

Instabilités de Rayleigh Bénard sous vibrations hautes fréquences et champ magnétique

Chaker Benzid^a, Slim Kaddeche^{a,*}, Ali Abdennadher^b, Daniel Henry^c,
Hamda Ben Hadid^c

^a Institut national des sciences appliquées et de technologie, unité de recherche matériaux, mesures et applications, INSAT,
B.P. 676, 1080 Tunis cedex, Tunisie

^b Institut national des sciences appliquées et de technologie, INSAT, B.P. 676, 1080 Tunis cedex, Tunisie

^c Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, CNRS/Université de Lyon, Ecole Centrale de Lyon/Université Lyon 1/INSA de Lyon,
ECL, 36, Avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully Cedex, France

Reçu le 7 avril 2008 ; accepté après révision le 28 mai 2009

Disponible sur Internet le 23 juin 2009

Présenté par Patrick Huerre

Résumé

On étudie numériquement les instabilités se développant au sein d'une couche fluide électriquement conductrice délimitée par deux parois rigides portées à des températures différentes et soumise à des vibrations de hautes fréquences ainsi qu'à un champ magnétique extérieur constant dont la direction est perpendiculaire aux parois. Notre objectif principal est de prédire l'effet d'un tel champ magnétique sur les modes instables susceptibles de se développer au sein d'une telle couche fluide sous l'action combinée du chauffage et des vibrations hautes fréquences, notamment en situation de microgravité. *Pour citer cet article : C. Benzid et al., C. R. Mecanique 337 (2009).*

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Rayleigh Bénard instabilities under high frequency vibration and magnetic field. We study the stability of an electrically conducting fluid layer contained between two rigid plates at different temperatures, subject to high-frequency vibration and to an external and constant magnetic field transverse with respect to the boundaries. Our purpose is to predict numerically the effect of such a magnetic field on the transition to instability under the combined action of heating and the high frequency vibrations. A particular attention is dedicated to the microgravity situation. *To cite this article: C. Benzid et al., C. R. Mecanique 337 (2009).*

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Transferts thermiques ; Magnétohydrodynamique ; Stabilité ; Vibrations ; Formulation moyennée

Keywords: Heat transfer; Magnetohydrodynamics; Stability; Vibrations; Averaged method

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : slimkaddeche@yahoo.fr, slim.kaddeche@insat.rnu.tn (S. Kaddeche).

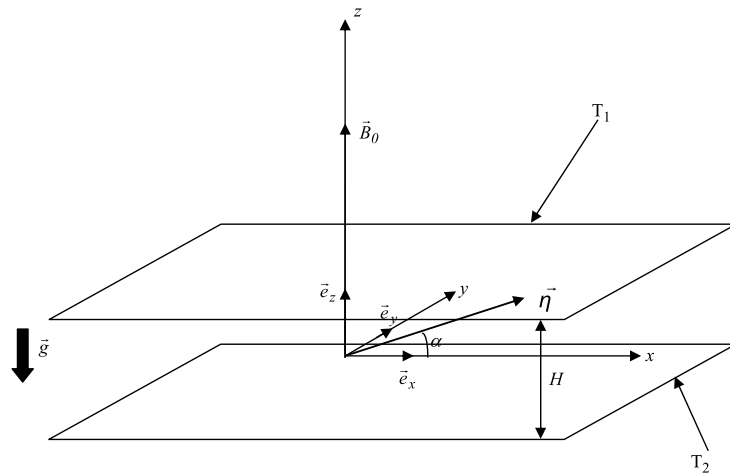


Fig. 1. Configuration considérée.

Fig. 1. Considered configuration.

Abridged English version

Processes involving mass and heat transfer are generally affected by the instabilities appearing in the fluid phase. For Rayleigh–Bénard system, such a transition is generally the result of an unstable temperature stratification combined with gravity. Nevertheless, when the system is subject to vibrations, a transition towards instability can occur even when no gravity is present as illustrated in Cisse et al. [1] and Bardan and Mojtabi [2] in the case of porous media. For microgravity experiments, such a transition is responsible of an undesirable convection because mass and heat transfer cannot be achieved only by diffusion as awaited. In the present work, it is proved that a magnetic field normal to the boundaries delays the appearance of instabilities resulting from vibrations and allows to maintain a heat transfer achieved only by diffusion for larger ranges of operating parameters.

