

Physique / Relativité, gravitation

# Des expériences de Sagnac et de Wang

Christian Leruste<sup>a</sup>, Philippe Leruste<sup>b,\*</sup>

<sup>a</sup> UFR de Mathématiques, site Chevaleret, université Paris Diderot – Paris 7, 75205 Paris cedex 13, France

<sup>b</sup> LPNHE, université Pierre-et-Marie-Curie – Paris 6, 4, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France

Reçu le 24 juin 2008 ; accepté après révision le 3 juillet 2009

Disponible sur Internet le 5 septembre 2009

Présenté par Jacques Villain

## Résumé

Une approche de la géométrie de Minkowski est appliquée à la description des corps en rotation et en particulier à l'effet Sagnac. Une extension du formalisme employé permet l'étude d'une classe plus large de mouvements, illustrée notamment par une expérience de Wang et al. **Pour citer cet article :** C. Leruste, P. Leruste, C. R. Physique 10 (2009).

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**The experiments of Sagnac and Wang.** An approach to Minkowskian geometry is applied to the description of rotating bodies and, in particular, to the Sagnac effect. Extending this formalism then makes it possible to study a wider class of movements, notably illustrated by an experiment of Wang et al. **To cite this article:** C. Leruste, P. Leruste, C. R. Physique 10 (2009).

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## 1. Introduction

En 1913 Sagnac publiait une Note [1] qui se voulait être une preuve irréfutable de la réalité de « l'éther lumineux ». L'effet Sagnac a été étudié très tôt dans le cadre relativiste, voir la Référence [2] et, pour une bibliographie dans ce domaine, la Référence [3]. La Référence [4] en particulier donne une revue des expériences et des approches théoriques sur ce sujet.

Une expérience [5] — dans la même lignée — n'a pas reçu, à notre connaissance, d'analyse à ce jour. Le but de cette Note est de tenter d'en fournir une.

Un point de vocabulaire. Les physiciens n'hésitent pas à parler de *distance* dans l'espace de Minkowski bien que, par définition mathématique du mot distance, on ait :

$$[distance(A, B) = 0] \implies [A = B]$$

ce qui n'est pas réalisé par ce que les physiciens entendent par distance. Pour pallier cet inconvénient nous utiliserons les mots *m-distance* et *m-longueur*, et, pour représenter la distance euclidienne habituelle, nous utiliserons le terme

\* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : [leruste@math.jussieu.fr](mailto:leruste@math.jussieu.fr) (C. Leruste), [leruste@lpnhe.in2p3.fr](mailto:leruste@lpnhe.in2p3.fr) (P. Leruste).

*e*-distance quand ce sera nécessaire. De même nous utiliserons le mot *m*-angle pour désigner l'analogie minkowskienne de l'angle euclidien habituel.

Un détail technique : cette approche utilise constamment l'objet espace-temps doté d'unités de temps et d'espace. Afin d'exprimer simplement les propriétés de cet espace-temps, nous choisirons d'utiliser des unités d'espace et de temps telles que, avec celles-ci, la vitesse de la lumière ait la valeur  $c = 1$ . Par exemple l'année et l'année-lumière ; ou bien la seconde et une longueur de 300 000 km ; ou bien encore la nano-seconde et une longueur de 30 cm. Avec un tel choix, la vitesse de la lumière est 1 et il est inutile, voire trompeur, de la faire apparaître dans les formules. Nous avons donc posé :

$$c = 1$$

Toutefois, pour être en harmonie avec cette convention, nous utiliserons la lettre  $\beta$  plutôt que  $v$  pour noter les diverses vitesses (cela en référence à la formule habituelle :  $\beta = v/c$ ). Pour assurer une vérification rapide, nous laisserons subsister la lettre  $c$  dans les formules en provenance de diverses citations mais nous l'exclurons dans la suite du texte.

Dans la suite nous utiliserons aussi la rapidité  $\phi$  qui a une interprétation géométrique simple, elle représente un *m*-angle défini par :

$$\tanh(\phi) = \beta$$

## 2. Expérience de Sagnac

Nous présentons en Fig. 1 le schéma de principe (maintes fois représenté) de cet effet. On y voit deux phases successives : l'émission d'un faisceau, son évolution et la fin des trajets lumineux et leurs détections. Les parcours lumineux (dans l'espace du laboratoire) sont différents puisque le plateau tourne. Cette différence est mesurée par un interféromètre  $R$ . La valeur de cet effet a été prédite par Sagnac [1]. Le mouvement d'une particule test relativiste a été étudié depuis longtemps [6,7]. Dans ce cadre, il existe un calcul l'effet Sagnac [8].

Dans les expériences de ce type, le déphasage  $\delta\Phi$ , mesuré par interférométrie, est lié à la différence  $\delta t$  des temps de parcours des deux signaux par la relation :

$$\delta\Phi = 2\pi\delta t c/\lambda$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le vide de chacun des signaux lumineux. C'est la détermination de  $\delta t$  qui est le propos de la présente Note.

