FIZIKA

Tvorba mase – 2. dio

Petar Žugec[1], *Zoran Rukelj*[2], *Ivica Friščić*[3]

Ovaj prilog izravno se nastavlja na prvi dio iz prethodnog broja Matematičko-fizičkog lista [1] te upućujemo čitatelja da ga ima pri ruci kao osnovu za praćenje ovog dijela. Tijekom rasprave nesmetano ćemo se pozivati na niz jednadžbi iz prvoga dijela, čije oznake radi prepoznatljivosti počinju slovom A; npr. jednadžba (A.1). Nasuprot tome, oznake svih jednadžbi iz ovoga dijela počinju slovom B, poput jednadžbe (B.1).

Nerelativistički pristup

Prisjetimo se problema: čestica mase m nalijeće na *mirujuću* česticu iste mase i pokreće endotermnu reakciju u kojoj se stvaraju nove čestice ukupne mase M, koja je veća od ukupne mase početnih dviju čestica $(M > 2m)$. Koliki je energijski prag reakcije, tj. minimalna kinetička energija čestice projektila potrebna za pokretanje reakcije?

Pogledajmo kakav bismo rezultat dobili nerelativističkim računom. Provest ćemo ga na dva načina: ostajući u laboratorijskome sustavu te prelaskom u sustav centra mase. No to ne radimo tek tako, radi potpunosti, već zato jer će se dogoditi nešto vrlo zanimljivo. Pri tome ćemo u jednom slučaju koristiti *izravni*, a u drugom *inverzni* pristup, kakve smo koristili u prvome dijelu članka.

A. Laboratorijski sustav

Krenimo prvo s *izravnim* pristupom unutar laboratorijskog sustava. Budući da su nerelativistički izrazi za energiju i količinu gibanja matematički jednostavniji od relativističkih, odmah ćemo si priuštiti pretpostavku različitih masa m_p i m_m projektila i mete. Kao u (A.7), ukupnu energiju sustava sada možemo zapisati kao

$$E_\mathrm{uk}^{(\mathrm{lab})} = (m_\mathrm{p} + m_\mathrm{m})c^2 + E_\mathrm{prag}. \tag{B.1}$$

U ovom izrazu nema ničeg aproksimativnog; on ne ovisi o reletivističkom ili nerelativističkom pristupu. Međutim, ono što se razlikuje između pristupa jest veza kinetičke energije i

[1] Autor je s Fizičkog odsjeka PMF-a Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: pzugec@phy.hr

[2] Autor je docent s FO PMF-a; e-pošta: zrukelj@phy.hr

[3] Autor je docent s FO PMF-a; e-pošta: ifriscic@phy.hr

količine gibanja. U relativističkom pristupu imali smo ispravnu relaciju (A.8). Sada imamo poznatiju, ali samo aproksimativnu nerelativističku vezu $E_{\text{kin}} = p^2/2m$ kinetičke energije i količine gibanja (koja se svodi na još poznatiji oblik $E_{\text{kin}} = mv^2/2$ nakon uvrštavanja nerelativističkog izraza $p = mv$). Kako u laboratorijskom sustavu meta miruje, projektil nosi svu kinetičku energiju i količinu gibanja sustava, stoga iz $E_{\text{prag}} = \left[p_{\text{p}}^{(\text{lab})}\right]^2/2m_{\text{p}}$ *prije reakcije* slijedi

$$p_{\text{uk}}^{(\text{lab})} = p_{\text{p}}^{(\text{lab})} = \sqrt{2m_{\text{p}}E_{\text{prag}}}. \tag{B.2}$$

Kao i ranije, kinetička energija dana je razlikom ukupne energije i energije mirovanja, stoga *nakon reakcije* za kinetičku energiju $E_{\text{uk}}^{(\text{lab})} - Mc^2$ novonastale mase M imamo nerelativističku vezu $E_{\text{uk}}^{(\text{lab})} - Mc^2 = \left[p_{\text{uk}}^{(\text{lab})}\right]^2/2M$ jer na samom pragu reakcije M nosi svu enegiju i količinu gibanja sustava kao jedno tijelo. Odavde slijedi

$$p_{\text{uk}}^{(\text{lab})} = \sqrt{2M\left(E_{\text{uk}}^{(\text{lab})} - Mc^2\right)}. \tag{B.3}$$

