

# Analyse par simulation numérique du développement de l'instabilité électro-convective d'une couche de liquide diélectrique infinie soumise à une injection unipolaire

Philippe Traoré<sup>a,\*</sup>, A. Perez<sup>b</sup>, D. Koulova-Nenova<sup>c</sup>, H. Romat<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Laboratoire d'études aérodynamiques, boulevard Pierre-et-Marie-Curie, BP 30179, 86962 Futuroscope-Chasseneuil cedex, France*

<sup>b</sup> *Dpto. De Electronica y Electromagnetismo, Facultad de Fisica, Avda. Reina Mercedes s/n, 41012 Sevilla, Espagne*

<sup>c</sup> *Institute of Mechanics, Bulgarian Academy of Sciences, 1113 Sofia, Bulgarie*

Reçu le 27 juillet 2008 ; accepté après révision le 9 septembre 2009

Disponible sur Internet le 3 octobre 2009

Présenté par Jean-Baptiste Leblond

---

## Résumé

Dans cet article les phénomènes électro-convectifs qui prennent naissance dans une couche d'un liquide diélectrique soumis à une injection unipolaire sont étudiés par voie de simulation numérique. Pour la première fois la résolution numérique complète et couplée des équations électro-hydrodynamiques (EHD) est réalisée. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux issus de l'analyse de stabilité notamment en ce qui concerne les critères de stabilité linéaire et non-linéaire dans les cas d'injection forte et faible. Le comportement hystérétique du développement de cette instabilité a été capturé et fidèlement reproduit. **Pour citer cet article : P. Traoré et al., C. R. Mecanique 337 (2009).**

© 2009 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

## Abstract

**Analysis by numerical simulation of the development of the electroconvective instability of a dielectric liquid layer to an unipolar injection.** In this article electroconvective phenomenon, which take place in a dielectric liquid layer submitted to an unipolar injection, are studied by numerical simulations means. For the first time the full and coupled resolution of the Electro-Hydro-Dynamic equations are achieved. The results are compared with those coming from stability analysis especially for the linear and non-linear criteria in strong and weak injection cases. The hysterical behavior of the development of this instability is accurately reproduced. **To cite this article: P. Traoré et al., C. R. Mecanique 337 (2009).**

© 2009 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

*Mots-clés* : Mécanique des fluides numériques ; Electro-Hydro-Dynamique ; Electroconvection ; Liquide diélectrique ; Simulation numérique ; Critères de stabilité

*Keywords* : Computational fluid mechanics; Electro-Hydro-Dynamic; Electroconvection; Dielectric liquid; Numerical simulation; Stability criteria

---

\* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : [philippe.traore@univ-poitiers.fr](mailto:philippe.traore@univ-poitiers.fr) (P. Traoré).

## Abridged English version

The combined Electro-Hydro-Dynamic equations are solved by numerical simulations for an infinite dielectric liquid plane layer submitted to unipolar injection. The following dimensionless governing equations are integrated by a finite volume method.

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla P + \frac{1}{R} \Delta \vec{U} + CM^2 q \vec{E} \quad (2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q(\vec{U} + \vec{E})) = 0 \quad (3)$$

$$\Delta V = -Cq \quad (4)$$

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (5)$$

where  $T = \frac{\varepsilon_0 \Delta V}{\rho_0 \nu K_0}$  is the ratio between the Coulomb and the viscous forces,  $C = \frac{q_0 H^2}{\varepsilon_0 \Delta V}$  is a measure of the injection strength,  $M = \frac{1}{K_0} \left( \frac{\varepsilon_0}{\rho_0} \right)^{1/2}$  accounts for the Electro-Hydro-Dynamic properties of the liquid,  $\rho_0$  is the fluid density,  $\nu$  its cinematic viscosity,  $\varepsilon_0$  its electric permittivity and  $K$  its ionic mobility.  $q_0$  is the electric charge injected at the emitter electrode and  $\Delta V$  the difference of potential between the two electrodes.

For convenience we define  $R = \frac{T}{M^2}$  which is known as electric Reynolds number.