1. Introduction

Les processus impliquant un transfert de masse et de chaleur sont généralement affectés par les instabilités thermoconvectives susceptibles de se développer au sein de la phase fluide. Cependant, en présence de vibrations, on assiste à une transition vers un état instable même en absence totale de gravité comme illustré dans les travaux de Cisse et al. [1] et Bardan et Mojtabi [2] pour les milieux poreux. Pour une expérience réalisée en environnement microgravitaire, une telle transition peut donc être à l'origine d'une convection indésirable car elle interdit aux transferts de masse et de chaleur de s'effectuer uniquement par diffusion et l'expérience en microgravité perd alors l'essentiel de son intérêt. Au cours de ce travail, on montre que l'application d'un champ magnétique transverse par rapport à la couche fluide retarde l'apparition des instabilités dues aux vibrations et permet donc d'assurer un transfert thermique purement diffusif et ce pour une plus large gamme de variations des paramètres.

2. Formulation du problème

Soit une couche d'un fluide newtonien électriquement conductrice d'épaisseur H , de viscosité cinématique ν , de conductivité thermique κ et de conductivité électrique σ_e . Cette couche fluide contenue entre deux parois rigides portées à des températures différentes est soumise à des vibrations de hautes fréquences qui vont induire une force d'inertie d'entraînement dont l'expression est donnée par la relation suivante :

$$\vec{f}_{ie} = -b\omega^2 \sin(\omega t) \vec{\eta} \quad \text{avec} \quad \vec{\eta} = \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_z \quad (1)$$

$\vec{\eta}$ est le vecteur unitaire indiquant la direction des vibrations, b et ω désignent leur amplitude et leur pulsation respectives. Comme illustré sur la Fig. 1, la couche fluide est aussi soumise à un champ magnétique extérieur, perpendiculaire aux parois et constant \vec{B}_0 . Dans le cas limite des très grandes fréquences d'oscillations vibratoires des deux parois délimitant la couche fluide, le recours à la formulation moyennée initiée par Simonenko [3] ainsi que les travaux de

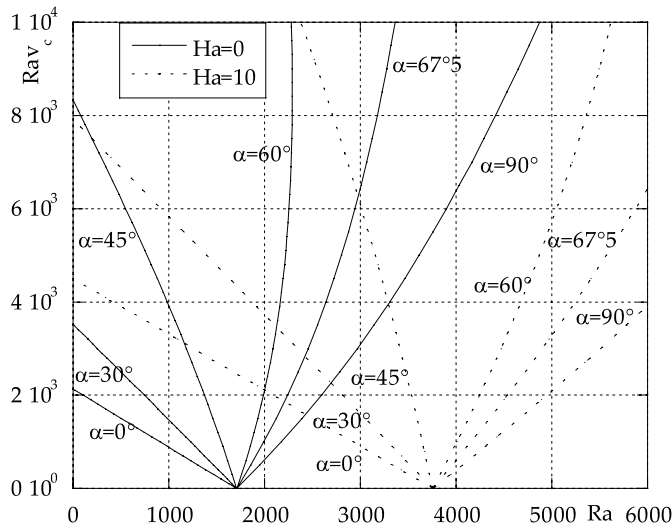


Fig. 2. Variation de Rav_c en fonction de Ra pour différentes valeurs de α , $Ha = 0$ et $Ha = 10$.

Fig. 2. Variation of Rav_c versus Ra for different values of α , $Ha = 0$ and $Ha = 10$.

Moreau [4] stipulant que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur pour les métaux liquides lors d'expériences MHD à l'échelle du laboratoire, nous permettent d'écrire un système d'équations moyennées en utilisant les mêmes grandeurs de référence que dans Kaddeche et al. [5]. Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq stipulant entre autres que la masse volumique peut s'écrire : $\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$, où β est le coefficient d'expansion thermique du fluide, ce système d'équations moyennées s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \nabla^2 \vec{V} + \frac{Ra}{Pr} T \vec{e}_z + \frac{1}{2} \left(\frac{Rav}{Pr} \right)^2 (\vec{W} \cdot \nabla)(T \vec{\eta} - \vec{W}) + Ha^2 \vec{J} \times \vec{e}_z \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{J} = -\nabla \Phi + \vec{V} \times \vec{e}_z \tag{4}$$

