

Un modèle hyperbolique diphasique bi-fluide en milieu poreux

Jean-Marc Hérard

E.D.F. recherche et développement, département M.F.E.E., 6, quai Watier, 78401 Chatou cedex, France

Reçu le 19 octobre 2007 ; accepté après révision le 26 juin 2008

Présenté par Patrick Huerre

Résumé

On introduit dans cette Note un modèle d'écoulement bifluid hyperbolique pour simuler les écoulements diphasiques en milieu poreux, en configuration instationnaire. Les lois de fermeture proposées sont consistantes avec l'inégalité d'entropie, et les relations de saut sont uniques champ par champ. **Pour citer cet article :** *J.-M. Hérard, C. R. Mecanique 336 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

An hyperbolic two-fluid model in a porous medium. We introduce an hyperbolic two-fluid two-pressure model to compute unsteady two-phase flows in porous media. The closure laws comply with the entropy inequality, and a unique set of jump conditions holds within each field. **To cite this article :** *J.-M. Hérard, C. R. Mecanique 336 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides numérique ; Modèles bifluides ; Milieux poreux

Keywords : Computational fluid mechanics; Two-fluid models; Porous media

Abridged English version

Many applications in practical engineering rely on the porous formalism. Within the nuclear framework, some applications also require computing water–vapour two-phase flows while using the porous approach. Among others, this is true for computations inside the core of a pressurised water reactor, and also in steam generators, due to the fact that many obstacles in the computational domain are much smaller than the mean mesh size that can be afforded in practical runs. Thus, we propose herein some basic formalism which enables to compute two-phase flows in porous medium while focusing on the two-fluid formalism. Actually, the model (2), together with the objective closure laws (4), (6), (8), (10), is such that: (i) it is hyperbolic without any condition on physical states; (ii) a physically relevant entropy inequality (9) holds for regular solutions of (2); (iii) unique jump conditions hold. The latter three features are compulsory, in order to predict highly unsteady flows such as the boiling crisis, or the loss of coolant accident. One key point concerns the definition of the couple (V_i, P_i) in (4), which follows the work [1,2], and essentially differs from [3] that relies on the Discrete Equation Method (DEM). The closure laws (10) guarantee well-posed

Adresse e-mail : jean-marc.herard@edf.fr.

jump conditions within each field when investigating the one-dimensional Riemann problem. Beyond this, one may deduce admissible forms for P_i through (6) in order to comply with a meaningful entropy inequality (9). Source terms in agreement with the entropy inequality, including drag effects, heat exchange between phases and interfacial mass transfer, may be added (see (8)). Meaningful equations of state (EOS) are, of course, required for each pure phase ($c_k^2 > 0$, see below). The extension to the three-dimensional framework is straightforward. The present approach is deeply connected with recent papers devoted to two-phase flow in open medium (see [4–6,1,7,2,8,9] among others). We emphasize the fact that the present paper does not tackle the difficult problem of the numerical simulation of the model, which is examined in [10]. The extension to three-phase flows is straightforward, provided that closures are in agreement with those detailed in [11]. The present approach may also be used to compute standard two-fluid models on *coarse* meshes, using the same algorithm as those described in [12] and [13] for two-fluid models and three-fluid models respectively.

1. Introduction

Certaines applications nécessitent d'utiliser des modèles d'écoulement diphasique en milieu poreux. C'est le cas notamment dans les écoulements en gisement pétrolier, dans le domaine du séchage de matériaux, mais également dans certaines applications du domaine nucléaire civil. Dans ce dernier cas, ceci s'explique par le fait que certains niveaux de représentation d'obstacles en géométrie complexe ne sont pas accessibles aujourd'hui, étant donné la puissance de calcul et la mémoire que cette démarche nécessiterait. La notion de porosité dans ce cas est associée au rapport du volume occupé par le fluide sur le volume de contrôle de référence, celui-ci incluant éventuellement des obstacles solides. Le cadre des modèles considéré ici est celui des modèles bifluïdes qui ne retiennent pas l'hypothèse d'équilibre local instantané en pression (voir en particulier les travaux de Baer et Nunziato [4], Kapila et al. [5], mais aussi [1,2,6,7]). L'objectif est de disposer d'un modèle répondant aux exigences naturelles suivantes :

- le modèle doit être hyperbolique sur l'espace des états admissibles ;
- le modèle doit être régi par une inégalité d'entropie physique ;
- les relations de saut doivent être définies de manière unique à la traversée de chaque onde.

