Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Mecanique 336 (2008) 500–505
Comptes Rendus Mecanique
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Sur le problème de propagation de fissure en élastoplasticité : approches primale et duale

Claude Stolz

Laboratoire de mécanique des solides, École polytechnique, CNRS UMR7649, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 22 décembre 2007 ; accepté après révision le 18 mars 2008

Disponible sur Internet le 28 avril 2008

Présenté par Huy Duong Bui

Résumé

La formulation du problème en vitesse de fissure et de déplacement est discutée lorsque le critère de propagation est fondé sur l'analyse de la dissipation. On se place alors dnas le cas de critère énergétique comme proposé (Nguyen, 1985) et généralisé récemment au cas des matériaux élastoplastiques (Stolz, 2008). On obtient alors les formulations primale et duale du problème d'évolution de la propagation de la fissure en élastoplasticité. ***Pour citer cet article : C. Stolz, C. R. Mecanique 336 (2008).***

Abstract

On crack propagation in an elastoplastic material: primal and dual approaches to the boundary value problem. We study the rate boundary value problem concerning crack propagation in an elastoplastic material. The formulation is given when the criterium of propagation is based on a energy release rate. Primal and dual approaches of the boundary value problem of evolution are proposed. ***To cite this article: C. Stolz, C. R. Mecanique 336 (2008).***

Mots-clés : Rupture ; Problèmes d'évolution ; Approches primale et duale ; Mécanique de la rupture ; Propagation de fissures, élastoplasticié

Keywords: Rupture; Boundary value problem; Dual and primal approach; Fracture mechanics; Elastoplastic materials

Abridged English version

We study the rate boundary value problem for the evolution of a crack. The crack propagation is governed by an energetical criterium.

Following the definition of the energy release rate, defined in a preceding note [1], we consider the case of the crack propagation in a elastoplastic material. The considered energy release rate is the thermodynamical force associated with the propagation of the crack. The energy release rate is determined in terms of potential energy or complementary energy, first in elasticity (2), secondly in elastoplasticity (3). With these definitions, the law of propagation is given as a Griffith law (1). We study the formulation of the rate boundary value problem for the evolution of a crack in an

Adresse e-mail : stolz@lms.polytechnique.fr.

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2008.03.005

elastoplastic material. To determine the crack propagation, the evolution of the energy release rate is characterized in (5) or (6). In fracture mechanics, the local fields are singular or have strong discontinuities along surfaces. To isolate local singularities or accompanying discontinuities the whole volume is decomposed in two subvolumes, a small one, which is considered in translation with the crack, and the complementary part. The local equations of evolution are given in terms of Hill's or complementary hypoelastic potentials (12), (13). The solution of the problem of evolution in terms of the rate of displacement and velocity of the crack is given by the solution of a variational inequality.

Primal (16) and dual (18) formulations are proposed and elements of the proof are given.

1. Introduction

On étudie la propagation d'une fissure droite de direction $\underline{e}_1$ dans un milieu continu de volume Ω. Sur la frontière $\partial\Omega_{\mathrm{T}}$, on impose des efforts $\underline{\mathrm{T}}^d$, sur la partie complémentaire $\partial\Omega_{\mathrm{u}}$ le déplacement $\underline{u}^d$. Les lèvres de la fissures sont supposées libres de contrainte. En mécanique de la rupture fragile, le comportement du matériau est supposé élastique linéaire, l'énergie de déformation $w(\varepsilon)$ est une fonction quadratique de la déformation ε définie à partir du déplacement $\underline{u}$:

$$w(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \underline{u} + \operatorname{grad}^t \underline{u}) \tag{1}$$

On note σ le champ de contrainte associé à la déformation par ce comportement.

Le critère de propagation d'une fissure est celui proposé par Griffith. Ce critère s'exprime en terme de taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}$ sous la forme $\mathcal{G} - G_c \leqslant 0$, G_c étant la valeur caractéristique du matériau vis-à-vis de la rupture. Le taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}$ est défini à partir de l'énergie potentielle du système $\mathcal{E}$ par

$$\mathcal{E}(\underline{u}, l) = \int_{\Omega(l)} w(\varepsilon)\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega_{\mathrm{T}}} \underline{\mathrm{T}}^d \cdot \underline{u}\,\mathrm{d}s, \qquad \mathcal{G} = -\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial l} = \int_{\Gamma} w(\varepsilon) n_1 - \underline{n} \cdot \sigma \cdot u_{,1}\,\mathrm{d}s = J_\Gamma \tag{2}$$