La valeur de l'effet Sagnac est [1] :

$$\delta t = 4\omega S/c^2 = 4\omega S \tag{1}$$

où  $S$  est l'aire délimitée par les rayons lumineux. Cette formule s'applique aux systèmes — tels qu'un plateau circulaire — en rotation autour d'un axe. Elle est assez générale et s'applique aux parcours lumineux polygonaux créés par des miroirs fixés sur le plateau tournant ou aux parcours circulaires installés à la périphérie de celui-ci. Elle ne s'applique a priori pas à l'expérience de Wang, décrite ci-dessous, qui met en œuvre des mouvements plus complexes.

Pour la présente étude simplifiée nous avons supposé que la lumière circule le long de la circonférence d'un cercle centré sur l'axe de rotation et e-orthogonal à cet axe (Fig. 1). Dans notre cas, cette aire est  $S = \pi R^2$  et  $\omega = v/R = \beta/R$ , soit

$$\delta t = 2(2\pi R)(\omega R) = 4\pi R\beta = 2L\beta \tag{2}$$

où

1.  $L$  est la longueur parcourue par chaque signal lumineux (dans le repère du plateau tournant). C'est le périmètre du cercle, soit  $2\pi R$  ;
2.  $\beta$  est la vitesse linéaire de la circonférence du plateau.

Il convient de remarquer qu'il s'agit là d'une approche non-relativiste ; à ce stade, la définition de la longueur  $L$  est invariante quel que soit le repère (tournant ou immobile).

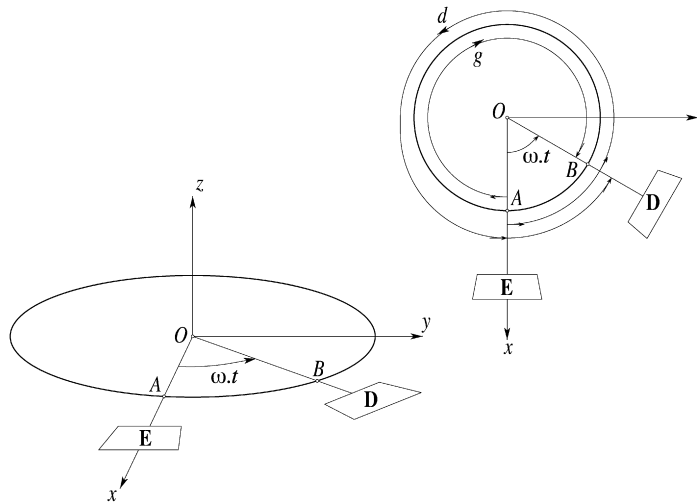


Fig. 1. Disque en rotation. Schéma simplifié, disque vu en perspective : deux rayons lumineux sont émis en *A* et détectés en *B* après des parcours le long de la circonférence, parcours en sens opposés ; à savoir : *AgB* (senestre) et *ABdAB* (dextre).

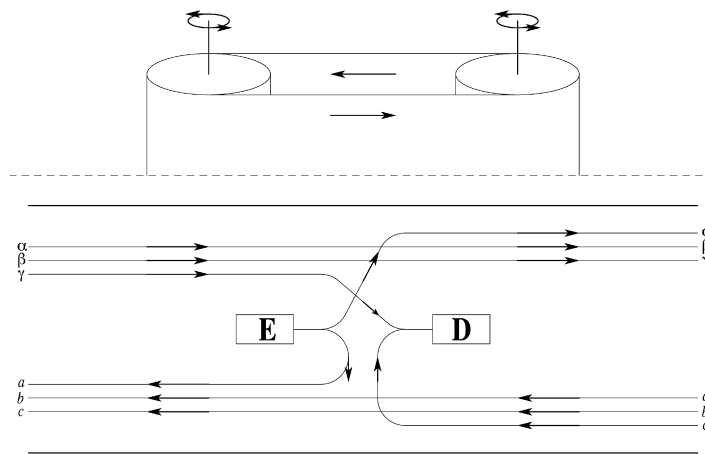


Fig. 2. Fibres optiques sur une courroie, schéma de principe : *E* émetteur de lumière ; *D* détection des franges d'interférences. *L* est ici la longueur de chacune des deux fibres optiques.

### 3. Expérience de Wang

L'expérience originelle de Sagnac a été répétée par Wang et al. [5] avec des fibres optiques placées sur une courroie, l'ensemble étant entraîné par deux poulies (Fig. 2). Différents dispositifs de ce type ont été testés.

Les résultats expérimentaux sont tels que la formule (1) faisant intervenir l'aire intérieure des circuits n'est plus compatible avec les résultats expérimentaux. Mais la formule (2) reste valable avec

1. *L*, longueur de chacune des fibres optiques (supposées de même longueur) et parcourues par les signaux lumineux ;
2. *β*, vitesse de déplacement de la courroie.

Nous nous proposons de retrouver le résultat de cette expérience et de l'étendre au cas relativiste.