Nous notons ϵ la porosité locale, à valeurs dans $[0, 1]$, qui sera supposée ne dépendre que de la variable d'espace, et sera donnée par l'utilisateur. Nous utiliserons en outre les notations classiques $\rho_k, \alpha_k, U_k, P_k, E_k, e_k$ pour représenter les densités de phase, les taux de présence volumique, les vitesses phasiques, les pressions au sein de chaque phase, les énergies totales phasiques et les énergies internes. La donnée des lois d'état permettra d'évaluer $E_k = 0.5\rho_k U_k U_k + \rho_k e_k(P_k, \rho_k)$, et les masses partielles seront notées $m_k = \alpha_k \rho_k$. La variable d'état sera :

$$W^t = (\epsilon, \alpha_2, \epsilon m_1, \epsilon m_2, \epsilon m_1 U_1, \epsilon m_2 U_2, \epsilon \alpha_1 E_1, \epsilon \alpha_2 E_2) \tag{1}$$

Nous considérons le modèle suivant pour représenter l'écoulement diphasique en milieu poreux :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + V_i \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = \phi_k \\ \frac{\partial \epsilon m_k}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon m_k U_k}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \epsilon m_k U_k}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon m_k U_k^2}{\partial x} + \epsilon \alpha_k \frac{\partial P_k}{\partial x} + \epsilon (P_k - P_i) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = \epsilon D_k \\ \frac{\partial \epsilon \alpha_k E_k}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon \alpha_k U_k (E_k + P_k)}{\partial x} + \epsilon P_i \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = \epsilon \Phi_k \end{array} \right. \tag{2}$$

Des lois de fermeture pour V_i, P_i , mais également pour les termes sources $\phi_k(W), D_k(W), \Phi_k(W)$ doivent compléter ce système d'équations aux dérivées partielles. On précise ici que D_k et Φ_k représentent les termes de transfert interfacial de quantité de mouvement et d'énergie. Les contraintes suivantes doivent être assurées :

$$\sum_{k=1}^2 \alpha_k = 1 ; \quad \sum_{k=1}^2 \Phi_k(W) = 0 ; \quad \sum_{k=1}^2 D_k(W) = 0 ; \quad \sum_{k=1}^2 \phi_k(W) = 0 \tag{3}$$

2. Lois de fermeture compatibles avec l'inégalité d'entropie

On introduit pour chaque phase les célérités c_k et les entropies S_k définies par :

$$(c_k)^2 = \frac{\gamma_k P_k}{\rho_k} = \left(\frac{P_k}{(\rho_k)^2} - \frac{\partial e_k(P_k, \rho_k)}{\partial \rho_k} \right) \left(\frac{\partial e_k(P_k, \rho_k)}{\partial P_k} \right)^{-1}$$

$$\gamma_k P_k \frac{\partial S_k(P_k, \rho_k)}{\partial P_k} + \rho_k \frac{\partial S_k(P_k, \rho_k)}{\partial \rho_k} = 0$$

