C. R. Mecanique 344 (2016) 613–622

Contents lists available at ScienceDirect

Comptes Rendus Mecanique

www.sciencedirect.com

Analyse des champs mécaniques au voisinage d'une fissure mobile dans un milieu viscoélastique : le problème de Hui et Riedel revisité par une méthode de développements asymptotiques raccordés

Analysis of the stress and strain fields near the tip of a steady-state growing crack in an elastic-viscous medium: The Hui–Riedel problem revisited by means of the method of matched asymptotic expansions

Radhi Abdelmoula [a,*], Gilles Debruyne [b]

[a] *LSPM (UPR CNRS 9001), université Paris-13, France*
[b] *IMSIA–EDF, R&D AMA, EDF Lab Paris-Saclay, 7, bd Gaspard-Monge, 91120 Palaiseau, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 12 avril 2016
Accepté le 30 mai 2016
Disponible sur Internet le 10 juin 2016

Mots-clés :
Viscoélasticité
Multi-échelles
Champs HRR
Solution de Hui et Riedel
Développements asymptotiques raccordés

Keywords:
Creeping
Hui & Riedel solution
Multi-scale analysis
HRR fields
Match asymptotic developments

RÉSUMÉ

Cet article propose une analyse des champs mécaniques au voisinage d'une fissure se propageant en régime permanent dans un milieu viscoélastique. Une solution à ce problème a été originellement proposée par Hui & Riedel. Elle présente un certain nombre de paradoxes, comme l'indépendance de la vitesse de fissuration vis-à-vis du chargement. Ces paradoxes sont levés ici grâce à une analyse asymptotique permettant de raccorder les champs observés à deux échelles différentes. Le facteur de changement d'échelle est entièrement déterminé par les caractéristiques du matériau. L'échelle la plus petite se traduit par l'existence d'une couche limite où le champ de contrainte est représenté par une série de Fourier. Le facteur unitaire (confusion des deux échelles) nous ramène à la solution de Hui & Riedel.

ABSTRACT

The stress and strain fields near the tip of a steady-state growing crack are examined for elastic-viscous materials. A solution to this problem has been originally derived by Hui & Riedel, with some paradoxes such as the non-dependence of the far fields with respect to the crack growth rate. A two-scale match asymptotic analysis is suggested here to overcome these paradoxes. The scale factor is completely determined by the material properties. The inner scale may be considered as a boundary layer, where the stress field

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : radhi.abdelmoula@univ-paris13.fr (R. Abdelmoula), gilles.debruyne@edf.fr (G. Debruyne).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crme.2016.05.005

is completely described by a serial Fourier analysis. The unit value fits with the Hui & Riedel solution.

Abridged English version

The growth of a crack under creep conditions has been the subject of a lot of investigations, following the original work of Hui & Riedel, for a material law taking the form: $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + B\sigma^n$, for a uniaxial tension test. These authors offered an asymptotic solution which is of different nature, depending on the exponent value n. If $n < 3$, the asymptotic stress field is dominated by the elastic strain rate $(\dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}) \propto r^{-1/2}$, while for $n > 3$ the singular field takes the form $\boldsymbol{\sigma} = \propto r^{-1/(n-1)}$ for the stress and $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \propto r^{-n/(n-1)}$ for the strain rate. Furthermore, for $n > 3$, the solution does not depend on the far field. Many authors attempted to overcome this paradox, but with using other assumptions than those underlying the original issue. The idea to address these challenges is to separate the problem into an inner and an outer one, each of them involved with a specific scale. The outer problem deals with the classical asymptotic scale designed by the spatial coordinate $\mathbf{x}$. The inner problem is connected with the boundary layer in the near vicinity of the crack tip, produced by crack motion, and designed by the coordinate $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\epsilon^\beta}$, where $\epsilon = \frac{\dot{a}}{LB\mu^n}$ is a small parameter involving the crack growth rate $\dot{a}$, and the material properties (B, μ, n), β designing a numerical magnification. The stress function ψ is expanded with respect to ϵ with ψ^1 for the outer problem and χ^1 for the inner one. For the outer problem $\psi = \epsilon^{1/n}\psi^1(\mathbf{x}) + o(\epsilon)$, and for the inner one $\psi = \epsilon^{(n+1)/n}\chi^1(\mathbf{y}) + o(\epsilon)$, with $\beta = (n+1)/n$, the asymptotic expressions of the stress function in polar coordinate are: $\psi^1(\mathbf{x}) = K_1 r^{s_1}\phi(\theta)$ with $s_1 = \frac{n}{n+1}$ for the outer problem (similar to the classical HRR field established for a stationary crack) and $\chi^1(\mathbf{y}) = K_{\mathrm{III}}\rho^{1/2}\cos\theta/2$ for the inner problem. Hence, in the near vicinity of the crack tip, the linear elastic field is dominant, while the HRR field is dominant far away. These fields are connected together, and characterized both by the path integral C^* representative of the remote loading, and by the toughness K_{III}^c, associated with a Griffith criterion. Furthermore, in the boundary layer, the stress function may be completely computed by a Fourier series analysis.

1. Présentation du problème

On considère un solide fissuré dans l'espace $\mathbb{R}^3$. La fissure se situe dans le plan (x_1, x_3), et la trace du solide dans un plan (x_1, x_2) se réduit à un domaine $\boldsymbol{\Omega}$, qui sera le domaine d'étude, la fissure se réduisant à une ligne Γ de longueur a sur l'axe $x_2 = 0$. On se place dans l'hypothèse de la déformation antiplane, si bien que le déplacement d'un point matériel de $\boldsymbol{\Omega}$ se réduit à sa composante antiplane et est noté $u = u_3(x_1, x_2)$. Le solide est homogène et isotrope, sans forces volumiques. La fissure se propage en régime permanent dans son plan à une vitesse constante $\dot{a}$, et le comportement est supposé viscoélastique, et se traduit dans le cas général par la relation suivante [1] :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = -\frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij} + \frac{3}{2}B\sigma_{\mathrm{e}}^{n-1}s_{ij} \tag{1}$$

avec $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ le déviateur du tenseur de contrainte σ_{ij}, $\sigma_{\mathrm{e}} = \left(\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}\right)^{1/2}$, la contrainte equivalente, $\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}$ les vitesses des déformations et des contraintes, B étant une constante caractéristique de la viscosité du matériau, E son module élastique et ν sont coefficient de Poisson.

