 2\pi i \text{Res}(f, \infty)$$



DEMOSTRACIÓN. Al tener un número finito de singularidades, existirá un  $R > 0$  suficientemente grande para que la circunferencia  $\Gamma$  de radio  $R$ , centrada en el origen, recorrida una vez en sentido antihorario, contenga a todas las singularidades en su interior,  $\{z_i\}_{i=1}^m \subset \text{Int}(\Gamma) = D(0, R)$ . Por tanto, utilizando el teorema de los residuos, tendremos

$$-2\pi i \text{Res}(f, \infty) = \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f, z_j).$$

De donde, separando en la suma los residuos en el exterior de los del interior, concluimos que  $-\text{Res}(f, \infty) - \sum_{z_i \in \text{Ext}(\gamma)} \text{Res}(f, z_i) = \sum_{z_i \in \text{Int}(\gamma)} \text{Res}(f, z_i)$ . Por otro lado, también del teorema de los residuos, sabemos que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_i \in \text{Int}(\gamma)} \text{Res}(f, z_i)$$

y el resultado se sigue. □

### Residuos en el infinito

- i) Sea el desarrollo de Laurent  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$  convergente en la corona  $C(0, R, \infty)$ ,  $R > 0$ . Entonces,  $\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$ .
- ii) Sea  $f(z)$  una función con singularidades aisladas en  $\mathbb{C}$  tal que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ . Entonces,  $\text{Res}(f, \infty) = -\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$ .

DEMOSTRACIÓN. i) Tendremos que la serie de Laurent  $z^{-2} F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+2}}$  converge en la corona  $C(0, 0, \frac{1}{R})$ , por tanto  $\text{Res}(z^{-2} F(z), 0) = a_{-1}$ .

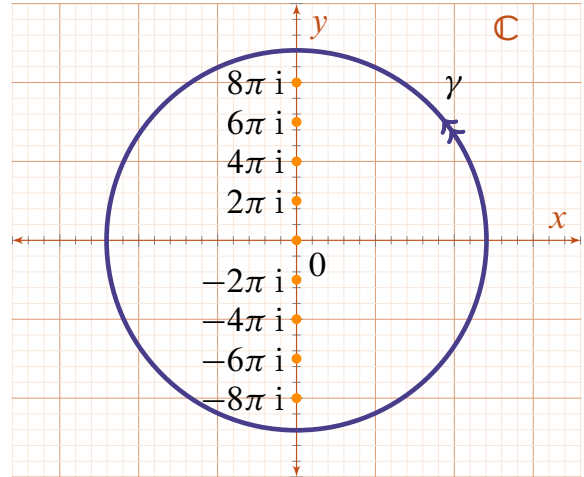
ii) Como  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  el desarrollo de Laurent en  $\infty$  es  $f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$ . Luego  $a_{-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$ . □



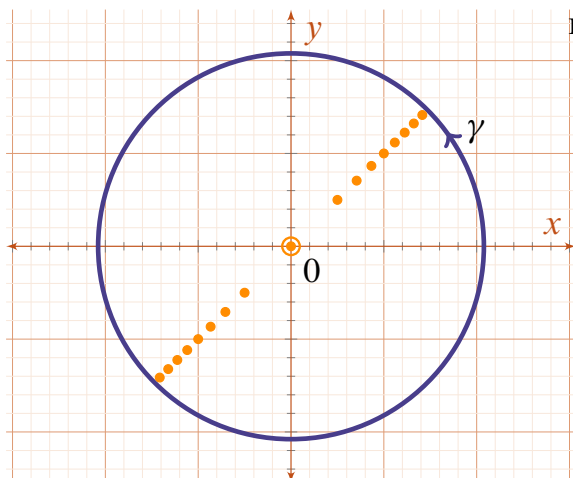
### Ejemplos:

i) Sea  $\gamma$  el arco que recorre la circunferencia unidad en sentido antihorario una vez. Calculemos la integral  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$ . La función  $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$  es una función holomorfa en el interior del arco salvo por una singularidad, que es esencial, en 0. El correspondiente desarrollo de Laurent es  $f(z) = z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} \cdots\right) = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{24z^2} + \cdots$ , por lo que  $\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{6}$  y así, el teorema de los residuos nos asegura que  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = \frac{1}{6}$ .

ii) Sean  $N \in \mathbb{N}$  un entero positivo y  $\gamma$  el arco que recorre la circunferencia de radio  $r$ ,  $2\pi N < r < 2\pi(N+1)$ , centrada en 0 en sentido antihorario dos veces. Calculemos  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , con  $f(z) := \frac{1}{e^z - 1}$ . La función  $e^z - 1$  es una función entera, y sus ceros son los puntos en  $\{2\pi i n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , que son simples ya que  $(e^z - 1)' = e^z$  no se anula nunca. Luego, la función  $f(z)$  es una función meromorfa en  $\mathbb{C}$  con singularidades aisladas en  $\{2\pi i n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , que son polos simples. Para el cálculo del residuo consultamos el cuadro *Residuos en un polo simple I* para así obtener que  $\text{Res}(f, 2\pi i n) = 1$ . Por lo tanto, dado que el arco sólo circunda  $2N + 1$  polos simples, el conjunto  $\{2\pi i n\}_{n=-N}^N$ , y que cada uno de estos polos simples es rodeado dos veces por la curva  $n(\gamma, 2\pi i n) = 2$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$ , del teorema de los residuos obtenemos el siguiente valor para la integral  $\int_{\gamma} f(z) = 4(2N + 1)\pi i$ .



Polos simples en el interior del arco  $N = 4$



Polos en el interior del arco  $N = 8$

III) Compliquemos un poco el ejemplo anterior. Sean  $N \in \mathbb{N}$  un entero positivo y  $\gamma$  el arco que recorre la circunferencia de radio  $r$ ,  $\sqrt{2\pi N} < r < \sqrt{2\pi(N+1)}$  centrada en 0 en sentido antihorario una vez. Calculemos  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , con  $f(z) := \frac{1}{e^{-z^2}-1}$ . La función  $F_2(z) = e^{-z^2} - 1$  es una función entera, y sus ceros son los puntos en  $\{\pm\sqrt{\pi n}(1+i)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , que son simples ya que  $F_2'(z) = -2ze^{-z^2}$  no se anula nunca salvo en 0, y el origen, que es un cero de segundo orden. Efectivamente, la segunda derivada es  $F_2''(z) = (4z^2 - 2)e^{-z^2}$ , que toma el valor  $F_2''(0) = -2$ . Por tan-

to, la función  $f(z)$  es una función meromorfa en  $\mathbb{C}$  con singularidades aisladas en  $\{\pm\sqrt{\pi n}(1+i)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , que son polos simples y un polo doble en el origen. Para los polos simples usamos de nuevo el cuadro *Residuos en un polo simple I*, y deducimos  $\text{Res}(f, \pm\sqrt{\pi n}(1+i)) = \mp \frac{1}{2\sqrt{\pi n}(1+i)} = \mp \frac{1-i}{4\sqrt{\pi n}}$ . Para evaluar el residuo en el origen usamos el cuadro *Residuos en un polo doble I*, para lo que requeriremos el cálculo de  $F_2'''(z) = -4z(2z^2 - 3)e^{-z^2}$ , y como  $F_2'''(0) = 0$  el residuo en el origen se anula,  $\text{Res}(f, 0) = 0$ . El arco  $\gamma$  encierra los polos simples  $\{\pm\sqrt{\pi n}(1+i)\}_{n=1}^N$  y el polo doble 0, y la integral se anulará,  $\int_{\gamma} \frac{dz}{e^{-z^2}-1} = 0$ , ya que al aplicar el teorema de los residuos, podemos agrupar los polos simples en parejas, que dados que tienen residuos opuestos, no contribuyen a la suma, y el polo doble tiene residuo nulo.

IV) Sea  $f(z) = \frac{c^2 - z^2}{(c^2 + z^2)z}$  y  $\gamma$  una curva que circunda los puntos  $\{0, \pm ic\}$  en sentido antihorario una vez. Luego,  $\int_{\gamma} f(z) dz = -\text{Res}(f, \infty)$ , ya que no hay singularidades en el exterior de  $\gamma$ . Pero,  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  así que  $\text{Res}(f, \infty) = -\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 1$ . Así que,  $\int_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i$ . Este ejemplo se puede generalizar del siguiente modo, supongamos dos polinomios  $P(z) = c_N z^N + \dots + c_0$  y  $Q(z) = d_{N+1} z^{N+1} + \dots + d$ , con  $c_N d_{N+1} \neq 0$ . Vamos a evaluar  $\int_{\gamma} f(z) dz$  donde  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  y  $\gamma$  es un arco suave a trozos que circunda los  $N+1$  raíces de  $Q$  una vez en sentido antihorario. Se tiene que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  y que  $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = \frac{c_N}{d_{N+1}}$ . por tanto, aplicando el teorema de los residuos concluimos que  $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \frac{c_N}{d_{N+1}}$



Si l'on désigne par  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  les racines de l'équation

$$(20) \quad \frac{1}{f(x)} = 0,$$

dans lesquelles les parties réelles restent comprises entre les limites  $x', x''$ , et les coefficients de  $\sqrt{-1}$  entre les limites  $y', y''$ , et par  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$  les véritables valeurs des produits  $kf(x_0 + k), kf(x_1 + k), \dots, kf(x_{n-1} + k)$ , correspondantes à  $k=0$ , on aura

$$(21) \quad \int_{x'}^{x''} [f(x + y''\sqrt{-1}) - f(x + y'\sqrt{-1})] dx \\ = \sqrt{-1} \int_{y'}^{y''} [f(x'' + y\sqrt{-1}) - f(x' + y\sqrt{-1})] dy \\ - 2\pi\sqrt{-1}(f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}).$$

déterminent des valeurs de  $p$  renfermées entre les limites  $p', p''$ , et des valeurs de  $r$  renfermées entre les limites  $r', r''$ . Si l'on pose, pour plus de commodité,

$$(23) \quad \begin{cases} \chi(p, r) = f(P + R\sqrt{-1}) \frac{d(P + R\sqrt{-1})}{dp}, \\ \psi(p, r) = f(P + R\sqrt{-1}) \frac{d(P + R\sqrt{-1})}{dr}, \end{cases}$$

on aura généralement

$$(24) \quad \int_{p'}^{p''} [\chi(p, r'') - \chi(p, r')] dp \\ = \int_{r'}^{r''} [\psi(p'', r) - \psi(p', r)] dr - 2\pi\sqrt{-1}(\pm f_0 \pm f_1 \pm \dots \pm f_{n-1}),$$

### Párrafos de Cauchy

*Bulletin de la Societe Philomatic* (1822) 161-174

integral singular considera la integral  $\int_{x'}^{x''} f(x) dx$  donde  $f(x)$  es "infinita o indeterminada" en  $x_0$ . Si  $k$  es un "número muy pequeño" y  $f_0$  es el valor verdadero de  $kf(x_0 + k)$  correspondiente a  $k=0$ , entonces la integral singular  $\int_{x_0 - k\alpha'}^{x_0 + k\alpha''} f(x) dx$ , siendo  $\alpha'$  y  $\alpha''$  constantes, es igual a  $f_0 \log \frac{\alpha''}{\alpha'}$ . Esta idea la extiende para considerar  $n$  posibles singularidades  $x' < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x''$ . Por tanto, la integral  $A = \int_{x'}^{x''} f(x) dx$  es equivalente a la suma de integrales singulares siguiente  $A = \int_{x'}^{x_0 - k\alpha'} f(x) dx + \int_{x_0 + k\alpha'}^{x_1 - k\beta'} f(x) dx + \dots + \int_{x_0 + k\epsilon''}^{x''} f(x) dx$ . Cuando  $1 = \alpha' = \alpha'' = \beta' = \dots = \epsilon''$  uno obtiene el *valor principal*  $B$  de la integral

**V.1.4. Historias residuales** En el caso del Teorema de los Residuos no hay duda, Cauchy es el padre del resultado. Pero ¿cómo lo obtuvo? Posiblemente el resultado comenzó a tomar forma antes de 1820, ya que se mencionan resultados parciales no publicados en su *Mémoire* de 1819. Fue en 1822 cuando, en el trabajo titulado *Mémoire sur les intégrales définies, où l'on fixe le nombre et la nature des constantes arbitraires et des fonctions arbitraires que peuvent comporter les valeurs de ces mêmes intégrales quand elles deviennent indéterminées*, que se publicó en *Bulletin de la Societe Philomatic* escribe de forma bastante general el teorema de los residuos. Cauchy comienza afirmando que los resultados que presenta en ese trabajo desarrollan resultados previos de una memoria presentada a la *Académie des Sciences* el 13 de mayo de 1816, que nunca fue publicada. Después de recordar la definición de in-

$\int_{x'}^{x''} f(x) dx$  (un polo simple en la terminología al uso). El “*valor general*” de la integral  $A$  será  $A = B + f_0 \log \frac{\alpha''}{\alpha'} + f_1 \frac{\beta''}{\beta'} + \dots + f_{n-1} \log \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$ . Aquí  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$  designan a los valores que adquieren los productos  $(x - x_0)f(x), (x - x_1)f(x), \dots, (x - x_{n-1})f(x)$  cuando los primeros factores son evanescentes. Luego la condición  $A = B$  para valores muy pequeños de  $k$  es necesaria y suficiente para que la integral sea finita y determinada. Cauchy extiende estos resultados a funciones complejas que son infinitas en  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ , esto es  $\frac{1}{f(x)} = 0$ , cuyas partes reales yacen entre  $x'$  y  $x''$  y cuyas partes imaginarias están entre  $y'$  e  $y''$ . Si  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$  designan “*véritables valeurs*” de los productos  $kf(x_0 + k), kf(x_1 + k), \dots, kf(x_{n-1} + k)$  correspondientes a  $k = 0$ , entonces, sin demostración, Cauchy escribe lo siguiente

$$\int_{x'}^{x''} [f(x + y''\sqrt{-1}) - f(x + y\sqrt{-1})] dx = \sqrt{-1} \int_{y'}^{y''} [f(x'' + y\sqrt{-1}) - f(x' + y\sqrt{-1})] dy - 2\pi\sqrt{-1}(f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}).$$

Esta fórmula, señala Cauchy, expresa de una forma más condensada, otra que es equivalente a ésta, cuando se toman partes real e imaginaria, que publicó en su *Mémoire sur les intégrales définies. Mémoires présentés par divers savants* 7 en 1814 (en realidad fue un añadido de 1825 a su memoria como pie de página). También, indica que cuando alguna de las singularidades, que eran polos simples, yace en el perímetro rectangular de integración “*se necesita sólo la mitad del término correspondiente a la raíz de que se trate*”. Como ejemplo de aplicación encuentra  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} e^{-a^2}$ . Cauchy generaliza este resultado permitiendo que el arco no sea un rectángulo, y  $x = P + R\sqrt{-1}$ , donde  $P$  y  $R$  son funciones reales de dos variables reales  $p, r$ , que varían entre  $p', p''$  y  $r', r''$ , respectivamente. Escribe

$$\begin{cases} \chi(p, r) = f(P + R\sqrt{-1}) \frac{d(P + R\sqrt{-1})}{dp}, \\ \psi(p, r) = f(P + R\sqrt{-1}) \frac{d(P + R\sqrt{-1})}{dr}, \end{cases}$$

y afirma (de nuevo, sin demostración)

$$\int_{p'}^{p''} [\chi(p, r'') - \chi(p, r')] dp = \int_{r'}^{r''} [\psi(p'', r) - \psi(p', r)] dr - 2\pi\sqrt{-1}(\pm f_0 \pm f_1 \pm \dots \pm f_{n-1})$$

donde el signo  $\pm$  lo determina el signo  $\frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial p}$  (el jacobiano de la transformación).

Tres años después, en su *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires* de 1825, considera a una función  $f(x + \sqrt{-1}y)$  que toma valores infinitos en el punto  $x = a + b\sqrt{-1}$ ,  $\frac{1}{f(z)} = 0$ , y llama  $f$  (que hoy llamamos residuo) al límite  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} (x - a + \sqrt{-1}(y - b))f(x + \sqrt{-1}y)$  que “*sans erreur sensible*”  $f = \epsilon f(a + \sqrt{-1}b + \epsilon)$ . Continua, cómo ya había hecho con su teorema de Cauchy, realizando pequeñas variaciones del arco. Para obtener la variación de la integral  $A + \sqrt{-1}B = \int_0^T [\phi'(t) + \sqrt{-1}\chi'(t)]f(\phi(t) + \sqrt{-1}\chi(t)) dt$  y usando su teoría del valor principal demuestra que su valor es  $2\pi\sqrt{-1}f$ .

Prosigue con una demostración alternativa, para ello descompone el integrando en dos partes

$$f(z) = \frac{f}{z - a - \sqrt{-1}b} + \omega(z),$$

donde  $\omega(z)$  es finita en  $a + \sqrt{-1}b$ , y por tanto su contribución a la integral es nula. Para *infinitos múltiples*, lo que hoy llamamos polos múltiples, llega a la fórmula para los residuos  $f = \frac{f^{(m-1)}(a + \sqrt{-1}b)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)}$  y a

$$f = \frac{1}{1 \cdots 2 \cdot 3 \cdots (m-1)} \frac{d^{m-1} \varepsilon^m f(a + \sqrt{-1}b + \varepsilon)}{d \varepsilon^{m-1}}.$$

Cuando existen varios infinitos Cauchy obtiene la versión del Teorema de los Residuos para un rectángulo

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^X f(x + y_0 \sqrt{-1}) dx + \sqrt{-1} \int_{y_0}^Y f(X + y \sqrt{-1}) dy \\ &= \int_{x_0}^X f(x + Y \sqrt{-1}) dx + \sqrt{-1} \int_{y_0}^Y f(x_0 + y \sqrt{-1}) dy \\ &+ 2\pi(f_1 + f_2 + \dots) \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Más tarde, publica en los *Annales de Mathematiques* de Gergonne, en dos partes, el trabajo *Mémoire sur les intégrales définies, où l'on donne une formule générale de laquelle se déduisent les valeurs de la plupart des intégrales définies déjà connues et celles d'un grand nombre d'autres*. En la primera parte (*Annales de Mathematiques* **16** (1825) 97-108), vuelve a considerar  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi(f_1 + f_2 + \dots + f_n)$  y relaja las condiciones que imponía para el comportamiento en el infinito. En particular, estudia el caso de singularidades aisladas de tipo polo múltiple en el semiplano superior. En la segunda parte (*Annales de Mathematiques* **17** (1826) 84-127), aplica todos estos resultados a la evaluación de casi 200 integrales definidas.

## §v.2. Evaluación de integrales reales



APLICACIONES de la teoría de funciones de una variable compleja existen muchas. Nosotros nos detendremos en una tradicional, la aplicación del teorema de los residuos de Cauchy a la evaluación de integrales de variable real. Ello va a dotarnos con un importante conjunto de herramientas para calcular diferentes tipos de integrales definidas cuyo cálculo de otro modo sería mucho más difícil. Los tipos de integrales van a ser de diferente tipo, integrales racionales en funciones trigonométricas, integrales impropias en toda la recta real, transformadas de Fourier, integrales de valor principal e integrales sobre cortes.

§ 12. Si, à l'aide des principes que nous venons d'exposer, on détermine la différence entre les deux sommes (81) et (82), c'est-à-dire entre les valeurs extrêmes de l'intégrale (4), dans le cas où cette différence conserve une valeur finie, on trouvera:

$$\begin{aligned} (86) \quad & \int_{x_0}^X f(x + y_0 \sqrt{-1}) dx + \sqrt{-1} \int_{y_0}^Y f(X + y \sqrt{-1}) dy \\ &= \int_{x_0}^X f(x + Y \sqrt{-1}) dx + \sqrt{-1} \int_{y_0}^Y f(x_0 + y \sqrt{-1}) dy \\ &+ 2\pi(f_1 + f_2 + \dots) \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

### Párrafo de Cauchy

*Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*  
(Imprimerie Royale, Paris)



**v.2.1. Integrales de expresiones racionales de funciones trigonométricas** En primer lugar mostraremos como calcular integrales de la forma  $\int_a^{a+2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$  donde  $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$  siendo  $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  polinomios reales en dos variables.

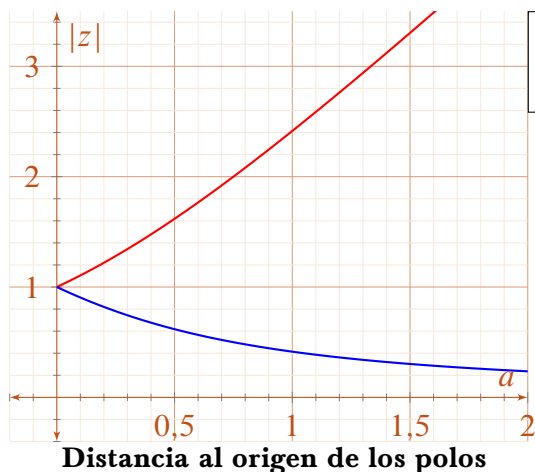
**Ejemplo:** Para ilustrar el método calcularemos la integral

$$I(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \theta}{a^2 + \cos^2 \theta} d\theta$$

para  $a > 0$ . En primer lugar, si escribimos  $z = e^{i\theta}$  para los puntos de la circunferencia unidad, podemos parametrizar  $\cos \theta = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$  y  $d\theta = \frac{dz}{iz}$ . Por tanto, si  $\gamma$  es el arco que recorre la circunferencia unidad una vez en sentido antihorario, deducimos la siguiente expresión para la integral

$$i I(a) = i \int_{\gamma} \frac{\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}{a^2 + \left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} \frac{dz}{iz} = \int_{\gamma} f(z) dz, \quad f(z) := \frac{(z^2+1)^2}{((z^2+1)^2 + 4a^2z^2)z}.$$

Ésta es una integral de una función  $f(z)$  holomorfa, salvo por singularidades aisladas, a lo largo de un arco cerrado  $\gamma$  y, por tanto, podemos aplicar el teorema de los residuos para su evaluación. Los ceros del numerador de  $f(z)$ , que son dobles, son los puntos  $\pm i$ . Los ceros del denominador de  $f(z)$  son el origen y las raíces de la ecuación bicuadrática  $(z^2+1)^2 + 4a^2z^2 = 0$ . En este caso, tal como está escrita, podemos resolverla directamente. Efectivamente, tomando raíces cuadradas vemos que  $z^2 + 1 = \pm 2a iz$ , esto es, hay dos ecuaciones cuadráticas, con dos soluciones cada una que hacen un total de cuatro soluciones. ¿Cuántos de estos cinco ceros están en el interior de  $\gamma$ ?



Obviamente, el 0 está. Por ello, hay que discutir que ocurre con los otros cuatro. Así pues,  $z^2 \mp 2a iz + 1 = 0$  si y sólo si  $z \in \{i(a + \sqrt{1+a^2}), i(a - \sqrt{1+a^2}), -i(a + \sqrt{1+a^2}), -i(a - \sqrt{1+a^2})\}$ . Vemos que  $|\pm i(a + \sqrt{1+a^2})| > 1$  para todo  $a > 0$ . Por otro lado,  $|\pm i(-a + \sqrt{1+a^2})| < 1$  para todo  $a > 0$  (la función  $-a + \sqrt{1+a^2}$  tiene como derivada  $-1 + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} < 0$ , es por tanto decreciente y como en  $a = 0$  vale 1, sabemos que siempre es menor que la unidad). Luego, en el interior de  $\gamma$  tenemos sólo los tres ceros

$$\{z_0 := 0, z_1 := (\sqrt{1+a^2} - a)i, z_2 := -(\sqrt{1+a^2} - a)i\},$$

que son **polos simples** del integrando, ya que el numerador no se anula sobre ellos salvo que  $a = 0$ , caso que hemos excluido. Recordamos ahora el Cuadro *Residuos en un polo simple I* con  $F_1(z) := (z^2 + 1)^2$  y  $F_2(z) = ((z^2 + 1)^2 + 4a^2z^2)z$ . Antes de continuar, y evaluar los residuos, debemos fijarnos en que, por construcción, se dan las siguientes identidades

$$z_1^2 + 1 = -2iaz_1, \quad z_1^2 + 1 = 2iaz_1, \quad (z_1^2 + 1)^2 = -4a^2z_1^2, \quad (z_2^2 + 1)^2 = -4a^2z_2^2.$$

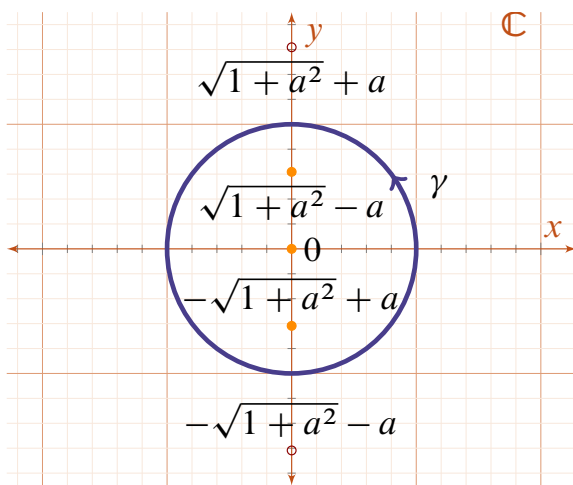
Para cada residuo tenemos  $\text{Res}(f, z_i) = \frac{F_1(z_i)}{F_2'(z_i)}$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ , por tanto calculamos la derivada del polinomio en el denominador,  $F_2'(z) = (z^2 + 1)^2 + 4a^2z^2 + (2z(z^2 + 1) + 8a^2z)z$ . Por ello,  $F_2'(0) = 1$ ,  $F_2'(z_1) = (2z_1(z_1^2 + 1) + 8a^2z_1)z_1 = 8a(-iz_1 + a)z_1^2 = 8a\sqrt{1 + a^2}z_1^2$  y también que  $F_2'(z_2) = (2z_2(z_2^2 + 1) + 8a^2z_2)z_2 = 8a(iz_2 + a)z_2^2 = 8a\sqrt{1 + a^2}z_2^2$ . Podemos evaluar los diferentes residuos

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \frac{F_1(0)}{F_2'(0)} = 1, \\ \text{Res}(f, z_1) &= \frac{F_1(z_1)}{F_2'(z_1)} = \frac{-4a^2z_1^2}{8a\sqrt{1 + a^2}z_1^2} = -\frac{a}{2\sqrt{1 + a^2}}, \\ \text{Res}(f, z_2) &= \frac{F_1(z_2)}{F_2'(z_2)} = \frac{-4a^2z_2^2}{8a\sqrt{1 + a^2}z_2^2} = -\frac{a}{2\sqrt{1 + a^2}}. \end{aligned}$$

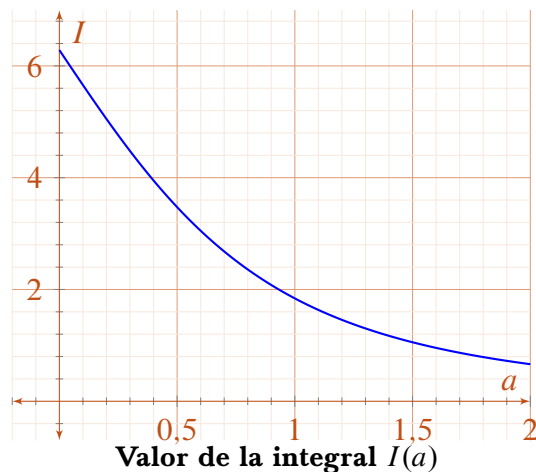
Finalmente, el teorema de los residuos da  $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_2))$  y, por ende,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \theta}{a^2 + \cos^2 \theta} d\theta = 2\pi \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \right).$$

Obsérvese que esta expresión es siempre positiva. Mostramos en las imágenes adjuntas la polología del problema, indicando los polos en el interior y los que se quedan fuera. También, en la gráfica de la derecha dibujamos el valor de la integral  $I(a)$  frente al parámetro  $a$ .