$$\nabla T \times \vec{\eta} = \nabla \times \vec{W} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \vec{W} = 0 \tag{5}$$

avec les conditions aux limites suivantes sur les parois rigides thermiquement et électriquement conductrices :

$$\vec{V} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{W} \cdot \vec{e}_z = 0 \tag{6}$$

où \vec{J} désigne le vecteur densité de courant électrique, \vec{W} représente la partie solénoïdale de la contribution du champ de température à la force gravitationnelle. Les nombres sans dimension $Ra = g\beta\Delta TH^3/\nu\kappa$, $Rav = b\omega\beta\Delta TH/\kappa$ ($\Delta T = T_2 - T_1$), $Pr = \nu/\kappa$ et $Ha = B_0 H \sqrt{\sigma_e/\rho_0\nu}$ désignent respectivement les nombres de Rayleigh thermique, vibrationnel, de Prandtl et de Hartmann.

Ce système moyenné admet une solution de base stationnaire, qui, pour une couche fluide délimitée par deux parois d'extensions infinies s'écrit comme suit :

$$U_0(x, z) = 0, \quad T_0(x, z) = 1 - z \quad \text{et} \quad \vec{W}_0(x, z) = \left(\frac{1}{2} - z \right) \cos \alpha \vec{e}_x \tag{7}$$

Notre investigation s'appuie sur l'utilisation d'un code de calcul basé sur la théorie linéaire de la stabilité et qui consiste à suivre l'évolution d'une perturbation infinitésimale $(\vec{v}, \vec{w}, p, \theta, \phi)$ des champs respectifs de vitesse, solénoïdal, de pression, de température et de potentiel électrique. Plus de détails en relation avec la méthode utilisée sont présentés dans Kaddeche et al. [5].

3. Résultats

Sur la Fig. 2, on constate que l'application d'un champ magnétique ($Ha = 10$) retarde l'apparition des instabilités pour le système de Rayleigh–Bénard soumis à des vibrations et ce quelle que soit leur fréquence et leur direction par

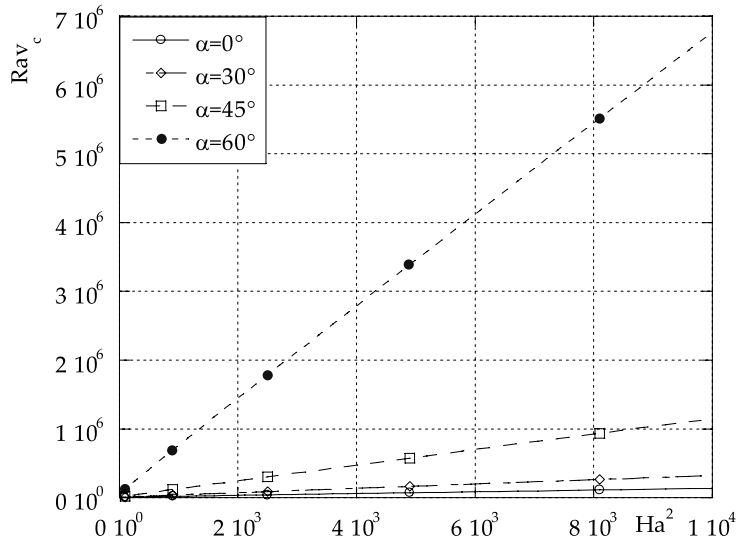


Fig. 3. Variation de Rav_c avec Ha^2 pour $Ra = 0$ et différentes valeurs de α .

Fig. 3. Variation of Rav_c versus Ha^2 for $Ra = 0$ and different values of α .