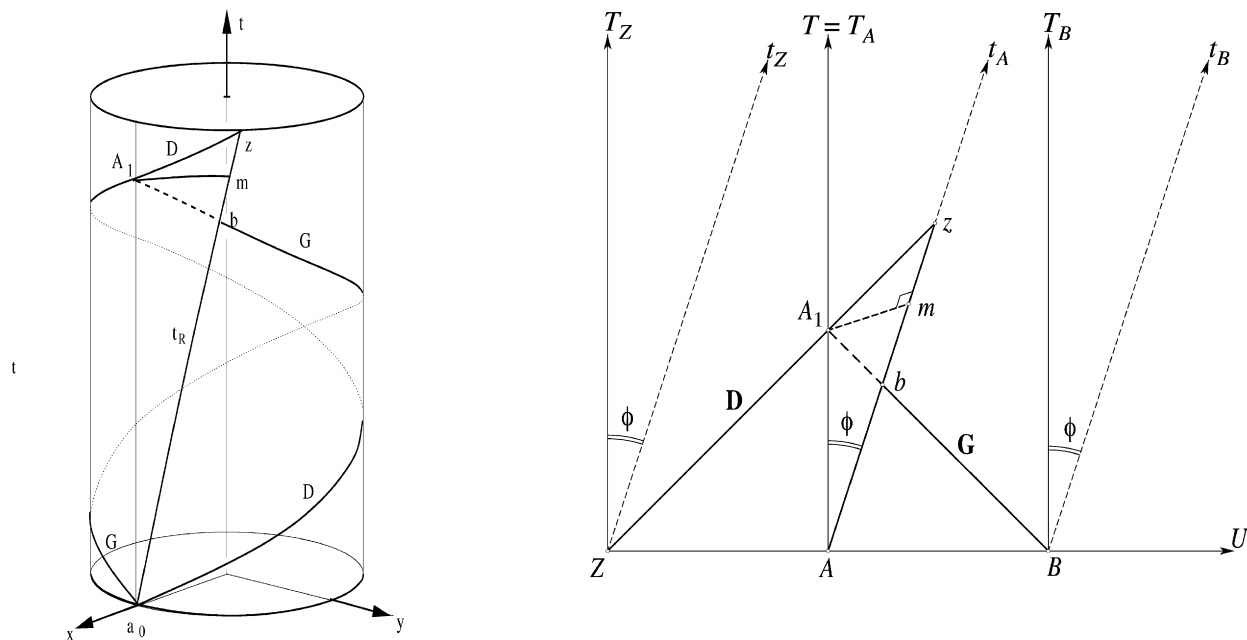


Fig. 3. À gauche, vue dans  $\mathbb{M}^3$ , les deux parcours de lumière, gauche  $G$  ou droite  $D$  selon leur sens par rapport à la rotation du plateau, ainsi que  $t_R$ , trajectoire du point  $A$ . À droite, développement de la surface du cylindre (ou espace total du revêtement). Dans la figure de gauche, les échelles horizontale et verticale sont différentes.

#### 4. Schémas d'espace-temps

Nous allons décrire ces schémas d'expérience dans l'espace-temps, espace minkowskien dont les propriétés mathématiques sont définies axiomatiquement [9,10]. Citons également des ouvrages plus connus et d'accès plus aisé [11–14]. Du point de vue épistémologique on peut consulter une thèse datant de 1996 [15] qui rend compte de l'introduction des mathématiques dans la théorie relativiste.

Nous prenons comme point de départ le schéma représenté Fig. 1. Ce schéma est dessiné dans l'espace de l'observateur, c'est à dire dans notre espace euclidien quotidien à 3 dimensions. Il est à remarquer que toute l'information est contenue dans le plan  $Oxy$  des représentations habituelles ; la dimension  $z$  ne joue aucun rôle dans ce schéma.

Cette dernière particularité nous permet de représenter le schéma d'espace-temps (Fig. 3-gauche) en adjoignant un axe  $t$  des temps aux axes  $x$  et  $y$ . Dans cette construction la trajectoire lumineuse  $g$  de la Fig. 1 donne naissance à la trajectoire  $G$  de la Fig. 3-gauche qui est une hélice. Le point d'émission de celle-ci est  $A$  (Fig. 1) ou  $a_0$  (Fig. 3-gauche) ; son point de détection est  $B$  (Fig. 1) ou  $b$  (Fig. 3-gauche). De même, *mutatis mutandis*, pour la trajectoire lumineuse  $d$ ,  $D$ . La rotation matérielle qui, sur la Fig. 1, amène  $A$  en  $B$  est traduite (Fig. 3-gauche) par un arc d'hélice  $t_R$ . Afin d'introduire les lois de la Relativité, nous dotons cet espace ( $Otxy$ ) d'une structure minkowskienne avec une métrique de signature  $(+, -, -)$ . Soit  $\mathbb{M}^3$  cet espace, cf. Appendice A.2.

Nous venons d'obtenir la représentation du phénomène d'un point de vue différent, celui de l'espace-temps. Mais, de plus, cette dernière représentation est faite dans un espace de Minkowski où sont incluses — dans sa nature géométrique même — les relations très strictes entre espace et temps, relations qui sont l'apanage de la théorie de la Relativité Restreinte. Ces relations apparaissent sous la forme de la géométrie de cet espace avec les notions classiques de longueur, d'angle, d'aire, etc. De la sorte, il suffit souvent de géométrie élémentaire pour résoudre les problèmes d'apparence compliquée, tel celui que nous abordons ici avec la description des expériences de Wang.