Polología y arco de integración



Valor de la integral  $I(a)$

**Integrales de funciones racionales de funciones trigonométricas**

Sean  $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$  una función racional con  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  polinomios en las variables  $x$  e  $y$ , primos relativos, y tal que  $Q(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0, \forall \theta \in [a, a + 2\pi], a \in \mathbb{R}$ , y la función

$$f(z) = -\frac{1}{z}R\left(\frac{1+z^2}{2z}, i\frac{1-z^2}{2z}\right)$$

cuyos polos son  $\{z_i\}_{i=1}^n$ . Entonces,

$$\int_a^{a+2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi \sum_{|z_i| < 1} \text{Res}(f, z_i).$$



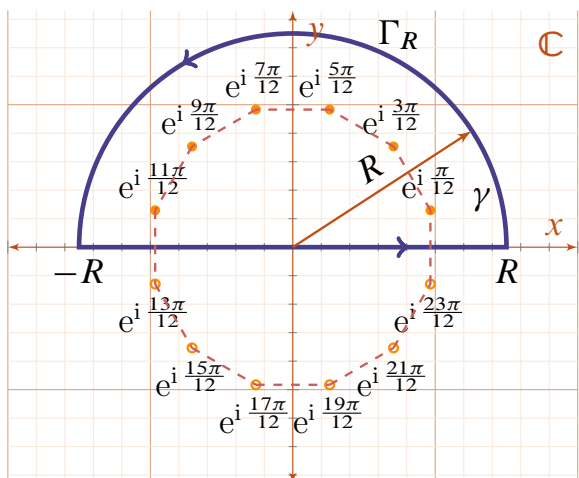
DEMOSTRACIÓN. Sea  $\gamma$  el arco que recorre la circunferencia unidad una vez en sentido antihorario, entonces  $\int_a^{a+2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = -i \int_{\gamma} f(z) dz$ . La función  $f(z)$  es una función holomorfa en  $\mathbb{C}$  salvo por singularidades aisladas que son polos. La polología de  $f(z)$  determina el valor de la integral via teorema de los residuos, sólo hay que identificar los polos que estén en  $\text{Int}(\gamma)$  y evaluar los correspondientes residuos.  $\square$

**v.2.2. Integrales impropias con límites de integración infinitos** Otro tipos de integrales que se pueden considerar en este contexto son las integrales impropias en toda la recta real.

**Ejemplo:** Como un primer caso vamos a calcular, para  $n, m \in \mathbb{N}, m < n$ , la integral



$$I_{n,m} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx.$$



Polología para  $n = 6$  y arco de integración

Una observación inmediata es que al ser integrando par tendremos  $2I_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx$ , que se presta a un cálculo por residuos. Otra, es que la integral impropia converge ya que existen  $M > 1, R_0 > 0$  tal que  $\left| \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} \right| < \frac{M}{|x|^2}$ , para  $|x| > R_0^2$ . Aplicaremos el teorema de los residuos integrando a lo largo del arco  $\gamma$  con  $\gamma^* = [-R, R] \cup \Gamma_R^*$  que se recorre una vez en sentido antihorario. Cómo vemos, tiene dos partes, el arco que recorre el intervalo  $[-R, R]$  y el arco que recorre el semicírculo  $\Gamma_R$ , con  $\Gamma_R^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \text{Re } z \geq 0\}$ . Estudiamos primero la integral  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , donde  $f(z) := \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}$ . Lo hacemos ya que la contribución a la integral proveniente del arco  $\Gamma_R$  tiende a cero a medida que  $R$  crece. Efectivamente, de la desigualdad

<sup>2</sup>Tenemos  $\left| \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} \right| \leq \frac{|x|^{2m}}{|x|^{2n-1}}$  para  $|x| > 1$ , así que buscamos aquellos  $x$  tales que  $\frac{|x|^{2m}}{|x|^{2n-1}} \leq \frac{M}{|x|^{2(n-m)}}$ ; esto es, la cota  $M$  debe ser tal que  $\frac{M}{M-1} \leq |x|^{2n}$ , esto es  $R_0 \geq \sqrt[n]{\frac{M}{M-1}}$ .

$|a - b| \geq ||a| - |b||$  deducimos que  $|z^{2n} + 1| \geq ||z|^{2n} - 1|$ , así que cuando  $z \in \Gamma_R$  con  $R > 1$  se satisface que  $|z^{2n} + 1| \geq R^{2n} - 1$ . Luego, obtenemos la cota  $\frac{|z^{2m}|}{|z^{2n} + 1|} \leq \frac{R^{2m}}{R^{2n} - 1}$  cuando  $z \in \Gamma_R^*$ , lo que nos permite deducir que

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{z^{2m}}{1 + z^{2n}} dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} \frac{|z^{2m}|}{|1 + z^{2n}|} |dz| \leq \frac{\pi R^{2m+1}}{R^{2n} - 1}.$$

Por ende, cómo  $2m + 1 < 2n$ , concluimos que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^{2m}}{1 + z^{2n}} dz = 0$ , y llegamos, usando el teorema de los residuos, a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{H}} \text{Res}(f, z_k),$$

donde  $z_k$  denotan los polos de  $f(z)$  y  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  es el semiplano superior. Analizamos ahora la polología de  $f(z)$ . Los polos de  $f(z)$  son los ceros de  $1 + z^{2n} = 0$ , esto es las raíces  $2n$ -ésimas de  $-1$ ,  $z_k = e^{i\frac{\pi}{2n}} e^{ik\frac{\pi}{n}}$  donde  $k \in \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$ . Así pues el conjunto de  $2n$  polos, que son todos simples, es  $\{e^{i\frac{\pi}{2n}}, e^{i\frac{3\pi}{2n}}, e^{i\frac{5\pi}{2n}}, \dots, e^{i\frac{(4n-1)\pi}{2n}}\}$ , y sólo la mitad está en el semiplano superior,  $\{e^{i\frac{\pi}{2n}}, e^{i\frac{3\pi}{2n}}, e^{i\frac{5\pi}{2n}}, \dots, e^{i\frac{(2n-1)\pi}{2n}}\} \subset \mathbb{H}$ . En la figura hemos ilustrado la polología de este problema. Como son polos simples, los residuos se obtienen de acuerdo con el Cuadro *Residuos en un polo simple I* con  $F_1(z) := z^{2m}$  y  $F_2(z) = 1 + z^{2n}$ . Por tanto, dado que  $F_2'(z) = 2nz^{2n-1}$  y  $F_2'(z_k) = 2nz_k^{2n} z_k^{-1} = -2nz_k^{-1}$ , obtenemos  $\text{Res}(f, z_k) = -\frac{z_k^{2m+1}}{2n}$ . Por ello,

$$\begin{aligned} 2I_{n,m} &= -2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z_k^{2m+1}}{2n} = -\frac{\pi}{n} i e^{i\frac{(2m+1)\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left( e^{i\frac{(2m+1)\pi}{n}} \right)^k \\ &= -\frac{\pi}{n} i e^{i\frac{(2m+1)\pi}{2n}} \frac{1 - \left( e^{i\frac{(2m+1)\pi}{n}} \right)^{n-1+1}}{1 - e^{i\frac{(2m+1)\pi}{n}}} = -\frac{\pi}{n} i e^{i\frac{(2m+1)\pi}{2n}} \frac{2}{1 - e^{i\frac{(2m+1)\pi}{n}}} \\ &= \frac{\pi}{n} \frac{2i}{e^{i\frac{(2m+1)\pi}{2n}} - e^{-i\frac{(2m+1)\pi}{2n}}} = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\text{sen} \frac{(2m+1)\pi}{2n}}. \end{aligned}$$

Finalmente, llegamos a

$$(15) \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx = \frac{\frac{\pi}{2n}}{\text{sen} \frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

La fórmula (15) adopta aún formas más simples para valores especiales de  $n, m$ :

i) Si  $\frac{2m+1}{2n} = \frac{1}{2}$  se tiene  $\text{sen} \frac{2m+1}{2n} \pi = 1$  y por tanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{4m+2}} dx = \frac{\pi}{4m + 2},$$

ii) Cuando  $\frac{2m+1}{2n} = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ , con  $\text{sen} \frac{2m+1}{2n} \pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$  obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{8m+4}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{6m+2}}{1 + x^{8m+4}} dx = \frac{\pi}{(4m + 2)\sqrt{2}}.$$

iii) Si  $\frac{2m+1}{2n} = \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$  se tiene  $\sin \frac{2m+1}{2n}\pi = \frac{1}{2}$  y llegamos a

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{12m+6}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{10m+4}}{1+x^{12m+6}} dx = \frac{\pi}{6m+3},$$

iv) Los valores especiales  $\frac{1}{3}$  y 1 no son factibles cuando  $n, m \in \mathbb{N}$ .

v) También observamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,m} = \frac{1}{2m+1}$ .

Por ejemplo,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^6} dx = \frac{\pi}{3}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{\pi}{6},$$

Las ideas introducidas en este ejemplo se puede extender a casos como el cálculo, para  $a > 0$ , de la integral

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^6} dx.$$

Consideramos ahora las mismas integrales que en el caso estudiado, pero ahora ponemos  $f(z) = \frac{e^{i|a|z}}{1+z^6}$  y obtenemos la cota  $\frac{|e^{i|a|z}|}{|z^6+1|} \leq \frac{e^{-|a|y}}{R^6-1} \leq \frac{1}{R^6-1}$ , cuando  $z \in \Gamma_R^*$ . lo que nos permite deducir que

$$(16) \quad \left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i|a|z}}{1+z^6} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^6-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Luego, concluimos que  $2I = \operatorname{Re} \int_{\gamma} f(z) dz = \operatorname{Re} \left( 2\pi i \sum_{z_i \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}(f, z_i) \right)$ . Las singularidades en  $\mathbb{H}$  de  $f(z)$  siguen siendo polos simples situados en  $\{z_1 := e^{i\frac{\pi}{6}}, z_2 := e^{i\frac{3\pi}{6}}, z_3 := e^{i\frac{5\pi}{6}}\}$ , i.e.,  $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ ,  $z_2 = i$  y  $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ . Los residuos son  $\operatorname{Res}(f, z_k) = -\frac{z_k e^{iaz_k}}{6}$ , esto es

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = -\frac{1}{6} e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{|a|}{2}(\sqrt{3}+i)} = -\frac{e^{-\frac{|a|}{2}}}{6} \left( \cos\left(\frac{|a|\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{|a|\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right),$$

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = -\frac{1}{6} i e^{-|a|}$$

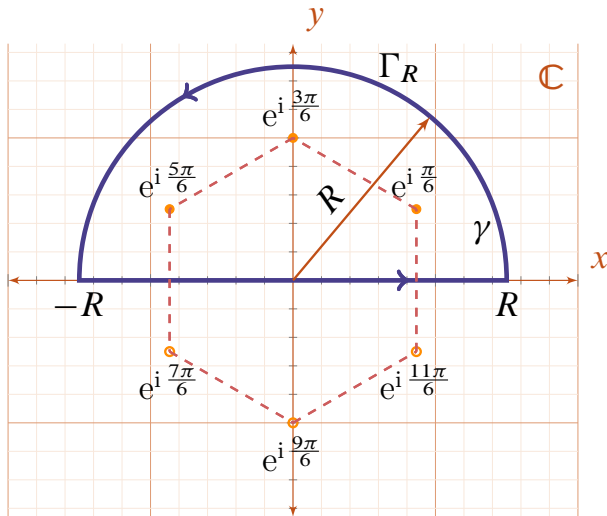
$$\operatorname{Res}(f, z_3) = -\frac{1}{6} (-e^{-i\frac{\pi}{6}}) e^{i\frac{|a|}{2}(-\sqrt{3}+i)} = \frac{e^{-\frac{|a|}{2}}}{6} \left( \cos\left(\frac{|a|\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{|a|\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right),$$

de donde obtenemos

$$\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2) + \operatorname{Res}(f, z_3) = -\frac{i}{6} \left( 2e^{-\frac{|a|}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{|a|\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + e^{-|a|} \right),$$

y, finalmente concluimos

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^6} dx = \frac{\pi}{6} \left( 2e^{-\frac{|a|}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{|a|\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + e^{-|a|} \right).$$



Polología y arco de integración

Valor de la integral  $I(a)$ 

Esta integral se anula infinitas veces. Efectivamente, se anulara en  $\sin\left(\frac{|a|\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -e^{-\frac{|a|}{2}}$ , que aproximadamente se anula en  $\frac{|a|\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = k\pi$ , para  $k$  un número natural suficientemente grande, siendo la diferencia exponencialmente pequeña, esto es cerca de los valores del parámetro  $a = (k - \frac{1}{6})\pi \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

### Integrales impropias I

- i) Sea  $\mathcal{A} \supset \overline{\mathbb{H}}$  un conjunto abierto que contiene al semiplano superior y  $f(z)$  una función holomorfa en  $\mathcal{A}$  salvo por un conjunto finito de singularidades aisladas  $\{z_k\}$  que no yacen en  $\mathbb{R}$ . Supongamos que existen constantes  $p$ , y  $M$ ,  $R_0 > 0$  y  $p > 1$  tales que  $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}$ ,  $\forall z \in \overline{\mathbb{H}} \cap C(0, R_0, \infty)$ . Entonces,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{H}} \text{Res}(f, z_k)$$

- ii) Sea  $\mathcal{A} \supset \mathbb{H}^{\mathbb{C}}$  un conjunto abierto que contiene al semiplano inferior y  $f(z)$  una función holomorfa en  $\mathcal{A}$  salvo por un conjunto finito de singularidades aisladas  $\{z_k\}$  que no yacen en  $\mathbb{R}$ . Supongamos que existen constantes  $p$ , y  $M$ ,  $R_0 > 0$  y  $p > 1$  tales que  $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}$ ,  $\forall z \in \mathbb{H}^{\mathbb{C}} \cap C(0, R_0, \infty)$ . Entonces,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{H}^{\mathbb{C}}} \text{Res}(f, z_k)$$



**DEMOSTRACIÓN.** i) En primer lugar, dadas las acotaciones para el módulo de  $f(x)$  sabemos que las integrales impropias en la recta real convergen. Utilizamos el arco que hemos utilizado en los ejemplos con  $\gamma^* = [-R, R] \cup \Gamma_R^*$ . Dadas las acotaciones tendremos  $|\int_{\Gamma_R^*} f(z) dz| \leq \frac{M\pi R}{R^p} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ .

II) El mismo argumento que en la anterior pero ahora el camino se debe recorrer en sentido antihorario para que así el tramo real se recorra de izquierda a derecha. □

### Integrales impropias II

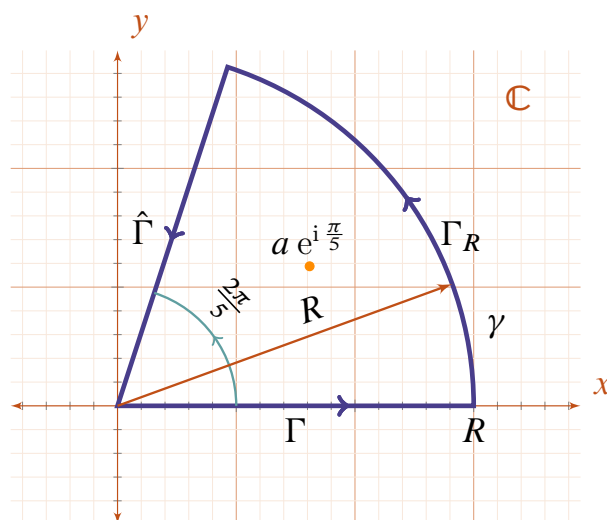
Sean  $P(x)$  y  $Q(x)$  dos polinomios primos relativos entre si, con  $\deg Q - \deg P \geq 2$  y los ceros  $\{z_j\}$  de  $Q(x)$  yacen en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= 2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{H}} \operatorname{Res} \left( \frac{P}{Q}, z_i \right) \\ &= -2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{H}^c} \operatorname{Res} \left( \frac{P}{Q}, z_i \right) \end{aligned}$$

**Ejemplo:** A veces es necesario modificar levemente estas técnicas para abarcar otros casos. Por ejemplo, para  $a > 0$  y  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n > m + 1$  (para que la integral impropia exista), vamos a calcular

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{x^n + a^n} dx.$$

Ahora no podemos aplicar las técnicas anteriores, cuando las potencias involucradas eran pares, ya que al perderse eventualmente la paridad, no sólo no podemos recuperar la integral impropia en  $\mathbb{R}$  doblando la parte del semieje positivo, sino que además en el semieje negativo, cuando  $n$  es impar, encontramos singularidades del integrando en  $-a$ . Por tanto, debemos modificar las ideas anteriores para aplicar el teorema de los residuos. La clave es observar que  $(x e^{\frac{2\pi i}{n}})^n = x^n$ , y considerar la integral de la función  $f(z) = \frac{z^m}{z^n + a^n}$  a lo largo del



Polología y arco de integración para  $n = 5$

arco de integración  $\gamma = \Gamma + \Gamma_R + \hat{\Gamma}$ , donde  $\Gamma^* = [0, R]$ , y  $\hat{\Gamma}^* = e^{i \frac{2\pi}{n}} [0, R]$  y  $\Gamma_R$  es el arco de una circunferencia centrada en el origen de radio  $R$  que subtende un ángulo  $\frac{2\pi}{n}$ . Las singularidades de  $f(z)$ , que son polos simples situados son  $\{a e^{i \frac{\pi}{n}}, a e^{i \frac{3\pi}{n}}, a e^{i \frac{5\pi}{n}}, \dots, a e^{i \frac{(2n-1)\pi}{n}}\}$ . Por ende, nuestro circuito de integración rodea, en sentido antihorario una vez, el primer polo simple  $z_1 = a e^{i \frac{\pi}{n}}$ . Del teorema de los residuos sabemos que  $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1)$ . Por un lado,  $\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{1}{nz_1^{n-m-1}} = -\frac{e^{i \frac{(m+1)\pi}{n}}}{na^{n-m-1}}$ , por lo que  $\int_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \frac{e^{i \frac{(m+1)\pi}{n}}}{na^{n-m-1}}$ . Por otro lado, tendremos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz - \int_0^R f(e^{i \frac{2\pi}{n}} x) d(e^{i \frac{2\pi}{n}} x) \\ &= \left(1 - e^{i \frac{(m+1)2\pi}{n}}\right) \int_0^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz. \end{aligned}$$

Pero, cómo  $|z^n + a^n| \geq ||z|^n - a^n| \geq |z|^n - a^n$ , cuando  $|z| \geq a$ , sabemos que  $\left| \frac{z^m}{z^n + a^n} \right| \leq \frac{|z|^m}{|z|^n - a^n}$ , si  $|z| \geq a$ . Luego, cuando  $R \geq a$ , concluimos que  $\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{2\pi R}{n} \frac{R^m}{R^n - a^n}$  y, por ello  $\int_{\Gamma_R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$  (ya que  $m + 1 < n$ ). Por ende,  $I = \frac{\pi}{na^{n-m-1}} 2i \frac{e^{i \frac{(m+1)\pi}{n}}}{-1 + e^{i \frac{(m+1)2\pi}{n}}} = \frac{\pi}{na^{n-m-1}} \frac{2i}{-e^{-i \frac{(m+1)\pi}{n}} + e^{i \frac{(m+1)\pi}{n}}}$ . Finalmente, llegamos a

$$(17) \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{x^n + a^n} dx = \frac{\pi}{na^{n-m-1}} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{(m+1)\pi}{n}},$$

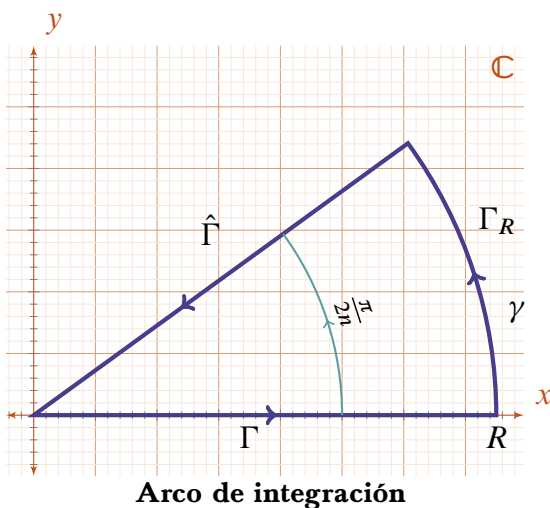
que extiende la fórmula (15), incluyendo el parámetro  $a$ , y contempla todas las posibles potencias naturales, y no sólo las pares.

### Integrales impropias III

Sea  $f(z)$  una función holomorfa en  $\mathbb{C}$  salvo por un conjunto finito de singularidades aisladas  $\{z_k\}$  que no yacen en el semieje positivo,  $\operatorname{Arg} z_k \neq 0$ . Supongamos que existen constantes  $p$ , y  $M$ ,  $R_0 > 0$  y  $p > 1$  tales que  $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}$ ,  $\forall z \in C(0, R_0, \infty)$  y que  $m \in \mathbb{N}$  es un entero mayor que cero tal que  $pn > m + 1$ . Entonces

$$\int_0^{+\infty} x^m f(x^n) dx = \pm \frac{2\pi i}{1 - e^{\pm i \frac{(m+1)2\pi}{n}}} \sum_{z_k} \operatorname{Res} \left( z^m f(z^n), \sqrt[n]{|z_k|} e^{i \frac{\operatorname{arg} I_{\pm} z_k}{n}} \right),$$

donde  $I_+ := [0, 2\pi)$  y  $I_- := (-2\pi, 0]$ .



**Ejemplo:** Otra integral que podemos calcular es  $I_n(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx^n} dx$ . Tomaremos  $t > 0$ , para  $t < 0$  argumentos de paridad permiten hallar la solución. De nuevo consideramos un sector circular, cuya frontera será la traza de nuestro arco  $\gamma = \Gamma + \Gamma_R + \hat{\Gamma}$ , con  $\Gamma^* = [0, R]$ ,  $\hat{\Gamma}^* = e^{i \frac{\pi}{2n}} [0, R]$ , y  $\Gamma_R^*$  es el arco de una circunferencia centrada en el origen de radio  $R$  y que subtiende un ángulo  $\frac{\pi}{2n}$ . En primer lugar, comprobamos que la contribución sobre el arco circular la podemos despreciar cuando  $R \rightarrow \infty$ . Para ello es necesario acotar la integral para



lo que usamos, como es habitual, la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} e^{itz^n} dz \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2n}} e^{itR^n(\cos(n\theta)+i\operatorname{sen}(n\theta))} i R e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq R \int_0^{\frac{\pi}{2n}} e^{-tR^n \operatorname{sen}(n\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Pero, de  $\operatorname{sen} \theta > \frac{2\theta}{\pi}$  si  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  concluimos que  $\operatorname{sen} n\theta > \frac{2n\theta}{\pi}$  si  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2n}]$ . Así que,

$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{itz^n} dz \right| \leq R \int_0^{\frac{\pi}{2n}} e^{-tR^n \frac{2n\theta}{\pi}} d\theta = R \frac{\pi}{2nR^n t} e^{-\frac{2nR^n t}{\pi} \theta} \Big|_0^{\frac{\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2nR^{n-1}t} (1 - e^{-R^n t}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Por otro lado, para el trozo  $\hat{\Gamma}$  tenemos

$$\int_{\hat{\Gamma}} e^{itz^n} dz = - \int_0^R e^{it(e^{i\frac{\pi}{2n}} x)^n} d(e^{i\frac{\pi}{2n}} x) = -e^{i\frac{\pi}{2n}} \int_0^R e^{-tx^n} dx.$$

Por lo tanto, dado que no hay singularidades en el interior del arco  $\gamma$  obtenemos

$$\int_0^{+\infty} e^{itx^n} dx = e^{i\frac{\pi}{2n}} \int_0^{+\infty} e^{-tx^n} dx.$$

Con el cambio de variable  $u = tx^n$ ,  $x = \sqrt[n]{\frac{u}{t}}$ ,  $dx = \frac{u^{\frac{1}{n}-1}}{n\sqrt[n]{t}} du$ , llegamos a  $\int_0^{+\infty} e^{-tx^n} dx = \frac{1}{n\sqrt[n]{t}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{n}-1} du = \frac{1}{n\sqrt[n]{t}} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ . Por tanto, obtenemos las fórmulas

$$\boxed{\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos tx^n dx &= \frac{1}{n\sqrt[n]{t}} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right), \\ \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} tx^n dx &= \frac{1}{n\sqrt[n]{t}} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right), \end{aligned}}$$

En el caso particular y más simple en que  $n = 2$  se tiene  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  y por tanto

$$\int_0^{+\infty} \cos tx^2 dx = \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} tx^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2t}}$$

Para  $t = 1$  estos son los límites de las integrales de Fresnel que valen  $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ . En los demás casos  $n > 2$  no hay expresiones conocidas en términos de otros números más habituales, se sabe que  $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ ,  $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$  son transcendentales, es decir no son ceros de un polinomio complejo con coeficientes enteros, pero si se tienen las siguientes aproximaciones numéricas

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) &\approx 2,678\,938\,534\,707\,747\,6337, & \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) &\approx 3,625\,609\,908\,221\,908\,3119, \\ \Gamma\left(\frac{1}{5}\right) &\approx 4,590\,843\,711\,998\,803\,0532, & \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) &\approx 5,566\,316\,001\,780\,235\,2043. \end{aligned}$$

**v.2.3. Transformada de Fourier** Dada una función  $f(x)$  definida sobre la recta real  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  su transformada de Fourier  $\hat{f}(p)$  es la siguiente transformada integral

$$\hat{f}(p) \equiv \mathcal{F}(f)(p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} dx.$$

Cuando la función  $f(x)$  toma valores reales  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a la transformada de Fourier se le asocian la transformada coseno y seno como se indica a continuación

$$\hat{f}^{\cos}(p) = \operatorname{Re} \hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos px \, dx,$$

$$\hat{f}^{\text{sen}}(p) = -\operatorname{Im} \hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} px \, dx.$$

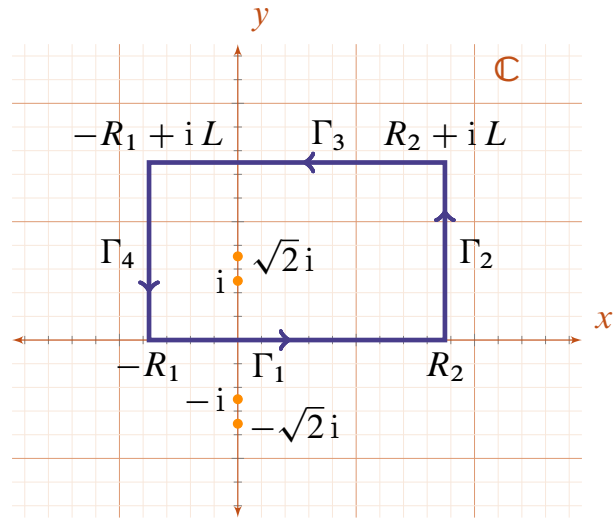
En la sección anterior hemos calculado la transformada coseno de  $f(x) = \frac{1}{1+x^6}$  usando el método de los residuos y hemos obtenido  $\hat{f}^{\cos}(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}} \left( 2e^{-\frac{|p|}{2}} \operatorname{sen} \left( \frac{|p|\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \right) + e^{-|p|} \right)$ . Nos dimos cuenta de que  $\frac{|e^{-i|p|z}|}{|z^6+1|} \leq \frac{e^{-|p|y}}{R^6-1}$  cuando  $z = x + iy$ ,  $x^2 + y^2 = R^2$ . Obsérvese que, cuando  $p < 0$ , tenemos un decaimiento exponencial que se puede aprovechar para calcular las integrales.