Dans ce travail, nous nous proposons d'établir le comportement asymptotique des champs de contraintes et de vitesses, en distinguant deux échelles dans le problème, une correspondant au problème dit extérieur, mais à une distance suffisamment proche du fond de fissure pour rendre pertinente une analyse asymptotique, et une échelle relative au problème intérieur, concernant le très proche voisinage du fond de fissure. Le passage d'une échelle à l'autre s'effectue grâce à un petit paramètre dépendant de la vitesse de la fissure et faisant office de zoom. Enfin, nous établirons une relation entre un paramètre caractérisant le chargement lointain et la vitesse de la fissure, ce qui n'avait pas été proposé lors des analyses précédentes de ce problème [2].

2. Formulation du problème anti-plan

Le mode anti-plan, avec un champ de déplacement suivant x_3, est caractérisé par les deux composantes non nulles du tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\tau_i = \sigma_{3i}, \quad \gamma_i = 2\varepsilon_{3i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \tag{2}$$

Nous notons τ_e la contrainte équivalente : $\tau_e = (\tau_1^2 + \tau_2^2)^{1/2}$. La loi de comportement en mode de cisaillement anti-plan déduite de (1) s'écrit :

$$\dot{\gamma}_i = \frac{\dot{\tau}_i}{\mu} + \overline{B}\tau_e^{n-1}\tau_i, \quad i = 1, 2 \tag{3}$$

où $\overline{B} = \sqrt{3}^{n+1}B$, μ est le module de cisaillement. Les équations d'équilibre se réduisent à une unique relation :

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{\Omega} \tag{4}$$

Nous introduisons par la suite la fonction de contrainte $\psi(x_1, x_2)$, définie par :

$$\tau_{13} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \tau_{23} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \tag{5}$$

de telle sorte que l'équation d'équilibre (4) sera systématiquement vérifiée.

On désigne par $a(t)$ l'abscisse de la pointe de fissure à l'instant t. Introduisons les coordonnées locales (X_1, X_2), attachées au repère mobile de la fissure : $X_1 = x_1 - a(t)$, $X_2 = x_2$, d'un point matériel du solide. L'hypothèse du mouvement permanent de la fissure implique $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ et donc :

$$\dot{u} = -\dot{a}\frac{\partial u}{\partial X_1} \tag{6}$$

$\dot{a}$ désignant la vitesse de propagation de la pointe de fissure.

L'équation de compatibilité de la vitesse de déformation s'écrit ici :

$$\frac{\partial \dot{\gamma}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{\gamma}_2}{\partial x_1} = 0 \tag{7}$$

La contrainte equivalente sera notée $\tau_e = |\nabla\psi| = (\nabla\psi \cdot \nabla\psi)^{1/2}$. En reportant dans l'équation ci-dessus les équations (3), (5) et (6), nous obtenons l'unique équation qui régit la fonction de contrainte ψ, que nous appelons équation fondamentale de notre problème :

$$\frac{\dot{a}}{\mu}\Delta\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \overline{B}\nabla_i\left(\tau_e^{n-1}\nabla_i\psi\right) = 0, \qquad \text{dans} \quad \Omega \tag{8}$$

2.1. Solution de Hui et Riedel

Pour une fissure fixe, la solution asymptotique est dominée par les termes non linéaires (les déformations élastiques sont négligeables), et fait apparaître une singularité de type HRR [1,3]. La fonction de contrainte s'écrit alors $\psi \simeq r^{n/(n+1)}$. Hui et Riedel [2] analysent l'équation (8) relative au problème de la fissure mobile en régime permanent, en supposant que, dans ce cas, les déformations élastiques ne sont plus négligeables au voisinage de la fissure (nous verrons que cette hypothèse s'accorde très bien à notre analyse). Ils proposent alors deux types de solutions : soit la solution élastique prédomine ($\psi \simeq r^{1/2}$), mais dans ce cas, pour $n > 3$, on voit apparaître une singularité plus forte du terme non linéaire dans l'équation fondamentale du problème (8), ce qui est évidemment contradictoire, soit on admet une prédominance du deuxième terme non linéaire de (8), qui conduit à une solution de type HRR $\psi \simeq r^{n/(n+1)}$; c'est cette fois le premier terme linéaire de l'équation (8) qui est le plus singulier (solution élastique). Finalement, pour contourner ces contradictions, les auteurs proposent deux catégories de solutions. Pour $n < 3$, ils adoptent la solution élastique, et pour $n \geq 3$, la solution $\psi \simeq \frac{\dot{a}}{B\mu}^{1/(n-1)} r^{(n-2)/(n-1)}$. On peut constater que pour $n \geq 3$, la solution dépend de la vitesse de fissuration. En revanche, cette solution est autonome, indépendante du chargement lointain. Ce dernier paradoxe n'est évité par les auteurs qu'au prix de l'introduction d'un critère local de propagation incluant un seuil de déformation. Nous nous proposons ici d'unifier les solutions et de lever les paradoxes liés à l'autonomie des champs, en reformulant le problème, en introduisant un petit paramètre lié à la vitesse de fissuration aux constantes matériaux, ce qui conduit à une analyse asymptotique menée à deux échelles.