Numerical runs are performed to determine accurately the linear and non-linear criteria from the temporal signal of the maximum of the velocity in the domain. Strong and weak injection are considered. These results are compared with those obtain from the stability analysis and a very good agreement is found. The hysterical behavior of  $V_{\max}$  versus  $T$  is and faithfully reproduced as predicted by stability analysis.

## 1. Introduction

Il est notoirement connu et depuis fort longtemps qu'un fluide soumis à un champ électrique pouvait être mis en mouvement. Les premières observations remontent au 18<sup>ième</sup> siècle avec Benjamin Franklin qui constata qu'une pointe métallique portée à haute tension pouvait générer un mouvement d'air capable de souffler une bougie (vent ionique). Plus récemment, au 19<sup>ième</sup> siècle, Michaël Faraday [1] dans des conditions similaires, mit en évidence l'existence de mouvements convectifs très intenses au sein d'un liquide isolant. Ainsi lorsqu'un liquide diélectrique est placé entre deux plans sur lesquels sont appliquées deux électrodes métalliques que l'on porte à un certain potentiel le liquide peut se mettre en mouvement en adoptant une structure convective si l'on dépasse une valeur seuil pour cette différence de potentiel. Dans la description même de la phénoménologie observée apparaît donc la notion de stabilité. Ainsi et tout naturellement, les premières études qui ont été menées sur ce sujet l'ont été grâce à l'analyse linéaire de stabilité [2,3]. Les écoulements électro-convectifs et thermo-convectifs (développement de l'instabilité de Rayleigh-Bénard) présentent une très forte analogie. Pour les écoulements électro-convectifs le rôle joué par le nombre de Rayleigh est joué par le paramètre  $T$  qui représente le rapport entre la force déstabilisante de Coulomb et les effets visqueux qui eux sont stabilisants. C'est la différence de potentiel qui se retrouve dans ce paramètre qui va jouer le rôle de la différence de température pour le problème de Rayleigh-Bénard.

Au delà d'une valeur critique  $T_c$ , le fluide se mettra en mouvement en adoptant une configuration de cellules électro-convectives. Au dessous de cette valeur critique le fluide reste au repos. Si de nombreuses études ont été menées par une analyse de stabilité linéaire pour la détermination des seuils critiques, seulement très peu d'entre elles l'ont été par voie de simulation numérique.

La première tentative pour résoudre tout le jeu d'équations couplées fut menée par Castellanos, Atten et Perez [4]. Toutefois le manque de pertinence des résultats obtenus, les a conduit à changer de méthode pour le calcul de la charge et non-plus à intégrer numériquement l'équation de transport de la charge. En effet dans cette étape cruciale de la résolution, cette équation étant de nature hyperbolique, l'emploi de schémas numériques très spécifiques est requis compte tenu des gradients très élevés en présence. Pour palier à ce problème, ils ont développé une méthode originale dite des super-particules qui consiste à injecter numériquement des particules chargées pour simuler l'effet des ions. Ces particules chargées sont alors déplacées par l'effet du champ électrique et du champ de vitesse. Cette approche a

été ensuite reprise par Chicon, Castellanos et Martin [5], Chicon, Castellanos et Perez [6], et plus récemment Vazquez, Georghiou et Castellanos [7]. Ceci étant, à chaque fois le champ de vitesse du fluide n'est plus calculé par résolution intégrale des équations de Navier–Stokes, mais contraint de suivre une forme analytique du type :  $\vec{U} = A(t, \vec{E})\vec{U}_0$  où  $A(t, \vec{E})$  est une amplitude fonction du temps et du champ électrique et  $\vec{U}_0 = (\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x})^T$  le champ de vitesse calculé à partir de la fonction de courant  $\psi$  associé à une cellule convective que l'on impose.

L'inconvénient majeur de cette approche est que le champ de vitesse et le champ électrique ne sont pas calculés à partir des équations qui les régissent mais imposés. La validité de cette approche reste aussi confinée à des domaines où les hypothèses faites pour pouvoir exprimer analytiquement le champ de vitesse et le champ électrique restent valables.