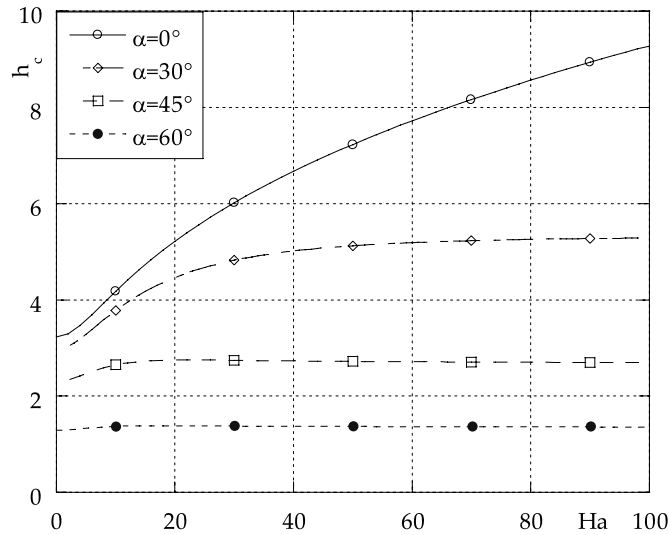


Fig. 4. Variation de h_c avec Ha pour $Ra = 0$ et différentes valeurs de α .

Fig. 4. Variation of h_c versus Ha for $Ra = 0$ and different values of α .

rapport au cas sans champ magnétique ($Ha = 0$). Cette stabilisation se manifeste par un élargissement du domaine (Ra, Rav) pour lequel le système considéré reste stable quand le nombre de Hartmann passe de la valeur zéro (pas de champ magnétique) à la valeur 10. Afin de mieux illustrer cette tendance en l'absence de gravité, on peut constater sur la Fig. 3, que les instabilités générées par les vibrations seules ($Ra = 0$) sont stabilisées quand un champ magnétique perpendiculaire aux parois est appliqué. Cette stabilisation se fait selon la corrélation suivante : $Rav_c \sim Ha^2$. L'effet stabilisant du champ magnétique est dû à la contribution énergétique dissipative de la force de Laplace $\vec{F} = \sigma_e \vec{J} \times \vec{B}_0$. En effet, la puissance qu'elle génère vaut : $P = \vec{F} \cdot \vec{V} = \sigma_e (\vec{J} \times \vec{B}_0) \cdot \vec{V} = \sigma_e ((\vec{V} \cdot \vec{B}_0)^2 - \|\vec{V}\|^2 \|\vec{B}_0\|^2)$ car le potentiel électrique Φ qui vérifie l'équation différentielle : $(\frac{d^2}{dz^2} - h^2)\Phi = 0$ est identiquement nul au vu des conditions aux limites électriques $\Phi = 0$ sur les parois délimitant la couche fluide. En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il devient évident que $P < 0$, mettant en évidence la contribution dissipative de la force de Laplace et donc l'effet stabilisant du champ magnétique. Sur la Fig. 4, on remarque que les cellules marginales tendent à conserver une

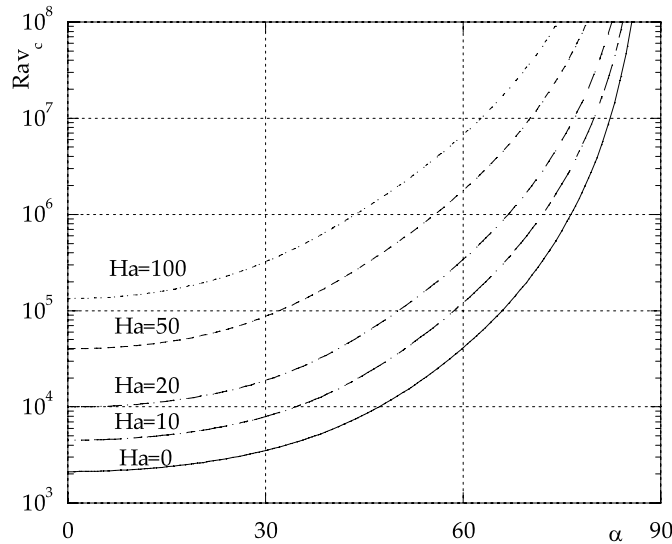


Fig. 5. Variation de Rav_c en fonction de α pour $Ra = 0$ et différentes valeurs de Ha .

Fig. 5. Variation of Rav_c versus α for $Ra = 0$ and different values of Ha .