2.2. Reformulation du problème adimensionnalisé

Nous travaillerons par la suite avec des variables sans dimensions. On pose :

$$\overline{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \quad \overline{x}_2 = \frac{x_2}{L}, \quad \overline{u} = \frac{u}{L}, \quad \overline{\psi} = \frac{\psi}{L\mu} \tag{9}$$

où L est une dimension caractéristique de la structure, que nous introduisons pour permettre une analyse asymptotique. Nous introduisons également un paramètre sans dimension, noté ϵ, défini par :

$$\epsilon = \frac{\dot{a}}{L\overline{B}\mu^n} \tag{10}$$

qui sera considéré petit. L'équation fondamentale (8) devient alors :

$$-\epsilon\Delta\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \nabla_i\left(\tau_e^{n-1}\nabla_i\psi\right) = 0, \qquad \text{dans} \quad \Omega \tag{11}$$

où nous avons omis les barres des quantités définies en (9), pour alléger la notation.

De la même manière, la loi de comportement (3) se réécrit :

$$\begin{aligned} \epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= -\epsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}^2\right)^{(n-1)/2} \\ \epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2} &= \epsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}^2\right)^{(n-1)/2} \end{aligned} \tag{12}$$

où nous avons omis, pour les mêmes raisons, les barres.

La vitesse d'un point matériel, définie dans (6), se réécrit en fonction du gradient suivant x_1 de u :

$$\dot{u} = -\epsilon\overline{B}L\mu^n\tilde{u}, \quad \text{où} \quad \tilde{u} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \tag{13}$$

où $\tilde{u}$ sera considéré par la suite comme étant le champ de vitesse.

Nous complétons l'équation (8) par l'écriture des conditions aux limites. Sur les lèvres de la fissure Γ, le vecteur contrainte est nul, ce qui implique : $\psi = 0$ sur Γ. Le chargement extérieur appliqué à la structure est caractérisé par un invariant intégral, que nous préciserons ultérieurement.

3. Résolution du problème avec la méthode des développements asymptotiques raccordés

3.1. Mise en évidence des problèmes extérieur et intérieur

Nous supposons l'existence d'un double développement asymptotique pour la fonction de contrainte $\psi(x_1, x_2)$ et pour le champ de vitesse $\tilde{u}(x_1, x_2)$. En effet, dans l'équation aux dérivées partielles (11), le terme de dérivation de plus haut degré est multiplié par le petit paramètre ϵ ; il s'agit donc d'un problème de perturbation singulière. Nous postulons donc deux développements asymptotiques : le premier, valable au voisinage de la pointe, appelé développement intérieur, le second, appelé développement extérieur, valable loin de celle-ci. Ces deux développements seront ensuite raccordés par des conditions appelées conditions de raccord [4].

(i) *Développement extérieur*. Loin de la pointe de la fissure, pour $|\mathbf{x}| \gg \epsilon$, nous supposons que $\psi(x_1, x_2)$ ainsi que le champ de vitesse $\tilde{u}(x_1, x_2)$ peuvent se développer sous la forme :

$$\psi(x_1, x_2) = \epsilon^{\alpha_1}\psi^1(x_1, x_2) + \cdots, \quad \alpha_1 \geq 0 \tag{14a}$$

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = \epsilon^{i_1}\tilde{u}^1(x_1, x_2) + \cdots, \qquad i_1 \geq 0 \tag{14b}$$

(ii) *Développement intérieur*. Au voisinage de la pointe de la fissure, nous supposons que la fonction de contrainte et le champ de vitesse admettent un développement sous la forme :

$$\psi(x_1, x_2) = \epsilon^{\beta_1}\chi^1(y_1, y_2) + \cdots, \quad \beta_1 \geq 0 \tag{15a}$$

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = \epsilon^{j_1}\tilde{v}^1(y_1, y_2) + \cdots, \qquad j_1 \geq 0 \tag{15b}$$

où $\mathbf{y}$ désigne la variable intérieure $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{x}}{\epsilon^\beta}$, $\beta > 0$. Le paramètre réel β permet d'ajuster le changement d'échelle en fonction des caractéristiques du matériau. Nous déterminerons sa valeur par la suite.

3.2. Développement extérieur et intérieur de l'équation fondamentale

Nous allons maintenant effectuer deux développements asymptotiques pour l'équation fondamentale (11). Reportons alors les développements (14a) et (15a) dans l'équation (11) ; nous obtenons les équations qui gouvernent respectivement les développements extérieur et intérieur de la fonction de contrainte.

(i) *Développement extérieur pour l'équation fondamentale*

$$-\epsilon^{\delta_e}\Delta_{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\psi^1(\mathbf{x})+\cdots\right)+\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(\left(\sigma^1+\cdots\right)\nabla_{\mathbf{x}}\left(\psi^1(\mathbf{x})+\cdots\right)\right)=0,\ \text{dans}\ \Omega \tag{16}$$

où nous avons posé $\sigma^1=||\nabla_{\mathbf{x}}\psi^1||^{n-1}$ et

$$\delta_e=\alpha_1(1-n)+1 \tag{17}$$

Pour ϵ petit, le premier terme de l'équation (16) est un terme de perturbation dû à la propagation de la fissure. Il s'ensuit que δ_e est strictement positif. On en déduit que le second terme de (16) est dominant et qu'en première approximation le champ de contrainte solution est décrit par le champ de contrainte HRR [1], solution de :

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(\sigma^1\nabla_{\mathbf{x}}\psi^1\right)=0\quad\text{dans}\quad\Omega \tag{18}$$

Néanmoins, la fonction de contrainte $\psi(x_1,x_2)$ dépend de la vitesse de la fissure, par l'intermédiaire du facteur $\epsilon^{\alpha 1}$ figurant dans le développement extérieur (14a).

