GOD I. ZAGREB, SRPANJ, KOLOVOZ, RUJAN. BROJ 4., 5. i 6.

GLASILO GEOMETARA
KRALJEVSTVA SRBA, HRVATA I SLOVENACA.

Projekcije zemaljske izmjere u Hrvatskoj i Slavoniji.

Napisao Vl. Filkuka, profesor geodetskog tečaja u Zagrebu.

(Nastavak.)

Upotrebimo sada ovu općenito izvedenu teoriju konformnog predočivanja kod naše dvostruke projekcije. Prva je zadaća projicirati elipsoid na kuglu s polumjerom R.

Jednadžba je dvoosnog elipsoida

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad \text{gdje je}$$

$$x = \frac{a \cos\lambda \cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, y = \frac{a \sin\lambda \cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, z = \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

dakle $x = f_1(\lambda, \varphi)$, $y = f_2(\lambda, \varphi)$, $z = f_3(\varphi)$; po prijašnjem jest $\lambda = u$, $\varphi = v$.

Iz ovih jednadžbi možemo prema prije navedenom izračunati

$$A = \frac{a^2 \cos^2\varphi}{1 - e^2 \sin^2\varphi}, B = 0, C = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}$$

Ako ove veličine uvrstimo u općenitu jednadžbu (2), dobivamo:

$$\frac{a^2\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}\frac{d\lambda}{d\varphi} + 0 \pm i\sqrt{\frac{a^2\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}\cdot\frac{a^2(1-e^2)^2}{(1-e^2\sin^2\varphi)^3} - 0} = 0$$

ako sada ovu jednodžbu podijelimo sa A, biti će

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} \pm i \frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi} = 0$$

Rješavanjem ove diferencijalne jednadžbe, dobijemo

$$\lambda \pm i \int \frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}\, d\varphi = C$$

$$C = \lambda \pm i \left[\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} - \int \frac{e^2 \cos\varphi \, d\varphi}{2(1 + e \sin\varphi)} - \int \frac{e^2 \cos\varphi \, d\varphi}{2(1 - e \sin\varphi)} \right]$$

$$C = \lambda \pm i \left[\log \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{2} e \log (1 + e \sin\varphi) + \frac{1}{2} e \log (1 - e \sin\varphi) \right.$$

$$C = \lambda \pm i \log \left[\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 - e \sin\varphi}{1 + e \sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}} \right]$$

Ako usporedimo ovu jednadžbu sa jednadžbom (4) vidimo, da je

$$\underline{p = \lambda, \; q = \log \left[(\lg\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 - e \sin\varphi}{1 + e \sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}} \right]} \qquad (9)$$

Kod kugle je e = 0, tako da je

$$\underline{P = L, \; Q = \log \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right)} \qquad (10)$$

Prema temeljnoj jednadžbi konformnog predočivanja mora biti (uzmimo samo positivni znak)

$$L + i \log \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right) = f\left\{\lambda + i \log \left[\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 - e \sin\varphi}{1 + e \sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}} \right]\right\}$$

Za f možemo uzeti povoljnu funkciju; kod naše je zemaljske izmjere uzeto po uzoru Gaussovom

$$f = \alpha\, u + i \log k, \text{ gdje su } \alpha \text{ i } k$$

dosada nepoznate nam konstante.

$$f \left\{ (\lambda + i \log \left[\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 - e \sin\varphi}{1 + e \sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}} \right] \right\} =$$

$$\alpha\lambda + i \log \left\{ k \operatorname{tg}^{\alpha}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 - e \sin\varphi}{1 + e \sin\varphi}\right)^{\frac{e\alpha}{2}} \right. = L + i \log \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right)$$

Iz toga slijedi:

$$\underline{L = \alpha\, \lambda} \qquad (11)$$

$$\operatorname{tg}\left(45+\frac{\Phi}{2}\right)=k\operatorname{tg}^{\alpha}\left(45+\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{\frac{e\alpha}{2}} \tag{12}$$

Obzirom na ove jednadžbe dobivamo vrijednost za linearni modul m, prema jednadžbi (7).

$$\frac{dS}{ds}=m=\frac{R\,\alpha\cos\Phi}{a\cos\varphi}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}=\frac{R\,\alpha\cos\Phi}{a\cos\varphi}W \tag{13}$$

Jednadžbe (11) i (12) određuju relaciju između sferičkih i sferoidičkih geografskih koordinata, a možemo pomoću njih transformirati jedne na druge; one nam pokazuju, kako se može matematski predočiti točka sferoida na kugli odnosno obratno.