Il convient de souligner la relation qui existe entre, d'une part les  $m$ -distances et  $m$ -longueurs géométriques et les grandeurs physiques distance, longueur, durée, de l'autre.

La  $m$ -longueur d'un segment de trajectoire<sup>1</sup> d'un point matériel, représente la durée — en termes de temps propre — nécessaire pour que ce point aille d'une extrémité à l'autre du segment. On peut dire aussi, en utilisant une image habituelle, que cette durée serait celle indiquée par une horloge attachée au point mobile. La longueur de la projection de ce segment sur l'axe des temps d'un repère fixe est interprétable comme la durée du parcours mesurée par un observateur lié au repère.

Un discours analogue peut être tenu pour des segments de courbe de genre espace, en particulier pour un segment de droite. Celui-ci peut représenter une règle par exemple, sa  $m$ -longueur représentant la longueur intrinsèque de cette règle matérielle. La longueur de la projection de ce segment sur le plan d'espace du repère fixe est sa longueur vue par l'observateur lié au repère.

D'une façon générale, la correspondance entre grandeurs physiques et certains éléments tensoriels définis sur l'espace vectoriel sous-jacent à  $\mathbb{M}^4$  (énergie-impulsion, champ magnétique, etc.) est une correspondance bien connue. Ce que nous voyons ici est que chaque propriété géométrique de l'espace affine  $\mathbb{M}^4$  a aussi pour reflet une propriété dans le domaine de la physique et plus particulièrement dans la cinématique.

Dans le cas présent, en revenant à la Fig. 3, les événements-points  $b$  et  $z$  sont les impacts des rayons lumineux  $G$  et  $D$  sur le détecteur dont la trajectoire est  $t_R$ . L'intervalle de temps — en termes de temps propre du détecteur — entre l'arrivée de ces deux signaux est la  $m$ -longueur du segment  $[bz]$  de l'arc  $t_R$ .

Calculer la longueur d'un tel segment de courbe est trivialement résolu par la géométrie analytique. Mais ici apparaît une difficulté dans le cas des expériences de Wang :

- les trajectoires d'espace ne sont pas des cercles ;
- les rayons lumineux se propagent dans un milieu matériel.

En fait une solution apparaît lorsqu'on remarque que toutes les trajectoires d'espace-temps sont tracées sur un cylindre. C'est une surface développable et tout devient simple ; c'est ce que nous proposons de montrer ci-dessous.<sup>2</sup>

#### 4.1. Expériences de type Sagnac

Dans la Fig. 3-gauche la trajectoire  $t_R$  du point  $A$  et les signaux lumineux  $G$  et  $D$  se trouvent sur un cylindre  $\Gamma$ , plongé dans l'espace minkowskien  $\mathbb{M}^3$ . Il correspond à ce cylindre, *via* l'application  $\mathcal{P}$  précisée dans l'Appendice A.1, le plan minkowskien  $\mathbb{M}^2$  qu'on peut regarder au choix comme sa développée ou comme son revêtement universel.<sup>3</sup> A chaque hélice-trajectoire de  $\Gamma$  correspond sur  $\mathbb{M}^2$  une famille de droites parallèles. Une représentation de ce type, un peu différente, a déjà été utilisée [16].

Pour disposer de toute l'information sur une trajectoire, il suffit de connaître une seule des droites de la famille. Dans la Fig. 3-droite nous avons utilisé une seule droite  $t_A$ , mais trois sont représentées les  $t_Z, t_A, t_B$ . Sont également représentées  $T_Z, T_A, T_B$  correspondant à la même génératrice  $a_0A_1$  du cylindre. La trace lumineuse  $G$  est représentée une seule fois, ainsi que  $D$ . La Fig. 3-droite relative à  $\mathbb{M}^2$  a pour image par  $\mathcal{P}$  la figure gauche relative à  $\mathbb{M}^3$ .

Outre la trajectoire  $t_R$  (portée par la droite  $t_A$ ),  $G$  et  $D$  nous avons représenté sur la Fig. 3-droite :

- les axes  $\vec{U}$  et  $\vec{T}$ , l'origine étant en  $A$  ;
- la droite  $T_Z$  d'équation  $U = -2\pi R = -L$  ;
- la droite  $T_B$  d'équation  $U = 2\pi R = L$ .

<sup>1</sup> Les trajectoires sont des courbes de genre temps.

<sup>2</sup> Nous rappelons dans l'Appendice A.1 à la fin de cette Note quelques définitions, précisions et justifications rapides concernant les notions mathématiques dont nous nous servons.

Nous y indiquons en particulier (cf. Remarques 1 à 3) le double point de vue possible : le cylindre comme surface développable, évoqué ci-dessus, et le cylindre comme base de son revêtement universel.