(ii) *Développement intérieur pour l'équation fondamentale*

$$-\epsilon^{\delta_i}\Delta_{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\chi^1(\mathbf{y})+\cdots\right)+\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\left(\left(\tau^1(\mathbf{y})+\cdots\right)\nabla_{\mathbf{y}}\left(\chi^1(\mathbf{y})+\cdots\right)\right)=0,\ \text{dans}\ \Omega^{\text{int}} \tag{19}$$

où nous avons posé $\mathbf{y}=\dfrac{\mathbf{x}}{\epsilon^\beta}$, $\beta>0$ et $\tau^1=||\nabla_{\mathbf{y}}\chi^1||^{n-1}$, ainsi que

$$\delta_i=1+\beta(n-2)+\beta_1(1-n)<0,\quad\text{où}\quad\forall n\geq 1 \tag{20}$$

Le domaine Ω^{int} est obtenu à partir d'un zoom effectué au voisinage de la pointe, avec un grossissement de ϵ^β. Il apparaît donc comme un domaine non borné de $\mathbb{R}^2$ quand ϵ tend vers zéro, privé du demi-axe $y_1\leq 0$.

À ce stade, la valeur exacte de δ_i n'est pas encore connue (tout comme celle de δ_e). Nous la déterminerons dans le paragraphe suivant. Toutefois, nous pouvons déjà affirmer que seules les valeurs $\delta_i<0$ sont acceptables. En effet, le cas δ_i strictement positif conduirait à une équation fondamentale au premier ordre analogue à celle du développement extérieur, ce qui ne permetterait pas de distinguer un effet d'échelle, comme nous l'avons postulé a priori. Hui et Riedel [2] ont étudié en premier lieu ce cas de figure et ont conclu que cela conduisait à des résultats contradictoires à partir de l'analyse des champs singuliers. Ils ont opté finalement pour une solution telle qu'aucun des termes de l'équation (19) ne prédomine sur l'autre, ce qui correspond à $\delta_i=0$ (et toujours $\beta=0$, ce qui revient à n'imposer aucun zoom). Leur solution conduit, néanmoins, à des paradoxes que nous allons lever en postulant que $\delta_i<0$ et $\beta>0$. Cette hypothèse conduit, à l'ordre ϵ^{δ_i}, à l'équation suivante :

$$\Delta_{\mathbf{y}}\frac{\partial\chi^1}{\partial y_1}=0,\quad\text{dans}\quad\Omega^{\text{int}} \tag{21}$$

3.3. Développements asymptotiques de la loi de comportement

En complément de la solution de la fonction de contrainte, il est nécessaire d'établir les champs de vitesse en développant la loi de comportement (12), afin de compléter la détermination des coefficients affectant les équations du problème.

(i) *Développement extérieur des champs de vitesse.* En reportant l'expression (14) dans (12), nous obtenons deux équations reliant le champ de vitesses à la fonction contrainte sous forme d'un développement en fonction puissance de ϵ, les exposants dépendant de i_1, α_1 et n. En identifiant les termes un à un, on en déduit la relation :

$$i_1=\alpha_1 n-1 \tag{22}$$

ainsi que les deux équations au premier ordre suivantes :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{u}^1(\mathbf{x})=\sigma^1\frac{\partial}{\partial x_2}\psi^1(\mathbf{x})\quad\text{dans}\quad\Omega\\&\frac{\partial}{\partial x_2}\tilde{u}^1(\mathbf{x})=-\sigma^1\frac{\partial}{\partial x_1}\psi^1(\mathbf{x})\quad\text{dans}\quad\Omega\end{aligned} \tag{23}$$

(ii) *Développement intérieur des champs de vitesse.* En effectuant la même analyse que précédemment, nous identifions les termes en puissance de ϵ affectant la fonction de contrainte et la vitesse. Nous en déduisons alors :

$$j_1=\beta_1-\beta \tag{24}$$

et nous établissons les deux équations au premier ordre suivantes :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y_1}\tilde{v}^1(\mathbf{y}) = -\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2}\chi^1(\mathbf{y}) \quad \text{dans} \quad \Omega^{\text{int}} \\ &\frac{\partial}{\partial y_2}\tilde{v}^1(\mathbf{y}) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\chi^1(\mathbf{y}) \qquad\quad \text{dans} \quad \Omega^{\text{int}} \end{aligned} \tag{25}$$

4. Expression des premiers termes intérieurs et extérieurs de la fonction de contrainte

Nous avons précédemment établi les équations qui régissent le premier terme des développements extérieur et intérieur de la fonction de contrainte et des vitesses. Nous allons maintenant résoudre ces équations en considérant que les lèvres de la fissure sont libres de contrainte (ψ constante, que nous pouvons choisir égale à zéro).

4.1. Expression du premier terme du développement extérieur

On considère ici le comportement asymptotique du champ ψ_1 au voisinage de la pointe de la fissure. Il comporte un terme singulier, désigné par le nom de champ HRR. En effet, l'équation (18) qu'on utilise ici est du même type que celle étudiée par Hutchinson [1], Rice, Rosengren [3] pour les matériaux ayant un comportement non linéaire de type Rambeg–Osgood. En utilisant un système de coordonnées polaires (r, θ) ayant pour origine la pointe mobile de la fissure, la solution de (18) s'écrit sous la forme :

$$\psi^1(x_1, x_2) = K_1 r^{s_1}\phi_1(\theta) + \ TMS, \quad s_1 = \frac{n}{n+1} \tag{26}$$

où TMS désigne des termes en r^s avec $s > s_1$ pour $r \to 0$. Dans l'équation (26), K_1 est un facteur d'intensité de contrainte (différent du facteur classique de l'élasticité linéaire). Nous établirons qu'il dépend du chargement extérieur, contrairement au cas de l'analyse de Hui et Riedel, par l'intermédiaire d'un invariant intégral C^* [5] contrôlant le chargement extérieur appliqué à la structure. Nous détaillerons ce paramètre dans le paragraphe 7.

4.2. Expression du premier terme du développement intérieur

Nous allons établir dans ce paragraphe le premier terme du développement asymptotique du problème intérieur pour la fonction de contrainte.

La résolution de l'équation (21) nous donne la solution triviale suivante :

$$\chi^1(y_1, y_2) = \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi}}\rho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2} + TMS \tag{27}$$

Cette solution n'est pas complète, puisque les données sur « le bord lointain » du domaine intérieur ne sont pas prises en compte.