**Ejemplo:** Dada la función  $f(x) = \frac{x^3+a^3}{x^4+3x^2+2}$ ,  $a > 0$ , vamos a considerar su transformada de Fourier

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + a^3}{x^4 + 3x^2 + 2} e^{-ipx} \, dx.$$

Vemos que la función  $F(z) = \frac{z^3+a^3}{z^4+3z^2+2} e^{-ipz}$  es una función holomorfa salvo por polos simples en los ceros del polinomio  $P(z) = z^4 + 3z^2 + 2 = (z^2 + 1)(z^2 + 2)$ , i.e. en  $\{z_1 = \sqrt{2}i, z_2 = i, z_3 = -i, z_4 = -\sqrt{2}i\}$ . Para calcular la transformada dividiremos la discusión en dos partes. Supongamos, en primer lugar, que  $p < 0$  y consideremos el circuito de integración de la figura adjunta. El borde de un rectángulo de base  $R_1 + R_2$  y altura  $L$ , con  $R_1, R_2, L > 0$ , que se recorre en sentido antihorario una vez:  $\gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ , con  $\Gamma_1^* = [-R_1, R_2]$ ,  $\Gamma_2^* = \{z \in \mathbb{C} : z = R_2 + iy, y \in [0, L]\}$ ,  $\Gamma_3^* = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iL, x \in [-R_1, R_2]\}$  y  $\Gamma_4^* = \{z \in \mathbb{C} : z = -R_1 + iy, y \in [0, L]\}$ . Hay que señalar que  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ , esto es, que  $\forall \epsilon > 0$  existe un  $R$  tal que si  $|z| > R$  entonces  $|f(z)| < \epsilon$ , vamos a integrar en un rectángulo con  $R_1, R_2, L > R$ . Para evaluar  $\int_{\gamma} F(z) \, dz$ , analizamos cada una de las cuatro integrales a lo largo de los lados del rectángulo, para los segmentos verticales tenemos por un parte que



Polología y arco de integración  $p < 0$

$$\left| \int_{\Gamma_2} F(z) \, dz \right| \leq \int_0^L |f(R_2 + iy)| |e^{-ip(R_2+iy)}| \, dy = \int_0^L |f(R_2 + iy)| e^{py} \, dy$$

$$\leq \epsilon \int_0^L e^{py} \, dy = \epsilon \frac{e^{pL} - 1}{p} \leq \frac{\epsilon}{|p|},$$

y por la otra

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_4} F(z) dz \right| &\leq \int_0^L |f(-R_1 + iy)| |e^{-ip(-R_1+iy)}| dy = \int_0^L |f(-R_1 + iy)| e^{py} dy \\ &\leq \epsilon \int_0^L e^{py} dy = \epsilon \frac{e^{pL} - 1}{p} \leq \frac{\epsilon}{|p|}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para  $p < 0$  las integrales son tan pequeñas como queramos. Estudiemos ahora la integral a lo largo de  $\Gamma_3$ ,  $|\int_{\Gamma_3} F(z) dz| \leq \int_{-R_1}^{R_2} |f(x + iL)| |e^{-ip(x+iL)}| dx \leq \epsilon(R_2 + R_1) e^{-|p|L}$  y escogemos  $L$  suficientemente grande de modo que  $(R_1 + R_2) e^{-|p|L} < 1$ , lo que conduce a la desigualdad  $|\int_{\Gamma_3} F(z) dz| \leq \epsilon$ . En definitiva,  $\int_{\gamma} F(z) dz = \int_{R_1}^{R_2} f(x) e^{-ipx} dx + (1 + \frac{2}{|p|})\epsilon$ . Si recordamos el teorema de los residuos obtenemos que

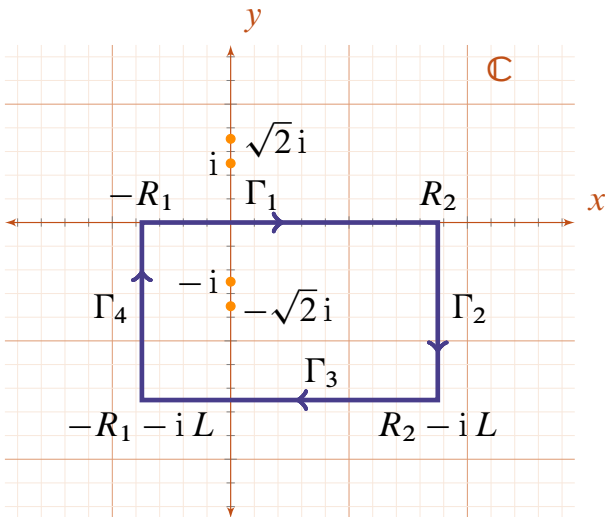
$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\substack{R_1 \rightarrow \infty \\ R_2 \rightarrow \infty}} \int_{\gamma} F(z) dz = \sqrt{2\pi} i (\text{Res}(F, z_1) + \text{Res}(F, z_2))$$

Para el cálculo de los residuos recordamos que las dos singularidades aisladas son polos simples y usamos el Cuadro *Residuos en un polo simple I* con  $F_1(z) := (z^3 + a^3) e^{-ipz}$  y  $F_2(z) = z^4 + 3z^2 + 2$ . Esto es,

$$\text{Res}(F, z_j) = \frac{(z_j^3 + a^3) e^{-ipz_j}}{4z_j^3 + 6z_j} = \begin{cases} \left(1 + i \frac{\sqrt{2}a^3}{4}\right) e^{\sqrt{2}p}, & z_j = \sqrt{2}i, \\ -\frac{1+ia^3}{2} e^p, & z_j = i. \end{cases}$$

Finalmente, para  $p < 0$ , deducimos la siguiente expresión explícita de la transformada de Fourier

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + a^3}{x^4 + 3x^2 + 2} e^{-ipx} dx = \sqrt{2\pi} i \left( \left(1 + i \frac{\sqrt{2}a^3}{4}\right) e^{-\sqrt{2}|p|} - \frac{1 + ia^3}{2} e^{-|p|} \right).$$



Polología y arco de integración  $p > 0$

En segundo lugar, consideramos el caso en que  $p > 0$  y el circuito de integración de la figura, la frontera de un rectángulo de base  $R_1 + R_2$  y altura  $L$ , con  $R_1, R_2, L > 0$ , que se recorre en sentido horario una vez:  $\gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ , con  $\Gamma_1^* = [-R_1, R_2]$ ,  $\Gamma_2^* = \{z \in \mathbb{C} : z = R_2 - iy, y \in [0, L]\}$ ,  $\Gamma_3^* = \{z \in \mathbb{C} : z = x - iL, x \in [-R_1, R_2]\}$  y  $\Gamma_4^* = \{z \in \mathbb{C} : z = -R_1 - iy, y \in [0, L]\}$ . Evaluamos  $\int_{\gamma} F(z) dz$  estudiando cada una de las cuatro integrales a lo largo de los lado del rectángulo para los segmentos verticales.

En primer lugar, acotamos  $|\int_{\Gamma_2} F(z) dz| \leq \int_0^L |f(R_2 - iy)| |e^{-ip(R_2-iy)}| dy = \int_0^L |f(R_2 - iy)| e^{-py} dy \leq \epsilon \int_0^L e^{-py} dy = \epsilon \frac{1 - e^{-pL}}{p} \leq \frac{\epsilon}{|p|}$ , y seguimos con la acotación siguiente:

$$\left| \int_{\Gamma_4} F(z) dz \right| \leq \int_0^L |f(-R_1 - iy)| |e^{-ip(-R_1-iy)}| dy = \int_0^L |f(-R_1 - iy)| e^{-py} dy \leq \epsilon \int_0^L e^{py} dy = \epsilon \frac{1 - e^{-pL}}{p} \leq \frac{\epsilon}{|p|}. \text{ Pasamos a } \left| \int_{\Gamma_3} F(z) dz \right| \leq \int_{-R_1}^{R_2} |f(x - iL)| |e^{-ip(x-iL)}| dx \leq$$

$\epsilon(R_2 + R_1) e^{-|p|L}$ . Eligiendo  $L$  de manera que  $(R_1 + R_2) e^{-|p|L} < 1$  se llega a  $|\int_{\Gamma_3} F(z) dz| \leq \epsilon$ . Como en el caso  $p < 0$ , en esta nueva situación con  $p > 0$  también se deduce que  $\int_{\gamma} F(z) dz = \int_{R_1}^{R_2} f(x) e^{-ipx} dx + (1 + \frac{2}{|p|})\epsilon$  y

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\substack{R_1 \rightarrow \infty \\ R_2 \rightarrow \infty}} \int_{\gamma} F(z) dz = -\sqrt{2\pi} i (\text{Res}(F, z_3) + \text{Res}(F, z_4)).$$

En donde hemos tenido en cuenta el sentido horario del arco de integración y los polos que circunda. Para el cálculo de los residuos usamos de nuevo el Cuadro *Residuos en un polo simple*  $I$  con  $F_1(z) := (z^3 + a^3) e^{-ipz}$  y  $F_2(z) = z^4 + 3z^2 + 2$ . Esto es,

$$\text{Res}(F, z_j) = \frac{(z_j^3 + a^3) e^{-ipz_j}}{4z_j^3 + 6z_j} = \begin{cases} \left(1 - i \frac{\sqrt{2}a^3}{4}\right) e^{-\sqrt{2}p}, & z_j = -\sqrt{2}i, \\ -\frac{1-ia^3}{2} e^{-p}, & z_j = -i. \end{cases}$$

Obtenemos la transformada de Fourier para  $p > 0$

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + a^3}{x^4 + 3x^2 + 2} e^{-ipx} dx = -\sqrt{2\pi} i \left( \left(1 - i \frac{\sqrt{2}a^3}{4}\right) e^{-2|p|} - \frac{1-ia^3}{2} e^{-|p|} \right).$$

En definitiva, reuniendo los dos casos, concluimos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + a^3}{x^4 + 3x^2 + 2} e^{-ipx} dx = \begin{cases} \sqrt{2\pi} i \left( \left(1 + i \frac{\sqrt{2}a^3}{4}\right) e^{-\sqrt{2}|p|} - \frac{1+ia^3}{2} e^{-|p|} \right), & p < 0, \\ -\sqrt{2\pi} i \left( \left(1 - i \frac{\sqrt{2}a^3}{4}\right) e^{-\sqrt{2}|p|} - \frac{1-ia^3}{2} e^{-|p|} \right), & p > 0. \end{cases}$$

Así que obtenemos las siguientes expresiones para transformada seno de Fourier

$$\hat{f}^{\text{sen}}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + a^3}{x^4 + 3x^2 + 2} \text{sen}(px) dx = -\sqrt{2\pi} \text{sgn}(p) \left( e^{-\sqrt{2}|p|} - \frac{1}{2} e^{-|p|} \right),$$

y para la transformada coseno

$$\hat{f}^{\text{cos}}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + a^3}{x^4 + 3x^2 + 2} \text{cos}(px) dx = \sqrt{2\pi} a^3 \left( -\frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}|p|} + \frac{1}{2} e^{-|p|} \right),$$

Estos resultados se pueden extender a situaciones en las que la función cuya transformada calculamos decae en el infinito, ya sea en el semiplano superior o en el semiplano inferior. Para el siguiente resultado, debemos indicar que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  en  $\overline{\mathbb{H}}$  significa que  $\forall \epsilon > 0 \exists R > 0 : |f(z)| < \epsilon$  cuando  $|z| > R$  y  $z \in \overline{\mathbb{H}}$ , y análogamente  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  en  $\mathbb{H}^c$ .

**Transformadas de Fourier I**

i) Caso  $p < 0$ . Sea  $f(z)$  una función holomorfa en el abierto  $\mathcal{A}$ , que contiene al semiplano superior  $\overline{\mathbb{H}}$ , salvo por un número finito de singularidades aisladas  $\{z_j\}_{j=1}^p$  que no yacen en  $\mathbb{R}$ , y tal que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  en  $\overline{\mathbb{H}}$ . Entonces,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} dx = \sqrt{2\pi} i \sum_{z_j \in \mathbb{H}} \text{Res}(f(z) e^{-ipz}, z_j).$$

ii) Caso  $p > 0$ . Sea  $f(z)$  una función holomorfa en el abierto  $\mathcal{A}$ , que contiene al semiplano inferior  $\mathbb{H}^c$ , salvo por un número finito de singularidades aisladas  $\{z_j\}_{j=1}^p$  que no yacen en  $\mathbb{R}$ , y tal que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  en  $\mathbb{H}^c$ . Entonces,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} dx = -\sqrt{2\pi} i \sum_{z_j \in \mathbb{H}^c} \text{Res}(f(z) e^{-ipz}, z_j).$$



**Observación:** Dados dos polinomios  $P(z)$  y  $Q(z)$  con  $\deg P(z) < \deg Q(z)$  y con las raíces de  $Q(z)$  fuera del eje real  $\mathbb{R}$ , se puede aplicar el resultado anterior

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-ipx} dx = \begin{cases} \sqrt{2\pi} i \sum_{z_j \in \mathbb{H}} \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{-ipz}, z_j\right), & p < 0 \\ -\sqrt{2\pi} i \sum_{z_j \in \mathbb{H}^c} \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{-ipz}, z_j\right), & p > 0. \end{cases}$$

En vez de arcos rectangulares se pueden usar arcos circulares con la ayuda de Lema de Jordan, que explicamos en sus dos versiones,  $p \geq 0$ .

**Lema de Jordan**

Sean  $\Gamma_R$  un arco que recorre en sentido antihorario la semicircunferencia centrada en el origen de radio  $R$  contenida en el semiplano superior  $\overline{\mathbb{H}}$  y una función  $f(z)$  cuya restricción a  $\Gamma_R^*$  tiende a cero uniformemente,  $f|_{\Gamma_R^*} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ ; esto es, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $R > 0$  tal que  $|f(R e^{i\theta})| < \epsilon$  para todo  $\theta \in [0, \pi]$ . Entonces, para  $p > 0$ , se tiene que

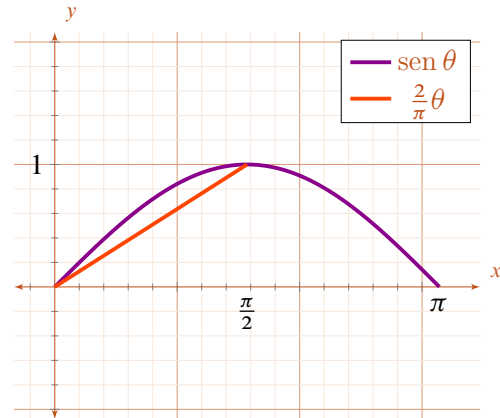
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{ipz} dz = 0$$



**DEMOSTRACIÓN.** Dada la condición impuesta a  $f(z)$  sabemos que para cada  $R > 0$  existe un  $K_R$  tal que  $|f(z)| < K_R$  sobre  $\Gamma_R^*$ , por ello

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) e^{ipz} dz \right| \leq \int_0^\pi |f(R(\cos \theta + i \text{sen } \theta))| \left| e^{ipR(\cos \theta + i \text{sen } \theta)} \right| R d\theta \leq K_R \int_0^\pi e^{-pR \text{sen } \theta} d\theta.$$

Para analizar esta última integral se pueden utilizar dos propiedades de la función trigonométrica  $\sin \theta$ . En primer lugar, dada la paridad del  $\sin \theta$  con respecto a  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ , sabemos que es cierto que  $\int_0^\pi e^{-pR \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-pR \sin \theta} d\theta$ . Por otro lado, en el intervalo de integración  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  se tiene  $\frac{2\theta}{\pi} < \sin \theta$  y, por tanto, como  $p > 0$ , se llega a que  $e^{-pR \sin \theta} < e^{-pR \frac{2\theta}{\pi}}$ . La aplicación de estas dos propiedades nos conduce a la siguiente acotación  $\left| \int_{\Gamma_R} f(z) e^{ipz} dz \right| \leq 2K_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-pR \frac{2\theta}{\pi}} d\theta = 2K_R \frac{e^{-pR \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2}} - e^{-pR \frac{2}{\pi} 0}}{-pR \frac{2}{\pi}} = \pi K_R \frac{1 - e^{-pR}}{pR}$ . Podemos ya deducir de esta desigualdad, haciendo crecer el radio indefinidamente, el Lema de Jordan.  $\square$



Paridad y acotaciones para  $\sin \theta$

### Lema de Jordan II

Sean  $\Gamma_R$  un arco que recorre en sentido horario la semicircunferencia centrada en el origen de radio  $R$  contenida en el semiplano inferior  $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$  y una función  $f(z)$  cuya restricción a  $\Gamma_R^*$  tiende a cero uniformemente,  $f|_{\Gamma_R^*} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ . Entonces, para  $p < 0$ , se tiene que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{ipz} dz = 0.$$

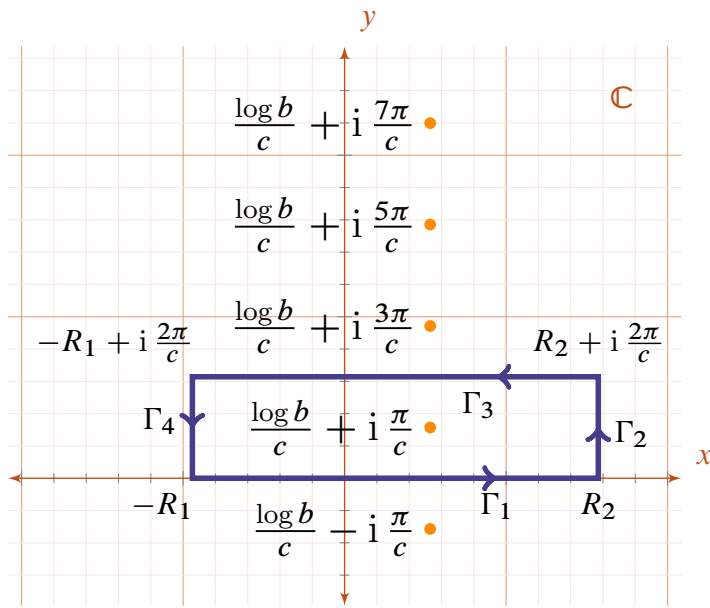


**Ejemplo:** La técnica discutida no es la única que se puede aplicar, veamos ahora un ejemplo en donde no es aplicable el método anterior. Sea  $f_{a,b,c}(x) := \frac{e^{ax}}{b + e^{cx}}$ ,  $a, b, c > 0$  y  $a < c$ , esta última condición es suficiente para que podamos asegurar que su transformada de Fourier

$$\hat{f}_{a,b,c}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{b + e^{cx}} e^{-ipx} dx.$$

converge. Llamando  $\omega := a - ip$ , la función  $F(z) = \frac{e^{\omega z}}{b + e^{cz}}$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$  salvo por polos simples en los puntos  $z$  donde se anula el denominador, i.e.,  $e^{cz} = -b$  que, tomando logaritmos, conduce a  $z_n = \frac{\log b}{c} + i \frac{(2n+1)\pi}{c}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Es claro que el método descrito anteriormente no es aplicable ahora. En primer lugar se tienen una infinidad de polos simples. Además, no podemos encontrar un semiplano, ya sea el superior o el inferior, en donde la función sea acotada.



Polología y arco de integración  $p \leq 0$

Dividamos la discusión en dos casos según  $p \leq 0$ . En primer lugar, asumamos que  $p < 0$ , que implica, como veremos a continuación, que el análisis se realiza en el semiplano superior  $\mathbb{H}$ . Dados,  $R_1, R_2 > 0$ , el arco de integración  $\gamma$  es el que se indica en la figura, el perímetro de un rectángulo recorrido en sentido antihorario una vez,  $\gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ , con  $\Gamma_1^* = [-R_1, R_2]$ ,  $\Gamma_2^* = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = R_2 + iy, y \in [0, \frac{2\pi}{c}] \right\}$ ,  $\Gamma_3^* = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = x + i\frac{\pi}{c}, x \in [-R_1, R_2] \right\}$  y  $\Gamma_4^* = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = -R_1 + iy, y \in [0, \frac{2\pi}{c}] \right\}$ . En primer lugar, acotamos las integrales  $\int_{\Gamma_2} F(z) dz$  y  $\int_{\Gamma_3} F(z) dz$  como sigue. Cuando  $R_2 > (\max \frac{\log b}{c}, 0)$ , tenemos las acotaciones

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2} F(z) dz \right| &= \left| \int_0^{\frac{2\pi}{c}} \frac{e^{\omega(R_2+iy)}}{b + e^{c(R_2+iy)}} i dy \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{c}} \frac{|e^{(a-iy)(R_2+iy)}|}{|b - |e^{c(R_2+iy)}||} dy = \frac{e^{aR_2}}{e^{cR_2} - b} \int_0^{\frac{2\pi}{c}} e^{py} dy \\ &\leq \frac{2\pi}{c} \frac{e^{aR_2}}{e^{cR_2} - b}, \end{aligned}$$

en donde hemos usado que  $p \leq 0$  y, por ende,  $e^{py} \leq 1, \forall y \in [0, \frac{2\pi}{c}]$ .<sup>3</sup> Luego, dado que  $c > a$ , concluimos que  $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} F(z) dz = 0$ . Si  $R_1 > \max(-\frac{\log b}{c}, 0)$  (en donde estamos incluyendo los casos en que  $0 < b < 1$  donde  $\log b < 0$ ) llegamos a las acotaciones siguientes

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_4} F(z) dz \right| &= \left| \int_{\frac{2\pi}{c}}^0 \frac{e^{\omega(-R_1+iy)}}{b + e^{c(-R_1+iy)}} i dy \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{c}} \frac{|e^{(a-iy)(-R_1+iy)}|}{|b - |e^{c(-R_1+iy)}||} dy = \frac{e^{-aR_1}}{b - e^{-cR_1}} \int_0^{\frac{2\pi}{c}} e^{py} dy \\ &\leq \frac{2\pi}{c} \frac{e^{-aR_1}}{b - e^{-cR_1}}, \end{aligned}$$

y, de nuevo,  $\lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_4} F(z) dz = 0$ . En segundo lugar, señalemos que

$$\int_{\Gamma_3} f(z) dz = \int_{R_2}^{-R_1} \frac{e^{\omega(x+i\frac{2\pi}{c})}}{b + e^{c(x+i\frac{2\pi}{c})}} dx = -e^{\omega i \frac{2\pi}{c}} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{e^{\omega x}}{b + e^{cx}} dx.$$

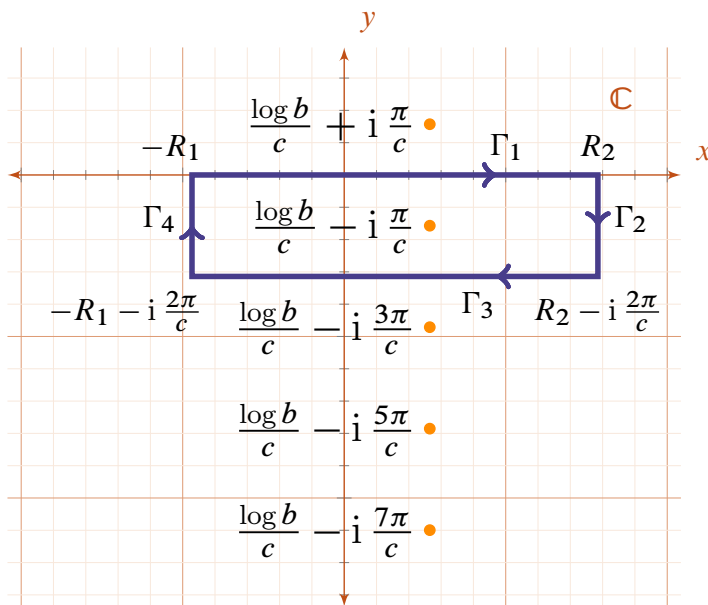
<sup>3</sup>En este paso también podríamos haber considerado  $p > 0$ , ya que satisfaría la desigualdad  $|\int_{\Gamma_2} F(z) dz| \leq \frac{e^{aR_2}}{e^{cR_2} - b} \frac{e^{\frac{2\pi p}{c}} - 1}{p}$ . Al no estar  $e^{\frac{2\pi p}{c}}$  acotado, para cada  $R_2$  considerado se encontrará un  $p$  tal que la cota se mantiene constante, y no va a decrecer. Por ello, separamos la discusión, aunque finalmente el resultado para  $p > 0$  sea el mismo.