Jednakost izraza (B.1) i (B.2) dobivamo, naravno, iz očuvanja ukupne količine gibanja. Uvrštavanjem (B.1) u (B.2) temeljem očuvanja ukupne energije možemo prepoznati pojavu Q-vrijednosti iz (A.33) te pisati

$$\sqrt{2m_{\text{p}}E_{\text{prag}}} = \sqrt{2M(E_{\text{prag}} - Q)}. \tag{B.4}$$

Odavde je vrlo lako odrediti nerelativističko rješenje za prag reakcije[4]

$$\boxed{E_{\text{prag}} = \frac{M}{M - m_{\text{p}}}Q = \left(\frac{m_{\text{p}}}{m_{\text{m}} + Q/c^2} + 1\right)Q.} \tag{B.5}$$

U posljednjem smo izrazu svaku pojavu mase M zamijenili Q-vrijednošću reakcije: $M = m_{\text{p}} + m_{\text{m}} + Q/c^2$.

B. Sustav centra mase

Ponovimo postupak prijelazom u sustav centra mase te korištenjem *inverznog* pristupa (samo zato jer je poučniji od izravnoga). Za razliku od ranijih Lorentzovih transformacija (A.14)–(A.17), osnova nerelativističkog postupka jesu Galilejeve transformacije brzine između sustava ($i = \text{p}, \text{m}$)

$$v_i^{(\text{cm})} = v_i^{(\text{lab})} - v_{\text{cm}}. \tag{B.6}$$

Ovaj put razmatramo projektil i metu različitih masa pa ne možemo unaprijed koristiti simetrijski argument iz (A.13), odnosno (A.30). Umjesto toga, Galilejevim transformacijama moramo *zasebno* izračunati energije projektila i mete u sustavu centra mase te na njihovu združenu energiju primijeniti uvjet $E_{\text{p}}^{(\text{cm})} + E_{\text{m}}^{(\text{cm})} = Mc^2$ iz (A.12). Dok smo u relativističkom slučaju za brzinu centra mase v_{cm} koristili izraz (A.22), nerelativistička definicija puno je poznatija te je odmah raspisujemo za dvije čestice u laboratorijskom

[4] U članku [2] obrađena je kinematika neelastičnih dvočestičnih reakcija upravo nerelativističkim pristupom bez prijelaza u sustav centra mase. Kinetičke energije dviju čestica koje izlaze iz reakcije određene su tamošnjim izrazima (R1) i (R2). U tim izrazima implicitno se "skriva" rješenje (B.5) za prag reakcije te pozivamo čitatelja da ga promišljenim argumentima pokuša rekonstruirati iz tih jednadžbi. Pri tome je potrebno uskladiti ondje korištene veličine s onima iz ovoga članka. Također treba uzeti u obzir da je u [2] korištena uobičajena definicija Q-vrijednosti koja je negativna za endotermne reakcije, za razliku od pozitivne vrijednosti iz (A.33) kakvu smo odlučili koristiti ovdje: $Q_{[2]} = -Q_{(\text{A.33})}$.

sustavu

$$v_{\mathrm{cm}} = \frac{m_{\mathrm{p}} v_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{lab})} + m_{\mathrm{m}} v_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{lab})}}{m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{m}}}. \tag{B.7}$$

Iz nerelativističkog izraza za kinetičku energiju ($E_{\mathrm{kin}} = mv^2/2$) i činjenice da u laboratorijskom sustavu meta miruje, a projektil promatramo upravo na pragu reakcije, slijedi:

$$v_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{lab})} = \sqrt{2E_{\mathrm{prag}}/m_{\mathrm{p}}} \quad \text{i} \quad v_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{lab})} = 0. \tag{B.8}$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u (B.7) za brzinu centra mase nalazimo

$$v_{\mathrm{cm}} = \frac{\sqrt{2m_{\mathrm{p}}E_{\mathrm{prag}}}}{m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{m}}}. \tag{B.9}$$