Ove nam jednadžbe kažu:

1) da će se sferoidički kutevi u projekciji na kugli predočiti nepromijenjeni, (da je dakle modul smjera $i=\frac{\operatorname{tg}\delta'}{\operatorname{tg}\delta}=1$ — δ' — projekcija kuta δ),

2. da će se paralelni krugovi sferoida u projekciji pojaviti također kao medjusobno paralelni krugovi.

U ovim su jednadžbama nepoznate veličine α, k i polumjer kugle R.

Ove konstantne veličine moženo sada tako izabrati, da bude linearni modul u cijelom mjerenom predjelu skoro jednak jedinici. U sredini mjerenog predjela izaberemo jedanput za uvjek paralelni krug sa širinom φ_n (elipsoid) odn. Φ_n (kugla) (normalni krug), za koji mora biti $m=1$ t. j. $\log m=0$. Za drugu širinu φ, Φ, neka bude $\log m$ odredjen redom, kojega neka budu prva dva člana $\frac{d\log m}{d\Phi_n}$ i $\frac{d^2\log m}{d\Phi_n^2}$ takodjer jednaka 0, ili drugim riječima, neka se linearni modul m otklanja od jedinice samo za neku malenu veličinu trećeg stepena; ima dakle da bude:

$$\log m=0,\ \frac{d\log m}{d\Phi_n}=0,\ \frac{d^2\log m}{d\Phi_n^2}=0 \text{ to jest}$$

$$m=\frac{R\,\alpha\cos\Phi_n}{\alpha\cos\varphi_n}\cdot\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_n}=1 \tag{14}$$

$$\frac{d\log m}{d\Phi_n}=-\operatorname{tg}\Phi_n+\frac{\sin\varphi_n}{\alpha\cos\Phi_n}=0 \tag{15}$$

$$\frac{d^2\log m}{d\Phi_n^2}=\frac{1}{\alpha^2\cos^2\Phi_n}\left(-\alpha^2+\frac{W^2}{1-e^2}\cos^2\varphi_n+\alpha\sin\varphi_n\sin\Phi_n\right)=0 \tag{16}$$

*

Iz jednadžbe 15 slijedi, da je

$$\alpha \sin \Phi_n = \sin \varphi_n. \tag{17}$$

ako ovo uvrstimo u jednadžbu (16) dobivamo

$$\alpha^2 = \frac{1 + e^2 \sin^4 \varphi_n}{1 - e^2} \tag{18}$$

Polumjer kugle možemo izračunati iz jednadžbe (13) za geograf. širinu φ_n odnosno Φ_n, u kojoj je $m = 1$.

$$R^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi_n}{\alpha^2 \cos^2 \Phi_n W^2}$$

Iz jednadžbe (17) slijedi:

$\alpha^2 \cos^2 \Phi_n = \alpha^2 - \alpha^2 \sin^2 \Phi_n = \alpha^2 - \sin^2 \varphi_n$, pa ako uvrstimo vrijednost za α iz jednadžbe (18) i rezultat uvrstimo u jednadžbu za R^2, dobit ćemo za R formulu

$$R = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{W^2} = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_n} \tag{19}$$

Ako smo izabrali za normalnu sferoidičku geograf. širinu okrugli broj φ_n, možemo lahko izračunati na temelju izvedenih formula nepoznate veličine; konstantu α iz jednadžbe (18), Φ_n iz (17), polumjer kugle iz (19); konstantu k pako iz jednadžbe (12) sa Φ_n i φ_n:

$$k = \frac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\Phi_n}{2}\right)}{\operatorname{tg}^{\alpha}\left(45 + \frac{\varphi_n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1 + e \sin \varphi_n}{1 - e \sin \varphi_n}\right)^{\frac{e\alpha}{2}} \tag{20}$$

Ako bi međutim izabrali za normalnu geografsku širinu okrugli broj Φ n, trebalo bi prije izlučiti iz jednadžbe (17) i (18) φ n, zatim izračunati α, φ n, a nakon toga R i k, kao i prije. Na temelju spomenutih jednadžbi izračunali su g. 1857. Horsky i Marek sve ove konstante izabravši kao normalmalnu širinu sferičku širinu Φ n $= 46^0 30'$, te su sastavili, po uzoru Gaussovom tablice za preračunavanje sferičkih geogr. širina na sferoidičke odnosno obratno, i to za obseg cijele bivše Austro-ugarske monarhije od $41^0 30' - 51^0 30'$ sferičke širine. Podlogom za računanje spomenutih konstanata bile su Besselove dimenzije zemaljskog elipsoida.