Dans cette Note nous nous proposons de résoudre entièrement les équations EHD c'est-à-dire le système constitué des équations de Navier–Stokes, de conservation de la charge, de Maxwell–Gauss, et de celle de la définition du champ électrique et ce de manière entièrement couplée et en l'absence d'hypothèses simplificatrices.

Dans le paragraphe 2 nous présenterons la formulation mathématique du problème ainsi que nous détaillerons la méthode numérique employée. Dans le paragraphe 3 nous comparerons les résultats obtenus à partir de la simulation numérique et ceux issus de l'analyse de stabilité linéaire notamment sur la détermination des valeurs critiques en injection forte et faible.

## 2. Formulation du problème et méthode numérique

### 2.1. Equations Electro-Hydro-Dynamique (EHD)

Nous considérons une couche de liquide diélectrique, considéré comme étant incompressible, de masse volumique  $\rho_0$  et de viscosité cinématique  $\nu$ . Cette couche plane de longueur  $L$  et de largeur  $H$  est confinée entre deux électrodes. L'électrode émettrice étant situé en bas. La couche est soumise à une différence de potentiel  $\Delta V = V_0 - V_1$  qui va induire d'une part l'injection de charges électriques  $q$  et d'autre part l'établissement d'un champ électrique  $\vec{E}$ . Pour une description universelle et plus commode, il est d'usage adopter des équations adimensionnelles. Pour cela on introduit les quantités adimensionnelles suivantes notées avec une \*

$$x_i^* = \frac{x_i}{H}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad U_i^* = \frac{U_i}{U_0}, \quad q^* = \frac{q}{q_0}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_0 U_0^2},$$

$$V^* = \frac{V}{(V_0 - V_1)}, \quad E_i^* = \frac{E_i}{(V_0 - V_1)/H}$$

Cela conduit à la définition des nombres adimensionnels suivants :  $T = \frac{\epsilon_0 \Delta V}{\rho_0 \nu K_0}$  est le rapport entre la force de Coulomb et les forces visqueuses,  $C = \frac{q_0 H^2}{\epsilon_0 \Delta V}$  est une mesure du niveau d'injection,  $M = \frac{1}{K_0} (\frac{\epsilon_0}{\rho_0})^{1/2}$  rend compte des propriétés électrohydrodynamiques du liquide, où  $K_0$  la mobilité ionique et  $\epsilon_0$  la permittivité électrique du liquide. Dans cette étude la vitesse de référence  $U_0$  est basée la mobilité ionique :  $U_0 = \frac{K_0(V_0 - V_1)}{H}$ . On définit aussi  $R = \frac{T}{M^2}$  comme étant le Reynolds électrique.

Le système d'équation sous forme adimensionnelle qui régit ce type d'écoulement électro-convectif (en omettant les \* par souci de clarté) devient alors :

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla P + \frac{1}{R} \Delta \vec{U} + CM^2 q \vec{E} \tag{2}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q(\vec{U} + \vec{E})) = 0 \tag{3}$$

$$\Delta V = -Cq \tag{4}$$

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{5}$$

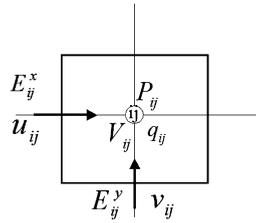


Fig. 1. Localisation des différentes variables sur un volume de contrôle  $(i, j)$ .

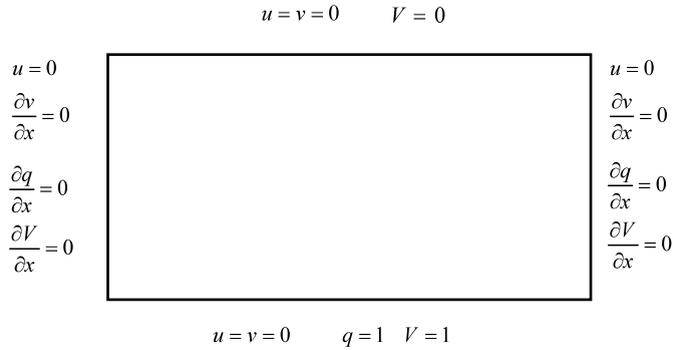


Fig. 2. Conditions aux limites.