La position d'équilibre du système à longueur de fissure l donnée minimise l'énergie potentielle $\mathcal{E}$ sur l'ensemble des champs de déplacements $\underline{u}$ cinématiquement admissibles avec les conditions aux limites en déplacement $\underline{u} = \underline{u}^d$ sur $\partial\Omega_{\mathrm{u}}$. La solution du problème d'équilibre est le champ de déplacement $\underline{u}^{sol}(l, \underline{u}^d, \underline{\mathrm{T}}^d)$. De même, on définit une approche duale de l'équilibre du système à l'aide de l'énergie complémentaire

$$\mathcal{E}^*(\sigma, l) = -\int_{\Omega(l)} w^*(\sigma)\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_{\mathrm{u}}} \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}^d\,\mathrm{d}s \tag{3}$$

Dans cette approche, le taux de restitution d'énergie prend la forme de l'intégrale duale de Bui [2] :

$$I_\Gamma = J_\Gamma = \int_\Gamma -w^*(\sigma) n_1 + \underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{u}\,\mathrm{d}s = \mathcal{G} \tag{4}$$

L'égalité des deux intégrales de contour résulte de l'égalité des énergies potentielle et complémentaire pour l'état d'équilibre sous le chargement $(\underline{u}^d, \underline{\mathrm{T}}^d)$ du volume Ω à longueur de fissure donnée et de la relation classique définissant l'énergie complémentaire :

$$w^*(\sigma) + w(\varepsilon) = \sigma \cdot \varepsilon \tag{5}$$

En élastoplasticité un résultat identique est obtenu en considérant le cas éventuel d'existence de discontinuités de champs mécaniques. A l'aide de la condition d'invariance des intégrales de contour, on a montré dans [1] que

$$\mathcal{G} = \int_\Gamma w n_1 - \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}_{,1}\,\mathrm{d}s + \int_{\Omega_\Gamma} A : \alpha_1\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma -w^* n_1 + \underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{u}\,\mathrm{d}s - \int_{\Omega_\Gamma} A_{,1} : \alpha\,\mathrm{d}\Omega \tag{6}$$

L'énergie w devient une fonction de la déformation ε et de paramètres internes α. Les équations d'état de comportement sont alors définies par

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}, \qquad A = -\frac{\partial w}{\partial \alpha} \tag{7}$$

et l'énergie complémentaire prend la forme

$$w^*(\sigma, A) = \sigma : \varepsilon - A : \alpha - w(\varepsilon, \alpha) \tag{8}$$

1.1. Étude de la propagation

La vitesse $\dot{l}$ de propagation de la fissure est déterminée par la condition de cohérence avec le critère $\mathcal{G} \leqslant G_c$ à tout instant. La condition de propagation s'écrit ainsi

$$\big(\mathcal{G}\big(l(t), \underline{u}^d(t), \underline{\mathrm{T}}^d(t)\big) - G_c\big)\dot{l} = 0 \tag{9}$$

ce qui est équivalent à

$$\mathcal{G} \leqslant G_c, \quad \dot{l} = 0, \qquad \mathcal{G} = G_c, \quad \dot{l} \geqslant 0 \tag{10}$$

Le problème d'évolution est alors déterminé par la relation

$$\dot{\mathcal{G}}(\dot{l} - \mu) \geqslant 0 \tag{11}$$

pour tout $\mu \geqslant 0$ aux points où $\mathcal{G} = G_c$. Il convient donc de caractériser $\dot{\mathcal{G}}$.

On considère le volume Ω_Γ en translation avec la fissure à la vitesse $\dot{l}$, on note f^* la vitesse de f dans le repère mobile associé à Ω_Γ. La ligne de discontinuité S avance à la vitesse de propagation normale ϕ donnée par la vitesse de translation $\dot{l}\underline{e}_1$. Dans ce repère la variation de $\mathcal{G}$ est définie par

$$\dot{\mathcal{G}} = \int_S [\sigma]_S : \nabla \overset{*}{\underline{v}} - \overset{*}{\sigma} : [\nabla \underline{u}]_S - [A . \overset{*}{\alpha}]_S \, \mathrm{d}s \tag{12}$$

A partir de l'invariance des taux de restitution d'énergie [1], on retrouve la forme proposée par Nguyen [3]

$$\dot{\mathcal{G}} = \int_\Gamma (\underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \overset{*}{\underline{u}} - \underline{n} \cdot \overset{*}{\sigma} \cdot \underline{u}_{,1}) \, \mathrm{d}s + \int_{\Omega_\Gamma} (\overset{*}{\sigma} : \varepsilon_{,1} - \sigma_{,1} : \overset{*}{\varepsilon}) \, \mathrm{d}\Omega \tag{13}$$

Cette forme est analogue à l'expression de la dissipation plastique donnée par Mandel [4].