<sup>3</sup> On peut décrire ce plan en imaginant que les trajectoires de  $\Gamma$  sont enduites d'encre fraîche et qu'ensuite  $\Gamma$  est roulé sans glissement sur  $\mathbb{M}^2$  (voir la Remarque 3 de l'Appendice A.1).

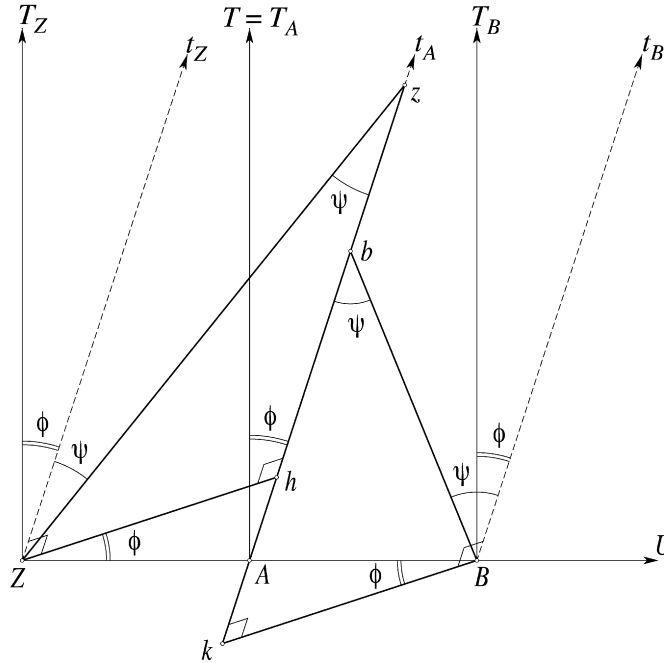


Fig. 4. Géométrie de Minkowski :  $\phi$  est la rapidité du milieu transparent (là où circule la lumière) par rapport au repère fixe ;  $\psi$  est la rapidité de la lumière dans ce milieu transparent. Les triangles  $Zhz$  et  $Bkb$  sont deux triangles rectangles égaux (voir le texte). Dans tous les cas examinés ici, la grandeur  $L$  est la longueur de chacune des deux fibres optiques ; celles-ci peuvent être enroulées et former plusieurs spires.

La  $m$ -longueur du segment  $[bz]$  représente la différence de temps propre  $\delta t$  entre les arrivées des signaux  $G$  et  $D$  sur le détecteur. Pour calculer cette  $m$ -longueur abaissons la perpendiculaire<sup>4</sup> de  $A_1$  sur  $Az$ , soit  $m$  le pied de cette perpendiculaire. Le triangle rectangle  $A_1mb$  admet une hypoténuse isotrope, il est donc isocèle.<sup>5</sup> Donc  $mb = mA_1$ . De même  $mz = mA_1$ . Par ailleurs  $m A_1 = R \sinh(\phi)$ . En définitive

$$\delta t = bz = 2R \sinh(\phi) \tag{3}$$

Le calcul similaire dans le cas de l'expérience de Wang donnera le même résultat (formule (4)).

#### 4.2. Expériences de type Wang

Le même mode de représentation peut être appliqué aux expériences de type Wang [5]. Les trajectoires que nous avons considérées restent inscrites sur un cylindre, mais sa base n'est plus circulaire. Néanmoins il reste développable sur un plan minkowskien  $\mathbb{M}^2$  (Fig. 4). Par ailleurs, le milieu n'est plus le vide mais un milieu d'indice  $n$ . La rapidité de la lumière dans ce milieu est  $\psi$  tel que  $\tanh(\psi) = 1/n$ .

Soit  $a_0$  la position du point  $A$  à l'instant  $T = 0$ . Sur le plan  $\mathbb{M}^2$  sont représentés les points  $Z, A, B$  (Figs. 3-droite et 4) qui sont définis par  $a_0$  : du point de vue du revêtement,  $Z, A, B$ , sont des antécédents de  $a_0$  par  $\mathcal{P}$  ; du point de vue du développement, ce sont des images « imprimées » par  $a_0$  dans le roulement du cylindre. Les trajectoires de ces points dans  $\mathbb{M}^2$  sont  $t_Z, t_A, t_B$ .

Les rayons lumineux issus de  $Z$  et de  $B$  font avec ces trajectoires des angles de  $m$ -mesure ( $\pm\psi$ ) ; ils coupent la trajectoire principale  $t_A$  respectivement en  $z$  et  $b$ .

Abaissons les perpendiculaires minkowskiennes à  $t_A$ , l'une  $[Zh]$  issue de  $Z$ , l'autre  $[Bk]$  issue de  $B$ .

Considérons les triangles  $Zhz$  et  $Bkb$  :

<sup>4</sup> En géométrie minkowskienne l'orthogonalité de deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  est définie par un  $m$ -produit scalaire nul :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ . Cela peut s'exprimer, dans un système d'axes orthonormés, par la relation  $a^0 b^1 - a^1 b^0 = 0$  avec les notations usuelles.

<sup>5</sup> Cette propriété est une conséquence directe du théorème de Pythagore minkowskien.