Povratkom (B.8) i (B.9) u (B.6) dolazimo do:

$$v_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{cm})} = \frac{m_{\mathrm{m}}}{m_{\mathrm{p}}} v_{\mathrm{cm}} \quad \text{i} \quad v_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{cm})} = -v_{\mathrm{cm}} \tag{B.10}$$

za brzine projektila i mete u sustavu centra mase. Ukupna energija svake čestice ($i = \mathrm{p}, \mathrm{m}$) ponovno je zbroj energije mirovanja i kinetičke energije

$$E_i^{(\mathrm{cm})} = m_i c^2 + \frac{m_i \left[v_i^{(\mathrm{cm})}\right]^2}{2}, \tag{B.11}$$

tako da je njihova ukupna energija E_{cm} u sustavu centra mase $E_{\mathrm{cm}} = E_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{cm})} + E_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{cm})}$, što raspisom daje

$$E_{\mathrm{cm}} = (m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{m}})c^2 + \frac{m_{\mathrm{m}}}{2}\left(\frac{m_{\mathrm{m}}}{m_{\mathrm{p}}} + 1\right) v_{\mathrm{cm}}^2. \tag{B.12}$$

Uvrštavanjem (B.9) u (B.12) i pretvorbom sve dostupne energije (na pragu reakcije!) u novonastalu masu: $E_{\mathrm{cm}} = Mc^2$, dolazimo do

$$(m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{m}})c^2 + \frac{m_{\mathrm{m}}}{m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{m}}} E_{\mathrm{prag}} = Mc^2, \tag{B.13}$$

što rješavanjem po E_{prag} konačno vodi na

$$\boxed{E_{\mathrm{prag}} = \left(\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{m}}} + 1\right) Q.} \tag{B.14}$$

Rješenje koje smo dobili ovaj put[5] različito je od ranijeg, također nerelativističkog (B.5)! Ovo proturječje svakako zaslužuje poseban osvrt. U međuvremenu primijetimo: izme-

[5] Čitatelj sam može ponoviti postupak inverznim pristupom u laboratorijskom sustavu ili izravnim pristupom u sustavu centra mase. Pri tome do relacija iz (B.10) dolazimo na temelju definicije sustava centra mase iz (A.4), umjesto izravnim računom na temelju unaprijed poznate brzine v_{cm} iz (B.9). U tom slučaju nalazimo unaprijed nepoznatu brzinu v_{cm} u ovisnosti o poznatoj novonastaloj masi M, tj. o Q-vrijednosti reakcije

$$v_{\mathrm{cm}} = \sqrt{\frac{2m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{m}}(m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{m}})} Q},$$

a energijski prag reakcije određujemo iz kinetičke energije projektila u laboratorijskome sustavu. Po završetku obaju postupaka ponovno dobivamo rezultate (B.5) i (B.14), što pokazuje da oni ne ovise o razlici između izravnog ili inverznog pristupa, već o prijelazu između sustava. Razlog tome je nekompatibilnost Galilejevih transformacija iz (B.6) s jednakošću mase i energije, tj. s mogućnošću njihove pretvorbe, jer je $E = mc^2$ potpuno relativistički rezultat, nepoznat nerelativističkoj fizici.

đu (B.5) i (B.14) nijedno rješenje nije ispravnije od drugog[6] jer su oba tek aproksimacije ispravnog relativističkog (A.34). No uzmemo li (B.14) kao reprezentativno, tada vidimo da se ono pojavljuje kao prvi član unutar (A.34), što potvrđuje da drugi član $(Q^2/2m_\mathrm{m}c^2)$ možemo smatrati relativističkom popravkom nerelativističkog rezultata.

Proturječja nerelativističkog pristupa

Nije nimalo iznenađujuće da su nerelativistički rezultati (B.5) i (B.14) različiti od relativističkog (A.34). Međutim, alarmantno je to što su međusobno nedosljedni; u proturječju su jedan s drugim! Stoga je neodgodivo razumjeti radi li se o slomu nerelativističke fizike – jesmo li upravo pokazali da je njezina unutarnja matematička struktura proturječna – ili je proturječje koje se pojavilo opravdano i razumljivo?