2.2. Méthode numérique

Ces équations sont intégrées par la méthode des volumes finis [8] basée sur un maillage décalé. (Voir Fig. 1.)

Le couplage vitesse-pression est réalisé par l’algorithme du Lagrangien augmenté [9] associé à l’algorithme d’Uzawa [10]. Le schéma semi-implicite est d’ordre deux en temps et deux en espace. Les systèmes linéaires sont résolus par la méthode du Bi-gradient conjugué stabilisé, BI-CGSTAB [11], pré conditionné par une factorisation incomplète MILU [12].

Le point crucial et le succès de ce type de simulations et de problèmes repose sur la résolution de l’équation hyperbolique (3). Des schémas appropriés et spécifiques doivent être utilisés à cet effet, Traoré [13]. En effet, une caractéristique essentielle de ce type de schémas est qu’ils sont TVD (Total Variation Diminishing, Harten [14], Sweby [15]) qui est une propriété qui leur confère un caractère borné et non-oscillant. Il est aussi primordial qu’ils soient très peu diffusifs afin de respecter la nature hyperbolique de l’équation. Ce type de schémas qui provient de la culture numérique pour la résolution des équations d’Euler est très bien documenté (Lien et al. [16], Waterson et al. [17]). En ce qui nous concerne parmi la multitude de schémas possédant cette caractéristique, nous avons choisi d’employer le schéma SMART [18,19].

2.3. Conditions initiales et aux limites

Comme l’ensemble de nos équations est instationnaire il est nécessaire de spécifier des conditions initiales. Pour toutes les simulations considérées, à l’instant initiale, le fluide est supposé être au repos et ainsi dans tout le domaine  $\forall \vec{x} \in \Omega$  on a :

$$\vec{U}(\vec{x}, t = 0) = 0; \quad P(\vec{x}, t = 0) = 0; \quad q(\vec{x}, t = 0) = 0; \quad V(\vec{x}, t = 0) = 0$$

Pour les conditions aux limites, dans la mesure où l’on souhaite simuler une couche de fluide infinie il est d’usage de considérer des conditions de symétrie sur les bords latéraux du domaine. (Voir Fig. 2.)

3. Résultats et discussions

Nous avons cherché à déterminer numériquement les critères linéaires et non-linéaires du développement de l’instabilité et ainsi voir si il était possible de reproduire le comportement hystérétique qui est une caractéristique des

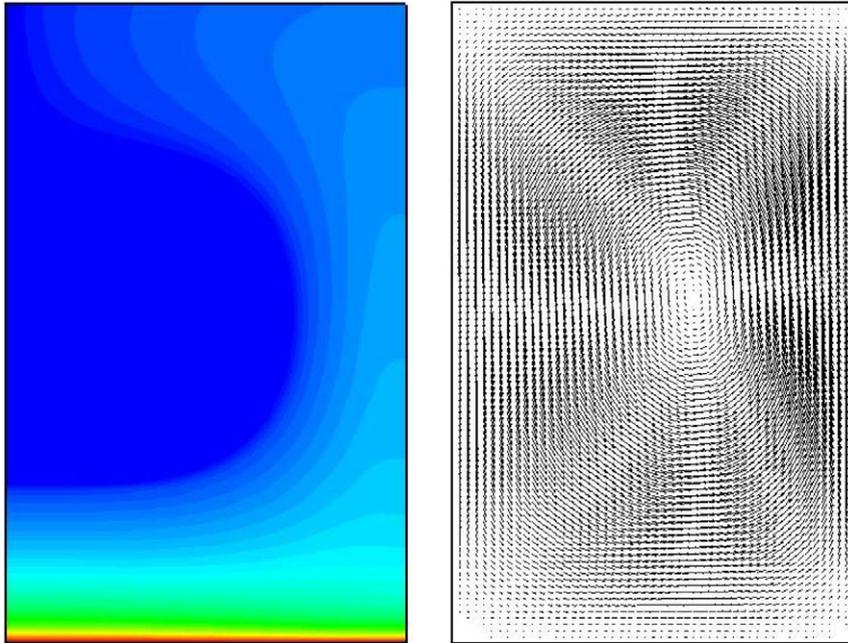


Fig. 3. Isocontours de la densité de charge et champ de vitesse,  $L = 0,614$ ,  $T = 175$ ,  $M = 10$ ,  $C = 10$ .