4.3. Raccord des champs de contraintes intérieur et extérieur

Afin de compléter ces données, nous avons besoin de la connaissance des conditions aux limites sur le « bord » du domaine intérieur : domaine non borné constitué du plan entier $\mathbb{R}^2$ privé de la droite semi-infinie $y_1 \le 0$, obtenu à partir du zoom effectué sur la structure. La seule condition aux limites naturelle pour ce domaine est la nullité du vecteur contrainte sur les lèvres de la fissure : $\chi^1(y_1, 0) = 0$ pour $y_1 \le 0$. Elle sera complétée par des conditions de raccord entre les développements intérieur et extérieur pour la fonction contrainte. Ces conditions expriment le fait qu'il existe une région intermédiaire dans laquelle les développements extérieur (14) et intérieur (15) coincident pour de petites valeurs de ϵ. Nous allons donc raccorder le premier terme du développement asymptotique de la fonction de contrainte du problème extérieur $\psi^1(x_1, x_2)$ (14) avec celui du problème intérieur $\chi^1(x_1, x_2)$ (15). Nous exprimons le premier terme extérieur en fonction de la variable intérieure ρ à partir de la relation $r = \mid \mathbf{x} \mid = \epsilon^\beta \rho$. De même, nous exprimons le premier terme intérieur en fonction de la variable extérieure à partir de la relation $y_1 = x_1/\epsilon^\beta$, $y_2 = x_2/\epsilon^\beta$ et, après identification, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\psi(x_1, x_2) = \epsilon^{\alpha_1} K_1 \epsilon^{\beta s_1}\rho^{s_1}\phi_1(\theta) + \cdots = \epsilon^{\beta_1}\chi^1\left(\frac{x_1}{\epsilon^\beta}, \frac{x_2}{\epsilon^\beta}\right) + \cdots \tag{28}$$

Après identification, nous déduisons en particulier de l'équation (28) que :

$$\beta_1 = \alpha_1 + \beta s_1 \tag{29}$$

Passons ensuite à la limite quand $\epsilon \to 0$ en fixant la variable intérieure $\rho = \mid \mathbf{y} \mid$ (respectivement, la variable extérieure (x_1, x_2)). Nous déduisons alors la condition de raccord au premier ordre pour la fonction de contrainte :

$$\chi^1(y_1, y_2) \simeq K_1 \rho^{s_1}\phi_1(\theta), \text{ au voisinage de l'infini.} \tag{30}$$

5. Expression complète de la solution du problème intérieur

5.1. Obtention de la solution sous forme de série dans la couche limite

Après avoir obtenu le comportement à l'infini de $\chi^1(y_1, y_2)$, nous passons maintenant à la résolution complète du problème intérieur (21). Celui-ci est posé dans le domaine obtenu à partir de l'homothétie définie par $\rho = \frac{r}{\epsilon^\beta}$, r étant la distance à l'origine, pour laquelle l'analyse asymptotique du problème extérieur est pertinente (cette dernière quantité dépendant de la dimension caractéristique de la structure L). Nous montrerons l'existence d'une couche limite incluant la zone au proche voisinage de la fissure mobile, où la solution est élastique, et la zone de raccord avec la région extérieure, où la solution est exprimée par une série de Fourier. Aux confins de cette zone, c'est la solution de type HRR qui prévaut.

Elle peut être obtenue en suivant les étapes suivantes :

(i) On effectue dans (21) le changement de variable $\zeta(y_1, y_2) = \dfrac{\partial \chi^1}{\partial y_1}(y_1, y_2)$. Le problème, pour la nouvelle inconnue $\zeta(y_1, y_2)$, consiste à trouver une fonction harmonique dans Ω^{int}, nulle sur le demi-axe $y_1 \le 0$, ayant un comportement à l'infini de la forme : $K_1 \rho^{s_1 - 1} \phi(\theta)$, $-\pi < \theta < \pi$, où $\phi(\theta)$ se déduit de $\phi_1(\theta)$ (30), à partir d'une simple dérivation par rapport à y_1.

(ii) On effectue une transformation conforme du domaine intérieur Ω^{int} vers le demi-plan supérieur de la variable complexe Z : $Z = Y_1 + \mathrm{i} Y_2$, avec $Y_2 > 0$. La transformation s'écrit : $Z = \mathrm{i}\sqrt{z}$. Le module et l'argument du nombre complexe Z et de son homologue z sont liés par les relations $R = \sqrt{\rho}$, $\Theta = (\pi + \theta)/2$ avec $0 \le \Theta < \pi$. Dans le domaine transformé, les conditions aux limites sont : $\zeta = 0$ sur tout l'axe réel $Y_2 = 0$, et $\zeta = K_1 R^{2(s_1 - 1)} \phi(2\Theta - \pi)$ quand tend R vers l'infini. En utilisant la condition $\zeta = 0$ en $Y_2 = 0$, nous pouvons effectuer un prolongement impair de la fonction $\zeta(Y_1, Y_2)$ au demi-plan inférieur, $\pi \le \Theta < 2\pi$, à partir de la condition d'antisymétrie suivante :

$$\zeta(Y_1, Y_2) = -\zeta(Y_1, -Y_2), \quad Y_2 \le 0 \tag{31}$$

L'extension du domaine de ζ nécessite également le prolongement de la fonction $\phi(\Theta)$ à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$. Comme $\phi(-\pi) = \phi(\pi) = 0$, nous effectuons de même un prolongement impair de la fonction $\phi(\Theta)$ défini de la façon suivante :

$$\phi(\theta) = -\phi(2\pi - \theta), \quad \forall\, \pi \le \theta \le 3\pi \tag{32}$$

(iii) Nous approchons le plan de la variable Z par un disque de rayon R, très grand pour couvrir tout le plan.