- ils sont tous deux m-rectangles (respectivement en  $h$  et  $k$ ),
- ils ont deux angles égaux (à  $\psi$ ) en  $z$  et  $b$ ,
- leurs côtés  $[Zh]$  et  $[Bk]$  ont des longueurs égales à  $2Lch(\phi)$ .

Ces triangles sont donc égaux. Donc  $[hz] = [kb]$ , ce qui entraîne  $[bz] = [kh]$ .

La m-longueur du segment  $[bz]$  représente l'intervalle de temps propre entre les arrivées des deux signaux sur le détecteur. Quant au segment  $[kb]$ , il dépend par construction de la rapidité  $\phi$ , mais est indépendant de  $\psi$ , donc indépendant de l'indice  $n$  des fibres optiques utilisées. En particulier les m-longueurs de ces segments sont égales :  $bz = kb$ . Par ailleurs, une relation trigonométrique dans les triangles rectangles  $AZh$  et  $ABk$  conduit à  $Ak = Ah = L \sinh(\phi)$ , on a donc :

$$bz = hk = 2L \sinh(\phi)$$

où  $L$  est, rappelons-le, la longueur de chacune des fibres optiques.

Pour atteindre ce résultat nous aurions pu aussi observer par exemple que le triangle déduit de  $kBb$  par translation de vecteur  $\vec{BZ}$  est symétrique m-orthogonal de  $hZz$  par rapport à la droite  $t_z$ . (Le lecteur peu friand de géométrie minkowskienne n'aura aucun mal à substituer une preuve en termes de géométrie analytique.)

L'écart  $\delta t$  entre les temps de réception des signaux lumineux partant à droite et à gauche est représenté par la m-longueur  $bz$  ; il est indépendant de  $\psi$ , donc de l'indice  $n$  du milieu, et :

$$\delta t = 2L \sinh(\phi) \quad (4)$$

Cet intervalle de temps est calculé en termes de temps propre de  $A$ .

Dans le repère du laboratoire il vaut :

$$\delta T = ch(\phi)\delta t = L \sinh(2\phi)$$

A l'approximation non-relativiste,  $\sinh(\phi) \simeq \tanh(\phi) = \beta$ , alors :

$$\delta t \simeq \delta T \simeq 2L\beta \quad (5)$$

En résumé, dans le cas non-relativiste, pour un milieu d'indice  $n$  quelconque où se propage la lumière, la formule (2) ou (5), indépendante de  $n$ , reste valable. Se trouve ainsi confirmée l'assertion selon laquelle l'effet Sagnac-Wang est proportionnel à la e-longueur parcourue par les signaux lumineux et non pas proportionnel à l'aire enserrée par ceux-ci.

Dans le cas d'un cylindre à base circulaire,  $L = 2\pi NR$ , avec  $N$  nombre de spires formées par chaque fibre autour du cylindre.

## 5. Conclusion

Dans cette Note nous avons utilisé une formulation stricte de la Relativité Restreinte. L'outil de travail a été la géométrie de l'espace temps qui contient dans sa définition même les axiomes de base de cette théorie. Dès lors le problème Sagnac/Wang s'est présenté à nous comme un simple problème de géométrie. Notre résultat est en accord, en particulier, avec les mesures de Wang dans le domaine non relativiste (formules (2) ou (5)). De plus, nous avons obtenu une formule, concernant les expériences de type Sagnac ou de type Wang, valable dans le domaine relativiste (formule (4)).

Cette formule se trouve déjà dans la Référence [8], mais obtenue dans des conditions bien différentes puisque s'articulant autour de la Relativité Générale, avec un indice de réfraction  $n = 1$ .

## 6. Discussion des références

De nombreuses publications existent traitant des corps en rotation en Relativité. En particulier la Référence [4] détaille les divers types d'approches de l'effet Sagnac. Beaucoup d'entre elles ont pour objet l'examen de paradoxes (Ehrenfest, Selleri) rencontrés lors de l'élaboration de la théorie à partir du concept de repère tournant. Dans nombre de ces approches la Relativité serait violée, la lumière ayant des vitesses supérieures à  $c$ . Ce n'est pas là le thème

de cette Note. Précisons toutefois que nous échappons à ces difficultés. En effet les trajectoires lumineuses que nous avons considérées ici sont des isotropes de l'espace-temps, elles ne peuvent donc violer les principes relativistes, en particulier celui imposant à cette vitesse d'être égale à  $c$  dans tout repère galiléen.

### Appendice A.1

Étant donné un nombre réel  $R > 0$ , l'application  $\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie en prenant, pour image du couple  $(U, T) \in \mathbb{R}^2$ , le triplet

$$\mathcal{P}(U, T) = \left( R \cos \frac{U}{R}, R \sin \frac{U}{R}, T \right) \in \mathbb{R}^3 \quad (6)$$

a pour propriétés évidentes

- que l'image par  $\mathcal{P}$  du plan  $\mathbb{R}^2$  est le cylindre  $\Gamma$  d'axe « vertical » passant par l'origine et de base le cercle « horizontal »  $\mathcal{C}$  de rayon  $R$  centré sur l'origine ;
- que l'on a  $\mathcal{P}(U', T') = \mathcal{P}(U, T)$  si et seulement si

$$T' = T \quad \text{et} \quad U' = U + k(2\pi R) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

**Remarque 1.** On peut se représenter visuellement l'application  $\mathcal{P}$  comme l'enroulement sur elle-même d'une feuille plane ( $\mathbb{R}^2$ ) pour en faire un tube (le cylindre  $\Gamma$ ).