écoulements électro-convectifs que l'on ne retrouve pas par exemple dans les écoulements thermo-convectifs. Nous avons choisi de fixer  $L = 0,614$  qui correspond à la longueur d'onde  $\lambda$  du mode le plus instable et qui selon l'analyse de stabilité imprime sa structure à l'écoulement en développant une seule cellule convective [2].

### 3.1. Cas injection forte

#### 3.1.1. Critère linéaire

Dans ce cas,  $C = 10$ . Nous avons choisi aussi  $M = 10$  qui correspond à du gasoil. A partir du repos, on laisse le système évoluer en imposant une certaine valeur du paramètre  $T$ .

La structure de l'écoulement suit le scénario suivant : Pour une valeur de  $T < T_c$  aucun mouvement n'est détecté. En augmentant  $T$  juste au-dessus de la valeur critique  $T_c$ , le fluide se met en mouvement et une cellule convective apparaît dans la cavité. Sur la Fig. 3 nous avons présenté les isocontours de la densité volumique de charge ainsi que le champ de vitesse pour  $T = 175$  qui est légèrement au-dessus de  $T_c$ . Pour cette valeur de  $T$  un état stationnaire est atteint et une cellule convective apparaît comme l'analyse de stabilité l'a montré.

Dans la configuration présentée ici la cellule de convection tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Le champ de vitesse est ascendant sur le côté droit de la cavité et descendant sur le côté gauche. Ainsi sur le côté droit la vitesse des ions s'ajoute à celle du liquide et ces ions mettent moins de temps à monter qu'ils ne mettraient seulement grâce à leur seule vitesse de migration  $K\vec{E}$ . La répulsion coulombienne agissant pendant un temps aussi plus court, la zone droite se remplit plus de charges électriques. Inversement à gauche, où la vitesse du fluide est descendante et contraire à la vitesse ionique, les ions mettent plus de temps à monter et peuvent parfois ne pas pouvoir le faire si la vitesse du fluide est supérieure à  $K\vec{E}$ . De plus la répulsion coulombienne va agir pendant un temps plus long et la zone droite va se vider de charges électriques. C'est exactement ce que l'on observe sur la Fig. 3, et qui est pleinement en accord avec les résultats observés par Vasquez [7].

Sur la Fig. 4 nous avons représenté l'évolution de la vitesse maximum en fonction du temps, de l'état initial jusqu'à ce qu'un état stationnaire comme dans le cas indiqué soit atteint. Après une dizaine d'unités de temps adimensionnelles après l'instant initial, un premier intervalle de croissance exponentielle de la vitesse maximum est observé. On peut donc calculer le taux de croissance pour cet intervalle et représenter sur la Fig. 5 l'évolution de ce taux de croissance en fonction de différentes valeurs de  $T$ .

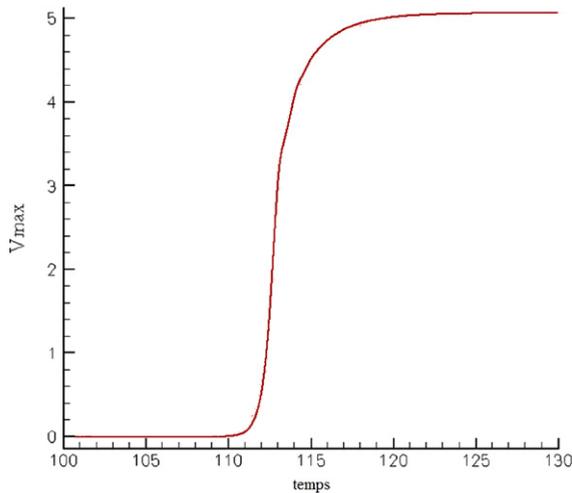


Fig. 4. Evolution temporelle du maximum de la vitesse dans le domaine,  $L = 0,614$ ,  $T = 250$ .