(iv) Le problème transporté se ramène donc à la recherche d'une fonction harmonique $\zeta(Y_1, Y_2)$ dans le disque de rayon R prenant la valeur $\zeta = K_1 R^{2(s_1 - 1)} \phi(2\Theta - \pi)$ sur sa circonférence. La solution s'écrit sous la forme d'une intégrale faisant appel au noyau de Poisson $P(R, r, \eta - \Theta)$ [6]. Soit :

$$\zeta(R, r, \Theta) = \frac{K_1}{2\pi} R^{2(s_1 - 1)} \left(\int_0^\pi P(R, r, \eta - \Theta) \phi(2\eta - \pi)\, \mathrm{d}\eta + \int_\pi^{2\pi} P(R, r, \eta - \Theta) \phi(2\eta - \pi)\, \mathrm{d}\eta \right) \tag{33}$$

où

$$P(R, r, \eta - \Theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\eta - \Theta) + r^2}, \quad 0 \le r < R,\ 0 \le \Theta < 2\pi \tag{34}$$

On effectue alors, dans la deuxième intégrale de (33), le changement de variable : $\eta = 2\pi - \vartheta$. Après prise en compte de la relation (32), l'équation (33) devient :

$$\zeta(R, r, \Theta) = \frac{K_1}{2\pi} R^{2(s_1 - 1)} \left(\int_0^\pi P(R, r, \eta - \Theta) - P(R, r, \eta + \Theta) \right) \phi(2\eta - \pi)\, \mathrm{d}\eta,\ 0 \le r < R,\ 0 \le \Theta < \pi \tag{35}$$

On montre dans [6] que $\zeta(R, r, \Theta)$ est harmonique dans le demi disque supérieur et satisfait bien la condition aux limites sur le bord du disque $\zeta(R, R, \Theta) = K_1 R^{2(s_1 - 1)} \phi(2\Theta - \pi)$. De même, on vérifie sans peine que $\zeta(r, R, 0) = \zeta(r, R, \pi) = 0, \quad \forall\ 0 \le r < R$.

Nous pouvons écrire, également, à partir de (35), $\zeta(R, r, \Theta)$ sous la forme d'une série de Fourier pour $r < R$ [6] :

$$\zeta(R, r, \Theta) = \sum_{p \ge 1} a_p \left(\frac{r}{R} \right)^p \sin p\Theta \tag{36}$$

où les coefficients a_p sont donnés par la formule suivante :

$$a_p = \frac{2K_1}{\pi} R^{2(s_1 - 1)} \int_0^\pi \phi(2\eta - \pi) \sin p\eta\, \mathrm{d}\eta \tag{37}$$

5.2. *Établissement de la zone de singularité prédominante en* $1/2$ *en fonction du rayon de la zone asymptotique d'investigation*

En prenant la valeur particulière de $r = R^{2(1-s_1)}$, on a bien $\dfrac{r}{R}$ qui tend vers 0 quand R tend vers l'infini puisque $1/2 \leq s_1 < 1$, ce qui veut dire que le point considéré se trouve bien au voisinage du centre du disque. Le comportement de ζ au voisinage de $r = R^{2(1-s_1)}$ s'écrit donc sous la forme :

$$\zeta(R, \Theta) \approx \frac{2K_1}{\pi R} \sin(\Theta) \int_0^{\pi} \phi(2\eta - \pi) \sin\eta \, d\eta \tag{38}$$

Par transformation inverse, c'est-à-dire en exprimant l'expression (38) en terme des variables d'espace du domaine intérieur Ω^{int} (ρ et θ), et après intégration de cette expression, la fonction χ^1 s'écrit au voisinage de la pointe :

$$\chi^1(\rho, \theta) \approx \frac{4K_1}{\pi} \rho^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \int_0^{\pi} \phi(2\eta - \pi) \sin\eta \, d\eta + \cdots \tag{39}$$

Par ailleurs, en adoptant l'écriture habituelle de (39) sous la forme de l'expression (27). Nous déduisons, après comparaison des relations (39) et (27), la relation suivante entre K_1 et K_{III} :

$$K_{\text{III}} = \frac{4\sqrt{2}K_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \phi(2\eta - \pi) \sin\eta \, d\eta \tag{40}$$

6. Raccord des champs de vitesse

Dans ce paragraphe, nous allons raccorder les champs de vitesse afin d'établir une relation entre les exposants de ϵ figurant dans le premier terme du développement (14) et le premier terme du développement (15). En utilisant les systèmes (23), (25), en reportant les fonctions de contrainte (26), (27) et en prenant en compte la relation $j_1 = \beta_1 - \beta$ (24), nous obtenons :

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = \epsilon^{j_1} \tilde{v}^1(y_1, y_2) + \cdots = \epsilon^{\beta_1 - \beta} (CI + TSE) + \cdots \tag{41a}$$

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = \epsilon^{i_1} \tilde{u}^1(x_1, x_2) + \cdots = \epsilon^{i_1} (CE + TSI) + \cdots \tag{41b}$$

où TSE et TSI. Désignent des termes singuliers des gradients de déplacement respectivement pour les champs extérieur et intérieur, que nous n'avons pas reportés ici et où CI, CE sont deux constantes d'intégration. La constante CE sera déterminée par les conditions aux limites sur le bord de la structure et la constante CI sera déduite par raccord des deux développements. Ces constantes peuvent être interprétées comme des déformations de relaxation relatives à l'histoire du solide avant la phase de régime permanent, incluant la période de fluage primaire.

L'identification des deux développements (41) conduit aux relations suivantes :

$$\beta_1 - \beta = i_1, \quad CI = CE \tag{42}$$

7. Identification des coefficients d'intensité des contraintes par des invariants intégraux

Jusqu'à présent, nous avons entrepris une analyse asymptotique des champs à partir des données fondamentales du problème (équilibre, compatibilité des déformations, loi de comportement et conditions aux limites). Afin de finaliser l'analyse et de déterminer complètement les coefficients, nous allons introduire, d'une part, un critère de propagation de la fissure et, d'autre part, un paramètre représentatif du chargement extérieur.