On introduit les températures T_k , qui sont telles que :

$$\frac{1}{T_k} = \left(\frac{\partial S_k(P_k, \rho_k)}{\partial P_k} \right) \left(\frac{\partial e_k(P_k, \rho_k)}{\partial P_k} \right)^{-1}$$

et on définit l'entropie : $S = \epsilon(m_1 S_1 + m_2 S_2)$, et le flux d'entropie convectif : $f_S = \epsilon(m_1 S_1 U_1 + m_2 S_2 U_2)$. Enfin, on retient les fermetures suivantes pour les grandeurs d'interface V_i, P_i :

$$V_i = \mu(W)U_1 + (1 - \mu(W))U_2 \quad P_i = P_i^0(W) + \delta P_i^1(W, \nabla W) \quad (4)$$

avec $\mu(W)$ dans l'intervalle $[0, 1]$ supposé connu. Cette fonction $\mu(W)$ sera précisée dans la Proposition 3. Les solutions régulières du système diphasique vérifient alors l'équation :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial f_S}{\partial x} + \epsilon((P_i - P_1)(U_1 - V_i)/T_1 + (P_i - P_2)(V_i - U_2)/T_2) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \epsilon(m_1 R_1 + m_2 R_2) \quad (5)$$

avec : $m_k R_k = (\Phi_k - D_k U_k - \phi_k(P_i - P_k))/T_k$. Dès lors, si l'on considère les lois de fermeture $P_i^0(W)$ et $\delta P_i^1(W, \nabla W)$ suivantes :

$$\begin{cases} P_i^0(W) = ((1 - \mu(W))P_1/T_1 + \mu(W)P_2/T_2) / ((1 - \mu(W))/T_1 + \mu(W)/T_2) \\ \delta P_i^1(W, \nabla W) = C(W)(m_1 + m_2)(U_1 - U_2)^2 \operatorname{sg}\left((U_2 - U_1) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right) \end{cases} \quad (6)$$

où $C(W)$ est une fonction adimensionnelle à valeurs positives, la loi d'évolution d'entropie S prendra la forme :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial f_S}{\partial x} \geq \epsilon(m_1 R_1 + m_2 R_2) \quad (7)$$

Les relations (4), (6) déterminent totalement P_i . On remarque que les lois de fermeture pour P_i satisfont le principe d'objectivité, et qu'en outre, dans le cas d'un équilibre local simultanément des vitesses et pressions phasiques, i.e. $P_1 = P_2 = \pi$ et $U_1 = U_2 = U$, on aura : $P_i = \pi$. La contribution δP_i^1 prend en compte le déséquilibre cinématique local instantané de vitesse de phase, et contribue dans (5) à la production d'entropie du système. Lorsque $C(W) = 0$, le troisième terme dans l'équation (5) est nul. Il reste maintenant à munir le modèle de lois de fermeture pour les inconnues $\phi_2(W)$, $D_2(W)$, $\Phi_2(W)$, et à préciser $\mu(W)$ qui donnera la vitesse d'interface V_i .

Propriété 1. On pose : $\Phi_k = \psi_k + V_i D_k$, pour $k = 1, 2$, et on note $k' = 3 - k$. Les fermetures suivantes :

$$\psi_k = K_T(1/T_k - 1/T_{k'}) + \phi_k \delta P_i^1, \quad D_k = K_U(U_{k'} - U_k), \quad \phi_k = K_P(P_k - P_{k'}) \quad (8)$$

assurent un bilan d'entropie physiquement admissible, si K_T, K_U, K_P sont à valeurs positives, puisque :

$$0 \leq \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial f_S}{\partial x} \quad (9)$$

Lorsque $C(W) = 0$, on note que les modèles (8) sont conformes à ceux proposés dans la littérature (voir [4,1, 2,7,5]). Ils s'évanouissent lorsque les écarts de température, de vitesse et de pression s'annulent. Ces modèles sont distincts de ceux proposés dans [6,8], où $P_i = \alpha_2 P_1 + \alpha_1 P_2$. Il existe une analogie formelle entre le modèle discret limite ([3], p. 308) issu de l'approche DEM, et le modèle continu dissipatif (6) lorsque $C(W)$ est non nul.

3. Nature du système convectif

Propriété 2.