Već znamo da su oba nerelativistička reultata samo aproksimacije relativističkog. U uvjetima u kojima su te aproksimacije opravdane – kad je promjena mase malena u usporedbi s početnim masama – oba nerelativistička rezultata daju gotovo iste *numeričke* vrijednosti. Stoga za niske Q-vrijednosti ($Q \ll m_\mathrm{p}c^2$ i $Q \ll m_\mathrm{m}c^2$) doista mogu biti i jesu od praktične koristi. Međutim, zahtijevanjem jednakosti između (B.5) i (B.14) vidimo da se dva rezultata *načelno* slažu samo za $Q = 0$, tj. kad uopće nema promjene ukupne mase! I upravo ovdje leži rješenje paradoksa. Naime, jednakost mase i energije $(E = mc^2)$ i mogućnost njihove uzajamne pretvorbe su *intrinzično relativistički rezultat*: jedna od prvih posljedica Einsteinove teorije relativnosti, odnosno relativističkih Lorentzovih transformacija. Nasuprot tome, nerelativističke Galilejeve transformacije ne predviđaju jednakost mase i energije – štoviše, *nekompatibilne su* s tim konceptom – stoga nerelativistička fizika *ne poznaje* mogućnost njihove pretvorbe. Sada neslaganje rezultata (B.5) i (B.14) prepoznajemo kao *prirodno proturječje* koje se javlja kao posljedica nasilnog miješanja dvaju nepomirljivih načela: nerelativističkih transformacija s relativističkom pretvorbom mase i energije. Poučeni ovim primjerom, razumijemo da *uvijek* možemo očekivati ispoljavanje svakojakih "prirodnih" proturječja kad god krenemo od međusobno proturječnih načela. Fizika je prepuna ovakvih primjera te je potrebno prepoznati kad su takva proturječja prirodna, očekivana i nužna posljedica artificijelnog (ali često pragmatičnog) spajanja nespojivog, a kad su istinska, intrinzična logička pukotina koja bi mogla urušiti čitavu teoriju. Tipični primjeri ovakvih "kontrolirano proturječnih" pristupa razni su poluklasični (polukvantni ili, poput našega, polurelativistički) računi.

Je li uopće potrebno sastaviti zamršen primjer poput našega da bismo prikazali ovakva proturječja? Moramo li ih tražiti u nekakvim opskurnim rezultatima ezoteričnih problema? Nipošto, i to ćemo sada pokazati. No u našem primjeru valja primijetiti da ako proturječje postoji, ono je tvrdokorno usađeno u sve rezultate i uporno se provlači kroz sve postupke. Pri tome ne mora biti nimalo očito, posebice ako je prikriveno tehničkom zamršenošću računa. Naposlijetku, ne bismo ga uopće prepoznali da svoj problem nismo rješavali različitim pristupima.

⋆ ⋆ ⋆

Da bismo prikazali nespojivost nerelativističkog pristupa i opće promjene mase, trebamo ustanoviti što ukupna masa sustava jest *prema shvaćanju nerelativističke fizike*. U tu

[6] Biti upoznat s mogućnošću ovakvih "dvojnih" rješenja od posebne je važnosti za predavače fizike. Zamislimo samo onog koji je upoznat samo s jednim od rješenja. A zatim zamislimo kreativnog učenika koji na ispitu ponudi drugo rješenje pa zatim bude penaliziran. A oba su rješenja u istoj mjeri točna, odnosno netočna.

svrhu koristimo definiciju sustava centra mase iz (A.4): to je onaj sustav u kojem vrijedi $\sum_i \vec{p}_i^{(\mathrm{cm})} = \vec{0}$. Uvrstimo u nju nerelativističke izraze za količinu gibanja ($\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ za svaki pojedino, i-to tijelo u sustavu) u kombinaciji s Galilejevim transformacijama brzine $\vec{v}_i^{(\mathrm{cm})} = \vec{v}_i^{(\mathrm{lab})} - \vec{v}_{\mathrm{cm}}$, poput onih koje smo u (B.6) zbog gibanja po pravcu koristili u skalarnome obliku

$$\sum_i m_i\vec{v}_i^{(\mathrm{cm})} = \sum_i m_i\big(\vec{v}_i^{(\mathrm{lab})} - \vec{v}_{\mathrm{cm}}\big) = \sum_i m_i\vec{v}_i^{(\mathrm{lab})} - \vec{v}_{\mathrm{cm}}\sum_i m_i = \vec{0}. \tag{B.15}$$

Odavde za brzinu centra mase (u laboratorijskom sustavu) slijedi

$$\vec{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{\sum_i m_i\vec{v}_i^{(\mathrm{lab})}}{\sum_i m_i}. \tag{B.16}$$