7.1. *Critère de propagation de la fissure*

Dans le domaine intérieur, la solution étant élastique au premier ordre, nous pouvons écrire que le taux de restitution de l'énergie G peut être exprimé comme intégrale de contour invariante J [7], ce qui donne :

$$G = J = \epsilon^{2(\beta_1 - \beta)} \frac{K_{\text{III}}^2}{2\mu} \tag{43}$$

L'expression ci-dessus correspond à la relation d'Irwin, si et seulement si :

$$\beta_1 = \beta \tag{44}$$

Cette dernière relation nous indique que le champ $\tilde{u}$ est partout indépendant de la vitesse de la fissure (le vrai champ de vitesses étant proportionnel à ϵ (13)).

Regroupons maintenant les équations (22), (24), (29), (42) obtenues pour $\alpha_1,\ \beta_1,\ \beta$ et i_1 :

$$i_1=\alpha_1 n-1,\ j_1=i_1=\beta_1-\beta,\ \beta_1=\alpha_1+\beta s_1 \tag{45}$$

L'égalité (44) ainsi que les relations (45) permettent d'obtenir les valeurs de α_1, β, β_1 en fonction de n. Nous obtenons les relations suivantes :

$$\beta_1=\beta=\frac{n+1}{n},\ \alpha_1=\frac{1}{n},\ i_1=0 \tag{46}$$

Les exposants étant déterminés, nous pouvons maintenat vérifier a posteriori les inégalités (17) et (20) que nous avons postulées, c'est-à-dire :

$$\delta_{\mathrm{e}}=\alpha_1(n-1)-1=-\frac{1}{n}<0,\quad \delta_{\mathrm{i}}=1+\beta(n-2)+\beta_1(1-n)=-\frac{1}{n}<0,\quad \forall n\geq 1 \tag{47}$$

On a déjà relié le facteur d'intensité K_{III} au facteur K_1 (41). Il reste à caractériser ces quantités en fonction des propriétés du matériau. Nous utilisons pour cela le critère de Griffith, qui s'écrit :

$$G=G_{\mathrm{c}},\ \text{ou encore}\ K_{\mathrm{III}}=K_{\mathrm{III_c}} \tag{48}$$

$K_{\mathrm{III_c}}$ étant appelé ténacité du matériau.

Le critère de propagation de la fissure peut être exprimé en n'importe quel point de la couche limite.

7.2. Relation entre le chargement extérieur et la vitesse de fissuration

Il reste, pour finaliser l'analyse et lever le paradoxe de la solution de Hui et Riedel, à caractériser le chargement lointain et le relier à la vitesse de fissuration. Plaçons-nous dans le domaine extérieur, où la solution au premier ordre est visqueuse [8], analogue aux champs de type HRR. Le chargement peut être caractérisé par une intégrale indépendante du contour (à condition que la fissure se propage en régime permanent) [5] :

$$C^*=\int_{\Gamma}\left(D(\dot\gamma)n_1-\tau\mathbf{n}\cdot\frac{\partial\dot u}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}s \tag{49}$$

où D est la densité de puissance de déformation du matériau définie par : $D(\dot\gamma)=\int_0^{\dot\gamma_i}\tau_j\mathrm{d}\dot\kappa_j$, Γ est un contour fermé situé dans le domaine où les champs asymptotiques extérieurs sont valides. Considérons dans la relation (49) les champs de contrainte et de vitesse sous forme de leurs développements extérieurs (26), (41b) ; l'expression de C^* prend la forme :

$$C^*=\epsilon^{\frac{1+n}{n}}\overline{B}\mu^{1+n}K_1^{n+1}I_n(w)+o(\epsilon) \tag{50}$$

où w est le champ de vitesse défini par : $w=r^{(s_1-1)n+2}\tilde u_1(\theta)$ et où le réel I_n est une intégrale qui ne dépend que de n. L'égalité (50) exprime la relation entre l'intégrale C^* et le facteur d'intensité des contraintes K_1 (40), relation similaire à celle donnée par Hutchinson [1] entre J et K_{III} pour un milieu écrouissable où les champs sont de type HRR. La différence réside dans le facteur $\epsilon^{\frac{1+n}{n}}$ affectant la relation (50). On a donc une relation entre la vitesse de fissuration et le chargement lointain exprimé par C^*, paramétrée par le facteur d'intensité K_1 (40), lui-même exprimé en fonction de la ténacité du matériau (48). Remarquons enfin que l'exposant figurant dans la puissance du petit paramètre représentant la vitesse est similaire à celui trouvée expérimentalement dans de nombreux matériaux [9].

7.3. Discussion sur la corrélation entre la vitesse de fissuration et le chargement lointain

Des essais expérimentaux réalisés sur divers types d'acier dans le domaine du fluage secondaire, à des températures comprises entre 450 et 600°C [10,11], montrent que la vitesse d'avancée de fissure est corrélée à la quantité C^* par une relation de type $\dot a=\gamma(C^*)^m$, où $m=n/(n+1)$ et γ est un paramètre du matériau, identifié dans l'expérience comme la pente de la courbe expérimentale $(\dot a, C^*)$ sur une échelle logarithmique. Ces résultats expérimentaux, obtenus sur différents types d'éprouvettes, révèlent une faible sensibilité de cette relation aux effets de structure (ce qui n'est pas le cas si on établit la corrélation entre $\dot a$ et un paramètre tel que la contrainte nette mesurée dans l'éprouvette). L'analyse asymptotique permet d'affiner cette corrélation. En développant la relation (50), et en utilisant (40), qui nous donne $K_1=\lambda K_{\mathrm{III}}$, il vient :

$$C^*=\frac{1}{\overline{B}}\left(\frac{\dot a}{L}\right)^{\frac{n}{n+1}}K_1^{n+1}I_n(w)=\frac{1}{\overline{B}}\left(\frac{\dot a}{L}\right)^{\frac{n}{n+1}}\lambda K_{\mathrm{III_c}}^{n+1}I_n(w) \tag{51}$$

On a donc bien établi le même type de relation correspondant à la corrélation entre $\dot a$ et C^*, avec pour seuls paramètres les caractéristiques de la loi visqueuse $(\overline{B},n)$ et la ténacité $K_{\mathrm{III_c}}$, propriétés intrinsèques au matériau.