2. Approche du problème d'évolution

On introduit la vitesse $\hat{f}$ de la quantité f, telle que

$$\hat{f} = \dot{f}, \quad \text{dans } \Omega/\Omega_\Gamma, \qquad \hat{f} = \overset{*}{f}, \quad \text{dans } \Omega_\Gamma \tag{14}$$

La vitesse $\hat{f}$ est discontinue sur Γ, car à tout instant la quantité f est continue

$$\dot{f} = \overset{*}{f} - \dot{l} f_{,1}; \qquad [\hat{f}]_\Gamma + \dot{l} f_{,1} = 0 \tag{15}$$

Une solution du problème aux limites en vitesse de propagation vérifient l'ensemble des équations locales :

La cinématique : Le champ de vitesse déformation est défini à l'aide des vitesses $\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \hat{\underline{u}} + \nabla \hat{\underline{u}})^T$ dans Ω, les vitesses vérifient les conditions aux limites $\hat{\underline{u}} = \dot{\underline{u}}^d$ sur $\partial\Omega_{\mathrm{u}}$, et aux discontinuités $[\hat{\underline{u}}]_\Gamma + \dot{l}\underline{u}_{,1} = 0$ sur Γ.

Les équations d'équilibre : De champs $\operatorname{div} \hat{\sigma} = 0$ dans Ω, les conditions aux limites $\hat{\sigma} \cdot \underline{n} = \dot{\underline{T}}^d$, et l'équation aux discontinuités $\underline{n} \cdot [\hat{\sigma}]_\Gamma + \dot{l}\sigma_{,1}.\underline{n} = 0$ sur Γ.

La loi de comportement :

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma} \\ -\dot{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w''_{\varepsilon\varepsilon} & w''_{\varepsilon\alpha} \\ w''_{\alpha\varepsilon} & w''_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Les paramètres d'écrouissage vérifient la régle de normalité associée au domaine d'élasticité défini par la fonction convexe f :

$$f(A) \leqslant 0, \quad \dot{\alpha} = \lambda N, \quad N = \frac{\partial f}{\partial A}, \lambda \geqslant 0, \lambda f(A) = 0 \tag{17}$$

La loi de propagation :

$$\dot{l}(\mathcal{G} - G_c) = 0, \quad \dot{l} \geqslant 0, \qquad \dot{J}_s = \dot{I}_s = 0 \tag{18}$$

On note $C = W''_{\varepsilon\varepsilon}, L = W''_{\varepsilon\alpha}, Z = W''_{\alpha\alpha}$. Les relations de comportement se mettent sous la forme habituelle grâce au potentiel hypoélastique au sens de Hill $U(\dot{\varepsilon})$

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \dot{\varepsilon}}, \qquad U(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\dot{\varepsilon} : C : \dot{\varepsilon} - \frac{1}{2}\frac{\langle N^T \cdot L^T \cdot \dot{\varepsilon}\rangle^2}{N^T \cdot Z \cdot N} \tag{19}$$

ou bien du potentiel complémentaire $U^*(\dot{\sigma})$.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial U^*}{\partial \dot{\sigma}}, \qquad U^*(\dot{\sigma}) = \frac{1}{2}\dot{\sigma} \cdot C^{-1} : \dot{\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\langle N^T \cdot L^T \cdot C^{-1} \cdot \dot{\sigma}\rangle^2}{N^T \cdot L^T \cdot C^{-1} \cdot L \cdot N - N^T \cdot Z \cdot N} \tag{20}$$

Remarque. On prend comme champ à déterminer la dérivée $\hat{f}$. Ce champ présente des discontinuités le long du contour Γ en effet

$$[\hat{\varepsilon}]_\Gamma + \dot{l}[\underline{u}_{,1}]_\Gamma = 0, \qquad [\hat{\sigma}]_\Gamma \cdot \underline{n} + \dot{l}\underline{n} \cdot [\sigma_{,1}]_\Gamma = 0 \tag{21}$$