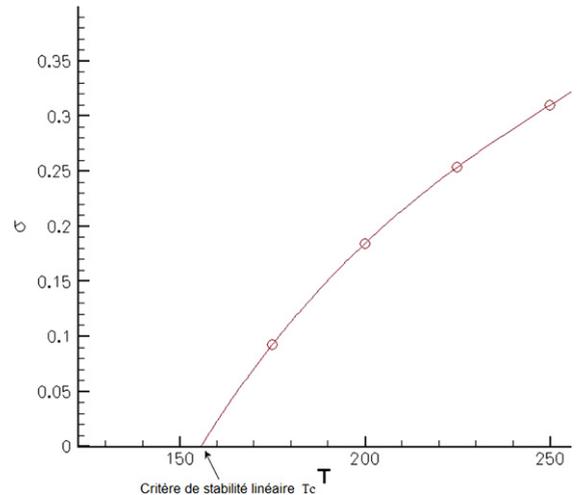


Fig. 5. Taux de croissance  $\sigma$  en fonction de  $T$  pour  $L = 0,614$ .

La valeur de  $T$  critique correspond alors au cas où le taux de croissance est nul. La valeur trouvée est  $T_c = 155,9$ . La valeur obtenue par analyse de stabilité dans les travaux d'Atten, Moreau [2] est 164. Il convient de préciser que dans le cas d'injection forte, lorsque la valeur de  $T$  augmente, l'écoulement perd sa stationnarité tout en restant périodique, puis transitionne petit à petit vers la turbulence au fur et à mesure de l'augmentation significative de  $T$ .

### 3.1.2. Critère non-linéaire

Il est plus difficile d'obtenir précisément le critère non-linéaire du paramètre  $T$ . Nous avons suivi la procédure suivante : A partir du repos, nous avons calculé l'écoulement pour une valeur de  $T$  au dessus du critère linéaire  $T_c$ . La vitesse maximum croît jusqu'à atteindre un état stationnaire d'amplitude finie comme indiqué sur la Fig. 4. On note la valeur de ce maximum pour cette valeur de  $T$ . En prenant comme état initial du prochain calcul, la distribution de vitesse, de pression, de charge et de potentiel du calcul précédent, on décroît la valeur du paramètre  $T$  et on relance le code. On atteint alors un nouvel état stationnaire et on note la valeur de  $v_{\max}$  pour ce nouveau  $T$  et ainsi de suite. Il est alors possible de tracer l'évolution de  $v_{\max}$  en fonction de  $T$  comme sur la Fig. 6. Pour une certaine valeur de  $T$ , la vitesse maximum décroît brutalement jusqu'à zéro. Cette valeur de  $T$  est référencée comme étant le critère non-linéaire  $T_f$  et correspond à la stabilité limite de l'état de repos aux perturbations non-linéaires. Dans le cas d'injection forte et pour  $L = 0,614$ , nous trouvons  $T_f = 107,5$ . En partant d'une valeur sous-critique et du fluide au repos, en faisant croître maintenant la valeur de  $T$ , brusquement le fluide se met en mouvement pour une valeur de  $T$  qui correspond en fait exactement au  $T_c$  déterminé précédemment. L'hystérésis est très bien décrite sur cette figure. La branche « up » est associée aux  $T$  croissants et la branche « down » aux  $T$  décroissants.

### 3.2. Cas injection faible

Nous avons procédé de la même façon en injection faible c'est-à-dire pour  $C = 0, 1$ . Pour ce cas, la longueur d'onde du mode le plus instable est  $\lambda = 0,687$  [2]. Mis à part ce changement de valeur pour  $\lambda$  et surtout  $C$ , l'écoulement est foncièrement différent dans sa structure comparée à celui de l'injection forte. La différence majeure provient d'une part que l'on n'observe plus de solution stationnaire de l'écoulement. La solution est toujours fortement instationnaire même pour des valeurs de  $T$  très proche du seuil.

Sur la Fig. 7 nous avons représenté l'évolution du taux de croissance en fonction de  $T$ .