- Le système convectif associé à la partie homogène du premier ordre de (2) admet les valeurs propres suivantes : $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = V_i$, $\lambda_2 = U_1$, $\lambda_3 = U_1 - c_1$, $\lambda_4 = U_1 + c_1$, $\lambda_5 = U_2$, $\lambda_6 = U_2 - c_2$, $\lambda_7 = U_2 + c_2$. L'espace engendré par les vecteurs propres associés est de dimension 8 si et seulement si : $|V_i - U_k| \neq c_k$, et $|U_k| \neq c_k$, pour $k = 1, 2$. Si une de ces conditions est violée, la résonance apparaît.
- Les champs associés aux valeurs propres $\lambda_0, \lambda_2, \lambda_5$ sont linéairement dégénérés, et les champs associés aux valeurs propres $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_6, \lambda_7$ sont vraiment non linéaires.

La nature du champ associé à λ_1 est donnée par la propriété suivante, équivalente à celle donnée dans [1,2] :

Propriété 3. Le champ associé à la valeur propre λ_1 est linéairement dégénéré si :

$$V_i = U_1, \quad \text{ou} : V_i = U_2, \quad \text{ou} : V_i = \frac{m_1 U_1 + m_2 U_2}{m_1 + m_2} \tag{10}$$

Il est clair que la probabilité d'occurrence de la résonance est faible dans un écoulement de type eau-vapeur en régime fortement pressurisé tel que ceux que l'on trouve dans un circuit primaire de centrale nucléaire. Le cas où $V_i = U_1$, associé donc via l'équation (6) à $P_i = P_2$, correspond au modèle de Baer–Nunziato [4] (voir aussi [5,7,9,3]). Par la suite, on considérera les fermetures pour V_i de type (10). Les lois (10) sont clairement distinctes de celles proposées dans [6] - $V_i = \alpha_2 U_1 + \alpha_1 U_2$ - ou dans [8] - $V_i = (U_1 + U_2)/2$ -. On rappelle que cette dernière joue un rôle particulier dans le bilan d'entropie (5), puisqu'elle fait disparaître les contributions de vitesse relative. Bien que la démarche soit totalement différente, l'objectif ici est comme dans [9,3], de gérer la présence des termes convectifs non conservatifs.

4. Comportement du système à la traversée de l'onde stationnaire

Le champ associé à l'onde stationnaire correspond à une éventuelle variation brusque de porosité. Cet élément est fondamental, et constitue une difficulté «classique». Dans un cadre non dissipatif, on peut assimiler le comportement du fluide à celui des invariants de Riemann $I_k^0(W)$ de l'onde considérée, soit $I_k^0(W_l) = I_k^0(W_r)$, sachant que :

Propriété 4. Les invariants de Riemann de l'onde stationnaire associée à λ_0 sont :

$$\begin{aligned} I_1^0(W) &= \alpha_2; & I_2^0(W) &= S_1; & I_3^0(W) &= S_2 \\ I_4^0(W) &= \epsilon m_1 U_1; & I_5^0(W) &= \epsilon m_2 U_2 \\ I_6^0(W) &= e_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{U_1^2}{2}; & I_7^0(W) &= e_2 + \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{U_2^2}{2} \end{aligned}$$

5. Relations de saut dans les ondes simples

On s'intéresse au problème de Riemann unidimensionnel associé au système convectif pur issu de (2), et doté de conditions initiales discontinues W_L et W_R de part et d'autre de l'interface initiale située en $x = 0$. On se restreint au cas où le modèle de vitesse interfaciale V_i garantit que l'onde associée à λ_1 est linéairement dégénérée. Dans ce cadre, la solution auto-similaire $\alpha_2(x, t) = \alpha_2(x/t)$ est simple. En effet, on aura :

$$\alpha_2(x, t) = \alpha_L \quad \text{si} : x/t < V_i; \quad \alpha_2(x, t) = \alpha_R \quad \text{si} : x/t > V_i \tag{11}$$

Dans le cas d'une onde simple *non stationnaire* se déplaçant à la vitesse σ , et en l'absence de phénomène de résonance, les relations de saut à la traversée d'une discontinuité séparant deux états W_l et W_r seront données par :

$$\Delta(\alpha_k) = 0; \quad \Delta(\rho_k(U_k - \sigma)) = 0 \tag{12}$$

$$\Delta(\rho_k U_k(U_k - \sigma) + P_k) = 0; \quad \Delta(E_k(U_k - \sigma) + P_k U_k) = 0 \tag{13}$$