Por todo ello, con la ayuda del teorema de los residuos, obtenemos  $(1 - e^{\omega i \frac{2\pi}{c}}) \sqrt{2\pi} \hat{f}_{a,b,c}(p) = 2\pi i \operatorname{Res}(F, z_1)$ . Evaluamos el residuo, recordando tanto que  $z_1 = \frac{\log b}{c} + i \frac{\pi}{c}$  es un polo simple como el Cuadro *Residuos en un polo simple I* con  $F_1(z) := e^{\omega z}$  y  $F_2(z) = b + e^{cz}$ . Esto es,  $\operatorname{Res}(F, z_1) = \frac{e^{\omega z_1}}{c e^{c z_1}} = -\frac{e^{\omega(\frac{\log b}{c} + i \frac{\pi}{c})}}{bc}$ , que conduce a la siguiente expresión

$$(18) \quad \hat{f}_{a,b,c}(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{\log b}{c}(a-i p)}}{bc} \frac{2i}{-e^{-i \frac{\pi}{c}(a-i p)} + e^{i \frac{\pi}{c}(a-i p)}}.$$

Abordamos la discusión cuando  $p > 0$ . Cambiamos al semiplano inferior  $\overline{\mathbb{H}}^{\mathbb{C}}$  y el arco de integración  $\gamma$ , que anteriormente yacía en el semiplano superior por su reflexión especular en el semiplano inferior, y por tanto se recorre en sentido contrario. Así pues, el arco  $\gamma$  es el que se indica en la figura, el perímetro de un rectángulo recorrido en **sentido horario** una vez,  $\gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ ,

con  $\Gamma_1^* = [-R_1, R_2]$ ,  $\Gamma_2^* = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = R_2 - iy, y \in [0, \frac{2\pi}{c}] \right\}$ ,  $\Gamma_3^* = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = x + i \frac{\pi}{c}, x \in [-R_1, R_2] \right\}$  y  $\Gamma_4^* = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = -R_1 - iy, y \in [0, \frac{2\pi}{c}] \right\}$ . De nuevo procedemos a acotar las integrales  $\int_{\Gamma_2} F(z) dz$  y  $\int_{\Gamma_3} F(z) dz$  tal y como se indica a continuación. En primer lugar, cuando  $R_2 > \max(\frac{\log b}{c}, 0)$ , tenemos las siguientes desigualdades



Polología y arco de integración  $p \geq 0$

$$\left| \int_{\Gamma_2} F(z) dz \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{c}} \frac{|e^{(a-i p)(R_2-i y)}|}{|b - |e^{c(R_2-i y)}||} dy = \frac{e^{aR_2}}{e^{cR_2} - b} \int_0^{\frac{2\pi}{c}} e^{-py} dy \leq \frac{2\pi}{c} \frac{e^{aR_2}}{e^{cR_2} - b} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \infty} 0$$

en donde hemos tenido en cuenta que  $p \geq 0$  lo que implica que  $e^{-py} \leq 1, \forall y \in [0, \frac{2\pi}{c}]$  y que  $c > a$ . Si  $R_1 > \max(-\frac{\log b}{c}, 0)$  obtenemos que

$$\left| \int_{\Gamma_4} F(z) dz \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{c}} \frac{|e^{-(a-i p)(R_1+i y)}|}{|b - |e^{-c(R_1+i y)}||} dy = \frac{e^{-aR_1}}{b - e^{-cR_1}} \int_0^{\frac{2\pi}{c}} e^{py} dy \leq \frac{2\pi}{c} \frac{e^{-aR_1}}{b - e^{-cR_1}} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \infty} 0,$$

Por último, observamos que

$$\int_{\Gamma_3} F(z) dz = \int_R^{-R} \frac{e^{\omega(x-i \frac{2\pi}{c})}}{b + e^{c(x-i \frac{2\pi}{c})}} dx = -e^{-\omega i \frac{2\pi}{c}} \int_{-R}^R \frac{e^{\omega x}}{b + e^{cx}} dx.$$

El teorema de los residuos, teniendo especial cuidado en observar el sentido horario en que se recorre el arco que tiene por lo tanto índice  $-1$ , conduce a  $(1 - e^{-\omega i \frac{2\pi}{c}}) \sqrt{2\pi} \hat{f}_{a,b,c}(p) = -2\pi i \operatorname{Res}(F, \bar{z}_1)$ . Evaluamos el residuo en el polo simple  $\bar{z}_1 = \frac{\log b}{c} - i \frac{\pi}{c}$  con ayuda del Cuadro



Residuos en un polo simple  $I$  con  $F_1(z) := e^{\omega z}$  y  $F_2(z) = b + e^{cz}$ , i.e.,  $\text{Res}(F, \bar{z}_1) = \frac{e^{\omega \bar{z}_1}}{c e^{c \bar{z}_1}} = -\frac{e^{\omega \left(\frac{\log b}{c} - i \frac{\pi}{c}\right)}}{bc}$ . De todo ello concluimos que

$$(19) \quad \begin{aligned} \hat{f}_{a,b,c}(p) &= \sqrt{2\pi} i \frac{e^{\frac{\log b}{c}(a-i)p}}{bc} \frac{e^{-i \frac{\pi}{c}(a-i)p}}{1 - e^{-i \frac{2\pi}{c}(a-i)p}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{\log b}{c}(a-i)p}}{bc} \frac{2i}{e^{i \frac{\pi}{c}(a-i)p} - e^{-i \frac{\pi}{c}(a-i)p}}. \end{aligned}$$

Juntando los dos casos,  $p \geq 0$ , concluimos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{b + e^{cx}} e^{-ipx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{b^{\frac{a}{c}-1}}{c} \frac{e^{-i \frac{\log b}{c} p}}{\sin\left(\frac{\pi}{c}(a-i)p\right)}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Con partes real e imaginaria dadas por las transformadas coseno y seno, que se expresan en términos de  $\alpha(p) := \arctan \frac{\sin \frac{2\pi a}{c}}{e^{-\frac{2\pi}{c}p} - \cos \frac{2\pi a}{c}}$ , cómo sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{b + e^{cx}} \cos px dx &= -\sqrt{\pi} \frac{b^{\frac{a}{c}-1}}{c} \frac{1}{\sqrt{\cosh \frac{2\pi p}{c} - \cos \frac{2\pi a}{c}}} \sin\left(\frac{\log b}{c} p + \alpha(p) - \frac{\pi a}{c}\right), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{b + e^{cx}} \sin px dx &= \sqrt{\pi} \frac{b^{\frac{a}{c}-1}}{c} \frac{1}{\sqrt{\cosh \frac{2\pi p}{c} - \cos \frac{2\pi a}{c}}} \cos\left(\frac{\log b}{c} p + \alpha(p) - \frac{\pi a}{c}\right). \end{aligned}$$

Observamos que  $\alpha(p) \approx -\frac{2\pi a}{c}$  cuando  $p \rightarrow \infty$  y  $\alpha(p) \approx 0$  cuando  $p \rightarrow -\infty$ , y por ello tendremos en el régimen  $p \approx +\infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{b + e^{cx}} \cos px dx &= -\sqrt{2\pi} \frac{b^{\frac{a}{c}-1}}{c} e^{-\frac{\pi p}{c}} \sin\left(\frac{\log b}{c} p - \frac{3\pi a}{c}\right), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{b + e^{cx}} \sin px dx &= \sqrt{2\pi} \frac{b^{\frac{a}{c}-1}}{c} e^{-\frac{\pi p}{c}} \cos\left(\frac{\log b}{c} p - \frac{3\pi a}{c}\right), \end{aligned}$$

y para  $p \approx -\infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{b + e^{cx}} \cos px dx &= -\sqrt{2\pi} \frac{b^{\frac{a}{c}-1}}{c} e^{\frac{\pi p}{c}} \sin\left(\frac{\log b}{c} p - \frac{\pi a}{c}\right), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{b + e^{cx}} \sin px dx &= \sqrt{2\pi} \frac{b^{\frac{a}{c}-1}}{c} e^{\frac{\pi p}{c}} \cos\left(\frac{\log b}{c} p - \frac{\pi a}{c}\right), \end{aligned}$$

Las ideas anteriores nos permiten encontrar la transformada de Fourier

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax} f(e^{cx}) dx.$$

donde  $f(z)$  es una función adecuada.

### Transformadas de Fourier II

Sean los intervalos  $I_+ := [0, 2\pi)$ ,  $I_- := (-2\pi, 0]$ , una función  $f(z)$  holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{Z_j\}_{j=1}^n$  con un número finito de singularidades aisladas  $\{Z_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $\text{Arg } Z_j \neq 0$ , y tal que para  $a, c > 0$  se tiene  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{az} f(e^z) = 0$ . Entonces, para  $p \geq 0$  se cumple que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax} f(e^{cx}) e^{-ipx} dx \\ &= \pm \frac{\sqrt{2\pi} i}{1 - e^{\pm i \frac{2\pi}{c}(p+ia)}} \sum_{Z_j} \text{Res} \left( e^{(a-i)pz} f(e^{cz}), \frac{\log |Z_j|}{c} + i \frac{\arg_{I_{\pm}} Z_j}{c} \right). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. La función  $f_a(z) := e^{az} f(e^z)$  tiene singularidades aisladas en los puntos  $z_{j,k} = \frac{\log |Z_j|}{c} + i \frac{\text{Arg } Z_j}{c} + i \frac{2\pi}{c} k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Consideramos las siguientes bandas  $\mathcal{B}^{\pm} := \{z \in \mathbb{C} : \pm \text{Im } z \in (0, \frac{2\pi}{c}]\}$ . Usaremos la notación  $F(z) := f(z) e^{\omega z}$ , con  $\omega = a - ip$ . Para  $p \leq 0$ , trabajamos en el semiplano superior  $\overline{\mathbb{H}}$ , y el circuito  $\gamma$  será el mismo que cuando discutíamos, en el ejemplo anterior, el caso  $p \leq 0$ ,  $\gamma^* \subset \overline{\mathbb{H}}$ . Sin embargo, ahora encerrará un número en general distinto de singularidades aisladas, aquellas con  $z_{j,k} \in \mathcal{B}^+$ . Estas singularidades las podemos escribir como  $\frac{\log |Z_j|}{c} + i \frac{\arg_{[0,2\pi)} Z_j}{c}$ . En primer lugar, acotamos las integrales  $\int_{\Gamma_2} F(z) dz$  y  $\int_{\Gamma_3} F(z) dz$  como sigue. Dado  $\epsilon > 0$  existe un  $R > 0$  tal que  $|f_a(z)| \leq \epsilon$  si  $|z| > R$ . Por tanto, si  $R_2, R_1 > R$  se tiene  $|\int_{\Gamma_2} F(z) dz| \leq \epsilon \int_0^{\frac{2\pi}{c}} e^{-|p|y} dy \leq \frac{2\pi}{c} \epsilon$  y  $|\int_{\Gamma_4} F(z) dz| \leq \epsilon \int_0^{\frac{2\pi}{c}} e^{-|p|y} dy \leq \frac{2\pi}{c} \epsilon$ . Para la integral a lo largo del arco  $\Gamma_3$  podemos escribir

$$\int_{\Gamma_3} F(z) dz = \int_{R_2}^{-R_1} e^{(a-i)p(x+i\frac{2\pi}{c})} f\left(e^{c(x+i\frac{2\pi}{c})}\right) dx = -e^{\frac{2\pi}{c}(p+ia)} \int_{-R_1}^{R_2} e^{\omega x} f(e^{cx}) dx.$$

Aplicando el teorema de los residuos, dado que  $F(z)$  es holomorfa en  $\mathcal{B}^+$  salvo por las singularidades aisladas  $z_{j,k} \in \mathcal{B}^+$ , obtenemos el resultado anunciado.

Discutimos ahora el caso  $p \geq 0$ , utilizando en el semiplano inferior  $\mathbb{H}^c$ , y el circuito  $\gamma$  será el mismo que cuando discutíamos, en el ejemplo anterior, el caso  $p \geq 0$ ,  $\gamma^* \subset \mathbb{H}^c$ , que encerrará un número de singularidades aisladas, aquellas con  $z_{j,k} \in \mathcal{B}^-$ , y que se escriben como  $\frac{\log |Z_j|}{c} + i \frac{\arg_{(-2\pi,0]} Z_j}{c}$ . Procedemos a acotar las integrales  $\int_{\Gamma_2} F(z) dz$  y  $\int_{\Gamma_3} F(z) dz$  para las que obtenemos  $|\int_{\Gamma_2} F(z) dz| \leq \epsilon \int_0^{\frac{2\pi}{c}} e^{-|p|y} dy \leq \frac{2\pi}{c} \epsilon$  y  $|\int_{\Gamma_4} F(z) dz| \leq \epsilon \int_0^{\frac{2\pi}{c}} e^{-|p|y} dy \leq \frac{2\pi}{c} \epsilon$ , cuando  $R_1, R_2 > R$ . La integral a lo largo del arco  $\Gamma_3$  será

$$\int_{\Gamma_3} F(z) dz = \int_{R_2}^{-R_1} e^{(a-i)p(x-i\frac{2\pi}{c})} f\left(e^{c(x-i\frac{2\pi}{c})}\right) dx = -e^{-\frac{2\pi}{c}(p+ia)} \int_{-R_1}^{R_2} e^{\omega x} f(e^{cx}) dx.$$

Aplicando el teorema de los residuos, dado que  $F(z)$  es holomorfa en  $\mathcal{B}^-$  salvo por las singularidades aisladas  $z_{j,k} \in \mathcal{B}^-$  y el sentido horario del arco  $\gamma$  obtenemos el resultado.  $\square$

**v.2.4. Integrales impropias en valor principal de Cauchy** Hasta ahora las integrales impropias que hemos tratado eran del tipo  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  o  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  donde las singularidades del integrando  $f(x)$  estaban fuera del dominio de integración. Eran impropias porque

se tomaban límites infinitos. Vamos a presentar ahora técnicas basadas en el teorema de los residuos que permiten evaluar integrales del tipo anterior pero con singularidades sobre el eje real. En primer lugar, deberemos definir con cuidado que se entiende por tal integral impropia. Si  $f(x)$  tiene una singularidad en su dominio de integración en digamos  $x_0$  hay que dar sentido a  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ . Si para las integrales  $I_\epsilon^- := \int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} f(x) dx$  y  $I_\eta^+ := \int_{x_0+\eta}^{+\infty} f(x) dx$ , existen ambos límites  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon^- = I^-$  y  $\lim_{\eta \rightarrow 0} I_\eta^+ = I^+$ , decimos que la integral impropia converge y tiene como valor  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = I^- + I^+$ . A veces esta perspectiva es demasiado exigente y es preferible una definición más relajada. Por ejemplo, si tomamos  $f(x) = \frac{1}{x^3}$  vemos que 0 es una singularidad en el integrando. Tenemos  $I_\epsilon^- = -\frac{1}{2x^2} \Big|_{-\infty}^{-\epsilon} = -\frac{1}{2\epsilon^2}$  y  $I_\eta^+ = -\frac{1}{2x^2} \Big|_{\eta}^{+\infty} = \frac{1}{2\eta^2}$  y así  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon^- = -\infty$  y  $\lim_{\eta \rightarrow 0} I_\eta^+ = +\infty$  y los límites no existen. Luego, la integral impropia  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$  no converge. Es ahora cuando el asunto se pone interesante, ya que podemos permitir que los límites laterales a la singularidad, que eran independientes ahora sean dependientes, por ejemplo si tomamos el límite con  $\epsilon = \eta$ , que se conoce como valor principal de Cauchy tendremos  $VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (I_\epsilon^- + I_\epsilon^+) = 0$ , y la integral en valor principal si que existe y es cero. Se podían haber considerado otras posibilidades, como por ejemplo  $\eta = 3\epsilon^2$  y tendríamos de nuevo una integral divergente a que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (I_\epsilon^- + I_{3\epsilon^2}^+) = -\infty$ .

**Valor principal de Cauchy**

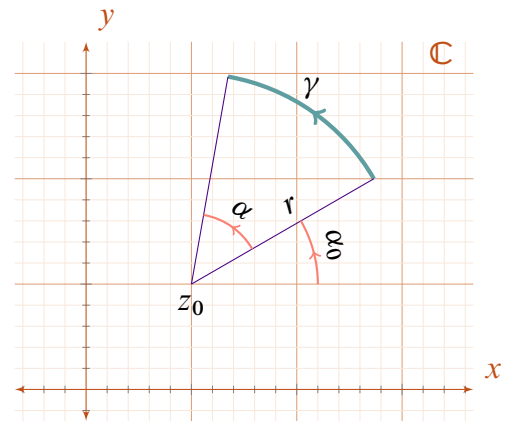
Dada una integral impropia  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  con singularidades del integrando en el eje real en los puntos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ ,  $x_j < x_{j+1}$ , su valor principal de Cauchy se define como el límite

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{x_1-\epsilon} f(x) dx + \int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}+\epsilon}^{x_n-\epsilon} f(x) dx + \int_{x_n+\epsilon}^{+\infty} f(x) dx \right).$$

La aplicación del teorema de los residuos al cálculo de integrales en valor principal de Cauchy pasa por considerar *arcos endentados* o con *melladuras*. Para ello necesitamos el siguiente resultado

**Lema para las endentaduras**

Sean  $f(z)$  una función holomorfa con un polo simple en  $z_0$  y  $\gamma$  un arco tal que su imagen  $\gamma^*$  es un arco de la circunferencia centrada en  $z_0$  de radio  $r$  y que subtiende un ángulo  $\alpha$ . Entonces,  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_\gamma f(z) dz = \alpha i \text{Res}(f, z_0)$ .



**Arco de integración**

**DEMOSTRACIÓN.** Como  $z_0$  es un polo simple, existe  $R$  tal que en la corona  $C(z_0, 0, R)$  se tiene  $f(z) = \frac{a-1}{z-z_0} + F(z)$ , donde  $F(z)$  es una función holomorfa en el disco  $D(z_0, R)$ , y por

tanto acotada sobre él con  $a_{-1} = \text{Res}(f, z_0)$ . Por tanto, tomando  $r < R$  podemos escribir  $\int_{\gamma} f(z) dz = a_{-1} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} + \int_{\gamma} F(z) dz$ . Sea  $M$  tal que  $|F(z)| < M$  si  $|z| < R$ , entonces  $|\int_{\gamma} F(z) dz| \leq M\alpha r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ . Por otro lado,  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+\alpha} \frac{ir e^{i\theta} d\theta}{r e^{i\theta}} = i\alpha$ , de donde se infiere el resultado anunciado.  $\square$

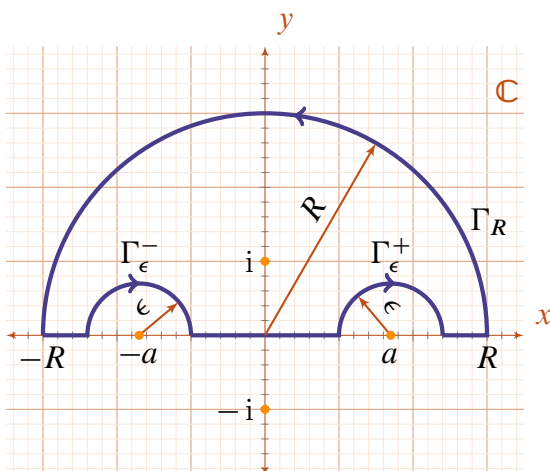


**Ejemplo:** Dados  $t, a \in \mathbb{R}$ , discutimos la integral

$$I_a(p) := \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos px}{x^4 + (1-a^2)x^2 - a^2} dx.$$

Para ello observamos, en primer lugar, que es una transformada coseno, y por ello

$$I_a(p) = \text{Re VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ipx}}{x^4 + (1-a^2)x^2 - a^2} dx.$$



**Polología y arco de integración endentado,**  
 $p < 0$

El polinomio  $P(z) = z^4 + (1-a^2)z^2 - a^2$  tiene cuatro ceros simples  $\{-a, a, i, -i\}$ , y por ello la función  $F(z) := e^{-ipz} f(z)$ , con  $f(z) := \frac{1}{z^4 + (1-a^2)z^2 - a^2}$ , es una función holomorfa en  $\mathbb{C}$  salvo por cuatro polos simples, dos en el eje real,  $\pm a$ , y dos en el eje imaginario  $\pm i$ . Por lo tanto, aparecen dos singularidades sobre el dominio de integración, y vamos a estudiar el valor principal de Cauchy de dicha integral. Cuando  $p < 0$ , integramos  $F(z)$  a lo largo de un arco endentado, contenido en el semiplano superior  $\overline{\mathbb{H}}$ , como se muestra en la figura. La cadena  $\gamma$  se compone varios arcos, entre ellos el arco  $\Gamma_R$ , que recorre la semicircunferencia de radio  $R$  centrada en el origen, y *dos melladuras o endentaduras*, que recorren dos semicircunferencias centradas en los dos polos reales  $\pm a$  de radio  $\epsilon$  que subtienen

ambas un ángulo de  $-\pi$  radianes, ya que se recorren en sentido contrario. Utilizando el teorema de los residuos y el Lema para las endentaduras, haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtenemos  $I_a(t) - i\pi \text{Res}(F, -a) - i\pi \text{Res}(F, a) + \int_{\Gamma_R} F(z) dz = 2\pi i \text{Res}(F, i)$ . Observamos que  $|f(z)| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$  y recordamos el Lema de Jordan II para deducir que

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ipx}}{x^4 + (1-a^2)x^2 - a^2} dx = i\pi \text{Res}(F, -a) + i\pi \text{Res}(F, a) + 2\pi i \text{Res}(F, i).$$

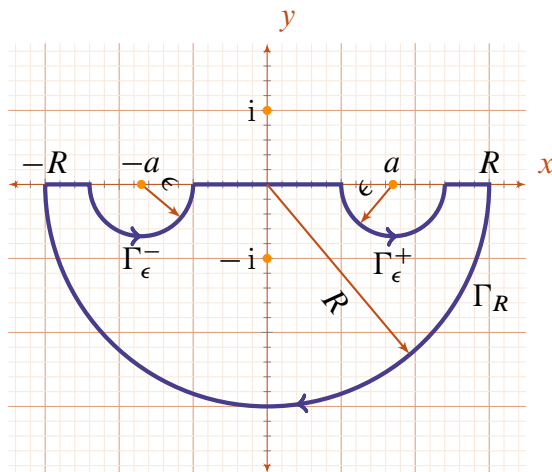
Para calcular los residuos aplicamos de nuevo Cuadro *Residuos en un polo simple I* con  $F_1(z) := e^{-ipz}$  y  $F_2(z) = P(z)$ , pero  $P'(z) = 4z^3 + 2(1-a^2)z$ , lo que da la siguiente tabla de residuos

$$\text{Res}(F, \pm a) = \pm \frac{e^{\mp i p a}}{2a(a^2 + 1)}, \quad \text{Res}(F, \pm i) = \pm i \frac{e^{\pm p}}{2(a^2 + 1)},$$

lo que permite escribir cuando  $p < 0$  que

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ipx}}{x^4 + (1 - a^2)x^2 - a^2} dx = \frac{\pi}{a^2 + 1} \left( \frac{\text{sen } ap}{a} - e^p \right).$$

Discutimos ahora el caso  $p > 0$ , integramos  $F(z)$  a lo largo del arco endentado, simétrico del caso anterior, tal como se muestra en la figura adjunta. La cadena  $\gamma$  se compone varios arcos, entre ellos el arco  $\Gamma_R$ , que recorre la semicircunferencia de radio  $R$  centrada en el origen, contenida en el semiplano inferior  $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ , y dos endentaduras, que recorren dos semicircunferencias centradas en los dos polos reales  $\pm a$  de radio  $\epsilon$  que subtienden ambas un ángulo de  $\pi$  radianes. El teorema de los residuos y el lema para las endentaduras, haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtenemos  $I_a(t) + i\pi \text{Res}(F, -a) + i\pi \text{Res}(F, a) + \int_{\Gamma_R} F(z) dz = -2\pi i \text{Res}(F, -i)$ . Como  $|f(z)| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$  podemos aplicar el Lema de Jordan I y concluir



Polología y arco de integración endentado

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ipx}}{x^4 + (1 - a^2)x^2 - a^2} dx = -i\pi \text{Res}(F, -a) - i\pi \text{Res}(F, a) - 2\pi i \text{Res}(F, -i).$$

Luego, para  $p > 0$ , tenemos

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ipx}}{x^4 + (1 - a^2)x^2 - a^2} dx = \frac{\pi}{a^2 + 1} \left( -\frac{\text{sen } ap}{a} - e^{-p} \right).$$

En definitiva, obtenemos para  $p \in \mathbb{R}$

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ipx}}{x^4 + (1 - a^2)x^2 - a^2} dx = -\frac{\pi}{a^2 + 1} \left( \frac{\text{sen } a|p|}{a} + e^{-|p|} \right).$$

que conduce directamente a las transformadas seno y coseno en valor principal

$$\begin{aligned} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } px}{x^4 + (1 - a^2)x^2 - a^2} dx &= 0, \\ \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{cos } px}{x^4 + (1 - a^2)x^2 - a^2} dx &= -\frac{\pi}{a^2 + 1} \left( \frac{\text{sen } a|p|}{a} + e^{-|p|} \right). \end{aligned}$$

### Integrales impropias en valor principal de Cauchy I

- I) Sea  $\mathcal{A} \supset \overline{\mathbb{H}}$  un conjunto abierto que contiene al semiplano superior y  $f(z)$  una función holomorfa en  $\mathcal{A}$  salvo por un conjunto finito de singularidades aisladas  $\{z_k\}$  que no yacen en  $\mathbb{R}$  y un conjunto de polos simples reales  $\{x_j\}$ . Supongamos que existen constantes  $p$ , y  $M, R_0 > 0$  y  $p > 1$  tales que  $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}$ ,  $\forall z \in \overline{\mathbb{H}} \cap C(0, R_0, \infty)$ . Entonces,

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{H}} \text{Res}(f, z_k) + \pi i \sum_{x_k} \text{Res}(f, x_k).$$

- II) Sea  $\mathcal{A} \supset \mathbb{H}^{\mathbb{C}}$  un conjunto abierto que contiene al semiplano inferior y  $f(z)$  una función holomorfa en  $\mathcal{A}$  salvo por un conjunto finito de singularidades aisladas  $\{z_k\}$  que no yacen en  $\mathbb{R}$  y un conjunto de polos simples reales  $\{x_j\}$ . Supongamos que existen constantes  $p$ , y  $M, R_0 > 0$  y  $p > 1$  tales que  $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}$ ,  $\forall z \in \mathbb{H}^{\mathbb{C}} \cap C(0, R_0, \infty)$ . Entonces,

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{H}^{\mathbb{C}}} \text{Res}(f, z_k) - \pi i \sum_{x_k} \text{Res}(f, x_k).$$

- III) Sean  $P(x)$  y  $Q(x)$  dos polinomios primos relativos entre si, con  $\deg Q - \deg P \geq 2$  y los ceros de  $Q(x)$  se dividen en  $\{z_j\}$ , que yacen en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , y  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}$ , que son polos simples de  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= 2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{H}} \text{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_i\right) + \pi i \sum_{x_k} \text{Res}\left(\frac{P}{Q}, x_k\right) \\ &= -2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{H}^{\mathbb{C}}} \text{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_i\right) - \pi i \sum_{x_k} \text{Res}\left(\frac{P}{Q}, x_k\right). \end{aligned}$$

### Transformadas de Fourier en valor principal de Cauchy I

- I) Caso  $p < 0$ . Sea  $f(z)$  una función holomorfa en el abierto  $\mathcal{A}$ , que contiene al semiplano superior  $\overline{\mathbb{H}}$ , salvo por un número finito de singularidades aisladas  $\{z_j\}_{j=1}^p$  que no yacen en  $\mathbb{R}$  y un conjunto de polos simples reales  $\{x_j\}$ , y tal que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  en  $\overline{\mathbb{H}}$ . Entonces,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} dx = \sqrt{2\pi} i \sum_{z_j \in \mathbb{H}} \text{Res}(f(z) e^{-ipz}, z_j) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} i \sum_{x_j} \text{Res}(f(z) e^{-ipz}, x_j).$$

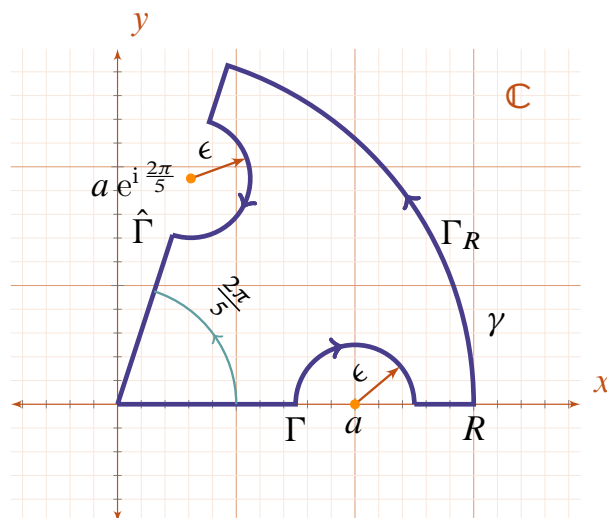
- II) Caso  $p > 0$ . Sea  $f(z)$  una función holomorfa en el abierto  $\mathcal{A}$ , que contiene al semiplano inferior  $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ , salvo por un número finito de singularidades aisladas  $\{z_j\}_{j=1}^p$  que no yacen en  $\mathbb{R}$ , y tal que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  en  $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ . Entonces,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} dx = -\sqrt{2\pi} i \sum_{z_j \in \mathbb{H}^{\mathbb{C}}} \text{Res}(f(z) e^{-ipz}, z_j) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} i \sum_{x_j} \text{Res}(f(z) e^{-ipz}, x_j).$$

**Ejemplo:** Calculemos para  $a > 0$  y  $n, m \in \mathbb{N}, n > m + 1$

$$I = \text{VP} \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{x^n - a^n} dx.$$

Vamos a considerar la integral de la función  $f(z) = \frac{z^m}{z^n - a^n}$  a lo largo del arco de integración endentado  $\gamma = \Gamma + \Gamma_R + \hat{\Gamma}$ , donde  $\Gamma_R$  es el arco de una circunferencia centrada en el origen de radio  $R$  que subtiende un ángulo  $\frac{2\pi}{n}$  y los arcos  $\Gamma$  y  $\hat{\Gamma}$  tienen dos endentaduras. Las singularidades de  $f(z)$  son polos simples situados en  $\{a, a e^{i\frac{2\pi}{n}}, a e^{i\frac{4\pi}{n}}, \dots, a e^{i\frac{(2n-2)\pi}{n}}\}$ . Del teorema de los residuos (o del teorema de Cauchy) como el arco no contiene singularidades y del Lema para las endentaduras (que podemos aplicar ya que son polos simples) deducimos cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  que  $\int_\gamma f(z) - \pi i \text{Res}(f, a) - \pi i \text{Res}(f, a e^{i\frac{2\pi}{n}}) = 0$ . Para los residuos tenemos  $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{na^{n-m-1}}$  y  $\text{Res}(f, a e^{i\frac{2\pi}{n}}) = \frac{e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}}}{na^{n-m-1}}$ , por lo que  $\int_\gamma f(z) dz = \pi i \frac{1+e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}}}{na^{n-m-1}}$ . Por otro lado,  $\int_{\Gamma_R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$  (ya que  $m + 1 < n$ ). Finalmente, teniendo en cuenta que  $f(e^{i\frac{2\pi}{n}} z) = e^{i\frac{2\pi m}{n}} f(z)$ , observamos que  $\int_{\hat{\Gamma}} f(z) dz = -e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}} I$  y concluimos que  $I = \frac{\pi}{na^{n-m-1}} i \frac{1+e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}}}{1-e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}}}$ , que en términos de la cotangente es