Le seuil critique a été trouvé égale à 24145,5 alors que le critère linéaire donné par l'analyse de stabilité dans ce cas donne 24147,57. Atten, Moreau [2]. La concordance est excellente et meilleure que dans le cas d'injection forte.

La Fig. 8 représente l'évolution de  $v_{\max}$  en fonction de  $T$  afin de capturer l'hystérésis. L'écoulement étant instationnaire  $\forall T$ , la valeur de  $v_{\max}$  reportée ici correspond en fait à la moyenne temporelle pour un  $T$  donné. La différence

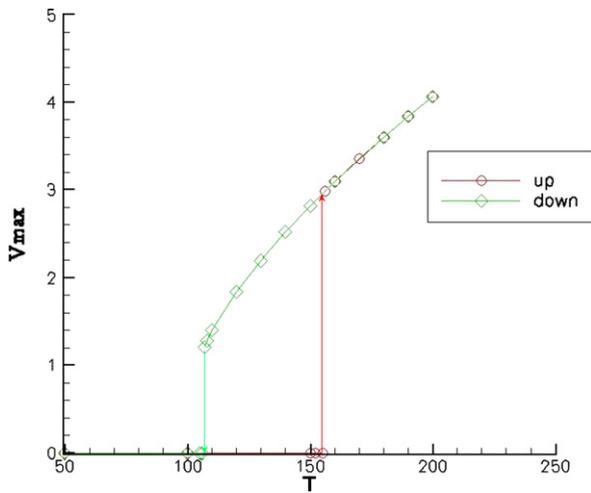


Fig. 6. Evolution de  $V_{\max}$  en fonction de  $T$ .

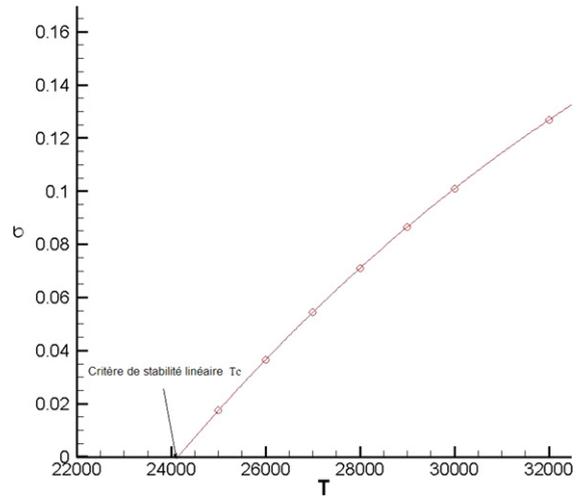


Fig. 7. Taux de croissance  $\sigma$  en fonction de  $T$  pour  $L = 0,687$  pour  $C = 0,1$ .

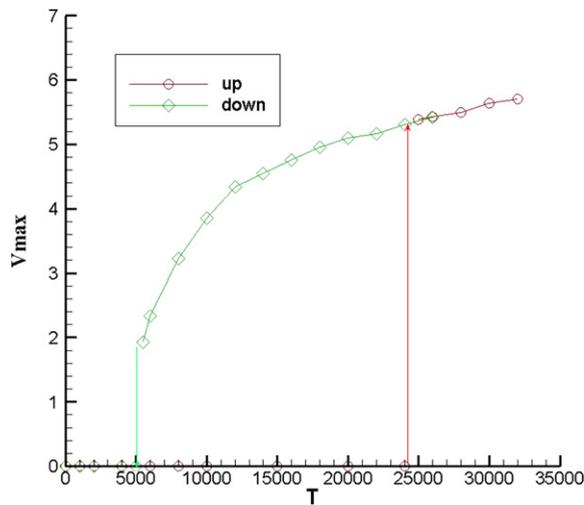


Fig. 8. Evolution de la valeur moyenne de  $V_{\max}$  en fonction de  $T$  for  $C = 0,1$ .

majeure avec le cas d'injection forte réside dans le fait que la valeur  $\Delta = \frac{T_c - T_f}{T_c}$  est plus grande dans le cas d'injection faible.