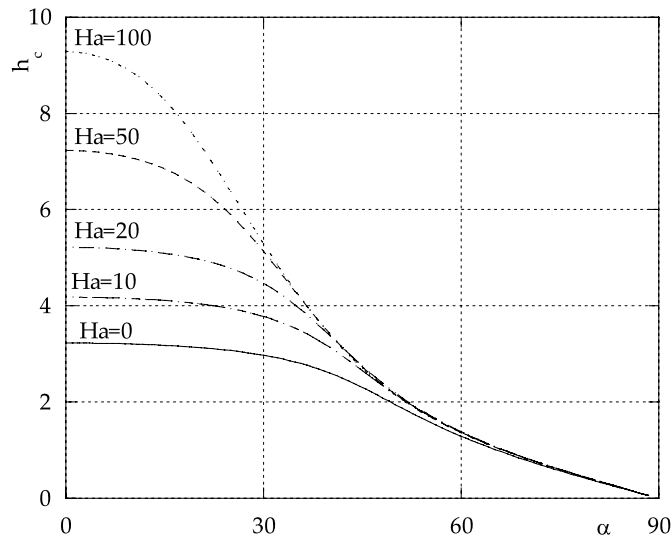


Fig. 6. Variation de h_c en fonction de α pour $Ra = 0$ et différentes valeurs de Ha .

Fig. 6. Variation of h_c versus α for $Ra = 0$ and different values of Ha .

longueur d'onde critique constante quand la direction des vibrations s'approche de la normale aux parois. Cependant, pour des valeurs de α plus modérées, c'est-à-dire pour des vibrations qui tendent à être coplanaires par rapport à la couche fluide, on constate clairement, toujours d'après la Fig. 4 que h_c augmente avec Ha indiquant un rétrécissement des cellules marginales avec l'intensité du champ magnétique. La Fig. 5 permet de mieux appréhender la variation de Rav_c avec α pour différentes valeurs de Ha . Sur cette figure, on constate que Rav_c croît assez significativement en fonction de α et ce quelque soit la valeur de Ha considérée. On remarque aussi l'existence d'un comportement asymptotique qui fait que Rav_c tend vers des valeurs extrêmes quand α tend vers 90° (vibrations perpendiculaires aux parois). Par ailleurs, la variation de Rav_c avec α pour $0 \lesssim Ha \lesssim 100$ se fait selon une corrélation s'écrivant comme suit : $Rav_c \sim \cos(\alpha)^a$ où a est une puissance proche de -4.2 . Quant à la taille des cellules marginales illustrée sur la Fig. 6, ces dernières s'allongent quand α augmente. Cet allongement est d'autant plus significatif que Ha est élevé et devient quasiment indépendant du nombre de Hartmann dès lors que $\alpha \gtrsim 60^\circ$.

4. Conclusion

En présence de vibrations, le système de Rayleigh–Bénard est systématiquement stabilisé par l’application d’un champ magnétique perpendiculaire aux parois délimitant la couche fluide. Par ailleurs, on s’est attardé sur le cas de la transition critique qui apparaît en l’absence de gravité ($Ra = 0$) et qui ne peut donc être attribuée qu’aux seules vibrations présentes au niveau de la station orbitale. On a constaté qu’à $Ra = 0$, le nombre de Rayleigh vibrationnel critique Rav_c est une fonction croissante à la fois de Ha , c’est-à-dire de l’intensité du champ magnétique, mais aussi de l’angle α qui désigne l’inclinaison de la direction des vibrations par rapport aux parois. Pour un système de Rayleigh–Bénard soumis à des vibrations hautes fréquences, cette étude montre qu’un champ magnétique perpendiculaire aux parois constitue un moyen efficace pour retarder l’apparition d’une instabilité, notamment en microgravité, permettant ainsi d’éviter tout mouvement convectif au sein de la couche fluide.

Références

- [1] I. Cisse, G. Bardan, A. Mojtabi, Rayleigh Bénard convective instability of a fluid under high frequency vibration, *Int. J. Heat Mass Transfer* 47 (2004) 4101–4112.
- [2] G. Bardan, A. Mojtabi, On the Horton–Rogers–Lapwood convective instability with vertical vibration: Onset of convection, *Phys. Fluids* 12 (11) (2000) 2723–2731.
- [3] I.B. Simonenko, A justification of the averaging method for a problem of convection in a field of rapidly oscillating forces and other parabolic equations, *Mat. Sb.* 87 (1972) 236–253.
- [4] R. Moreau, *Magnetohydrodynamics*, Kluwer, 1990.
- [5] S. Kaddeche, D. Henry, H. BenHadid, Magnetic stabilization of the buoyant convection between infinite horizontal walls with a horizontal temperature gradient, *J. Fluid Mech.* 480 (2003) 185–216.