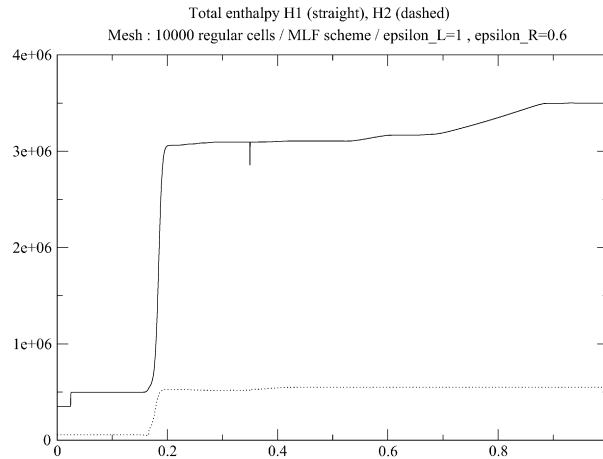


Fig. 1. Enthalpies totales $h_k + U_k^2/2$ ($k = 1, 2$) au voisinage de l'interface située en $x = 0,35$ séparant le milieu fluide (à gauche, $\epsilon = 1$) et le milieu poreux (à droite, $\epsilon = 0,6$) pour un maillage régulier comportant 10000 mailles. A l'instant initial, un problème de Riemann déclenché en $x = 0,3$ a généré une onde de détente qui a traversé l'interface fluide/poreux. Le cas a été simulé avec un schéma de Rusanov modifié.

Fig. 1. Total enthalpies $h_k + U_k^2/2$ ($k = 1, 2$) close to the interface at $x = 0.35$ separating the fluid medium (left, $\epsilon = 1$) and the porous medium (right $\epsilon = 0.6$) for a regular mesh of 10000 cells. At the beginning, a Riemann problem started at $x = 0.3$ has generated an expansion wave which has crossed the fluid/porous medium interface. This example has been simulated with a modified Rusanov scheme.

si $\sigma \neq V_i$, et en notant $\Delta(\psi) = \psi_r - \psi_l$. Par contre, si l'on s'intéresse à l'onde associée à $\sigma = V_i$, séparant deux états W_l et W_r , ceux-ci seront tels que :

$$I_k^1(W_l) = I_k^1(W_r)$$

$I_k^1(W)$ désignant un invariant de Riemann de l'onde λ_1 . Si l'on s'intéresse au cas $V_i = U_1$, ceux-ci s'écrivent :

$$I_1^{1-2}(W) = \epsilon, \quad I_2^{1-2}(W) = m_2(U_2 - U_1), \quad I_3^{1-2}(W) = S_2(P_2, \rho_2), \quad I_4^{1-2}(W) = U_1$$

$$I_5^{1-2}(W) = (1 - \alpha_2)P_1 + \alpha_2 P_2 + m_2(U_2 - U_1)^2, \quad I_6^{1-2}(W) = e_2(P_2, \rho_2) + \frac{P_2}{\rho_2} + (U_2 - U_1)^2/2$$

l'onde associée à U_1 étant double. Le cas $V_i = U_2$ est symétrique. Si : $V_i = (m_1 U_1 + m_2 U_2)/(m_1 + m_2)$, on renvoie à [1]. On dispose donc d'un unique jeu de relations de saut pour une onde de choc simple. Ceci permet dès lors d'envisager de manière raisonnable la simulation du système (2) à l'aide de techniques classiques de type Volumes Finis (voir [10]). Il est clair que la simulation d'écoulements passant brutalement d'un milieu fluide ($\epsilon = 1$) à un milieu uniformément poreux ($\epsilon = 0,6$) est assez délicate (voir la Fig. 1, qui donne, pour un schéma classique, la représentation sur un maillage assez fin des invariants $I_6^0(W)$ et $I_7^0(W)$), et nécessite le développement de schémas numériques adaptés [10].