Polología y arco de integración para  $n = 5$

$$\text{VP} \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{x^n - a^n} dx = \frac{1}{a^{n-m-1}} \frac{\pi}{n} \cotg \frac{\pi(m+1)}{n}.$$

**Integrales impropias en valor principal de Cauchy II**

Sea  $f(z)$  una función holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus (\{Z_j\} \cup \{X_j\})$ , donde  $\{Z_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $\text{Arg } Z_j \neq 0$ , son singularidades aisladas y  $\{X_j\} \subset \mathbb{R}_+$ ,  $X_j > 0$ , son polos simples en el semieje positivo. Supongamos que existen constantes  $p$ , y  $M, R_0 > 0$  y  $p > 1$  tales que  $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}, \forall z \in C(0, R_0, \infty)$  y que  $m, n \in \mathbb{N}$  satisfacen  $m < pn$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \text{VP} \int_0^{+\infty} x^m f(x^n) dx &= \frac{\pi}{n} \cotg \frac{\pi(m+1)}{n} \sum_{X_j} \text{Res}(f(z^n), X_j) \\ &+ \frac{2\pi i}{1 - e^{i\frac{(m+1)2\pi}{n}}} \sum_{Z_j} \text{Res} \left( z^m f(z^n), \sqrt[n]{|Z_j|} e^{i\frac{\text{arg}[0, 2\pi)}{n} Z_j} \right). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba sigue los pasos indicados en el ejemplo anterior. Basta con endentar adecuadamente el circuito de integración para el caso en que no se permitían singularidades positivas. Obtendremos

$$\begin{aligned} \text{VP} \int_0^{+\infty} x^m f(x^n) dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}}} \sum_{Z_j} \text{Res} \left( z^m f(z^n), \sqrt[n]{|Z_j|} e^{i\frac{\arg(0,2\pi)Z_j}{n}} \right) \\ &+ \frac{\pi i}{1 - e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}}} \sum_{X_j} \left( \text{Res} \left( z^m f(z^n), X_j \right) + \text{Res} \left( z^m f(z^n), X_j e^{i\frac{2\pi}{n}} \right) \right). \end{aligned}$$

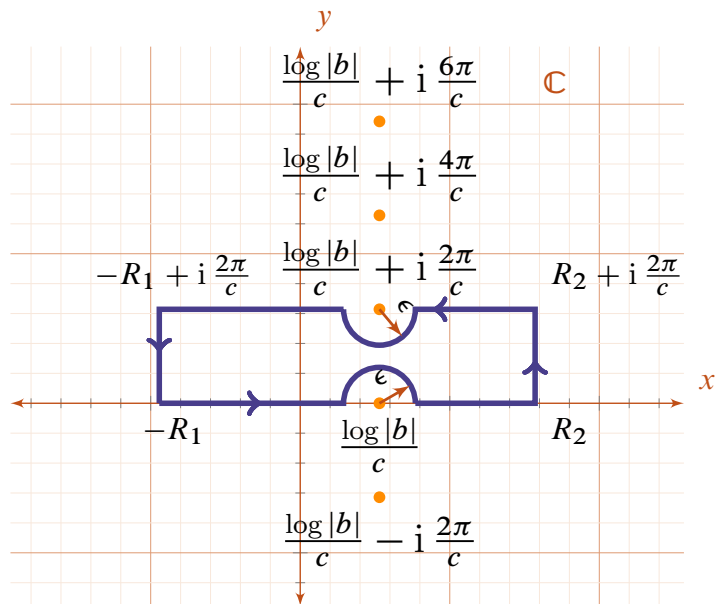
Pero, dado que los residuos en los polos simples determinados por las endentaduras son

$$\text{Res} \left( z^m f(z^n), X_j \right) = X_j^m \text{Res} \left( f(z^n), X_j \right), \quad \text{Res} \left( z^m f(z^n), X_j e^{i\frac{2\pi}{n}} \right) = e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}} X_j^m \text{Res} \left( f(z^n), X_j \right),$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \text{VP} \int_0^{+\infty} x^m f(x^n) dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}}} \sum_{Z_j} \text{Res} \left( z^m f(z^n), \sqrt[n]{|Z_j|} e^{i\frac{\arg(0,2\pi)Z_j}{n}} \right) \\ &+ \frac{\pi i}{n} \frac{1 + e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}}}{1 - e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}}} \sum_{X_j} X_j^m \text{Res} \left( f(z^n), X_j \right) \end{aligned}$$

□



Polología y arco de integración endentado  
 $p \leq 0$

de integración  $\gamma$  es el que se indica en la figura, el perímetro de un rectángulo con endentaduras en los polos simples  $\frac{\log|b|}{c}$  y  $\frac{\log|b|}{c} + i\frac{2\pi}{c}$ , recorrido en sentido antihorario una vez,  $\gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ , con  $\Gamma_2^* = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = R_2 + iy, y \in \left[0, \frac{2\pi}{c}\right] \right\}$ , y  $\Gamma_4^* = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = -R_1 + iy, y \in \left[0, \frac{2\pi}{c}\right] \right\}$ . Las integrales  $\int_{\Gamma_2} F(z) dz$  y  $\int_{\Gamma_3} F(z) dz$  cuando

**Ejemplo:** Sea  $f_{a,b,c}(x) := \frac{e^{ax}}{b+e^{cx}}$ ,  $a, c > 0$  y  $a < c$ , pero ahora  $b < 0$ , y calculemos su transformada de Fourier  $\hat{f}_{a,b,c}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{b+e^{cx}} e^{-ipx} dx$ . Obviamente ahora tenemos una singularidad en el integrando, ya que el denominador se anula,  $e^{cz} = |b|$ , si  $z_n = \frac{\log|b|}{c} + i\frac{2n\pi}{c}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Si cómo antes  $\omega := a - ip$ , la función  $F(z) = \frac{e^{\omega z}}{b+e^{cz}}$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$  salvo por polos simples en los puntos  $z_n$ . Vemos que  $z_0$  yace en  $z_0 \in \mathbb{R}$  y por tanto, la transformada de Fourier la calcularemos en valor principal de Cauchy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^{cx} - |b|} e^{-ipx} dx.$$

De nuevo, separamos el estudio en dos escenarios dependiendo de  $p \leq 0$ . Si  $p < 0$ , se realiza en el semiplano superior  $\mathbb{H}$ . Dados,  $R_1, R_2 > 0$ , el arco



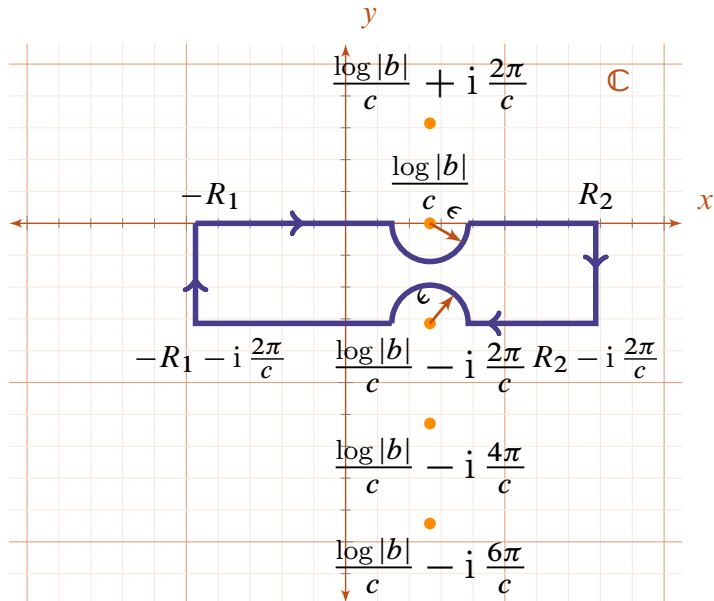
$R_2 > \frac{\log|b|}{c}$  se acotan como antes:  $|\int_{\Gamma_2} F(z) dz| \leq \frac{2\pi}{c} \frac{e^{aR_2}}{e^{cR_2}-|b|}$  y  $|\int_{\Gamma_4} F(z) dz| \leq \frac{2\pi}{c} \frac{e^{-aR_1}}{|b|-e^{-cR_1}}$ , Por tanto, dado que  $c > a$ , concluimos que  $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} F(z) dz = 0$  y  $\lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_4} F(z) dz = 0$ . En segundo lugar, señalemos que

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \text{VP} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{e^{\omega x}}{e^{cx}-|b|} dx - i\pi \text{Res}\left(F, \frac{\log|b|}{c}\right),$$

$$\int_{\Gamma_3} f(z) dz = -e^{\omega i \frac{2\pi}{c}} \text{VP} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{e^{\omega x}}{e^{cx}-|b|} dx - i\pi \text{Res}\left(F, \frac{\log|b|}{c} + i \frac{2\pi}{c}\right).$$

Vemos que el circuito endentado no contiene ninguna singularidad, luego la aplicación del teorema de los residuos nos conduce a  $(1 - e^{\omega i \frac{2\pi}{c}}) \sqrt{2\pi} \hat{f}_{a,b,c}(p) = i\pi \text{Res}\left(F, \frac{\log|b|}{c}\right) + i\pi \text{Res}\left(F, \frac{\log|b|}{c} + i \frac{2\pi}{c}\right)$ . Evaluamos los residuos con ayuda del Cuadro *Residuos en un polo simple I* con  $F_1(z) := e^{\omega z}$  y  $F_2(z) = e^{cz} - |b|$ . Esto es,  $\text{Res}\left(F, \frac{\log|b|}{c}\right) = \frac{e^{\omega \frac{\log|b|}{c}}}{|b|^c}$  y  $\text{Res}\left(F, \frac{\log|b|}{c} + i \frac{2\pi}{c}\right) = \frac{e^{\omega\left(\frac{\log|b|}{c} + i \frac{2\pi}{c}\right)}}{|b|^c}$  que conduce a la siguiente expresión  $\hat{f}_{a,b,c}(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} i \frac{e^{\frac{\log|b|}{c}(a-i p)}}{|b|^c} \frac{1+e^{i \frac{2\pi}{c}(a-i p)}}{1-e^{i \frac{2\pi}{c}(a-i p)}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{\log|b|}{c}(a-i p)}}{|b|^c} \cot\left(\frac{\pi}{c}(a-i p)\right)$ , valida para  $p \leq 0$ .

Abordamos la discusión cuando  $p > 0$ , y para ello cambiamos al semiplano inferior  $\mathbb{H}^{\text{C}}$  y, dados,  $R_1, R_2 > 0$ , el arco de integración  $\gamma$  es el que se indica en la figura, el perímetro de un rectángulo con endentaduras en los polos simples  $\frac{\log|b|}{c}$  y  $\frac{\log|b|}{c} - i \frac{2\pi}{c}$ , recorrido en sentido horario una vez,  $\gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ , con  $\Gamma_2^* = \left\{z \in \mathbb{C} : z = R_2 - iy, y \in [0, \frac{2\pi}{c}]\right\}$ , y  $\Gamma_4^* = \left\{z \in \mathbb{C} : z = -R_1 - iy, y \in [0, \frac{2\pi}{c}]\right\}$ . Para las integrales  $\int_{\Gamma_2} F(z) dz$  y  $\int_{\Gamma_3} F(z) dz$  cuando  $R_2 > \max\left(\frac{\log|b|}{c}, 0\right)$  y  $R_1 \geq \max\left(-\frac{\log|b|}{c}, 0\right)$  tenemos  $|\int_{\Gamma_2} F(z) dz| \leq \frac{2\pi}{c} \frac{e^{aR_2}}{e^{cR_2}-|b|}$  y  $|\int_{\Gamma_4} F(z) dz| \leq \frac{2\pi}{c} \frac{e^{-aR_1}}{|b|-e^{-cR_1}}$ . Luego, concluimos que  $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} F(z) dz = 0$  y  $\lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_4} F(z) dz = 0$ . En segundo lugar, hay que observar que



**Polología y arco de integración endentado**  
 $p \leq 0$

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \text{VP} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{e^{\omega x}}{e^{cx}-|b|} dx + i\pi \text{Res}\left(F, \frac{\log|b|}{c}\right),$$

$$\int_{\Gamma_3} f(z) dz = -e^{-\omega i \frac{2\pi}{c}} \text{VP} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{e^{\omega x}}{e^{cx}-|b|} dx + i\pi \text{Res}\left(F, \frac{\log|b|}{c} - i \frac{2\pi}{c}\right).$$

Cómo el circuito endentado no contiene ninguna singularidad,  $(1 - e^{-\omega i \frac{2\pi}{c}}) \sqrt{2\pi} \hat{f}_{a,b,c}(p) = -i\pi \operatorname{Res}\left(F, \frac{\log|b|}{c}\right) - i\pi \operatorname{Res}\left(F, \frac{\log|b|}{c} - i\frac{2\pi}{c}\right)$ . Pero  $\operatorname{Res}\left(F, \frac{\log|b|}{c} - i\frac{2\pi}{c}\right) = \frac{e^{\omega\left(\frac{\log|b|}{c} - i\frac{2\pi}{c}\right)}}{|b|c}$ , y así

$$\hat{f}_{a,b,c}(p) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} i \frac{e^{\frac{\log|b|}{c}(a-i)p} \frac{1 + e^{-i\frac{2\pi}{c}(a-i)p}}{|b|c}}{1 - e^{-i\frac{2\pi}{c}(a-i)p}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{\log|b|}{c}(a-i)p}}{|b|c} \cot\left(\frac{\pi}{c}(a-i)p\right),$$

valida para  $p \geq 0$ .

Agrupando los resultados para  $p \geq 0$  obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^{cx} - |b|} e^{-ipx} dx = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{c} \cotg\left(\frac{\pi}{c}(a-i)p\right) \frac{e^{-i\frac{\log|b|}{c}p}}{|b|^{\frac{c-a}{c}}}.$$

### Transformadas de Fourier en valor principal de Cauchy II

Sean los intervalos  $I_+ := [0, 2\pi)$ ,  $I_- := (-2\pi, 0]$ , una función  $f(z)$  holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus (\{Z_j\}_{j=1}^n \cup \{X_j\})$  con un número finito de singularidades aisladas  $\{Z_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $\operatorname{Arg} Z_j \neq 0$ ,  $\{X_j\} \subset \mathbb{R}_+$  polos simples, y tal que para  $a, c > 0$  se tiene  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{az} f(e^{cz}) = 0$ . Entonces, para  $p \geq 0$  se cumple que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax} f(e^{cx}) e^{-ipx} dx \\ &= \mp \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cotg \frac{\pi(a-i)p}{c} \sum_{X_j} X_j^{\frac{a}{c}} e^{-i\frac{\log X_j}{c}p} \operatorname{Res}(f(e^{cz}), \log \sqrt[c]{X_j}) \\ & \pm \frac{\sqrt{2\pi} i}{1 - e^{\pm i\frac{2\pi}{c}(p+ia)}} \sum_{Z_j} \operatorname{Res}\left(e^{(a-i)pz} f(e^{cz}), \frac{\log|Z_j|}{c} + i\frac{\arg_{I_{\pm}} Z_j}{c}\right). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. La función  $f(e^{cz})$  tiene singularidades aisladas en los puntos  $z_{j,k} = \frac{\log|Z_j|}{c} + i\frac{\operatorname{Arg} Z_j}{c} + i\frac{2\pi}{c}k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  y en  $x_{j,k} = \frac{\log X_j}{c} + i\frac{2\pi}{c}k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Consideramos las siguientes bandas  $\mathcal{B}^{\pm} := \{z \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} z \in (0, \frac{2\pi}{c}]\}$ . Siguiendo los pasos indicados en el ejemplo, con endentaduras en los puntos determinados por los polos simples en el semieje positivo, para  $p \geq 0$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax} f(e^{cx}) e^{-ipx} dx &= \pm \frac{\sqrt{2\pi} i}{1 - e^{\pm i\frac{2\pi}{c}p}} \left( \sum_{z_{j,k} \in \mathcal{B}^{\pm}} \operatorname{Res}\left(e^{\omega z} f(e^{cz}), z_{j,k}\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{x_{j,0}} \left( \operatorname{Res}\left(e^{\omega z} f(e^{cz}), x_{j,0}\right) + \operatorname{Res}\left(e^{\omega z} f(e^{cz}), x_{j,0} \pm i\frac{2\pi}{c}\right) \right) \right), \end{aligned}$$

donde  $\omega := a - ip$ . Pero, dado que los residuos en los polos simples determinados por las endentaduras son

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(e^{\omega z} f(e^{cz}), x_{j,0}\right) &= e^{\omega \frac{\log X_j}{c}} \operatorname{Res}\left(f\left(e^{cz}\right), x_{j,0}\right), \\ \operatorname{Res}\left(\frac{e^{\omega z}}{P\left(e^{cz}\right)}, x_{j,0} \pm i \frac{2\pi}{c}\right) &= e^{\omega \frac{\log X_j}{c}} \operatorname{Res}\left(f\left(e^{cz}\right), x_{j,0}\right) e^{\pm i \frac{2\pi}{c} \omega}, \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax} f(e^{cx}) e^{-ipx} dx &= \pm \frac{\sqrt{2\pi} i}{1 - e^{\pm i \frac{2\pi}{c} \omega}} \sum_{z_{j,k} \in \mathcal{B}^{\pm}} \operatorname{Res}\left(e^{\omega z} f(e^{cz}), z_{j,k}\right) \\ &\pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} i \frac{1 + e^{\pm i \frac{2\pi}{c} \omega}}{1 - e^{\pm i \frac{2\pi}{c} \omega}} \sum_{X_j} e^{\omega \frac{\log X_j}{c}} \operatorname{Res}\left(f\left(e^{cz}\right), x_{j,0}\right) \\ &= \pm \frac{\sqrt{2\pi} i}{1 - e^{\pm i \frac{2\pi}{c} \omega}} \sum_{z_{j,k} \in \mathcal{B}^{\pm}} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{\omega z}}{P\left(e^{cz}\right)}, z_{j,k}\right) \\ &\mp \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cotg \frac{\pi \omega}{c} \sum_{X_j} e^{\omega \frac{\log X_j}{c}} \operatorname{Res}\left(f\left(e^{cz}\right), x_{j,0}\right). \end{aligned}$$

□

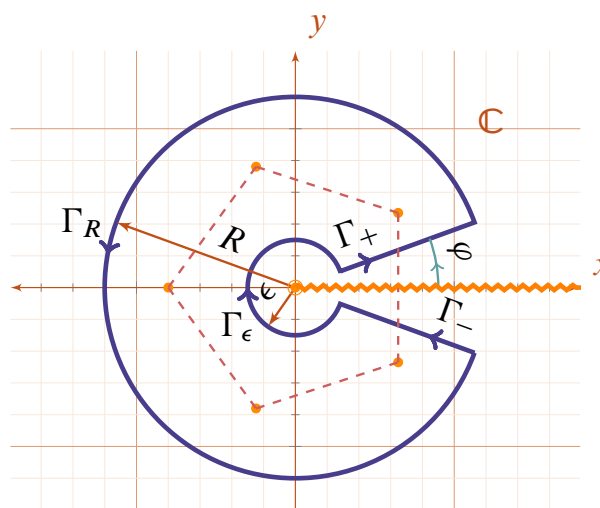
**v.2.5. Transformada de Mellin** La transformada de Mellin<sup>4</sup> es una transformada integral de la forma

$$\mathcal{M}(f)(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} f(x) dx,$$

en donde nosotros asumiremos que  $p > 0$ ,  $p \notin \mathbb{N}$ .

Se debe puntualizar que aquí  $z^p = e^{p \log_I z}$ , donde la determinación es  $I = [0, 2\pi)$ ,<sup>5</sup> que es una función holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ .

Evaluamos la transformada de Mellin de  $f(x) = \frac{1}{1+x^n}$ ,  $0 < p < n \in \mathbb{N}$ . Para ello integramos a lo largo del arco  $\gamma = \Gamma_+ + \Gamma_\epsilon + \Gamma_- + \Gamma_R$  que se describe en la figura, que se recorre una vez y que se compone de cuatro arcos, los dos arcos  $\Gamma_\pm$  son segmentos rectilíneos, que forman un ángulo  $\pm\varphi$  con el semieje positivo, y los arcos  $\Gamma_R$  y  $\Gamma_\epsilon$ , que recorren circunferencias de radio  $R$  y  $\epsilon$ , respectivamente, y que subtienden ángulos de  $2\pi - \varphi$ . Los ceros de  $z^n + 1$  son de orden 1 y forman el conjunto  $\{z_k := e^{i \frac{2k+1}{n} \pi}\}_{k=0}^{n-1}$ . La función  $F(z) := \frac{z^{p-1}}{1+z^n}$  es holomorfa en el  $\operatorname{Int} \gamma$  salvo por  $n$  polos simples situados en  $\{z_k\}_{k=0}^{n-1}$ . Por lo tanto, según el teorema de los residuos, sabemos que  $\int_\gamma F(z) dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}(F, z_k)$ .



**Arco de ojo de cerradura, polología y puntos de ramificación**

<sup>4</sup>Hjalmar Mellin (1854-1933) fue un matemático finés cuya tesis doctoral supervisó Gösta Mittag-Leffler. Aparte de la transformada integral que lleva su nombre fue el primer rector del Instituto Politécnico de Helsinki y un firme opositor a la teoría de la relatividad de Einstein.

<sup>5</sup>O cualquier otra posibilidad que situó el corte sobre el semieje positivo, esto es  $I = (0, 2\pi], (-2\pi, 0], [-2\pi, 0)$ .

Vamos a acotar las integrales en los arcos circulares. En primer lugar estudiamos  $\int_{\Gamma_R} F(z) dz$ . Para ello observamos que sobre el arco de integración  $z = R e^{i\theta}$ , i.e.,  $|z^{p-1}| = |e^{(p-1)\log_I z}| = |e^{(p-1)(\log R + i\theta)}| = R^{p-1}$ . Por tanto, para  $R > 1$ ,  $|\int_{\Gamma_R} F(z) dz| \leq \int_{\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{R^{p-1}}{R^{n-1}} R d\theta = 2(\pi - \varphi) \frac{R^p}{R^{n-1}}$ . Dado que  $p < n$ , para todo  $\varphi \in I$  se tiene  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} F(z) dz = 0$ . Realizamos una estimación similar sobre el arco  $\Gamma_\epsilon$ . Sobre  $\Gamma_\epsilon^*$ , con  $z = \epsilon e^{i\theta}$  tenemos, para  $\epsilon < K < 1$ , que  $|F(z)| = \frac{\epsilon^{p-1}}{|1 + \epsilon^n e^{in\theta}|} \leq \frac{\epsilon^{p-1}}{1 - \epsilon^n} \leq M \epsilon^{p-1}$ ,  $M = \frac{1}{1 - K^n}$ , y por ello  $|\int_{\Gamma_\epsilon} F(z) dz| \leq M \int_{\varphi}^{2\pi-\varphi} \epsilon^{p-1} \epsilon d\theta = 2(\pi - \varphi) \epsilon^p M$ . Dado que  $p > 0$  deducimos, independientemente del valor de  $\varphi$ , que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} F(z) dz = 0$ . Para las integrales a lo largo de  $\Gamma_\pm$  fijémonos en que

$$\int_{\Gamma_-} F(z) dz = \int_R^\epsilon \frac{e^{i(2\pi-\varphi)(p-1)} x^{p-1}}{1 + e^{i(2\pi-\varphi)n} x^n} d(e^{i(2\pi-\varphi)} x) = -e^{i(2\pi-\varphi)p} \int_\epsilon^R \frac{x^{p-1}}{1 + e^{i(2\pi-\varphi)n} x^n} dx,$$

$$\int_{\Gamma_+} F(z) dz = \int_\epsilon^R \frac{e^{i\varphi(p-1)} x^{p-1}}{1 + e^{i\varphi n} x^n} d(e^{i\varphi} x) = e^{i\varphi p} \int_\epsilon^R \frac{x^{p-1}}{1 + e^{i\varphi n} x^n} dx.$$

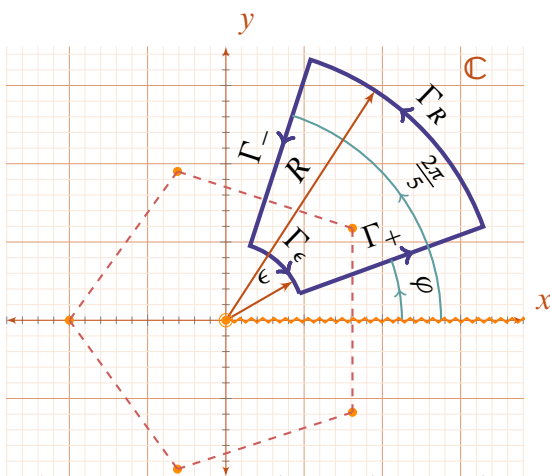
Luego, cuando  $\varphi \rightarrow 0$ , obtenemos  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^n} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi p}} \sum_{k=0}^{n-1} \text{Res}(F, z_k)$ . Por otro lado, para los residuos tenemos  $\text{Res}(F, z_k) = \frac{z_k^{p-1}}{n z_k^{n-1}} = -\frac{z_k^p}{n} = -\frac{e^{i \frac{2k+1}{n} \pi p}}{n} = -\frac{e^{i \frac{\pi(p-2)}{n}}}{n} \left( e^{i \frac{2\pi(p-2)}{n}} \right)^k$ . Así que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^n} dx = -\frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi p}} \frac{e^{i \frac{\pi p}{n}}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( e^{i \frac{2\pi p}{n}} \right)^k = -\frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi p}} \frac{e^{i \frac{\pi p}{n}}}{n} \frac{1 - e^{i2\pi p}}{1 - e^{i \frac{2\pi p}{n}}} = -\frac{\pi}{n} \frac{2i}{e^{-i \frac{\pi p}{n}} - e^{i \frac{\pi p}{n}}},$$

y, por lo tanto, llegamos a

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin \frac{\pi p}{n}}.$$

Que está de acuerdo con (17), cuando  $a = 1$  y  $p \rightarrow m < n$ .



Alternativa a arco de ojo de cerradura para  $n = 5$ , polología y rama

Dada la simetría del integrando,  $f(\omega z) = f(z)$  si  $\omega^n = 1$ , se podría plantear un arco alternativo  $\gamma = \Gamma_+ + \Gamma_\epsilon + \Gamma_- + \Gamma_R$  que se dibuja en la figura adjunta. Éste recorre una vez y se compone de cuatro arcos, los dos arcos  $\Gamma_\pm$  son segmentos rectilíneos, que forman un ángulo  $\varphi$  y  $\frac{2\pi}{n}$  con el semieje positivo, y los arcos  $\Gamma_R$  y  $\Gamma_\epsilon$ , que recorren circunferencias de radio  $R$  y  $\epsilon$ , respectivamente, y que subtenden ángulos de  $\frac{2\pi}{n} - \varphi$ . La función  $F(z) := \frac{z^{p-1}}{1+z^n}$  es holomorfa en el Int  $\gamma$  salvo por un polo simple situado en  $z_0 = e^{i \frac{\pi}{5}}$ . por tanto, según el teorema de los residuos sabemos que  $\int_\gamma F(z) dz = 2\pi i \text{Res}(F, z_0)$ . En este caso se repite que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} F(z) dz = 0$  y  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} F(z) dz = 0$ , independientemente de  $\varphi$ . Por otro lado,  $\int_{\Gamma_-} F(z) dz =$

$$\int_R^\epsilon \frac{e^{i \frac{2\pi}{n} (p-1)} x^{p-1}}{1+x^n} d(e^{i \frac{2\pi}{n}} x) = -e^{i \frac{2\pi p}{n}} \int_\epsilon^R \frac{x^{p-1}}{1+x^n} dx \text{ y } \int_{\Gamma_+} F(z) dz = \int_\epsilon^R \frac{e^{i\varphi(p-1)} x^{p-1}}{1+x^n} d(e^{i\varphi} x) =$$

$e^{i\varphi p} \int_{\epsilon}^R \frac{x^{p-1}}{1+e^{i\varphi n} x^n} dx$  . Por tanto,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^n} dx = -\frac{2\pi i}{1-e^{i\frac{2\pi p}{n}}} \frac{e^{i\frac{\pi p}{n}}}{n} = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi p}{n}},$$

que recupera, de una forma alternativa, el resultado ya obtenido.