Noter en particulier que

1. toute droite « verticale » de  $\mathbb{R}^2$  a pour image par  $\mathcal{P}$  une génératrice de  $\Gamma$  ;
2. toute droite « oblique »  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$  a pour image par  $\mathcal{P}$  une hélice  $\mathcal{H}$  « enroulée » sur  $\Gamma$  ;
3. toute translation « horizontale » de  $\mathbb{R}^2$  correspond à travers  $\mathcal{P}$  à une rotation de  $\Gamma$  sur lui-même ;
4. toute droite de  $\mathbb{R}^2$  et toutes ses translatées par des vecteurs « horizontaux » de la forme  $(k(2\pi R), 0)$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ , ont la même image par  $\mathcal{P}$ .

Du point 1 ci-dessus et de l'équivalence (7) on déduit aussitôt que, restreinte à toute bande « verticale » ouverte de « largeur »  $2\pi R$ , l'application  $\mathcal{P}$  devient une bijection entre, d'une part, cette bande et, d'autre part,  $\Gamma$  privé d'une génératrice.

Mieux encore, prenant en compte les topologies canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et de  $\mathbb{R}^3$ , on voit sans peine qu'une telle restriction de  $\mathcal{P}$  est un homéomorphisme.

**Remarque 2.** On constate qu'on a donc là une situation de *revêtement*, dont  $\Gamma$  est la *base* et  $\mathbb{R}^2$  l'*espace total* (par exemple Référence [17]).

Il s'agit, plus précisément, du *revêtement universel* de  $\Gamma$ , puisque  $\mathbb{R}^2$  est *contractile*.<sup>6</sup>

**Remarque 3.** Prendre le point de vue du revêtement universel, familier au mathématicien, c'est mettre l'absence d'unicité en amont et non plus en aval.<sup>7</sup> On échappe ainsi aux fonctions multiformes, et aux impasses mathématiques auxquelles elles conduisent.

Il n'en demeure pas moins que, pour le physicien, c'est  $\Gamma$  qui « pilote » l'opération.

Pour mettre ce point de vue-ci en lumière, on remplacera la visualisation suggérée à la Remarque 1 par l'image du cylindre comme rouleau encreur : si on enduit l'hélice  $\mathcal{H}$  d'encre fraîche et qu'on roule le cylindre  $\Gamma$  sur le plan  $\mathbb{R}^2$ , sans glissement et en gardant son axe parallèle à l'axe des  $T$ , s'imprimeront sur ce plan la droite  $\mathcal{D}$  et toutes les droites qui s'en déduisent par translations de vecteurs « horizontaux » (parallèles à l'axe des  $U$ ) et de longueur  $k(2\pi R)$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$  (cf. le point 4).

<sup>6</sup> L'application  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : (U, T, v) \mapsto (Uv, Tv)$  contracte continûment  $\mathbb{R}^2$  sur l'origine.

<sup>7</sup> C'est exactement la démarche de Riemann introduisant les surfaces qui portent son nom.



## Appendice A.2

Munissons  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  de leurs structures minkowskiennes usuelles en physique, de signature  $(+, -)$  et  $(+, -, -)$  respectivement.<sup>8</sup> (Pour indiquer cet enrichissement, on notera désormais  $\mathbb{M}$  au lieu de  $\mathbb{R}$ .)

Restreignant le point 2 aux bissectrices<sup>9</sup> de  $\mathbb{M}^2$ , qui sont des droites isotropes, un facile calcul direct montre que leurs images par  $\mathcal{P}$  ont pour tangentes des droites isotropes de  $\mathbb{M}^3$ .

**Remarque 4.** On voit ainsi (en utilisant le point 3) que *toutes* les droites isotropes de  $\mathbb{M}^2$  ont pour image par  $\mathcal{P}$  des courbes isotropes de  $\mathbb{M}^3$ , c'est-à-dire des courbes dont toutes les tangentes sont des droites isotropes. En l'occurrence, il s'agit des *hélices isotropes* du cylindre  $\Gamma$ .

Autrement dit, l'image par  $\mathcal{P}$  du cône de lumière<sup>10</sup> d'un point de  $\mathbb{M}^2$  est contenue dans le cône de lumière de son point-image dans  $\mathbb{M}^3$ .

De manière générale, soit  $\mathcal{D}$  une droite non isotrope de  $\mathbb{M}^2$  et  $\mathcal{H}$  son hélice image par  $\mathcal{P}$ .

Un calcul analogue au précédent montre qu'un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  et le vecteur directeur de la tangente à  $\mathcal{H}$  qui lui correspond en tout point de  $\mathcal{H}$  ont même m-longueur.