Za tako izračunate konstante pojavljuje se na sjevernoj granici Slovačke maksimalna logaritmička vrijednost linearnog modula ($\varphi = 49^0 29' 40''$) — 0·000000140, a na južnoj granici Like ($\varphi = 44^0 6'$) + 0·000000071. U pojasu od $45^0 - 48^0$ sj. šir. t. j. p p. na $1 \frac{1}{2}^0$ sjeverno i južno od normalnog paralelnog kruga log je linearnog modula sasvim blizu 0 tako, da možemo smatrati sferoidičke stranice i kod trokuta I. reda, koje leže u tom pojasu, sferičkim stranicama; kod stranica većih od 20 km nužno je razlikovati sferoidičke dužine od sferičkih, ako leže južno ili sjeverno od rečenog pojasa, te takve se stranice moraju projicirati sa sferoida na kuglu. Ova se projekcija obavlja slično kao kod geogr. širina i dužina matematskom redukcijom, i to pomoću linearnog modula, koji je izračunat u tablicama. Kod dužina, koje su kraće od 40 km smatramo linearni modul za geografsku širinu jednoga kraja te dužine redukcijom iste $\frac{ds_1}{ds} = \frac{A_1 B_1}{A B} = m, \log A_1 B_1 = \log A B + \log m = \log A B + \sigma,$ $\sigma = \log m_A = \log m_B$ Kod većih dužina upotrebljava se za redukciju sferoid. dužine formula

$$\sigma = \frac{\log\ _A + \log m_B + 4 \log m_0}{6},$$ m_0 je linearni modul, koji

odgovara $\varphi_0 = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}$

Valja još spomenuti, da će se i veličina azimuta projekcijom promijeniti, jer nije općenito moguće geodetsku liniju elipsoida predočiti najvećim kružnim lukom kugle. Meridijan na kugli, od kojega mjerimo azimut, prava je projekcija sferoidičkog meridijana. Ako konformno projiciramo točke elipsoida A, B na kuglu (A', B',) to je najkraća spojnica tih točaka na kugli A' B' — dio največeg kružnog luka, dok je na sferoidu najkraća spojnica točaka A i B geod. linija. Ako bi konformno projicirali sve točke linije A B, onda bi dobili pravu projekciju geod. linije i pravi sferoidički azimut α, nu budući da se projiciraju samo krajevi stranice A B, to će najkraća spojnica tih točaka na kugli zatvarati sa meridijanom azimut

$\dot{\alpha}_{A' B'} = \alpha_{A B} + \Delta_{A B}$ Vrijednost veličine $\Delta_{A B}$ mogli bi matematski odrediti — (Vidi Gauss Untersuchungen Jordan, Handbuch der Vermessungskunde III.), nu taj je otklon kod triangulacija — s obzirom na relativno kratku udaljenost točaka tako malen, da ga ne treba respektirati niti kod triangulacija I. reda. Kod 120 km duge stranice naših izmjera skrajnja je vrijednost redukcije azimuta $\Delta = \pm$ 0·034".

Na temelju navedenih formula preračunava se kod naše zem. katastralne izmjere, pomoću spomenutih tablica, trigonometr.

mreža sferoidička na sferičku. Ukratko ću da spomenem taj postupak. Nije nužno projicirati sve trig. točke iz elipsoipa na kuglu, nego je općenito dostatno, ako se reduciraju na kuglu sferoid. geograf. koordinate jednog kraja poznate stranice, koji će nam biti ujedno zajedničkom točkom elipsoida i geoida (normalna točka), za koju smo geograf. koordinate odredili astronomskim putem. U dalnjoj se mreži mogu svi izmjereni sferoid. kutevi i astronomski odredjeni azimut stranice bez svake redukcije smatrati sferičkim kutevima. Na temelju ovih sferičkih elemenata mogu se izračunati sferičke dužine svih trokuta, te geograf. i pravokutne koordinate trig. točaka. Nakon toga se može cijela mreža projicirati natrag na plohu sferoida.

Dolazimo sada do druge zadaće: predočiti sferičke elemente u ravnini, to jest projicirati površinu kugle na ravninu. Iz velikog broja raznih metoda projekcija, koje se rabe u kartografiji, dolaze kod zemaljskih izmjera u obzir samo konformne projekcije. za koje općenito vrijedi prema prijašnjim izvodima:

$$P \pm i\,Q = f\,(p \pm i\,q).$$

Linearni je elemenat ravnine:

$ds^2 = dx^2 + dy^2$, dakle analagno jednadžbi (5)

$$P = x,\ Q = y.$$

Za kuglu nam je od prije poznato (jednadžba 10)

$$p = L,\ q = \log \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right);$$

dakle za konformno predočenje kugle u ravnini vrijedi jednadžba:

$$x \pm i\,y = f\left(L \pm i \log \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right)\right). \tag{21}$$

gdje je f povoljna funkcija, koja omogućuje neizmjerni broj konform. projekcija. Kod naših se katastralnih izmjera rabe dvije takove projekcije i to, stereografska projekcija i projekcija na valjak.

(Nastavit će se.)