6. Conclusion

Le modèle d'écoulement diphasique bifluide poreux proposé, qui est doté d'une inégalité d'entropie physique, vérifie les propriétés attendues (hyperbolicité, caractérisation entropique, relations de saut uniques). La prise en compte du transfert de masse entre phases ne modifie pas la construction globale (voir [14,11]). L'extension des résultats au cadre multi-dimensionnel est immédiate. Le formalisme peut aussi être étendu au cadre de modèles à trois phases tels que ceux introduits dans [11]. Le modèle permet également de simuler sur maillage *grossier* les modèles bi-fluides classiques, en s'inspirant notamment des travaux décrits dans [12,14,15,13]. L'introduction d'une équation d'aire interfaciale (voir par exemple [16]) pourrait vraisemblablement permettre d'améliorer la qualité du modèle, sans modifier les propriétés structurelles du modèle considéré.

Remerciements

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre du projet NEPTUNE, financé par le CEA (Commissariat à l’Energie Atomique), EDF, l’IRSN (Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire) et AREVA-NP.

Références

- [1] F. Coquel, T. Gallouët, J.M. Hérard, N. Seguin, Closure laws for a two-fluid two-pressure model, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 332 (2002) 927–932.
- [2] T. Gallouët, J.M. Hérard, N. Seguin, Numerical modelling of two phase flows using the two-fluid two-pressure approach, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 14 (5) (2004) 663–700.
- [3] R. Saurel, S. Gavrilyuk, F. Renaud, A multiphase model with internal degrees of freedom: application to shock-bubble interaction, *J. Fluid Mech.* 495 (2005) 283–322.
- [4] M.R. Baer, J.W. Nunziato, A two-phase mixture theory for the deflagration to detonation transition (DDT) in reactive granular materials, *Int. J. Multiphase Flow* 12 (6) (1986) 861–889.
- [5] A.K. Kapila, S.F. Son, J.B. Dzil, R. Menikoff, D.S. Stewart, Two-phase modeling of a DDT: structure of the velocity relaxation zone, *Phys. Fluids* 9 (12) (1997) 3885–3897.
- [6] J. Glimm, D. Saltz, D.H. Sharp, Two-phase flow modelling of a fluid mixing layer, *J. Fluid Mech.* 378 (1999) 119–143.
- [7] S. Gavrilyuk, R. Saurel, Mathematical and numerical modelling of two-phase compressible flows with micro-inertia, *J. Comp. Phys.* 175 (2002) 326–360.
- [8] D. Lhuillier, A mean field description of two-phase flows with phase changes, *Int. J. Multiphase Flow* 29 (2003) 511–525.
- [9] M. Papin, R. Abgrall, Fermetures entropiques pour les systèmes bifluïdes à sept équations, *C. R. Mécanique* 333 (2005) 838–842.
- [10] F. Archambeau, L. Girault, J.M. Hérard, O. Hurisse, Computing hyperbolic two-fluid models with a porous interface, in: *Proceedings of Finite Volumes for Complex Applications V*, Aussois, France, June 8–13, ISTE-Wiley, 2008, pp. 193–200.
- [11] J.M. Hérard, A three-phase flow model, *Math. Comput. Modelling* 45 (2007) 732–755.
- [12] J.M. Hérard, O. Hurisse, A simple method to compute two-fluid models, *Int. J. Comp. Fluid Dynam.* 19 (7) (2005) 475–482.
- [13] J.M. Hérard, A relaxation scheme to compute three-phase flow models, AIAA paper 2007-4455, <http://www.aiaa.org/>, 2007.
- [14] V. Guillemaud, Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques par une approche bifluïde à deux pressions, Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille I, Marseille, France, 27/03/2007.
- [15] S.T. Munkejord, Comparison of Roe-type methods for solving the two-fluid model with and without pressure relaxation, *Computers and Fluids* 36 (2007) 1061–1080.
- [16] D. Lhuillier, Evolution of the volumetric interfacial area in two-phase mixtures, *C. R. Mécanique* 332 (2004) 103–108.