**Remarque 5.** On en déduit l'égalité entre

- d'une part, la m-distance entre deux points de  $\mathbb{M}^2$  ;
- d'autre part, la m-longueur mesurée le long de l'arc d'hélice correspondant par  $\mathcal{P}$  au segment qui les joint.

Il résulte des considérations ci-dessus, et spécialement des Remarques 4 et 5, que l'application  $\mathcal{P}$  réalise une correspondance parfaitement fidèle, du point de vue de la géométrie de Minkowski, entre  $\mathbb{M}^2$  et  $\Gamma$ .

Dans cette correspondance, en particulier, toute hélice de  $\Gamma$  est associée à une famille de droites parallèles dans  $\mathbb{M}^2$  (cf. le point 4 de nouveau).

Il est alors évidemment bien plus facile, pour résoudre un problème d'intersection d'hélices (ou de m-mesure d'arc d'hélice) dans  $\Gamma$ , de le « traduire » — grâce à  $\mathcal{P}$  mais sans qu'il soit même besoin d'explicitier  $\mathcal{P}$  — en termes d'intersection de droites (ou de m-mesure de segment) dans  $\mathbb{M}^2$ .

**Remarque 6.** Un autre avantage important de cette méthode est qu'elle peut s'étendre à des cas où la base du cylindre  $\Gamma$  n'est plus un cercle.

Si à la place de celui-ci on trouve, par exemple, une ellipse ou, comme dans le montage de l'expérience de Wang représenté sur la Fig. 2, une courbe constituée de deux demi-cercles joints par des segments de droite (ou une base plus complexe encore), il suffit d'adapter l'application  $\mathcal{P}$ , puis de procéder de manière analogue.

L'adaptation de  $\mathcal{P}$  n'est qu'une question de virtuosité calculatoire, dont on peut même faire l'économie puisqu'elle n'intervient pas dans le résultat final.

## Références

- [1] G. Sagnac, C. R. Acad. Sci. Paris 150 (1910) 1302–1305, 1676–1679, C. R. Acad. Sci. Paris 157 (1913) 708–710, 1410–1413.
- [2] P. Langevin, C. R. Acad. Sci. Paris 173 (1921) 831–834, C. R. Acad. Sci. Paris 200 (1935) 48–51, C. R. Acad. Sci. Paris 205 (1937) 304–306.
- [3] G. Rizzi, M.L. Ruggiero, The relativistic Sagnac effect: Two derivations, in: G. Rizzi, M.L. Ruggiero (Eds.), Relativity in Rotating Frames, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [4] F. Hasselbach, M. Nicklaus, Phys. Rev. A 48 (1993) 143–151.
- [5] R. Wang, et al., Modified Sagnac experiment for measuring time-travel difference between counter-propagating light beams in a uniformly moving fiber, Phys. Lett. A 312 (2003) 7–10.
- [6] C. Cattaneo, Nov. Cim. X (1958) 318–337, Nov. Cim. XI (1959) 733–735, Nov. Cim. XIII (1959) 237–240.

<sup>8</sup> Nous écrivons ces signatures avec leurs signes dans l'ordre traditionnel. Noter que, pour respecter l'ordre des variables dans la définition (6), on devrait en toute rigueur écrire  $(-, +)$  et  $(-, -, +)$ .

<sup>9</sup> Les droites d'équation  $T = \pm U$ , bien entendu.

<sup>10</sup> Ici c'est l'ensemble des deux isotropes passant par le point.

- [7] C. Cattaneo, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* 27 (1959) 54–59.
- [8] D. Soler, *Found. Phys. Lett.* 36 (2006) 1718–1735.
- [9] A.A. Robb, *A Theory of Time and Space*, Cambridge University Press, 1914;  
A.A. Robb, *Geometry of Time and Space*, Cambridge University Press, 1935.
- [10] J.W. Schutz, *Foundations of Special Relativity: Kinematic Axioms for Minkowski Space-Time*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973;  
J.W. Schutz, *Independent Axioms for Minkowski Space-Time*, Longman, 1997.
- [11] J.L. Synge, *Relativity, The Special Theory*, North Holland, Amsterdam, 1958.
- [12] A. Lichnérowicz, *Eléments de calcul tensoriel*, vol. VII, *La théorie de la Relativité Restreinte et les équations de Maxwell*, Armand Colin, Paris, 1962.
- [13] L. Landau, E. Lifchitz, *Physique Théorique, Tome II, Théorie des champs*, MIR, Moscou, 1970.
- [14] R.L. Sexl, H.K. Uhrbantke, *Relativity, Groups, Particles, Special Relativity and Relativistic Symmetry in Field and Particle Physics*, Springer, Wien, New York, 1992.
- [15] S.A. Walter, *Hermann Minkowski et la Mathématisation de la Théorie de la Relativité Restreinte 1905–1915*, Thèse, Université de Paris VII, 1996.
- [16] G. Rizzi, A. Tartaglia, *Found. Phys.* 28 (1998) 1663–1683, *Found. Phys. Lett.* 12 (1999) 179–186.
- [17] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.