**Transformadas de Mellin I**

Sean  $f(z)$  una función holomorfa en  $\mathbb{C}$  salvo por un número finito de singularidades aisladas  $\{z_j\}$  que no yacen en el semieje real positivo  $\operatorname{Arg} z_j \neq 0$  y  $p \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}$ . Supongamos que existen constantes  $M_1, R_1 > 0$  y  $q_1 > p$  tal que  $|f(z)| \leq \frac{M_1}{|z|^{q_1}}$  para  $|z| > R_1$  y  $M_2, R_2 > 0$  y  $0 < q_2 < p$  tal que  $|f(z)| \leq \frac{M_2}{|z|^{q_2}}$  para  $z \neq 0$  y  $|z| \leq R_2$ . Entonces,

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} f(x) dx = -\frac{\pi e^{-i\pi p}}{\operatorname{sen} \pi p} \sum_{z_j} \operatorname{Res}(z^{p-1} f(z), z_j)$$



**Transformadas de Mellin II**

Sean  $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$  dos polinomios tales que  $0 < p < \deg Q - \deg P$  y, si 0 es un polo de  $\frac{P(z)}{Q(z)}$ , el orden del polo es menor que  $p$ . Entonces

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -\frac{\pi e^{-i\pi p}}{\operatorname{sen} \pi p} \sum_{z_j} \operatorname{Res}\left(z^{p-1} \frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$$

**§v.3. Ejercicios**

i) Aplicar el teorema de los residuos para calcular las siguientes integrales:

- a)  $\int_{\gamma} \frac{1+z}{1-\cos z} dz$  donde el arco  $\gamma$  recorre una vez en sentido antihorario la circunferencia de radio 7 centrada en el origen.
- b)  $\int_{\gamma} \cosh z \cot z dz$  donde  $\gamma$  es un arco que recorre una vez en sentido antihorario la circunferencia centrada en el origen de radio  $(n + \frac{1}{2})\pi$ , con  $n \in \mathbb{Z}_+$ .
- c)  $\int_{\gamma} z^n e^{z^{-1}} dz$ , con  $n \in \mathbb{N}$  y  $\gamma$  el arco que recorre en sentido antihorario la circunferencia centrada en el origen de radio 1.

**Solución:**

a) El integrando  $f(z) = \frac{1+z}{1-\cos z}$  tiene polos simples en los ceros del denominador, esto es en  $\{2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , de estos infinitos ceros solo tres tiene modulo menor que 7, esto es  $\{-2\pi, 0, 2\pi\}$ . Por lo tanto, de acuerdo con el teorema de los residuos

$$\int_{\gamma} \frac{1+z}{1-\cos z} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, -2\pi) + \operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 2\pi)).$$

Los ceros del denominador  $1 - \cos z$  son dobles, ya que la derivada  $\sin z$  también se anula en los múltiplos enteros de  $2\pi$ . De acuerdo con la caja *Residuos en un polo doble I*, tenemos  $\text{Res}(f, z_0) = 2 \frac{F_1'(z_0)}{F_2''(z_0)} - \frac{2 F_1(z_0) F_2'''(z_0)}{(F_2''(z_0))^2}$ , donde  $F_1 = 1 + z$  y  $F_2 = 1 - \cos z$ , y  $z_0$  es uno de los polos. Así que, como  $F_1' = 1$ ,  $F_2' = \sin z$ ,  $F_2'' = \cos z$  y  $F_2''' = -\sin z$ , tenemos que el segundo sumando en la fórmula del residuo se anula, ya que el seno se anula en esos puntos, y queda

$$\text{Res}(f, -2\pi) = \text{Res}(f, 0) = \text{Res}(f, 2\pi) = 2.$$

Así pues,

$$\int_{\gamma} \frac{1+z}{1-\cos z} dz = 12\pi i.$$

b) El integrando  $f(z) = \cosh z \cot z = \cosh z \frac{\cos z}{\sin z}$  tiene polos simples en los ceros de  $\sin z$ , esto es en  $\{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . La circunferencia de radio de radio  $(n + \frac{1}{2})\pi$  contiene en su interior a los polos simples  $\{k\pi\}_{k=-n}^n$ , por tanto

$$\int_{\gamma} \cosh z \cot z dz = 2\pi i \sum_{k=-n}^n \text{Res}(f, k\pi).$$

Como  $f = \frac{F_1}{F_2}$ , donde  $F_1 = \cosh z \cos z$  no tiene ceros en los polos y  $F_2 = \sin z$  tiene ceros simples en los polos sabemos que

$$\text{Res}(f, k\pi) = \frac{F_1(k\pi)}{F_2'(k\pi)} = \cosh k\pi$$

y así

$$\int_{\gamma} \cosh z \cot z dz = 2\pi i \sum_{k=-n}^n \cosh k\pi = 2\pi i \frac{\sinh\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{\sinh \frac{\pi}{2}}.$$

c) El integrando  $f = z^n e^{\frac{1}{z}}$  tiene una singularidad esencial en el origen. Efectivamente, su serie de Laurent es

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{n-k}, \quad z \in C(0, 0, \infty).$$

El residuo en el origen es el coeficiente en  $z^{-1}$ , i.e.,

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{(n+1)!}$$

y por ello

$$\int_{\gamma} z^n e^{z^{-1}} dz = \frac{2\pi i}{(n+1)!}.$$

II) Si  $\gamma$  es el arco que recorre la circunferencia unidad en sentido antihorario una vez calcular

a)  $\int_{\gamma} \frac{z^2}{2z^4+1} dz$

- b)  $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz$   
 c)  $\int_{\gamma} \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz$   
 d)  $\int_{\gamma} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{z} dz$   
 e)  $\int_{\gamma} z^n e^{\frac{z}{z}} dz$  con  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

**Solución:**

- a) El integrando  $f(z) = \frac{z^2}{2z^4+1}$  es de la forma  $f = \frac{F_1}{F_2}$  con  $F_1 = z^2$  y  $F_2 = 2z^4+1$ . Los ceros del denominador  $F_2$  son las soluciones de  $z^4 = -\frac{1}{2}$ , esto es  $\left\{ \pm \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{2}}, \pm \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt[4]{2}} \right\}$ , todos son simples y se encuentran en el interior del circuito de integración. De acuerdo con el teorema de los residuos encontramos que

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{2z^4+1} dz = 2\pi i \sum_{z_i \text{ es un polos simple}} \operatorname{Res}(f, z_i).$$

Los residuos son

$$\operatorname{Res}(f, z_i) = \frac{z_i^2}{8z_i^3} = \frac{1}{8z_i}.$$

Así pues

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{2z^4+1} dz = i \frac{\sqrt[4]{2}\pi}{4} \left( e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right) = 0.$$

- b) El integrando  $f = \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}$  tiene singularidades en los ceros del denominador  $z^2(z^2-9)$ , esto es en  $\{0, \pm 3\}$  siendo la primera un polo doble y las segundas polos simples. De estos tres polos solo el origen esta en el interior del camino de integración. Por ello

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{e^z}{z^2-9} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2-2z-9}{(z^2-9)^2} e^z \\ &= -\frac{2\pi}{9} i \end{aligned}$$

- c) El integrando  $f(z) = \operatorname{sen} \frac{1}{z}$  tiene una singularidad esencial en el origen con serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k+1}}$$

convergente en la corona  $C(0, 0, \infty)$ . Así que

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 1$$

y

$$\int_{\gamma} \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

d) En este caso  $f(z) = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{z}$  tiene como serie de Laurent

$$f(z) = \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots \right)^2 = \frac{1}{z^2} - \frac{2}{3!z^4} + \dots$$

convergente en la corona  $C(0, 0, \infty)$ . Por ello,

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 0$$

y

$$\int_{\gamma} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{z} dz = 0.$$

e) El integrando  $f = z^n e^{\frac{2}{z}}$  vuelve a tener una singularidad esencial en el origen. Efectivamente, su serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} z^{n-k}$$

converge en  $C(0, 0, \infty)$  y, por lo tanto,

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

que conduce a

$$\int_{\gamma} z^n e^{\frac{2}{z}} dz = \frac{2^{n+2}\pi}{(n+1)!} i.$$

III) Estudiar la naturaleza de las singularidades, incluyendo el infinito, y calcular los residuos en los puntos singulares finitos de: a)  $\frac{e^z}{1+z^2}$ , b)  $\cos(z^2 + z^{-2})$ , c)  $\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ , d)  $\frac{1}{\operatorname{sen} z - \operatorname{sen} a}$ , e)  $(z-3)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z+2}\right)$ , f)  $z^2 e^{-z^4}$ , g)  $\frac{1}{z^3 - z^5}$ , h)  $z e^{\frac{z}{1-z}} - \frac{1}{(z-1)^2} \operatorname{sen} \frac{1}{z}$ .

**Solución:**

a) La función  $f = \frac{e^z}{1+z^2}$  es holomorfa fuera de los ceros del denominador, i.e., es una función meromorfa con polos simples en  $\{\pm i\}$ . Para calcular los residuos tenemos en cuenta que el numerador no tiene ceros en los polos y que los polos son ceros simples del denominador. Por ello

$$\operatorname{Res}(f, \pm i) = \frac{e^z}{2z} \Big|_{z=\pm i} = \mp i \frac{e^{\pm i}}{2}.$$

b) El origen es una singularidad esencial de  $f = \cos(z^2 + z^{-2})$  ya que el desarrollo de Laurent en la corona  $C(0, 0, \infty)$  contiene infinitas potencias negativas. Este desarrollo se obtiene a partir del desarrollo de Taylor del coseno. El residuo será cero, ya que en la serie de Taylor del coseno solo aparecen potencias pares y en el argumento del coseno,  $z^2 + z^{-2}$ , también solo hay potencias pares, así que solo habrá potencias pares, positivas y negativas, pero ninguna potencia impar.



- c) La función  $f = \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$  es meromorfa en  $\mathbb{C}$  con un polo de orden  $n$  situado en  $-1$ . Para calcular el residuo usamos el binomio de Newton

$$z^{2n} = (z + 1 - 1)^{2n} = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{2n}{m} (z + 1)^m$$

luego

$$\text{Res}(f, -1) = (-1)^{n-1} \binom{2n}{n-1} = -(-1)^n \frac{2n!}{(n+1)!(n-1)!}.$$

- d) La función  $f = \frac{1}{\sin z - \sin a}$  tiene singularidades en los ceros del denominador  $\sin z = \sin a$  que ocurre cuando  $z_n = a + 2n\pi$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ , como cada uno de estos ceros es simple concluimos que  $f$  es una función meromorfa con infinitos polos simples situados en  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Como  $f$  es una fracción con numerador constante, sin ceros, y denominador con ceros simples concluimos que

$$\text{Res}(f, z_n) = \frac{1}{\cos z_n} = \sec a.$$

- e) la función  $f = (z-3) \sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$  es singular en  $z = -2$  que, atendiendo al desarrollo de Laurent obtenido en  $C(-2, 0, \infty)$  a partir del desarrollo de Taylor del seno, es esencial,

$$f(z) = (z + 2 - 5) \sin\left(\frac{1}{z+2}\right) = ((z+2) - 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+2)^{2n+1}}$$

y así concluimos que  $\text{Res}(f, -2) = -5$ .

- f) La función  $z^2 e^{-z^4}$  es una función entera, no tiene pues singularidades.

- g) La función  $f = \frac{1}{z^3 - z^5} = -\frac{1}{z^3(z^2 - 1)}$  es una función meromorfa con un polo triple en 0 y dos polos simples en  $\pm 1$ . En la corona  $C(0, 0, 1)$  tenemos

$$f = \frac{1}{z^3} (1 + z^2 + z^4 + \dots) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + z + \dots$$

así que  $\text{Res}(f, 0) = 1$ . Por otro lado, para los polos simples  $\pm 1$  tenemos

$$\text{Res}(f, \pm 1) = -\frac{1}{z^3(z \pm 1)} \Big|_{z=\pm 1} = -\frac{1}{2}.$$

- h) La función  $f = z e^{\frac{z}{1-z}} - \frac{1}{(z-1)^2} \sin \frac{1}{z}$  tiene dos singularidades en  $\{0, 1\}$ , ambas esenciales. Para analizar el residuo en 0 observemos, en primer lugar  $z e^{\frac{z}{1-z}}$  es holomorfa en ese punto, por tanto admite un desarrollo en serie de potencias que converge en el disco  $D(0, 1)$ . Así la parte principal en el origen de  $f$  es la parte principal de  $f_2 = -\frac{1}{(z-1)^2} \sin \frac{1}{z}$  en ese punto. Usando el desarrollo de Taylor del seno

obtenemos el siguiente producto

$$\begin{aligned} f_2 &= -(1 + z + z^2 + \dots)^2 \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots \right) \\ &= -(1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots) \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots \right) \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f_2, 0) &= -1 + \frac{3}{3!} - \frac{5}{5!} + \dots \\ &= -1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots = -\cos 1 \end{aligned}$$

y por ello

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \operatorname{Res}(f_2, 0) = -\cos 1.$$

En  $z = 1$  los dos sumandos de  $f$  tiene una singularidad. Para primer sumando  $f_1 = z e^{\frac{z}{1-z}}$  tenemos una singularidad esencial

$$\begin{aligned} f_1 &= (z - 1 + 1) e^{-1 - \frac{1}{z-1}} = \frac{1}{e} (z - 1 + 1) e^{-\frac{1}{z-1}} \\ &= \frac{1}{e} (z - 1 + 1) \left( 1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \dots \right) \end{aligned}$$

y por ello

$$(20) \quad \operatorname{Res}(f_1, 1) = \frac{1}{e} \left( \frac{1}{2!} - 1 \right) = -\frac{1}{2e}.$$

Para el segundo sumando  $f_2$  tenemos un polo doble en  $-1$ . El residuo es

$$\operatorname{Res}(f_2, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left( (z-1)^2 f_2(z) \right) = - \left( \frac{d}{dz} \operatorname{sen} \frac{1}{z} \right) \Big|_{z=-1} = \left( \frac{1}{z^2} \cos \frac{1}{z} \right) \Big|_{z=-1} = \cos 1,$$

En definitiva, sumando ambas contribuciones obtenemos

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \cos 1 - \frac{1}{2e}.$$

El resultado  $\operatorname{Res}(f_2, -1) = \cos 1 = -\operatorname{Res}(f_2, 0)$  tiene la siguiente explicación. El residuo en el infinito se calcula  $\operatorname{Res}(f_2, \infty) = \operatorname{Res}(F_2 z^{-2}, 0)$  donde  $F_2(z) = f_2\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{z}-1\right)^2} \operatorname{sen} z = -\frac{z^2}{(z-1)^2} \operatorname{sen} z$ . Por lo tanto,  $\operatorname{Res}(f_2, \infty) = 0$ . Pero la suma de todos los residuos y el residuo en el infinito debe anularse y de ahí que  $\operatorname{Res}(f_2, -1) + \operatorname{Res}(f_2, 0) = 0$  lo que permite encontrar  $\operatorname{Res}(f_2, 0)$ , de un modo mas rápido, a partir de  $\operatorname{Res}(f_2, -1)$ .

iv) Determinar el valor de la integral  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^4 + 3x^2 + 1} dx$ .

**Solución:** Al ser el integrando  $f(z) = \frac{z^2-1}{2z^4+3z^2+1}$  una función par el valor de nuestra integral será  $\int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{2x^4+3x^2+1} dx = \frac{I}{2}$  con  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{2x^4+3x^2+1} dx$ . Por otro lado, el integrando es una función racional con el denominador dos grados superior que el

numerador, por lo que decrece la función suficientemente rápido en el infinito y se asegura la aplicabilidad del método de los residuos. Por lo tanto,

$$I = 2\pi i \sum_{z_i \text{ polo con } \operatorname{Re} z_i > 0} \operatorname{Res}(f, z_i).$$

Como  $2z^4 + 3z^2 + 1 = 2(z^2 + 1)(z^2 + \frac{1}{2})$ , vemos que  $f(z)$  tiene cuatro polos simples en  $\pm i, \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ . Luego,

$$I = 2\pi i \left( \operatorname{Res} \left( \frac{z^2 - 1}{2z^4 + 3z^2 + 1}, i \right) + \operatorname{Res} \left( \frac{z^2 - 1}{2z^4 + 3z^2 + 1}, \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

Los residuos se pueden calcular de diferentes maneras. Por ejemplo, recordamos que si tenemos un cociente  $F/G$ , con  $F$  no nulo en  $z = z_0$  y  $G$  con un cero simple en ese punto, se tendrá  $\operatorname{Res}(F/G, z_0) = F(z_0)/G'(z_0)$ . Ello conduce en nuestro caso a  $\operatorname{Res} \left( \frac{z^2 - 1}{2z^4 + 3z^2 + 1}, z_0 \right) = \frac{z_0^2 - 1}{8z_0^3 + 6z_0}$ , esto es

$$\operatorname{Res} \left( \frac{z^2 - 1}{2z^4 + 3z^2 + 1}, i \right) = \frac{i^2 - 1}{8i^3 + 6i} = -i, \quad \operatorname{Res} \left( \frac{z^2 - 1}{2z^4 + 3z^2 + 1}, \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1}{8\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^3 + 6\frac{i}{\sqrt{2}}} = \frac{3i}{2\sqrt{2}}.$$

En definitiva,

$$I = 2\pi i \left( -i + \frac{3i}{2\sqrt{2}} \right)$$

y, por ello, obtenemos el siguiente valor para la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^4 + 3x^2 + 1} dx = \pi \left( 1 - \frac{3}{2\sqrt{2}} \right).$$

v) Calcular la integral:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^4 + 8x^2 + 16} dx, k > 0$ .

**Solución:** La función no tiene singularidades sobre el eje real y tiene dos polos dobles en el eje imaginario

$$x^4 + 8x^2 + 16 = 0, \quad (x^2 + 4)^2 = 0, \quad x = \pm 2i, \quad \text{dobles}$$

y la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{x^4 + 8x^2 + 16} dx$$

al ser el integrando es impar es cero. Así que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^4 + 8x^2 + 16} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^4 + 8x^2 + 16} dx.$$

Como la integral se puede calcular usando el método de residuos, cerrando por una circunferencia en el semiplano superior (pues  $k > 0$ ).

Haciendo tender  $R$  a infinito se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^4 + 8x^2 + 16} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{ikz}}{z^4 + 8z^2 + 16} dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} \left( \frac{e^{ikz}}{z^4 + 8z^2 + 16}, z_k \right)$$

donde  $z_k$  son los polos del integrando en el semiplano superior, esto es  $2i$  (un polo doble). El residuo es

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left( \frac{e^{ikz}}{z^4 + 8z^2 + 16}, 2i \right) &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \left[ (z - 2i)^2 \frac{e^{ikz}}{z^4 + 8z^2 + 16} \right] = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \left[ \frac{e^{ikz}}{(z + 2i)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} e^{ikz} \left[ \frac{ik(z + 2i) - 2}{(z + 2i)^3} \right] = -\frac{i}{32} (2k + 1) e^{-2k} \end{aligned}$$

y la integral es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^4 + 8x^2 + 16} dx = 2\pi i \left( -\frac{i}{32} (2k + 1) e^{-2k} \right) = \frac{\pi}{16} (2k + 1) e^{-2k}$$

vi) Calcular la integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{x^2 - 2x + 1 + a^2} dx,$$

donde  $k, a > 0$

**Solución:** La integral es  $I = \operatorname{Im} J$  donde

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 - 2x + 1 + a^2} dx,$$

que es una transformada de Fourier. Vemos que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{|z^2 - 2z + 1 + a^2|} = 0$$

y por ello se puede aplicar el Teorema de los Residuos. Como  $k > 0$ , solo contribuyen las singularidades que yacen en el semiplano superior. Los ceros del polinomio  $z^2 - 2z + 1 + a^2$  se obtienen de  $z - 1 = \pm ia$ , esto es  $z = 1 \pm ia$ . Luego,

$$I = \operatorname{Im} \left( 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{ikz}}{z^2 - 2z + 1 + a^2}, 1 + ia \right) \right)$$

y así

$$I = 2\pi \operatorname{Re} \operatorname{Res} \left( \frac{e^{ikz}}{z^2 - 2z + 1 + a^2}, 1 + ia \right).$$

Solo queda computar el residuo. Recordemos que  $\operatorname{Res} \left( \frac{F(z)}{G(z)}, z_0 \right)$  donde  $F$  y  $G$  son holomorfas en  $z_0$  con  $G(z_0) = 0$  y  $F(z_0), G'(z_0) \neq 0$  se calcula como  $\operatorname{Res} \left( \frac{F(z)}{G(z)}, z_0 \right) = \frac{F(z_0)}{G'(z_0)}$ . En definitiva,

$$\operatorname{Res} \left( \frac{e^{ikz}}{z^2 - 2z + 1 + a^2}, 1 + ia \right) = \frac{e^{ik(1+ia)}}{2(z-1)|_{1+ia}} = \frac{e^{-ka}}{2a} (\operatorname{sen} k - i \cos k),$$

y, finalmente, podemos escribir

$$I = \frac{\pi}{a} e^{-ka} \operatorname{sen} k.$$

VII) Calcular la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2}.$$

**Solución:** Para el cálculo de la integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2},$$

escribimos  $z = e^{i\theta}$  lo que permite escribir

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(2 + \frac{z + z^{-1}}{2}\right)^2} \frac{dz}{iz}.$$

Simplificando, llegamos a

$$I = -4i \int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2} dz.$$

El integrando tiene dos polos dobles en los puntos

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

El polo doble  $-2 - \sqrt{3}$  está en el exterior del arco de integración y el polo  $-2 + \sqrt{3}$  en el interior. Por lo tanto, el teorema de los residuos de Cauchy nos informa de que

$$I = 8\pi \operatorname{Res} \left( \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2}, -2 + \sqrt{3} \right).$$

Recordamos ahora las fórmulas para el cálculo de polos múltiples y escribimos

$$\begin{aligned} I &= 8\pi \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{d}{dz} \left( (z + 2 - \sqrt{3})^2 \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2} \right) = 8\pi \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{(z + 2 + \sqrt{3})^2} \right) \\ &= 8\pi \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{(z + 2 + \sqrt{3})^2 - 2z(z + 2 + \sqrt{3})}{(z + 2 + \sqrt{3})^4} = 8\pi \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{-z + 2 + \sqrt{3}}{(z + 2 + \sqrt{3})^3} = 8\pi \frac{4}{8 \times 3 \times \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

En definitiva,

$$I = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

VIII) Hallar el valor de la siguientes integrales

a)  $\int_0^{2\pi} e^{2\cos \theta} d\theta$

b)  $\int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta, n \in \mathbb{Z}$

c)  $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(n\theta - \operatorname{sen} \theta) d\theta, n \in \mathbb{Z}$

**Solución:**

a) Tenemos

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta} d\theta = \int_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}} \frac{dz}{iz}$$

El integrando  $f(z) = e^z \frac{e^{z^{-1}}}{z}$  tiene una singularidad esencial en el origen, su desarrollo de Laurent se calcula del producto de Cauchy

$$f(z) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!z^{l+1}} \right),$$

que converge en la corona  $C(0, 0, \infty)$  y da el residuo, coeficiente en  $z^{-1}$ ,

$$\text{Res}(f, 0) = 2 + \frac{1}{(2!)^2} + \frac{1}{(3!)^2} + \dots = I_0(2) = 2,27958530233607,$$

donde  $I_0(z)$  es la función de Bessel modificada de primera especie, que está tabulada y bien estudiada. Así que

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta} d\theta = \int_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}} \frac{dz}{iz} = 2\pi \text{Res}(f, 0) = 2\pi I_0(2).$$

b) Si  $n$  es un entero negativo, como el coseno se anula en el intervalo de integración, la integral sólo existiría en sentido impropio. Para  $n \in \{0, 1, \dots\}$  tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta &= \int_{|z|=1} \left( \frac{z+z^{-1}}{2} \right)^n \frac{dz}{iz} = 2^{-n} \int_{|z|=1} (1+z^2)^n \frac{dz}{iz^{n+1}} \\ &= 2^{-n} \sum_{k=0}^n \int_{|z|=1} \binom{n}{k} z^{2k} \frac{dz}{iz^{n+1}}. \end{aligned}$$

Así que si  $n$  es impar el residuo del integrando  $f = \left( \frac{z+z^{-1}}{2} \right)^n \frac{1}{iz}$  en el origen es nulo, y si  $n = 2m$  es par, el residuo será  $\text{Res}(f, 0) = -i 2^{2m} \binom{2m}{m}$  y la integral

$$\int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta = \begin{cases} 0, & n \text{ es impar,} \\ \binom{2m}{m} \frac{\pi}{2^{2m-1}}, & n = 2m \text{ es par.} \end{cases}$$

c) En este caso tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \text{sen } \theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \text{Re}(e^{i(-\text{sen } \theta + n\theta)}) d\theta = \text{Re} \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta - i\text{sen } \theta} e^{in\theta} d\theta \\ &= \text{Re} \int_{|z|=1} e^{z^{-1}} z^n \frac{dz}{iz} = \text{Im} \int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} z^{n-1} dz. \end{aligned}$$

Como el integrando  $f = e^{\frac{1}{z}} z^{n-1}$  tiene como única singularidad una singularidad esencial en el origen con residuo  $\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{n!}$ , obtenemos

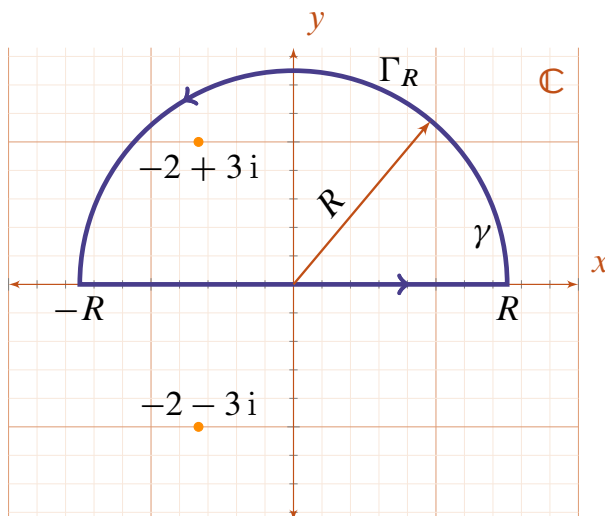
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} (\cos(\theta - \text{sen } \theta)) d\theta = \frac{2\pi}{n!}.$$

ix) Calcular las integrales

- a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx$
- b)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(1+x^n)^2} dx$  con  $m, n \in \mathbb{N}$  y  $m < 2n - 1$
- c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ ,  $a, b > 0$

**Solución:**

a) Por un lado, dado los grados de los polinomios en el numerador y el denominador la integral impropia existe y además tenemos asegurada la aplicación del teorema de los residuos. Por otro lado, el integrando  $f = \frac{z}{(z^2+4z+13)^2}$  es una función meromorfa con singularidades aisladas, que como veremos son polos dobles, situadas en los ceros del denominador. Estos ceros son las soluciones de la ecuación cuadrática  $z^2 + 4z + 13 = 0$ , que resultan ser  $z_{\pm} = -2 \pm 3i$ . Como vemos en  $z_{\pm}$  el numerador no se anula así que son polos dobles. Tal como se ve en el diagrama solo uno de ellos esta en semiplano superior. Por ello, tendremos



**Polología y arco de integración**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_+).$$

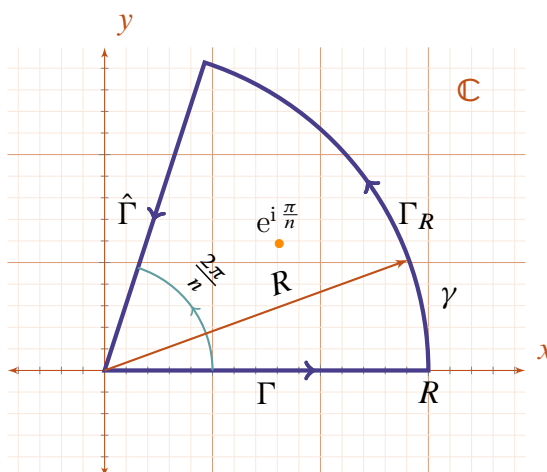
Como la singularidad aislada  $z_+$  es un polo doble para calcular el residuo podemos proceder usando que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_+) &= \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{d}{dz} ((z - z_+)^2 f(z)) = \left( \frac{d}{dz} \frac{z}{(z + z_-)^2} \right) \Big|_{z=z_+} = \frac{-z + 2 + 3i}{(z + 2 + 3i)^3} \Big|_{z=-2+3i} \\ &= \frac{i}{54}. \end{aligned}$$

Así que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx = -\frac{\pi}{27}.$$

b) El integrando  $f = \frac{z^m}{(1+z^n)^2}$  tiene polos dobles en el conjunto  $\{e^{i(\frac{\pi}{n}(2k+1))}\}_{k=0}^{n-1}$ . Escogemos un camino de integración representado en la figura, esto es la frontera de un sector circular de apertura  $\frac{2\pi}{n}$  que contiene solamente un polo doble situado en  $e^{i\frac{\pi}{n}}$ .