#### 4. Conclusion

Des simulations numériques ont été réalisées pour étudier la stabilité d'une couche de liquide diélectrique infinie soumise à une injection unipolaire en injection forte et faible. Pour la première fois, le jeu complet des équations qui régissent ce phénomène ont été intégrées par une méthode de type volumes-finis avec notamment un schéma approprié pour la résolution de l'équation de transport de la densité de charge électrique.

La capacité et la fiabilité du code de calcul à répondre avec précision à l'étude de ce phénomène d'électroconvection a été démontré au travers de comparaisons issus de résultats provenant de l'analyse de stabilité de ce problème. Le comportement hystérétique a bien été reproduit et les différents critères de stabilité linéaire et non-linéaire sont en parfait accord avec ceux indiqués par l'analyse de stabilité.

## Références

- [1] M. Faraday, *Experimental Researches*, vol. 1, Dover Publications, 1838, pp. 507–510.
- [2] P. Atten, R. Moreau, Stabilité électrohydrodynamique des liquides isolants soumis à une injection unipolaire, *Journal de Mécanique* 11 (3) (1972) 471–521.
- [3] P. Atten, J.C. Lacroix, Non-linear hydrodynamic stability of liquids subjected to unipolar injection, *Journal de Mécanique* 18 (1979) 469–510.
- [4] A. Castellanos, P. Atten, A.T. Perez, Finite amplitude electroconvection in liquid in the case of weak unipolar injection, *Physico-Chemical Hydrodynamics* 9 (3/4) (1987) 443–452.
- [5] R. Chicon, A. Castellanos, E. Martin, Numerical modelling of Coulomb-driven convection in insulating liquids, *Journal of Fluid Mechanics* 344 (1997) 43–66.
- [6] R. Chicon, A. Castellanos, A.T. Perez, Transient electrohydrodynamic stability of dielectric liquids subjected to unipolar injection, *Inst. Phys. Conf. Ser.* 163 (1999) 157–160.
- [7] P.A. Vasquez, G.E. Georghiou, A. Castellanos, Characterization of injection instabilities in electrohydrodynamics by numerical modelling: Comparison of particle in cell and flux corrected transport methods for electroconvection between two plates, *J. of Phys. D: Appl. Phys.* 39 (13) (2006) 2754–2763.
- [8] S. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Stockholm, Washington, DC, 1980.
- [9] Fortin, Glowinsky, *Méthodes de Lagrangien Augmenté*, Dunod, Paris, 1982.
- [10] Uzawa, *Itératives methods for concave programming*, in: K.J. Arrow, L. Hurwicz, H. Uzawa (Eds.), *Studies in Linear and Non-linear Programming*, Stanford University Press, Stanford, CA, 1958, pp. 154–165.
- [11] Van Der Vorst, Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of non-symmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* 13 (1992) 631–644.
- [12] Gustafsson, *On First and Second Order Symmetric Factorization Methods for the Solution of Elliptic Difference Equations*, Chalmers University of Technology, 1978.
- [13] Ph. Traoré, *Contribution numérique à l'étude des transferts couplés de quantité de mouvement de chaleur et de masse dans un jet semi-confiné*, Ph.D. thesis, University of Toulouse III, France, 1996.
- [14] A. Harten, High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics* 49 (1983) 357–393.
- [15] P.K. Sweby, High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (5) (1984) 995–1011.
- [16] F.S. Lien, M.A. Leschziner, Upstream monotonic interpolation for scalar transport with application to complex turbulent flows, *Int. J. Numer. Methods in Fluids* 9 (1993) 527–548.
- [17] N.P. Waterson, H. Deconinck, A unified approach to the design and application of bounded high-order convection schemes, VKI preprint, 1995-21, 1995.
- [18] P.H. Gaskell, A.K.C. Lau, An assessment of direct stress modelling for elliptic turbulent flows with the aid of a non-diffusive, boundedness-preserving, discretization schemes, in: *Proc. of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, Montreal, 1987.
- [19] P.H. Gaskell, A.K.C. Lau, Curvature-compensated convective transport: SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm, *Int. J. Numer. Methods in Fluids* 8 (1988) 617–641.