Dans le volume V_Γ, les relations de comportement s'expriment sous la forme

$$\hat{\varepsilon} - \dot{l}\varepsilon_{,1} = \frac{\partial U^*}{\partial \dot{\sigma}}(\hat{\sigma} - \dot{l}\sigma_{,1}), \qquad \hat{\sigma} - \dot{l}\sigma_{,1} = \frac{\partial U}{\partial \dot{\varepsilon}}(\hat{\varepsilon} - \dot{l}\varepsilon_{,1}) \tag{22}$$

3. Formulation primale du problème en vitesse

Introduisons la fonctionnelle $\mathcal{F}$ associée au potentiel de Hill

$$\mathcal{F} = \int_{\Omega/\Omega_\Gamma} U(\hat{\varepsilon})\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_\Gamma} U(\hat{\varepsilon} - \dot{l}\varepsilon_{,1})\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_\Gamma} \left(\dot{l}\sigma_{,1} : \hat{\varepsilon} - \frac{1}{2}\dot{l}^2\sigma_{,1} : \varepsilon_{,1}\right)\mathrm{d}\Omega$$
$$+ \int_\Gamma \left(-\dot{l}\underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{\hat{u}}^- + \frac{1}{2}\dot{l}^2\underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{u}_{,1}\right)\mathrm{d}S - \int_{\partial\Omega_\mathrm{T}} \underline{\dot{T}}^d \cdot \underline{\hat{u}}\,\mathrm{d}S$$

3.1. Propriétés

La solution du problème en vitesse $(\underline{\hat{u}}, \dot{l})$ vérifie l'inéquation variationnelle

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\hat{u}}}(\underline{\hat{u}} - \underline{\tilde{u}}) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{l}}(\dot{l} - \tilde{l}) \leqslant 0 \tag{23}$$

sur l'ensemble des champs admissibles $\mathcal{K} = \{(\underline{v}, \tilde{l})/[\underline{v}]_\Gamma + \tilde{l} \cdot \underline{u}_{,1} = 0, \text{sur } \Gamma,\ \tilde{l} \geqslant 0, \text{et } \underline{v} = 0, \text{sur } \partial\Omega_\mathrm{u}\}$.

3.2. Éléments de preuve

Les variations de $\mathcal{F}$ vérifient

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\hat{u}}}\delta\underline{\hat{u}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{l}}\delta l = \int_{\Omega/\Omega_\Gamma} \hat{\sigma} : \delta\hat{\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_\Gamma} (\hat{\sigma} - \dot{l}\sigma_{,1}) : (\delta\hat{\varepsilon} - \delta l\varepsilon_{,1})\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_\Gamma} (\delta l\sigma_{,1} : \hat{\varepsilon} + \dot{l}\sigma_{,1} : \delta\hat{\varepsilon} - \dot{l}\delta l\sigma_{,1} : \varepsilon_{,1})\,\mathrm{d}\Omega$$
$$+ \int_\Gamma (-\delta l\underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{\hat{u}}_- - \dot{l}\underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \delta\underline{\hat{u}}^- + \dot{l}\delta l\underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{u}_{,1})\,\mathrm{d}S - \int_{\partial\Omega_\mathrm{T}} \dot{T} \cdot \delta\underline{\hat{u}}\,\mathrm{d}S$$

Après intégration par parties,

$$\delta\mathcal{F} = \int_{\Omega} -\operatorname{div}\hat{\sigma}\cdot\delta\underline{\hat{u}}\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \underline{n}\cdot[\hat{\sigma}\cdot\delta\underline{\hat{u}}]_{\Gamma}\,\mathrm{d}S + \int_{\Omega_\Gamma} \delta l(\sigma_{,1}:\hat{\varepsilon} - \hat{\sigma}:\varepsilon_{,1})\,\mathrm{d}\Omega$$
$$+ \int_{\Gamma} (-\delta l\underline{n}\cdot\sigma_{,1}\cdot\underline{\hat{u}}_{-} - \dot{l}\underline{n}\cdot\sigma_{,1}\cdot\delta\underline{\hat{u}}^{-} + \dot{l}\delta l\underline{n}\cdot\sigma_{,1}\cdot\underline{u}_{,1})\,\mathrm{d}S - \int_{\partial\Omega_{\mathrm{T}}} (\dot{T} - \hat{\sigma}\cdot u)\cdot\delta\underline{\hat{u}}\,dS$$