Polología y arco de integración

Así que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \int_{\hat{\Gamma}} f(z) dz,$$

pero

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^R \frac{x^m}{(1+x^n)^2} dx,$$

$$\int_{\hat{\Gamma}} f(z) dz = - \int_0^R \frac{x^m e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}}}{(1+x^n)^2} dx = -e^{i\frac{2\pi m}{n}} \int_0^R \frac{x^m}{(1+x^n)^2} dx$$

y, consecuentemente, podemos concluir que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \left(1 - e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}}\right) \int_0^R \frac{x^m}{(1+x^n)^2} dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz.$$

Ahora bien

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} \frac{|z|^m}{|1+z^n|} d|z| \leq \frac{\pi R^{m+1}}{(R^n - 1)^2},$$

donde hemos usado que  $|z| = R$  y  $|1+z^n| \geq |1 - |z|^n| = R^n - 1$  cuando  $R > 1$ . Dado que  $m < 2n - 1$  deducimos que  $\int_{\Gamma_R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ . Por ello, dado que  $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{n}})$  concluimos, si  $m + 1 \neq n$ , que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m}{(1+x^n)^2} dx = \frac{2\pi i}{\left(1 - e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}}\right)} \operatorname{Res}\left(f, e^{i\frac{\pi}{n}}\right).$$

Obsérvese que  $1 - e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}} = 0$  implica  $m + 1 = n, 2n, 3n, \dots$ , pero dado que  $m + 1 < 2n$  sólo tenemos que excluir el primer caso  $m + 1 = n$ . Pero, si  $n = m + 1$  la integral es inmediata y no hacen falta residuos ya que

$$\frac{x^{n-1}}{(1+x^n)^2} = -\frac{1}{n} \frac{d}{dx} \frac{1}{1+x^n}$$



y

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x^n)^2} dx = \frac{1}{n}.$$

Debemos subrayar que en este caso, por consistencia se tendrá

$$\operatorname{Res} \left( \frac{z^{n-1}}{(1+z^n)^2}, e^{i\frac{\pi}{n}} \right) = 0$$

Escribiendo  $f = \frac{F_1}{F_2}$  con  $F_1 = z^m$  y  $F_2 = (1+z^n)^2$  podemos aplicar la técnica para polos dobles de funciones cociente con numerador sin cero y denominador con cero doble. En este caso, como vimos  $\operatorname{Res}(f, z_0) = 2 \frac{F_1'(z_0)}{F_2''(z_0)} - \frac{2 F_1(z_0) F_2'''(z_0)}{3 (F_2''(z_0))^2}$ .

Un cálculo con SAGE conduce a

$$\begin{aligned} & 2 \frac{F_1'(z)}{F_2''(z)} - \frac{2 F_1(z) F_2'''(z)}{3 (F_2''(z))^2} \\ &= \frac{(6(m+1)n - 4n^2 - 3m - 2)z^n + (3(m+1)n - n^2 - 3m - 2)}{3((4n^3 - 4n^2 + n)z^{3n} + 2(2n^3 - 3n^2 + n)z^{2n} + (n^3 - 2n^2 + n)z^n)} z^{m+1} \end{aligned}$$

y recordando que en el polo doble  $z^n = -1$  obtenemos para el residuo

$$\operatorname{Res} \left( \frac{z^m}{(1+z^n)^2} \right) = -e^{i\pi \frac{m+1}{n}} \frac{n-m-1}{n^2},$$

que, tal y como adelantamos, se anula para  $n = m + 1$ .

En definitiva, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^m}{(1+x^n)^2} dx &= -\frac{2\pi i}{\left(1 - e^{i\frac{2\pi(m+1)}{n}}\right)} e^{i\pi \frac{m+1}{n}} \frac{n-m-1}{n^2} \\ &= \frac{\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen} \pi \frac{m+1}{n}} \left(1 - \frac{m+1}{n}\right), \end{aligned}$$

a comparar con el resultado previo  $\int_0^{\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi \frac{m+1}{n}}$ . Hay que indicar que el caso  $m+1 = n$  se puede recuperar en el límite, asumiendo que  $\frac{m+1}{n}$  es una variable continua que tiende a 1 y calculando el límite, por ejemplo con la regla de l'Hôpital.

- c) El integrando  $f = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$  tiene cuatro polos simples  $\{\pm ia, \pm ib\}$ . Este integrando decae suficientemente rápido en el infinito así que podemos integrar usando residuos en el semiplano superior y obtener

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, ia) + \operatorname{Res}(f, ib)).$$

El residuo en  $ia$  se calcula como el límite

$$\operatorname{Res}(f, ia) = \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia)f(z) = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{(z + ia)(z^2 + b^2)} = \frac{1}{2ia(-b^2 + a^2)}$$

y el residuo en  $ib$  se obtiene intercambiando  $a$  con  $b$ , esto es

$$\operatorname{Res}(f, ib) = \frac{1}{2ib(-a^2 + b^2)}.$$

Así pues la integral pedida es

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} &= 2\pi i \left( \frac{1}{2ia(-b^2 + a^2)} + \frac{1}{2ib(-a^2 + b^2)} \right) = \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{\pi}{ab(a + b)}. \end{aligned}$$

x) Evaluar

a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$  y  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 - 2x + 10} dx$

b)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx$ ,  $a, b > 0$

c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2 + b^2} dx$ ,  $a, b > 0$

**Solución:**

a) Ambas integrales son la parte real e imaginaria, respectivamente, de la transformada de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 10} e^{ix} dx.$$

Como, por un lado, el transformando  $f = \frac{z}{z^2 - 2z + 10}$  decae en el infinito,  $f(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$  y por otro lado tiene solo dos singularidades aisladas en los ceros del polinomio  $z^2 - 2z + 10$ , esto es en  $1 \pm 3i$ , que resultan ser polos simples, podemos calcular la integral cerrando un circuito en el semiplano superior y asegurar que el valor lo determina el residuo en el polo simple  $1 + 3i$  por la fórmula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 10} e^{ix} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1 + 3i).$$

Pero,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 1 + 3i) &= \frac{z e^z |_{z=1+3i}}{(z^2 - 2z + 10)'|_{z=1+3i}} = \frac{(1 + 3i) e^{i(1+3i)}}{6i} \\ &= -\frac{i}{6} (1 + 3i) e^{-3+i}. \end{aligned}$$

y por ende

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 10} e^{ix} dx = \frac{\pi}{3} (1 + 3i) e^{-3+i}.$$

Esto es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 10} \cos x \, dx = \frac{\pi}{3e^3} (\cos 1 - 3 \operatorname{sen} 1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 10} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{\pi}{3e^3} (3 \cos 1 + \operatorname{sen} 1),$$

b) Por un lado, el integrando  $\frac{\cos az}{z^2 + b^2}$  es una función par, así que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{x^2 + b^2} \, dx.$$

Por otro lado,  $f = \frac{1}{z^2 + b^2}$  tiene dos polos simples situados en  $\pm ib$ . Como  $a > 0$  podemos calcular la transformada de Fourier integrando en el semiplano superior, y por el teorema de los residuos bastará con usar el polo simple  $ib$ . Esto es

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (2\pi i \operatorname{Res}(f e^{iaz}, ib))$$

$$= -\pi \operatorname{Im} \operatorname{Res}(f e^{iaz}, ib).$$

Pero,

$$\operatorname{Res}(f e^{iaz}, ib) = \left. \frac{e^{iz}}{2z} \right|_{z=ib} = -i \frac{e^{-ab}}{2b}$$

y, así,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} \, dx = \pi \frac{e^{-ab}}{2b}.$$

c) La integral, que es una transformada seno de Fourier, se puede calcular como la parte imaginaria de la transformada de Fourier. Como el integrando  $f = \frac{z}{z^2 + b^2}$  se anula en el infinito y, dado que  $a > 0$ , para la aplicación del teorema de los residuos solo usaremos el polo simple  $ib$  (uno de dos polos simples  $\pm ib$  del integrando) que yace en el semiplano superior. Así,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2 + b^2} \, dx = \operatorname{Im} (2\pi i \operatorname{Res}(f e^{iaz}, ib)) = 2\pi \operatorname{Re} (\operatorname{Res}(f e^{iaz}, ib))$$

y como

$$\operatorname{Res}(f e^{iaz}, ib) = \left. \frac{z e^{iaz}}{2z} \right|_{z=ib} = \frac{1}{2} e^{-ab}$$

concluimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2 + b^2} \, dx = \pi e^{-ab}.$$

xi) Calcular los valores principales de Cauchy de

a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx$

b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3} \, dx$

c) VP  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6} \, dx$

$$d) \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2+4)(x-1)} dx$$

$$e) \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{x^2-1} dx$$

**Solución:**

a) La función  $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$  tiene una singularidad evitable en el origen, efectivamente  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$  y su serie de potencias, que converge en  $\mathbb{C}$  es  $\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$ . Por ello, la integral pedida  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$  no se toma en valor principal, no es necesario, ya que debe existir como integral *normal*. Por otro lado, la integral

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

se debe tomar en valor principal de Cauchy, ya que el integrando tiene un polo simple en el origen. Así tendremos

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

o bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \operatorname{Im} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

Para la integral en valor principal, al tener un polo simple en el origen, podemos aplicar el teorema de Cauchy con endentaduras

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right),$$

y como  $\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = 1$ , deducimos que

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi,$$

de donde se obtiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi.$$

Obsérvese que de esta discusión basada en residuos se concluye que

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0,$$

lo que, por otro lado, es evidente al ser el integrando una función impar y la integral tomada en valor principal.

b) Del problema anterior sabemos que el integrando  $\frac{\operatorname{sen}^3 z}{z^3}$  es una función holomorfa con una singularidad evitable en el origen. Por tanto, la integral no es necesario tomarla en valor principal. Para poder utilizar la técnica de los residuos recordamos que

$$4 \operatorname{sen}^3 z = 3 \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} 3z$$

lo que permite escribir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3} dx = \frac{1}{4} \operatorname{Im} \left( \operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3e^{ix} - e^{3ix}}{x^3} dx \right).$$

El integrando tiene el siguiente desarrollo en serie de Laurent alrededor de 0

$$\begin{aligned} \frac{3e^{iz} - e^{3iz}}{z^3} &= \frac{1}{z^3} \left( 3 + 3iz + 3\frac{(iz)^2}{2!} + 3\frac{(iz)^3}{3!} + \dots - 1 - 3iz - \frac{(3iz)^2}{2!} - \frac{(3iz)^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \frac{2}{z^3} + \frac{3}{z} + 3i \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{(3^{n+2} - 1)}{(n+3)!} z^n \end{aligned}$$

que converge en la corona  $C(0, 0, \infty)$ . Vemos que el polo en el circuito de integración no es simple, sino triple. Por lo tanto, no se puede aplicar la técnica de las endentaduras, validas para polos simples. Aunque existe una extensión aplicable a este caso que discutiremos en el siguiente problema, ya que la parte principal no tiene potencias pares.

Nosotros en este caso vamos a variar el argumento como sigue. Observamos que a la integral

$$\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3e^{ix} - e^{3ix} - 2}{x^3} dx$$

si se le puede aplicar el lema de las endentaduras ya que el integrando

$$f(z) = \frac{3e^{iz} - e^{3iz} - 2}{z^3} = \frac{3}{z} + 3i \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{(3^{n+2} - 1)}{(n+3)!} z^n$$

tiene un polo simple en el origen, con  $\operatorname{Res}(f, 0) = 3$ . Por lo tanto,

$$\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3e^{ix} - e^{3ix} - 2}{x^3} dx = 3\pi i$$

y como

$$\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = 0$$

concluimos que

$$\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3e^{ix} - e^{3ix}}{x^3} dx = 3\pi i$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{4}.$$

c) La integral se puede escribir como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

El integrando  $f = \frac{z e^{iz}}{z^2 - 5z + 6}$  es una función meromorfa con polos simples en los ceros del denominador, i. e.,  $z^2 - 5z + 6 = 0$ , luego los polos ocurren en  $\{2, 3\}$ . Al estar las singularidades situadas en el camino de integración y ser polos simples podemos aplicar la técnica de las endentaduras teniendo en cuenta el decaimiento  $f \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . Tal como hemos escrito  $\cos z = \operatorname{Re} e^{iz}$ , tenemos que integrar en el semiplano superior, pero si hubiéramos puesto  $\cos z = \operatorname{Re} e^{-iz}$  la integral se realizaría en el semiplano inferior. Procedemos aplicando el teorema de los residuos con endentaduras en las singularidades, polos simples sobre el eje real, y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6} dx &= \operatorname{Re} (i\pi (\operatorname{Res}(f, 2) + \operatorname{Res}(f, 3))) \\ &= -\pi \operatorname{Im}(\operatorname{Res}(f, 2) + \operatorname{Res}(f, 3)). \end{aligned}$$

Pero

$$\operatorname{Res}(f, 2) = \left. \frac{z e^{iz}}{z - 3} \right|_{z=2} = -2 e^{2i}, \quad \operatorname{Res}(f, 3) = \left. \frac{z e^{iz}}{z - 2} \right|_{z=3} = 3 e^{3i}.$$

y, consecuentemente,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6} dx &= -\pi \operatorname{Im}(-2 e^{2i} + 3 e^{3i}) \\ &= \pi(2 \operatorname{sen} 2 - 3 \operatorname{sen} 3). \end{aligned}$$

d) Tenemos

$$\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx = \operatorname{Im} \operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx$$

donde el integrando  $f = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)}$  tiene tres polos simples situados en  $\{\pm 2i, 1\}$ . dado el signo en la exponencial aplicamos el teorema de los residuos con endentaduras, la singularidad en la recta real es un polo simple, en el semiplano superior y obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx &= \operatorname{Im}(2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i) + \pi i \operatorname{Res}(f, 1)) \\ &= \pi \operatorname{Re}(2 \operatorname{Res}(f, 2i) + \operatorname{Res}(f, 1)). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 2i) &= \left. \frac{e^{iz}}{(z + 2i)(z - 1)} \right|_{z=2i} = \frac{e^{-2}}{4i(2i - 1)} = -\frac{2 - i}{20e^2}, \\ \operatorname{Res}(f, 1) &= \left. \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)} \right|_{z=1} = \frac{\cos 1 + i \operatorname{sen} 1}{5} \end{aligned}$$

Luego, obtenemos

$$\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx = \frac{\pi}{5} \left( \cos 1 - \frac{1}{e^2} \right).$$

e) En este caso tendremos

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{x^2 - 1} dx = \text{Re VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x^2 - 1} dx.$$

El integrando  $f = \frac{e^{itz}}{z^2 - 1}$  determina que para  $t > 0$  se integre en el semiplano superior y para  $t < 0$  en el semiplano inferior. El denominador tiene ceros en  $\pm 1$ , que yacen en el camino de integración. Por tanto, teniendo en cuenta el decaimiento de  $\frac{1}{z^2 - 1}$  en el infinito podemos aplicar la técnica de los residuos, en este caso con endentaduras. Así

$$\begin{aligned} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{x^2 - 1} dx &= \begin{cases} \text{Re} \left( i\pi (\text{Res}(f, 1) + \text{Res}(f, -1)) \right), & t > 0 \\ -\text{Re} \left( i\pi (\text{Res}(f, 1) + \text{Res}(f, -1)) \right), & t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\pi \text{Im}(\text{Res}(f, 1) + \text{Res}(f, -1)), & t > 0 \\ \pi \text{Im}(\text{Res}(f, 1) + \text{Res}(f, -1)), & t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\text{Res}(f, \pm 1) = \frac{e^{itz}}{z \pm 1} \Big|_{z=\pm 1} = \pm \frac{e^{\pm it}}{2}$$

y obtenemos

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{x^2 - 1} dx = -\pi \text{sen } |t|.x$$

XII) Encontrar una posible extensión de lema de las endentaduras. Aplicarlo al cálculo de la integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}^5 x}{x^5} dx$ .

**Solución:** Supongamos que  $z_0$  es un polo múltiple de orden  $n$ , existe  $R$  tal que en la corona  $C(z_0, 0, R)$  se tiene  $f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + F(z)$ , donde  $F(z)$  es una función holomorfa en el disco  $D(z_0, R)$ , y por tanto acotada sobre él con  $a_{-1} = \text{Res}(f, z_0)$ . Por ello, si  $r < R$  podemos escribir  $\int_{\gamma} f(z) dz = a_{-n} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^n} + \dots + a_{-1} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} + \int_{\gamma} F(z) dz$ . Como ya hemos visto, si  $M$  es tal que  $|F(z)| < M$  para  $|z| < R$ ,  $|\int_{\gamma} F(z) dz| \leq M\alpha r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$  y  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = i\alpha$ . Por otro lado, para  $k = \{2, 3, \dots\}$  tendremos

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^k} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_0 + \alpha} \frac{i r e^{i\theta}}{r^k e^{ki\theta}} d\theta = \frac{i}{r^{k-1}} \int_{\alpha_0}^{\alpha_0 + \alpha} e^{-i(k-1)\theta} d\theta = \frac{e^{-i(k-1)\alpha_0}}{(k-1)r^{k-1}} (1 - e^{-i(k-1)\alpha}).$$

Por tanto, salvo que

$$(k-1)\alpha = 0 \quad \text{mód } 2\pi$$

y, por ende,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^k} = 0,$$

las integrales divergen en el límite

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^k} = \infty.$$

Por tanto, dada una función  $f(z)$  con un polo de orden  $n$  en  $z_0$  siempre que en su parte principal  $\sum_{k=1}^n a_{-k}(z-z_0)^{-k}$  sólo sean distintos de cero aquellos coeficientes  $a_{-k}$ , con  $k > 1$ , tales que  $(k-1)\alpha = 0 \pmod{2\pi}$ , tendremos  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) = i\pi \operatorname{Res}(f, z_0)$ . Si existe algún coeficiente no nulo  $a_{-k}$  con  $(k-1)\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$  entonces  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) = \infty$ .

Por ejemplo, si escogemos  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  podremos tomar una  $f$  con parte principal de la forma  $a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_{-5}(z-z_0)^{-5} + a_{-9}(z-z_0)^{-9} + a_{-13}(z-z_0)^{-13} + \dots + a_{-4m-1}(z-z_0)^{-4m-1}$ , esto es con un polo de orden  $4m+1$ , con  $m \geq 1$ . Por ejemplo, si  $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ , la parte principal podrá ser de la forma  $a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_{-6}(z-z_0)^{-6} + a_{-11}(z-z_0)^{-11} + a_{-16}(z-z_0)^{-16} + \dots + a_{-5m-1}(z-z_0)^{-5m-1}$ .

Probablemente, la endentadura más interesante sea con  $\alpha = \pi$ . Ahora solo las potencias impares pueden aparecer en la parte principal  $a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_{-3}(z-z_0)^{-3} + a_{-5}(z-z_0)^{-5} + \dots + a_{-2m-1}(z-z_0)^{-2m-1}$ , y el orden del polo es un impar.

Podemos aplicar este resultado para el cálculo de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^5 x}{x^5} dx.$$

El integrando  $\frac{\operatorname{sen}^5 z}{z^5}$  solo tiene una singularidad en  $\mathbb{C}$ , que es evitable, en el origen, así que la integral existe. Para su cálculo recordamos la formulas de De Moivre,

$$\operatorname{sen}^5 z = \frac{1}{16}(\operatorname{sen} 5z - 5 \operatorname{sen} 3z + 10 \operatorname{sen} z)$$

que conducen a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^5 x}{x^5} dx = \frac{1}{16} \operatorname{Im} \operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i5x} - 5e^{i3x} + 10e^{ix}}{x^5} dx.$$

El integrando  $f = \frac{e^{i5z} - 5e^{i3z} + 10e^{iz}}{z^5}$  tiene un desarrollo de Laurent convergente en la corona  $C(0, 0, \infty)$  dado por

$$f = \frac{6}{z^5} + \frac{5}{z^3} + \frac{115}{12z} + F(z),$$

donde  $F(z)$  es una serie de potencias que converge en  $\mathbb{C}$ . Así que se cumplen las condiciones para poder aplicar la técnica de las endentaduras generalizada para polos múltiples

$$\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i5x} - 5e^{i3x} + 10e^{ix}}{x^5} dx = i\pi \operatorname{Res}(f, 0) = i \frac{115\pi}{12},$$

que conduce a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^5 x}{x^5} dx = \frac{115\pi}{192}.$$



Generalizando estas ideas se puede demostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^{2m+1} x}{x^{2m+1}} dx = \frac{\pi}{4^m} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{2m+1}{k} \frac{(2(m-k)+1)^{2m}}{(2m)!}.$$

¡Probarlo!

XIII) Evaluar las transformadas de Mellin de

a)  $\int_0^{+\infty} x^{p-1} \cos ax dx$  y  $\int_0^{+\infty} x^{p-1} \sin ax dx$  donde  $0 < \operatorname{Re} p < 1, a > 0$

b)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{(1+x^2)^2} dx$ , con  $-1 < p < 3$

c)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x^2+2(\cos \lambda)x+1} dx$ , con  $-1 < p < 1$  y  $0 < \lambda < \pi$

**Solución:**

a) Vamos a analizar la transformada de Mellin  $\mathcal{M}_p$  de  $e^{-iax}$ , luego tomaremos sus partes real e imaginaria para contestar a la cuestión planteada. Vamos pues a analizar la integral

$$\mathcal{M}_p = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-iax} dx.$$

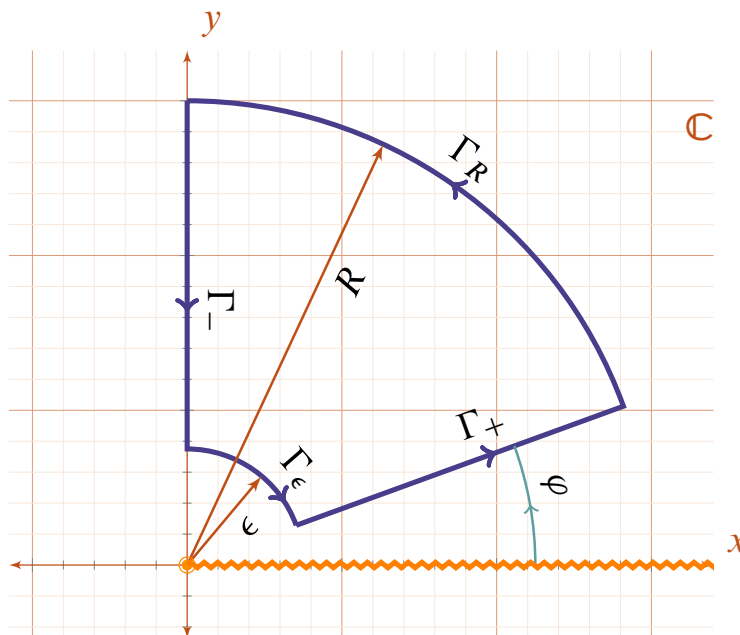
Vemos que realizando el cambio de variable  $ax \rightarrow x$  obtenemos

$$\mathcal{M}_p = a^{-p} \mathcal{M}_p, \quad \mathcal{M}_p := \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-ix} dx.$$

Debemos recordar que tomamos  $z^{p-1} = e^{(p-1)\log z}$ , con  $\log z$  en su determinación  $[0, 2\pi)$ . Para evaluar  $\mathcal{M}_p$ , la idea es considerar la función

$$f(z) = z^{p-1} e^{-z}$$

e integrarla en  $\gamma = \Gamma_- + \Gamma_\epsilon + \Gamma_R + \Gamma_+$ , tal como se indica en la figura.