Considérons maintenant un exemple de caractéristiques viscoélastiques de l'acier [12] : $n=5$, $\mu=70{,}000$ MPa, $B=5\cdot10^{-16}\mathrm{MPa}^{-5}\mathrm{h}^{-1}$ et l'ordre de grandeur des vitesses de fissuration mesurées : 10^{-4} mm/h $\leq\dot a\leq 10$ mm/h. Le petit paramètre de notre analyse s'écrivant (10) $\epsilon=\dot a/(L\overline{B}\mu^n)$, on a alors $\epsilon\approx\dot a/L\ 10^{-9}$/h, ce qui justifie le caractère de « petit paramètre » de ϵ, même pour les vitesses de fissuration les plus élevées, et ce d'autant plus que la taille caractéristique de la structure est importante.

8. Conclusion et discussion

On étudie le comportement asymptotique des champs mécaniques au voisinage d'une fissure mobile en régime permanent dans un matériau viscoélastique en mode anti-plan. On distingue deux échelles qui correspondent respectivement au problème extérieur (échelle macroscopique) et au problème intérieur (couche limite au proche voisinage de la pointe de fissure). L'analyse est paramétrée par un petit paramètre ϵ, proportionnel à la vitesse de la fissure, et dépendant des propriétés du matériau. À l'échelle du problème extérieur, la fonction de contrainte au premier ordre est du type $\epsilon^{\alpha 1}\psi^1(x_1, x_2)$, la fonction ψ^1 étant similaire à la solution visqueuse du problème pour une fissure fixe (de même type que les champs HRR [1,3] décrivant un milieu élastique non linéaire). L'échelle de la couche limite est calibrée par un zoom dont le grossissement est également une fonction puissance de ce petit paramètre. Les champs mécaniques y sont du type $\epsilon^{\beta 1}\chi^1(y_1, y_2)$, la fonction χ^1 pouvant se développer sous forme d'une série de Fourier dont le premier terme est de nature élastique linéaire au proche voisinage du fond de fissure, la zone dans laquelle ce premier terme prédomine étant déterminée en fonction des caractéristiques du matériau. On a donc en fait trois zones, la zone lointaine où les champs sont de type HRR, une zone très proche où l'élasticité linéaire domine et une zone de raccord où le champ de contrainte est exprimé par une série de Fourier. Dans l'analyse de Hui et Riedel, les champs sont autonomes dans tout le domaine, puisqu'il n'y a pas de distinction d'échelle, et pour relier la vitesse de fissuration au chargement extérieur, les auteurs introduisent un critère de rupture non local. On lève ici ce paradoxe, en identifiant dans la zone de raccord les invariants intégraux J (associé au critère de Griffith) et C^* respectivement relatifs au domaine intérieur et extérieur. On trouve ainsi une relation entre la vitesse de fissuration et l'intégrale C^* caractéristique du chargement lointain, cette relation étant conforme aux résultats expérimentaux. Les exposants des fonctions régissant les formes asymptotiques des champs ainsi que le grossissement du zoom sont entièrement déterminés par les conditions de raccord. Enfin, dans le cas limite de l'écoulement plastique parfait, le champ de contrainte extérieur n'exprime plus de singularité et ne dépend plus de la vitesse de fissuration, et les deux échelles se confondent ($\beta = 1$). Une analyse à un ordre supérieur est sans doute nécessaire pour lever ce dernier paradoxe.

Remerciements

Les auteurs tiennent à rendre hommage à la mémoire de H.D. Bui, membre de l'Institut de France, qui, peu avant de nous quitter, leur a suggéré l'examen de ce problème, en éclairant des pistes qui ont conduit à la méthodologie proposée ici. Nos remerciements vont aussi à M. J.-M. Delort, professeur à l'université Paris-13, pour les discussions fructueuses que nous avons eues avec lui concernant la résolution du problème intérieur.

Références

[1] J.W. Hutchinson, Singular behaviour at the end of utensil crack in a hardening material, J. Mech. Phys. Solids 16 (1968) 13–31.
[2] C.Y. Hui, H. Riedel, The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep conditions, Int. J. Fract. 17 (1981) 409–425.
[3] J.R. Rice, G.F. Rosengren, Plane Strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, J. Mech. Phys. Solids 16 (1968) 1–12.
[4] M. Van Dyke, Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Parabolic Press, Stanford, CA, USA, 1975.
[5] J.D. Landes, J.A. Begley, A Fracture Mechanics Approach to Creep Crack Growth, ASTMP STP, vol. 590, American Sociery for Testing and Materials, Philadelphia, PA, USA, 1976, pp. 128–148.
[6] M.H. Cartan, Théorie élémentaires des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, Éditeurs des sciences et des arts, 1992.
[7] J.R. Rice, A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, J. Appl. Mech. 35 (1968) 379–386.
[8] N.J. Hoff, Approximate analysis of structures in the presence of moderately large creep deformations, Q. Appl. Math. 12 (1954) 49–55.
[9] H. Riedel, Creep Crack Growth, ASTMP STP, vol. 1020, American Sociery for Testing and Materials, Philadelphia, PA, 1989, pp. 101–126.
[10] R. Koterazawa, T. Mori, Applicability of fracture mechanics parameters of crack propagation under creep condition, J. Eng. Mater. Technol. (1977) 99.
[11] T.L. Anderson, Fracture Mechanics Fundamentals and Applications, CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., 1994.
[12] H. Riedel, Creep deformation at crack tips in elastic-viscoplastic solids, J. Mech. Phys. Solids 29 (1981) 35–50.