U slučaju dvaju tijela koja se gibaju po pravcu ovaj općenit izraz svodi se na ranije korišteni (B.7). S druge strane, do brzine centra mase mogli bismo doći i jednostavnim promatranjem čitavog sustava kao cjeline, pri čemu bismo mu – u analogiji s ranijim oznakama iz (A.21) – pripisali ukupnu količinu gibanja $\vec{p}_{\mathrm{lab}} = \sum_i m_i\vec{v}_i^{(\mathrm{lab})}$ i masu cjelovitog sustava m_{s} kao: $\vec{p}_{\mathrm{lab}} = m_{\mathrm{s}}\vec{v}_{\mathrm{cm}}$. Odavde pak imamo

$$\vec{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{\vec{p}_{\mathrm{lab}}}{m_{\mathrm{s}}} = \frac{\sum_i m_i\vec{v}_i^{(\mathrm{lab})}}{m_{\mathrm{s}}}. \tag{B.17}$$

Da bi vrijedila jednakost između (B.16) i (B.17), u nerelativističkom slučaju očito mora biti

$$m_{\mathrm{s}} = \sum_i m_i, \tag{B.18}$$

što je u osnovi *dokaz* da je u nerelativističkoj fizici masa cjelovitoga sustava dana *zbrojem masa pojedinih sastavnica.* Ovaj rezultat u istaknutoj je suprotnosti s ranijom relativističkom spoznajom iz (A.24) jer podrazumijeva da se u slučaju promjene ukupne mase *unutar* sustava mijenja i masa sustava *kao cjeline*.

⋆ ⋆ ⋆

Sada vrlo jednostavno možemo prikazati načelnu nepomirljivost nerelativističkog pristupa i neočuvanja mase[7]. Za to samo trebamo tretirati (kakav god, složen ili jednostavan) sustav kao cjelinu: baš kao u (A.21), ali ovaj put uz primjenu nerelativističkih izraza za energiju i količinu gibanja. Neka su m_1 i v_1 masa i brzina sustava kao cjeline (tj. brzina njegova centra mase) *prije* neke unutarnje reakcije u kojoj dolazi do promjene ukupne mase, a m_2 i v_2 njegova masa i brzina *poslije* reakcije. Zakon očuvanja ukupne količine gibanja posredstvom nerelativističkog izraza $p = mv$ zahtijeva:

$$m_1v_1 = m_2v_2 \quad\Rightarrow\quad v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1. \tag{B.19}$$

[7] Ovdje trebamo biti posebno oprezni da ne miješamo pitanje mase složenog sustava (što ona uopće jest) s općim očuvanjem ili neočuvanjem mase. Prema (A.21)

$$m_{\mathrm{s}} = \frac{E_{\mathrm{lab}}}{\gamma_{\mathrm{cm}}c^2} \quad \text{ili} \quad m_{\mathrm{s}} = \frac{p_{\mathrm{lab}}}{\gamma_{\mathrm{cm}}v_{\mathrm{cm}}},$$

masa izoliranoga sustava kao cjeline jest očuvana i u relativističkom pristupu jer su i ukupna energija E_{lab} i ukupna količina gibanja p_{lab} podložne zakonu očuvanja, dok se prema prvom Newtonovom zakonu ne mijenja niti brzina v_{cm} izoliranoga sustava (a preko nje niti γ_{cm}). No to je zato jer prema (A.23) i (A.24) u definiciju mase složenoga sustava ulazi, pored masa pojedinih sastavnica, i sva unutarnja energija sustava. Opće neočuvanje mase odnosi se na "elementarne" mase pojedinih sastavnica sustava, tj. na dijelove ukupne unutarnje energije preostale nakon odvajanja dijelova za koje smo *sigurni* da nisu masenog porijekla.

S druge strane, zakon očuvanja *ukupne* energije posredstvom nerelativističkog izraza za kinetičku energiju $E_{\rm kin} = mv^2/2$ inzistira:

$$m_1c^2 + \frac{m_1v_1^2}{2} = m_2c^2 + \frac{m_2v_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)c^2 + \frac{m_1}{m_2}v_1^2}. \tag{B.20}$$