Obviamente, en el interior de  $\gamma$  la función  $f$  es holomorfa y por el teorema de Cauchy tenemos  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ . Sobre  $\Gamma_-$  tenemos

$$\int_{\Gamma_-} f(z) dz = \int_R^\epsilon (iy)^{p-1} e^{-iy} i dy$$

pero  $(iy)^{p-1} = e^{(p-1)\log(iy)} = e^{(p-1)(\log|y| + i\frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{(p-1)\pi}{2}} y^{p-1}$ , así pues

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_-} f(z) dz = -e^{i\frac{\pi}{2}p} \mathcal{M}_p.$$

Por otro lado, la integral sobre  $\Gamma_+$  es

$$\int_{\Gamma_+} f(z) dz = \int_\epsilon^R (e^{i\varphi} x)^{p-1} e^{-ie^{i\varphi} x} dx$$

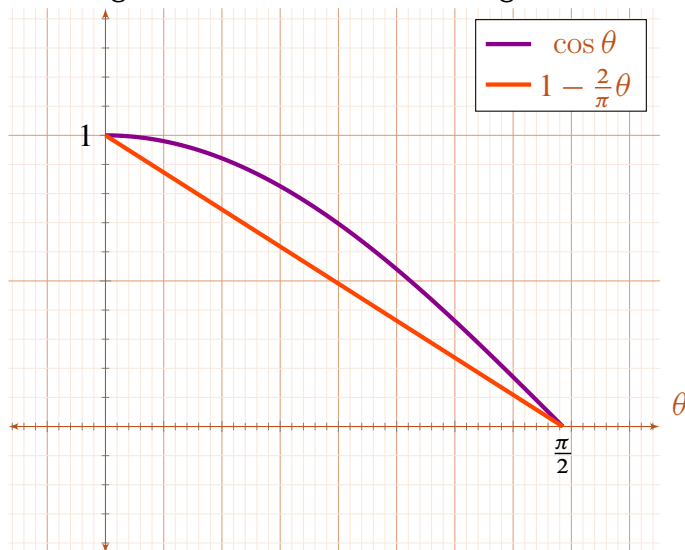
así que

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_+} f(z) dz = \Gamma(p).$$

Donde  $\Gamma$  es la función gamma de Euler  $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$ . Vamos a ver que las otras dos integrales se anulan en el límite considerado. Así,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| &\leq \int_{\Gamma_R} \left| z^{p-1} e^{-z} dz \right| |dz| = \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \left| e^{(p-1)(\log R + i\theta) - R \cos \theta - i R \sin \theta} \right| R d\theta \\ &= R^{\operatorname{Re} p} \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \cos \theta - (\operatorname{Im} p)\theta} d\theta, \end{aligned}$$

Como se muestra en la gráfica en el intervalo de integración se tiene  $\cos \theta > 1 - \frac{2}{\pi}\theta$



y por tanto  $e^{-R \cos \theta} < e^{-R + \frac{2}{\pi} R \theta}$ , y así

$$\begin{aligned} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \cos \theta - (\operatorname{Im} p) \theta} &< e^{-R} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} e^{(\frac{2}{\pi} R - \operatorname{Im} p) \theta} d\theta = e^{-R} \frac{e^{(\frac{2}{\pi} R - \operatorname{Im} p) \frac{\pi}{2}} - e^{(\frac{2}{\pi} R - \operatorname{Im} p) \varphi}}{\frac{2}{\pi} R - \operatorname{Im} p} \\ &= \frac{e^{-\operatorname{Im} p \frac{\pi}{2}} - e^{(\frac{2}{\pi} R - \operatorname{Im} p) \varphi - R}}{\frac{2}{\pi} R - \operatorname{Im} p} \end{aligned}$$

y podemos concluir para  $0 < \operatorname{Re} p < 1$  que

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varphi \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0.$$

Para  $\Gamma_{\epsilon}$  tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_{\epsilon}} f(z) dz \right| &\leq \int_{\Gamma_{\epsilon}} |z^{p-1} e^{-z}| |dz| = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} |e^{(p-1)(\log \epsilon + i \theta) - \epsilon \cos \theta - i \epsilon \sin \theta}| \epsilon d\theta \\ &= \epsilon^{\operatorname{Re} p} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\epsilon \cos \theta - (\operatorname{Im} p) \theta} d\theta \leq \epsilon^{\operatorname{Re} p} \frac{e^{-\operatorname{Im} p \frac{\pi}{2}} - e^{(\frac{2}{\pi} \epsilon - \operatorname{Im} p) \varphi - \epsilon}}{\frac{2}{\pi} \epsilon - \operatorname{Im} p}, \end{aligned}$$

entonces, si  $\operatorname{Im} p \neq 0$  y  $0 < \operatorname{Re} p < 1$ ,

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_{\epsilon}} f(z) dz = 0$$

y si  $\operatorname{Im} p = 0$  con si  $0 < \operatorname{Re} p < 1$  obtenemos

$$\left| \int_{\Gamma_{\epsilon}} f(z) dz \right| \leq \epsilon^p \frac{1 - e^{(\frac{2}{\pi} \varphi - 1) \epsilon}}{\frac{2}{\pi} \epsilon},$$

y de nuevo

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_{\epsilon}} f(z) dz = 0.$$

Por ende, el teorema de Cauchy permite concluir que

$$\mathcal{M}_p = e^{-i \frac{\pi}{2} p} \Gamma(p)$$

y por ello

$$\mathcal{M}_p = a^{-p} e^{-i \frac{\pi}{2} p} \Gamma(p).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{p-1} \cos ax dx &= a^{-p} \Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2}, \\ \int_0^{\infty} x^{p-1} \operatorname{sen} ax dx &= a^{-p} \Gamma(p) \operatorname{sen} \frac{\pi p}{2}, \end{aligned}$$

validas si  $0 < \operatorname{Re} p < 1$ .

b) Realizando el cambio  $q - 1 = p$ , la integral queda  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{q-1}}{(1+x^2)^2} dx$ , con  $0 < q < 4$ . Esta es justo la forma que debe tener para poder aplicar la técnica de los residuos a la transformada de Mellin de funciones racionales, en este caso  $\frac{1}{(1+x^2)^2}$  (la diferencia del grado del denominador y el numerador es 4). Así pues, como los ceros del denominador  $\pm i$  (son dobles), el transformando  $\frac{1}{(1+x^2)^2}$  tiene dos polos dobles en  $\pm i$  y ninguna otra singularidad. Por ello, podemos evaluar la integral conociendo los residuos como sigue

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{q-1}}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi e^{-i\pi q}}{\operatorname{sen} \pi q} (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i))$$

donde  $f = \frac{z^{q-1}}{(1+z^2)^2}$ . Ahora bien como los polos son dobles

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, \pm i) &= \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{d}{dz} \frac{z^{q-1}}{(z \pm i)^2} = \left( \frac{(q-1)z^{q-2}}{(z \pm i)^2} - \frac{2z^{q-1}}{(z \pm i)^3} \right) \Big|_{z=\pm i} \\ &= -\frac{1}{4} \left( (q-1)(\pm i)^{q-2} \mp i(\pm i)^{q-1} \right) = \\ &= \frac{(\pm i)^q}{4} q. \end{aligned}$$

Por ello,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^{q-1}}{(1+x^2)^2} dx &= -q \frac{\pi e^{-i\pi q}}{4 \operatorname{sen} \pi q} (e^{i\frac{\pi}{2}q} + e^{i\frac{3\pi}{2}q}) = -q \frac{\pi}{4 \operatorname{sen} \pi q} (e^{i\frac{\pi}{2}q} + e^{-i\frac{\pi}{2}q}) \\ &= -q \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \pi q} \cos \frac{\pi}{2} q \\ &= -\frac{\pi q}{4 \operatorname{sen} \frac{\pi q}{2}}. \end{aligned}$$

Volviendo a  $p$ ,  $-1 < p < 3$ , obtenemos la fórmula

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi(p+1)}{4 \operatorname{sen} \frac{\pi(p+1)}{2}}$$

c) Para el cálculo de  $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x^2 + 2(\cos \lambda)x + 1} dx$ , con  $-1 < p < 1$  y  $0 \leq \lambda < \pi$  procedemos como en el caso anterior, y escribiendo  $p = q - 1$ , vemos que las condiciones  $0 < q < 2$  son las justas para aplicar el método de los residuos. El denominador del integrando tiene ceros en  $-e^{\pm i\lambda}$ , que son los polos del integrando. Por tanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x^2 + 2(\cos \lambda)x + 1} dx = -\frac{\pi e^{-i\pi q}}{\operatorname{sen} \pi q} (\operatorname{Res}(f, -e^{i\lambda}) + \operatorname{Res}(f, -e^{-i\lambda})).$$

Para el cálculo de los residuos necesitamos

$$\arg(-e^{i\lambda}) = \pi + \lambda, \quad \arg(-e^{-i\lambda}) = \pi - \lambda,$$

donde hemos usado la determinación  $[0, 2\pi)$  y que  $0 < \lambda < \pi$ . Esto conduce a

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, -e^{i\lambda}) &= \frac{z^{q-1}}{z + e^{-i\lambda}} \Big|_{z=-e^{i\lambda}} = \frac{e^{i(q-1)\arg(-e^{i\lambda})}}{-e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}} = -\frac{e^{i(q-1)(\pi+\lambda)}}{e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}}, \\ \operatorname{Res}(f, -e^{-i\lambda}) &= \frac{z^{q-1}}{z + e^{i\lambda}} \Big|_{z=-e^{-i\lambda}} = \frac{e^{i(q-1)\arg(-e^{-i\lambda})}}{-e^{-i\lambda} + e^{i\lambda}} = \frac{e^{i(q-1)(\pi-\lambda)}}{e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x^2 + 2(\cos \lambda)x + 1} dx &= -\frac{\pi e^{-i\pi q}}{\operatorname{sen} \pi q} \left( -\frac{e^{i(q-1)(\pi+\lambda)}}{e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}} + \frac{e^{i(q-1)(\pi-\lambda)}}{e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}} \right) \\ &= -\frac{\pi e^{-i\pi q}}{\operatorname{sen} \pi q} e^{i\pi(q-1)} \frac{-e^{i(q-1)\lambda} + e^{-i(q-1)\lambda}}{e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}} \\ &= -\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi q} \frac{\operatorname{sen}(q-1)\lambda}{\operatorname{sen} \lambda} \\ &= \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi p} \frac{\operatorname{sen} p\lambda}{\operatorname{sen} \lambda}.\end{aligned}$$





# TEXTOS CONSULTADOS

- [1] Mark J. Ablowitz y Athanassios S. Fokas, *Complex variables: Introduction and Applications*, Second Edition, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [2] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Third Edition, Mathematical series, McGraw-Hill, Nueva York, 1979.
- [3] Umberto Botazzini, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Springer-Verlag, Nueva York, 1986.
- [4] Umberto Botazzini y Jeremy Gray, *Hidden Harmony—Geometric Fantasies. raise of Complex Function Theory*, Sources and Studies in the History of mathematics and Physical Sciences, Springer, Nueva York, 2013.
- [5] James Ward Brown y Ruel V. Churchill, *Complex Variables and Applications*, Seventh Edition, McGraw-Hill, Nueva York, 2004.
- [6] Joaquim Bruna y Julià Cufí, *Complex Analysis*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, Zurich, 2013.
- [7] J. Budden, *Números complejos*, Editorial Alhambra SA, Madrid, 1971.
- [8] Antonio José Durán, *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Universidad, Madrid, 1996.
- [9] I. Grattan-Guinness, *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1970*, Alianza Universidad, Madrid, 1984.
- [10] Jeremy Gray, *The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century*, Springer, Nueva York, 2015.
- [11] Hans Niels Jahnke, *A History of Analysis*, History of Mathematics **24**, American Mathematical Society, London Mathematical Society, 2003.
- [12] Alan Jeffrey, *Complex Analysis and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.
- [13] Konrad Knopp, *Teoría de Funciones*, manuales Técnicos Labor, Editorial Labor SA, Barcelona 1946.
- [14] Serge Lang, *Complex Analysis*, Third Edition, Graduate Texts in Mathematics **113**, Springer, Nueva York, 1993.
- [15] A. Markusevich, *Teoría de las funciones analíticas. Tomo I*, Mir, Moscú, 1970.
- [16] Jerrold E. Marsden y Michael J. Hoffman, *Basic Complex Analysis*, Third Edition, W. E. Freeman, Nueva York, 2003.
- [17] Tristan Neddham, *Visual Complex Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 2003.
- [18] Domingo Pestana Galván, José Manuel Rodríguez García y Francisco Marcellán Español, *Curso práctico de Variable compleja y teoría de transformadas*, Pearson, Madrid, 2014.
- [19] Reinhold Remmert, *Theory of Complex Functions*, Graduate Texts in Mathematics **122**, Readings in Mathematics, Springer, Nueva York, 1998.
- [20] Walter Rudin, *Análisis real y complejo*, Alhambra, Madrid, 1985.
- [21] Barry Simon, *Basic Complex Analysis*, (A Comprehensive Course in Analysis. Part **2A**), American Mathematical Society, 2015.
- [22] William T. Shaw, *Complex Analysis with Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [23] Yu. V. Sidorov, M. V. Fedoryuk y M. I. Shabunin, *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable*, Mir Publishers, Moscú, 1985.
- [24] L. I. Volkovyski, G. L. Lunts y I. G. Aramanovich, *Problemas sobre la Teoría de Funciones de Variable Compleja*, Mir, Moscú, 1984.





# ÍNDICE ALFABÉTICO



- Aequationum Quarundam Potestatis Tertiae, Quintae, Septimae...* (1706), 10  
*Algebra* (1770), 3  
*Analysis per Quantitatum Series Fluxiones ac Differentias...* (1711), 151  
Anderson, Alexander, 27  
*An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism* (1828), 113  
arco, 73  
    cerrado  
        índice, 97  
    continuo, 73  
    de Jordan, 82, 111, 118  
    endentadura, 221  
    exterior, 98  
    interior, 98  
    ojo de cerradura, 229  
    rectificable, 77  
    simples, 82  
    suave, 73  
        a trozos, 73  
Argand, Jean-Robert, 4, 110, 111  
argumento, 22, 60  
    determinación, 22  
    principal, 22  
*Arithmetica Philosophica* (1608), 110  
*Ars Magna* (1545), 1, 2, 7  
*A simple proof of the fundamental Cauchy-Goursat Theorem* (1900), 95



- base de entornos, 37  
Bernoulli, Daniel, 50

- Bernoulli, Johann, 10, 154  
Bernoulli, Nicolas, 110  
Bessel, Friedrich, 5, 90  
Bombelli, Rafael, 3, 7, 8, 15, 29  
Bonaparte, Napoleón, 103, 154  
Bouquet, Jean-Claude, 40, 93  
Briot, Charles, 40, 93



- cadenas, 74  
    homología, 118  
Cardano, Girolamo, 1, 2, 7, 29  
Carlos X, 103  
Casorati, Felice, 168  
Cauchy, Augustin, 4, 6, 13, 49, 91, 103, 105–108, 116, 133, 139, 140, 147, 156, 157, 163, 200–202  
Chebyshev, Pafnuti, 168  
ciclos, 118  
    homólogos, 119  
    homólogos a cero, 119  
    índice, 119  
Collins, John, 149–151  
conjunto  
    abierto, 37  
    cerrado, 37  
    conexo, 37  
    conexo por arcos, 37  
    simplemente conexo, 86  
convergencia  
    coronas, 159, 190  
    normal, 137, 138  
    puntual, 133, 134  
    series  
        de potencias, 142  
    uniforme, 133, 134, 138, 190

continuidad, 136  
 criterio de Cauchy, 134  
 integración sobre arcos, 136  
 prueba  $M$  de Weierstrass, 135  
 coronas de convergencia, 159  
 Cotes, Roger, 8  
*Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*  
 (1821), 110, 133, 139, 140  
 cuaterniones, 17  
 curva de Koch, 77



d'Alambert, Jean, 47, 110, 132  
*De Aequationem Recognitione et Emendatione...*  
 (1615), 27  
*De Analysi per Aequationes Numero Terminorum*  
*Infnitas* (1669), 151  
*De Inventione Centri Oscillationis* (1708), 152  
 De Moivre, Abraham, 9, 154  
 Del Ferro, Scipione, 1  
*Démonstration d'un théorème du calcul intégral*  
 (1826), 114  
*Démonstration du théorème de Cauchy* (1884),  
 93  
*Der Cauchy–Goursat'sche Integralsatz und seine*  
*... (1903), 96*  
 derivada compleja  
   función inversa, 45  
 desarrollos de Taylor, 142  
 Descartes, René, 3, 29  
 desigualdades de Cauchy, 106, 143  
*Disquisitiones arithmeticae* (1798), 5



ecuación  
   cuártica, 1, 2, 29  
   cúbica, 1, 7, 24, 27–29  
   de Laplace, 45  
   de Bernoulli, 50  
 ecuaciones  
   de Euler, 50

de Cauchy–Riemann, 41, 42, 44, 47–50,  
 111, 147  
   amplitwist, 44  
*Geometriae Pars Universalis* (1668), 149  
 escuela de Kerala, 147  
 esfera de Riemann, 195  
*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des*  
*fluides* (1752), 47  
*Essai sur une manière de représenter les quantités*  
*imaginaires ... (1806), 4, 110*  
 Euler, Leonhard, 3, 10, 12, 13, 48, 110, 154  
*Exercices d'analyse et de physique mathématique,*  
 117  
*Exercices d'analyse et de physique mathématique.*  
*Tome 4* (1847), 13



factorial descendente, 144  
 Ferrari, Luigi, 1, 2  
 fluido  
   estacionario, 50  
   incompresible, 50  
   irrotacional, 50  
   potencial de velocidades, 50  
   viscosidad, 50  
   vorticidad, 50  
 fórmula  
   de adición, 52, 53  
   de Bernoulli, 10  
   de Cardano, 7, 8  
   de Cauchy–Green, 111, 112  
     homológica, 122, 123  
   de De Moivre, 9, 11, 24, 54  
   de Euler, 8, 13, 22, 24, 51–53  
   de Viète, 29  
   del binomio de Newton, 20  
   integral de Cauchy, 97, 100, 106, 111, 146  
     derivadas, 102, 138, 147  
 fórmulas  
   de adición, 51  
 funciones hiperbólicas, 54  
   ceros, 55  
   crecimiento, 55

derivadas, 55  
 funciones inversas, 61  
     derivadas, 62  
 periodicidad, 55  
 relación con funciones trinométricas, 55  
 funciones trigonométricas, 54  
     ceros, 54  
     derivadas, 55  
     funciones inversas, 61  
         derivadas, 62  
     fórmulas de adición, 54  
     fórmulas de reducción, 54  
     paridad, 54  
     periodicidad, 54  
 función  
     analítica, 142, 147  
     armónica, 45, 51  
         conjugada, 46  
     continua, 136  
     continuidad, 39  
         propiedades, 39  
     derivada, 39  
     holomorfa, 39, 147  
         amplitwist, 43  
         ceros, 167  
         derivada de la función inversa, 45  
         polos, 167  
         propiedades, 40  
         regla de la cadena, 40  
         regla de Leibniz, 40  
     holomorfia, 39  
     límites, 38  
         propiedades, 38  
     meromorfa, 165  
 función exponencial, 51–53  
     base  $a$ , 60  
         derivada, 60  
     ceros, 53  
     ecuación diferencial, 51–53  
     expresión como límite, 51–53  
     fórmulas de adición, 51–53  
     módulo, 53  
     periodicidad, 53  
     potencias, 53

función logaritmo, 56, 60  
     derivada, 57  
     propiedades, 56



Gauss, Carl, 4, 5, 90, 110, 114  
 Girard, Albert, 110  
 Goursat, Édouard, 83, 92, 94, 96, 111  
 Green, George, 113, 116  
 Gregory, James, 149–151, 154  
*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen ...* (1851), 49  
 Guddermann, Christoph, 140



Hadamard, Jacques, 145  
 Halley, Edmund, 152  
 Hamilton, William, 16  
 Hankel, Hermann, 117  
 Hermite, Charles, 108  
 homología, 96, 118, 121  
     de ciclos, 119  
     primer grupo de homología, 121  
 homotopía, 86, 121, 190  
     abelianización del grupo fundamental,  
         121  
     de arcos, 86  
     grupo fundamental, 121  
 Hurwitz, Adolf, 109



identidades trigonométricas, 25, 26, 29  
 índice, 97–99  
     ciclos, 119  
 integral  
     convergencia uniforme, 136, 137  
     de Fresnel, 211  
     de Riemann, 75  
     evaluación por el teorema de los residuos

de una función racional de funciones trigonométricas, 202–205  
 integrales impropias con límites infinitos, 205, 206, 208, 209  
 transformada de Fourier en valor principal de Cauchy, 224  
 transformada de Mellin, 231  
 valor principal de Cauchy, 222–225  
 independencia del camino, 80  
 longitud de arco, 77  
   acotaciones, 78  
   aditividad en cadenas, 78  
   arco inverso, 78  
   linealidad en el integrando, 78  
   propiedades, 78  
 sobre arcos, 75  
   aditividad en cadenas, 76  
   arco inverso, 76  
   linealidad en el integrando, 76  
   propiedades, 76  
   reparametrización, 76  
 sumas de Riemann, 75  
 valor principal de Cauchy, 220, 221, 226  
*Introductio in analysin infinitorum* (1740), 11

## K

Klein, Felix, 154

## L

*L'Algebra* (1572), 3  
 Lagrange, Joseph-Louis, 110, 152, 154  
 Laplace, Pierre-Simon, 110, 154  
 Leibniz, Gottfried, 3, 110, 154, 155  
 Lema  
   de Abel–Weierstrass, 142, 143  
   de Jordan, 215, 216, 222  
   de las endentaduras, 225  
   para las endentaduras, 221  
*Linear Perspective* (1715), 152  
*L'invention nouvelle en l'Algebre* (1629), 110  
 Liouville, Joseph, 107, 108, 163  
*Logarithmo-technica* (1668), 149

*Logometria* (1714), 9  
 Lord Kelvin, 113, 117  
 loxodromo esférico, 149

## M

Maclaurin, Collin, 154  
 Madhava de Sangamagrama, 147  
 matriz jacobiana, 42  
 Maxwell, James, 116  
 Mellin, Hjalmar, 229  
*Memoire sur l'Equilibre et le Mouvement des Corps Elastiques* (1828), 115  
*Mémoire sur la propagation de la chaleur dans l'intérieur des corps solides* (1827), 114  
*Mémoire sur la théorie des imaginaires, sur l'équilibre des températures et sur l'équilibre d'élasticité* (1863), 164  
*Mémoire sur les intégrales définies* (1825), 91  
*Mémoire sur mécanique céleste et sur un nouveau calcul des limites* (1832), 157  
*Mémoire sur mécanique céleste et sur un nouveau calcul...* (1832), 104, 157  
 Mercator, Gerhard, 149  
 Mercator, Nikolaus, 149  
*Methodus incrementorum directa e inversa* (1715), 152  
*Miscellanea analytica* (1730), 10  
 Monge, Gaspard, 154  
 Moore, Eliakim, 94, 96  
 Morera, Giacinto, 103  
 multivaluación, 22, 23, 56, 58  
*Mémoire sur les intégrales définies, où l'on fixe le nombre et la nature...* (1822), 200

## N

Newton, Isaac, 8, 9, 149–152, 155  
*Note sur l'intégration d'une classe particulière d'équations différentielles* (1818), 49  
*Note sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances entières positives et négatives des variables* (1843), 163

*Note sur le développement des fonctions en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières des variables* (1843), 164

*Note sur les séries convergentes dont les divers termes ...* (1853), 140

*Note über eine Eigenschaft der Reihen, ...* (1847), 139

números complejos

argumento, 22

complejo conjugado, 21

cuerpo, 16, 17

desigualdad triangular, 22

ecuaciones cuadráticas, 19

inverso o recíproco, 18

módulo, 21

orden, 18

parte imaginaria, 21

parte real, 21

producto, 8, 15–17

raíz cuadrada, 19

suma, 8, 15–17



*Om directionens analytiske betegning* (1797), 3

Ostrogradski, Mikhail, 114, 115

Ostrowski, Alexander, 110



parte principal, 165, 190

Penrose, Roger, 9

Picard, Emile, 169

plano de Wessel–Argand, 3, 4, 15, 39, 50, 195

Poisson, Siméon, 115

polo

caracterización, 166

de orden  $k$ , 165

doble, 191, 192

en el infinito, 196

múltiple, 165, 193

simple, 165, 191, 204, 218, 222, 226, 227

Pompeiu, Dimitri, 112

potencia  $a$ -ésima, 60

potencias complejas, 58

aditividad exponente para base común, 59

derivadas, 60

Pringsheim, Alfred, 92, 94, 96

*Problème. Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée...* (1762), 48

proyección de Mercator, 149



raíces  $n$ -ésimas de la unidad, 24

*Réflexions sur les suites et sur les racines imaginaires* (1768), 132

región, 38

convexa, 87

estrellada, 87

regular, 120

simplemente conexa, 86

homología, 120

regla del paralelogramo, 15

residuo, 107, 165, 189, 218, 222, 227, 230

cálculo, 191

en el infinito, 195, 197

polo

doble, 191

múltiple, 192, 194

simple, 191

*Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal* (1823), 156

Riemann, Bernhard, 6, 49, 117, 147

Roth, Peter, 110



Sarrus, Frederic, 115

seno del topólogo, 38

serie de Taylor, 11, 13, 14, 51–53

series, 129

criterio de convergencia

Abel, 132

Bertrand, 130

comparación, 130

d'Alambert, 130  
 de la raíz de Cauchy, 130  
 Dirichlet, 132  
 Gauss, 130  
 Mertens, 130  
 Raabe, 130  
 criterios de convergencia, 130  
 de funciones, 133  
 de Laurent, 159, 162, 163  
   coronas de convergencia, 159  
   parte principal, 165, 190  
   unicidad, 160  
 de Maclaurin, 154  
 de potencias, 142  
   criterio de Cauchy–Hadamard, 145  
   criterios y radios de convergencia, 145  
   derivadas, 144  
   disco de convergencia, 142  
   radio de convergencia, 144  
 de Taylor, 142, 147, 152  
 Siedel, Philip von, 139  
 símbolo de Pochhammer, 144, 147  
 singularidad, 164  
   aislada, 164, 189  
   clasificación, 165  
   esencial, 165  
   evitable, 165  
   polo, 165  
   residuo, 165  
 esencial, 167  
   discriminación, 166  
 evitable  
   caracterización, 166  
 Smale, Stephen, 110  
 Sokhotskii, Yulian, 168  
 Stokes, Gabriel, 117  
 sucesiones, 129  
   convergencia absoluta, 130  
   criterio convergencia de Cauchy, 130  
   de funciones, 133  
   límite, 129  
*Sur la définition générale des fonctions analytiques d'après Cauchy* (1900), 95

*Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul*  
 ... (1831), 104  
*Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel*  
 (1879), 169  
*Sur les fonctions entières* (1879), 169  
*Sur les intégrales qui s'étendent tous les points d'une courbe fermée* (1846), 116  
*Sur une propriété des fonctions entières* (1879), 169  
*Sur une classe de fonctions d'une variable complexe et sur certaines équations intégrales*  
 (1912), 112



Tartaglia, Niccoló, 1  
 Taylor, Brook, 150–152  
 Teorema  
   de Casorati–Weierstrass–Sokhotskii, 168  
 de Cauchy, 81, 106, 111, 113, 116, 138, 190  
   amplitwist, 89  
   cálculo variacional, 91  
   homológico, 122  
   homotópico, 87  
   papel de Gauss, 90  
   versión simple, 82  
   versión sobre un rectángulo, 83  
   índice, 98, 99  
 de Cauchy generalizado  
   versión sobre un rectángulo, 85  
 de Cauchy–Goursat, 83  
 de Gauss, 113  
 de Green, 82, 96, 111, 113, 116, 117  
   homológico, 122  
   versión simple, 82  
 de la divergencia, 113  
 de Laurent, 160, 161, 163, 189  
 de Liouville, 106, 107  
 de los residuos, 189, 200, 202, 220, 227  
   en el infinito, 196, 197  
   homología, 190  
 de Morera, 103, 138

de Stokes, 113  
 de Taylor, 146  
 de Cauchy, 225  
 de los residuos, 225  
 de Weierstrass de convergencia holo-  
 morfa, 137, 143, 157  
 Fundamental del  
     Cálculo, 79, 190  
     Álgebra, 106, 108, 109  
 grande de Picard, 168  
 pequeño de Picard, 168  
*Teoria Attractionis Corporum Sphaeroidicorum*  
 (1813), 114  
*Teorica delle funzioni di variabili complesse*  
 (1868), 168  
*Théorie des fonctions elliptiques* (1875), 93  
*Theorie der Modular-Functiōnen und der Modu-  
 lar Integralen* (1838), 140  
*Théorie des fonctions analytiques, contenant les  
 principes du calcul différentiel, ...* (1797),  
 155  
*Théorie des fonctions elliptiques* (1875), 40  
*Theory of Conjugate Functions or Algebraic  
 Couples, ...* (1833), 16  
 Thompson, William, 113, 117  
 topología, 37  
*Traité de la résolution des équations numériques  
 de tous les degrés* (1798), 110  
 transformada de  
     Cauchy, 101  
         derivadas, 101  
     Fourier, 211–219, 226  
     Mellin, 229

trisección de ángulos, 27  
 Truel, Henri-Dominique, 5



*Ueber den Cauchy'schen Integralsatz* (1895), 94  
*Ueber den Goursat'schen Beweis des Cauchy'schen  
 Integralsatzes* (1901), 95  
*Un teorema fondamentale nella teorica delle dis-  
 continuità delle funzioni* (1868), 168



van Schooten, Frans, 27  
 Viète, François, 11, 27, 28



Weierstrass, Karl, 6, 109, 140, 141, 147, 157,  
 165, 168  
 Wessel, Caspar, 3



*Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flus-  
 sigkeiten* (1861), 117  
*Zur Functionenlehre* (1880), 141  
*Zur Theorie der eindeutigen analytischen Fun-  
 ctionen* (1876), 168  
*Zur Theorie der Potenzreihen* (1841), 141, 157