On trouve les équations d'équilibre $\operatorname{div}\hat{\sigma} = 0$ dans Ω et $\dot{T} = \hat{\sigma}\cdot\underline{n}$ sur $\partial\Omega_T$. Puis utilisant la relation de saut pour les variations $[\delta\underline{\hat{u}}]_\Gamma + \delta l\underline{u}_{,1} = 0$, on obtient finalement pour les variations

$$\delta\mathcal{F} = \delta l\left[\int_{\Omega_\Gamma} (\sigma_{,1}:\hat{\varepsilon} - \hat{\sigma}:\varepsilon_{,1})\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \underline{n}\cdot\hat{\sigma}^{-}\cdot\underline{u}_{,1} - \underline{n}\cdot\sigma_{,1}\cdot\underline{\hat{u}}^{-}\,\mathrm{d}S\right] + \int_{\Gamma} \underline{n}\cdot\big([\hat{\sigma}]_\Gamma + \dot{l}\sigma_{,1}\big)\cdot\delta\underline{\hat{u}}^{-}\,\mathrm{d}S \tag{24}$$

qui sont les expressions d'une part de $\dot{\mathcal{G}}$ et d'autre part de la condition de saut en contrainte. Ce qui généralise les résultats obtenus en [5].

4. Formulation duale du problème en vitesse

Introduisons la fonctionnelle $\mathcal{F}^*$ associée au potentiel complémentaire des vitesses de contrainte et d'avancée de fissure :

$$\mathcal{F}^* = \int_{\Omega/V_\Gamma} -U^*(\hat{\sigma})\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_\Gamma} U^*(\hat{\sigma} - \dot{l}\sigma_{,1})\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_\Gamma} \left(-\dot{l}\hat{\sigma}:\varepsilon_{,1} + \frac{\dot{l}^2}{2}\sigma_{,1}:\varepsilon_{,1}\right)\mathrm{d}\Omega$$
$$+ \int_{\Gamma} \left(\dot{l}\underline{n}\cdot\hat{\sigma}^{-}\cdot\underline{u}_{,1} - \frac{\dot{l}^2}{2}\underline{n}\cdot\sigma_{,1}\cdot\underline{u}_{,1}\right)\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega_{\mathrm{u}}} \underline{n}\cdot\hat{\sigma}\cdot\underline{\dot{u}}^d\,\mathrm{d}s$$

définie sur l'ensemble des vitesses $(\hat{\sigma}, \dot{l})$ admissibles c'est à dire qui vérifient $\operatorname{div}\hat{\sigma} = 0$ dans Ω, $\hat{\sigma}\cdot\underline{n} = \dot{T}^d$ sur $\partial\Omega_{\mathrm{T}}$, $\underline{n}\cdot[\hat{\sigma}]_\Gamma + \dot{l}\underline{n}\cdot\sigma_{,1} = 0$ sur Γ.

4.1. Propriétés

La solution du problème d'évolution vérifie l'inéquation variationnelle

$$\frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial\hat{\sigma}}\cdot(\hat{\sigma} - \tilde{\sigma}) + \frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial\dot{l}}(\dot{l} - \tilde{l}) \leqslant 0 \tag{25}$$

pour tout champ $\tilde{\sigma}, \tilde{l}$ admissibles.

4.2. Éléments de preuve

Étudions les variations de la fonctionnelle $\mathcal{F}^*$.

$$\delta\mathcal{F}^* = \frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial\hat{\sigma}}\cdot\delta\sigma + \frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial l}\delta l = -\int_{\Omega/V_\Gamma} \delta\sigma:\hat{\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_\Gamma} (\delta\sigma - \delta l\sigma_{,1}):(\hat{\varepsilon} - \dot{l}\varepsilon_{,1})\,\mathrm{d}\Omega$$
$$- \int_{\Omega_\Gamma} (\delta l\varepsilon_{,1}:\hat{\sigma} + \dot{l}\varepsilon_{,1}:\delta\sigma - \dot{l}\delta l\sigma_{,1}:\varepsilon_{,1})\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} (\delta l\underline{n}\cdot\hat{\sigma}^{-}\cdot\underline{u}_{,1} + \dot{l}\underline{n}\cdot\delta\sigma^{-}\cdot\underline{u}_{,1} - \dot{l}\delta l\underline{n}\cdot\sigma_{,1}\cdot\underline{u}_{,1})\,\mathrm{d}S$$