Pretpostavimo li reakciju koja mijenja ukupnu masu svih sastavnica unutar sustava, u nerelativističkom računu se prema (B.18) mora promijeniti i masa sustava kao cjeline: $m_1 \neq m_2$. A brzine sustava poslije reakcije iz (B.19) i (B.20) za $m_1 \neq m_2$ se ne slažu! Drugim riječima, uz promjenu masa nerelativističkim zaključivanjem *nemoguće je zadovoljiti oba zakona očuvanja istovremeno*! Drugo proturječje može se vidjeti već iz svakog rezultata – (B.19) ili (B.20) – za sebe. S promjenom ukupne mase oba predviđaju promjenu brzine cjelovitoga sustava tijekom reakcije. A to je u *izravnoj suprotnosti s prvim Newtonovim zakonom*: bez djelovanja *vanjskih* sila sustav ne može promijeniti svoje stanje gibanja! Oba prethodna rezultata predviđaju spontanu promjenu brzine, tj. spontano ubrzanje sustava vez vanjskih uzroka. Djelovanjem samo unutranjih sila (koje pokreću reakciju promjene masa) sustav mora zadržati istu brzinu poslije reakcije[8]

$$v_2 = v_1, \tag{B.21}$$

što je treći rezultat za v_2, a različit od prethodnih dvaju! Sasvim je jasno da ne postoji način za istovremenim očuvanjem svih načela – svih zakona očuvanja i osnovnog načela gibanja. Odlučimo li zadržati bilo koje od ovih načela kao mjerodavano, nužno smo narušili sva ostala.

⋆ ⋆ ⋆

Do sada je postalo sasvim jasno da među nerelativističkim (zapravo polurelativističkim) rezultatima (B.5) i (B.14) ne postoji pomirba. No mogli bismo iskušati još par trikova samo zato da bismo provjerili možemo li iz relativističkog pristupa uvesti u nerelativistički račun još koje načelo kojim bismo osigurali dosljednost rezultata koji bi po završetku preinačenog postupka preostali na mjestu (B.5) i (B.14). Pristup preko laboratotorijskog sustava – koji je doveo do rezultata (B.5) – toliko je minimalistički izravan da bismo u njemu teško mogli išta (pa makar artificijelno, na silu) promijeniti. No u pristupu preko sustava centra mase postoji jedna istaknuta karika na koju bismo mogli umjetno utjecati kako bismo se “igrali” konačnim rezultatom (B.14). Ta karika je poznati nerelativistički izraz (B.7) za brzinu centra mase.

Umjesto korištenja izraza (B.7) – čije smo porijeklo prikazali u (B.15) – brzinu centra mase mogli bismo pokušati redefinirati u skladu sa shvaćenjem iz (B.17). Pri tome ćemo iz relativističkog pristupa “posuditi” načelo iz (A.24) prema kojem masa sustava kao cjeline odgovara upravo maksimalnoj traženoj masi, odakle

$$v_{\rm cm} = \frac{m_{\rm p}v_{\rm p}^{(\rm lab)} + m_{\rm m}v_{\rm m}^{(\rm lab)}}{M}. \tag{B.22}$$

Ovime se, naravno, ne bismo riješili proturječja. Osiguranjem jednake brzine i mase cjelovitog sustava prije i poslije reakcije naprosto bismo proturječja između (B.19), (B.20) i (B.21) zamijenili proturječjem s *Galilejevim transformacijama* koje su polučile izraz (B.16), odnosno (B.7), a koje su “nosivi stup” sve nerelativističke fizike. Naprosto bismo htjeli provjeriti može li pokušaj iz (B.22) dovesti do slaganja praga reakcije s onime iz (B.5). Zainteresiranome čitatelju ostavljamo da sam ponovi postupak od (B.8)

[8] Kako se to ostvaruje u ispravnome relativističkom računu, tj. kako se on “obračunava” s prvim Newtonovim zakonom? Tako što se u izrazu (A.22) za brzinu centra mase, čija je vektorska inačica

$$\frac{\vec{v}_{\rm cm}}{c} = \frac{\vec{p}_{\rm lab}c}{E_{\rm lab}},$$

pojavljuju samo konstante (c) i veličine koje su sve vrijeme očuvane ($\vec{p}_{\rm lab}$ i $E_{\rm lab}$)!

do (B.14), pri čemu će na mjestu $v_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{cm})}$ iz (B.10) sada dobiti: $v_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{cm})} = [(M/m_{\mathrm{p}}) - 1]v_{\mathrm{cm}}$. Zgodno je primijetiti da ovaj rezultat slijedi upravo iz Galilejevih transformacija (nema odakle drugdje), koje smo maloprije odlučili narušiti za potrebe (B.22). Kao konačan rezultat postupka preostaje:

$$E_{\mathrm{prag}} = \frac{(M - m_{\mathrm{p}} - m_{\mathrm{m}})M^2c^2}{(M - m_{\mathrm{p}})^2 + m_{\mathrm{p}}m_{\mathrm{m}}} = \frac{(m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{m}} + Q/c^2)^2}{(m_{\mathrm{m}} + Q/c^2)^2 + m_{\mathrm{p}}m_{\mathrm{m}}}\,Q, \tag{B.23}$$