Puis par intégration par parties et réduction, compte tenu que $\delta\sigma$ vérifie les équations de l'équilibre, les champs de déformations $\hat{\varepsilon}$ sont alors compatibles, il existe donc un déplacement $\underline{\hat{u}}$ tel que

$$2\hat{\varepsilon} = \operatorname{grad}\underline{\hat{u}}^t + \operatorname{grad}\underline{\hat{u}} \tag{26}$$

à l'aide de ce résultat, on réduit la variation de la fonctionnelle à

$$\delta\mathcal{F}^* = \int_\Gamma \underline{n} \cdot [\delta\sigma \cdot \underline{\hat{u}}]_\Gamma \,\mathrm{d}s - \int_{\Omega_\Gamma} \delta l(\sigma_{,1} : \hat{\varepsilon} - \hat{\sigma} : \varepsilon_{,1}) \,\mathrm{d}\Omega$$
$$+ \int_\Gamma \delta l(\underline{n} \cdot \hat{\sigma}^- \cdot \underline{u}_{,1} - \dot{l}\underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{u}_{,1}) + \dot{l}\underline{n} \cdot \delta\sigma^- \cdot \underline{u}_{,1} \,\mathrm{d}S \tag{27}$$

Enfin en utilisant la relation aux discontinuités du vecteur contrainte le long de Γ, ($\underline{n} \cdot \delta\sigma^+ - \underline{n} \cdot \delta\sigma^- + \delta l \underline{n} \cdot \sigma_{,1} = 0$) on obtient :

$$\delta\mathcal{F}^* = \delta l \left(\int_\Gamma (\underline{n} \cdot \hat{\sigma}^- \cdot \underline{u}_1 - \sigma_{,1} : \underline{\hat{u}}^-) \,\mathrm{d}s + \int_{\Omega_\Gamma} (\hat{\sigma} : \varepsilon_{,1} - \sigma_{,1} : \hat{\varepsilon}) \,\mathrm{d}\Omega \right) + \int_\Gamma \underline{n} \cdot \delta\sigma^- \cdot \left([\underline{\hat{u}}]_\Gamma + \dot{l}\underline{u}_{,1} \right) \mathrm{d}S \tag{28}$$

A l'aide des équations du comportement, on montre que $\hat{\sigma} : \varepsilon_{,1} - \sigma_{,1} : \hat{\varepsilon} = \hat{\sigma} : \varepsilon^p_{,1} - \sigma_{,1} : \hat{\varepsilon}^p$.

Prenant des variations quelconques en terme de contrainte ou d'avancée de fissure, on retrouve alors la discontinuité du déplacement sur Γ et la vitesse du taux de restitution d'énergie.

5. Conclusion

Nous avons étendu le problème en vitesse de fissure aux cas des matériaux élastoplastiques standards et défini les approches en vitesse primale et duale du problème d'évolution. Ces approches mettent en valeur la dualité des expressions, elles permettent d'obtenir des conditions de stabilité et d'unicité complémentaires. Les formulations variationnelles ainsi définies permettent un encadrement des vitesses quand la solution du problème quasi-linéaire est unique, ce qui en fait leur interêt premier.

On montre ainsi l'utilité d'avoir proposé une formulation par intégrale duale du problème de propagation de fissure.

Références

[1] C. Stolz, Intègrale duale en mécanique de la rupture, C. R. Mecanique 336 (2008) 434–439.

[2] Bui Hui Duong, Dualité entre les intégrales indépendantes du contour dans la théorie des solides fissurés, Comptes Rendus Académie des Sciences Paris, Sér. A 376 (1973) 1425–1428.

[3] Nguyen Quoc Son, Critère de propagation en rupture ductile, Comptes Rendus Académie des Sciences Paris 301 (1985) 567–570.

[4] J. Mandel, Energie élastique et travail dissipé dans les modèles rhéologiques, Cahier Groupe Français de rhéologie 1 (1965) 1–12.

[5] Nguyen Quoc Son, C. Stolz, Sur le problème d'évolution en vitesse de propagation de fissure et de déplacement en rupture fragile ou ductile, Comptes Rendus Académie des Sciences Paris 301 (1985) 661–664.