čime još uvijek nismo postigli slaganje s (B.5). No onda bismo se mogli pitati: kolika bi zapravo trebala biti masa cjelovitog sustava u umjetnoj definiciji brzine centra mase

$$v_{\mathrm{cm}} = \frac{m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{lab})} + m_{\mathrm{m}}v_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{lab})}}{m_{\mathrm{s}}} \tag{B.24}$$

da bi se rezultat takvog računa za E_{prag} slagao s onime iz (B.5)? Ponovno ostavljamo čitatelju da ponovi postupak sa sada unaprijed nepoznatom masom m_{s} iz (B.24). Izravnim uvrštavanjem unaprijed željenog izraza (B.5) u (B.8) te nastavkom postupka kroz (B.24) pojavljuje se kvadratna jednadžba za m_{s}. Traženu masu nalazimo kao jedno od njezinih rješenja

$$m_{\mathrm{s}} = \left(1 + \sqrt{\frac{Q}{Mc^2}}\right)M, \tag{B.25}$$

pri čemu drugo rješenje (s negativnim predznakom pred korijenom) odbacujemo jer za velike Q-vrijednosti predviđa negativnu masu. Ovaj rezultat očito je artificijelan i specifičan za ovaj problem; teško da bismo ga mogli dignuti na razinu nekog novog načela koje bismo morali uvesti u nerelativističke račune s namjerom sustavnog postizanja boljeg slaganja s relativističkim rezultatima. Pored toga, iako bismo korištenjem (B.25) popravili slaganje s rješenjem (B.5) ovog jednog sporednog problema, narušili bismo *opću* relativističku spoznaju iz (A.24). Štoviše, na samome pragu reakcije znamo da neovisno o pristupu svakako mora biti $m_{\mathrm{s}} = M$ jer se čitav sustav nakon reakcije doista ponaša kao jedno tijelo. A uvjet (B.25) "optimalnog slaganja" s ionako relativistički neispravnim rezultatom (B.5) ne uspijeva ispuniti čak niti to očekivanje.

⋆ ⋆ ⋆

U konačnici još jednom sagledajmo i naglasimo zaključke do kojih smo došli kako ne bi bilo ikakvih zabuna i kako ne bismo ostali izgubljeni u silnim i sitnim detaljima. Pretvorba između energije i mase *intrinzično je relativistički koncept* (Einsteinove teorije relativnosti) i kakvom god varijantom relativističkog tretmana pristupili problemu, sustavno dolazimo do konzistentnih rezultata. Nerelativistička fizika tek je (niskoenergijska) aproksimacija relativističke fizike; aproksimacija u kojoj je izgubljena jednakost mase i energije. Stoga je nerelativistička fizika načelno nekompatibilna s pretvorbom mase i enegije te su unutar nje masa i energija (energija u užem smislu riječi, kao ne-masa) očuvane *zasebno*, dok su u stvarnosti – kao što je opisuje relativistička fizika – energija i masa očuvane *zajedno*. Računski je moguće natjerati jednakost mase i energije u nerelativističke račune. Time dolazimo do često korisnih rezultata koji za male pretvorbe mase i energije numerički zanemarivo odstupaju od ispravnih relativističkih. No u njima su nepovratno usađene nepomirljive proturječnosti kao nužne posljedice nasilnog spajanja načelno nespojivih načela. Povrh svega, bitno je razumjeti da nerelativistička fizika nije proturječna sama po sebi. Kao teorija "zatvorena u sebe", tj. strogo unutar svojih postulata nerelativistička fizika logički je konzistentna teorija! Proturječja se manifestiraju tek kad je svjesno ili nesvjesno pokušamo spojiti s konceptima koji su u suprotnosti s njezinim osnovnim načelima.

Literatura

[1] PETAR ŽUGEC, ZORAN RUKELJ, IVICA FRIŠČIĆ, *Tvorba mase – 1. dio*, Matematičko-fizički list 291 (2023) 152–162, https://hrcak.srce.hr/296124

[2] PETAR ŽUGEC, MATKO MILIN, *Kinematika dvočestičnih reakcija*, Matematičko-fizički list 267 (2017) 185–193, https://hrcak.srce.hr/234955