

Sur les profils de vitesse dans le cœur de l'écoulement turbulent en canal plan

Jean Piquet

LMF/DMN, UMR 6598 CNRS, Ecole Centrale de Nantes, BP92101, 44321 Nantes cedex, France

Reçu le 2 octobre 2006 ; accepté après révision le 24 avril 2007

Présenté par Pierre Perrier

Résumé

Au voisinage de l'axe d'un canal plan, l'écoulement turbulent est caractérisé par le nombre de Karman, $R_\tau = U_\tau h/\nu$, et les profils des vitesses turbulentes (en normalisation pariétale) U prennent une forme analytique simple. Le défaut de vitesse se comporte quadratiquement au centre du canal : $1 - U/U_{\max} \sim \mathcal{A}_0 \xi^2$ avec $\xi = 1 - y/R_\tau$. De plus le cœur du canal fait intervenir une zone où $\mathcal{A} := [1 - U/U_{\max}]/\xi^2$ est une fonction linéaire de ξ pour $\xi \leq 0.45$: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_c + \mathcal{B}_c \xi$ où \mathcal{A}_c/U_{\max} et \mathcal{B}_c/U_{\max} peuvent être paramétrés en fonction de R_τ . *Pour citer cet article : J. Piquet, C. R. Mecanique 335 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

On the velocity profiles at the centre of turbulent flow in a plane channel. Close to the axis of a plane channel, the turbulent flow is characterized by the Karman number, $R_\tau = U_\tau h/\nu$, and the mean velocity profiles U (in wall normalisation) take a simple analytic form. The velocity defect behaves quadratically near the channel axis: $1 - U/U_{\max} \sim \mathcal{A}_0 \xi^2$ with $\xi = 1 - y/R_\tau$. Moreover, the channel core involves a zone where $\mathcal{A} := [1 - U/U_{\max}]/\xi^2$ is a linear function of ξ for $\xi < 0.45$: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_c + \mathcal{B}_c \xi$ where \mathcal{A}_c/U_{\max} et \mathcal{B}_c/U_{\max} can be parametrized by means of R_τ . *To cite this article: J. Piquet, C. R. Mecanique 335 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Turbulence ; Écoulement en canal ; Profil de vitesse ; Simulation directe ; Défaut de vitesse

Keywords: Turbulence; Channel flow; Mean velocity profile; Direct numerical simulation; Velocity defect

Abridged English version

Using direct numerical simulations, the indicator function defined by (4b) demonstrates (Fig. 1) a quadratic behaviour (4a) of the velocity defect near the axis of the channel. The function $\mathcal{A}(\xi; R_\tau) := [1 - U/U_{\max}]/\xi^2$ is then analysed by means of selected direct numerical simulations which can be identified from over-lined cases in Table 1. It is found that \mathcal{A} behaves linearly with ξ according to $\mathcal{A} = \mathcal{A}_c + \mathcal{B}_c \xi$ for a significant part of the channel core. The representation which emerges involves three parameters, $\mathcal{A}_0 = \lim(\xi \rightarrow 0, \mathcal{A})$, \mathcal{A}_c and \mathcal{B}_c which all scale with U_{\max} .

Adresse e-mail : Jean.Piquet@ec-nantes.fr.

A parametrization (5), (6) of their dependence with respect to R_τ is proposed and tested. Its performance may be appreciated from Fig. 3 where it is compared with a logarithmic representation of DNS data for mean velocity profiles. The developed method gives credit to the standard scaling of the velocity defect with U_τ . However, it does not discredit scaling [22] which appears less dispersive only if low R_τ velocity profiles are discarded (Fig. 5). But, the latter scaling introduces an integral condition in the representation without suppressing the need of a parametrization.

1. L'écoulement turbulent en canal plan présente un triple intérêt : (i) Il est inhomogène, unidirectionnel en moyenne, et bien documenté grâce à d'abondantes données de simulation directe [1–13] et à de nombreuses expériences. (ii) Sa structure asymptotique consiste en deux couches, une zone pariétale et un cœur d'écoulement caractérisé par un frottement turbulent approximativement linéaire. Compte tenu de l'absence de termes convectifs, le nombre de Karman de frottement basé sur la demie largeur du canal, $R_\tau = hU_\tau/\nu$, peut être spécifié comme seul paramètre physique de l'écoulement. (iii) Le bilan d'énergie cinétique est particulièrement simple, ce qui rend cette géométrie particulièrement propice à l'amélioration des modèles de fermeture qui peuvent être testés sur une large gamme de nombre de Reynolds : par exemple, il suffira d'une bonne connaissance du cisaillement turbulent τ , de l'énergie cinétique turbulente K et de sa dissipation ε pour tester par différence les termes de diffusion turbulente. Dans cette note nous examinons le profil de vitesse moyenne sur l'axe du canal et dans le cœur de l'écoulement en utilisant les données de simulation directe [1–10] disponibles sur site <http> accessible (Table 1).

2. Si les vitesses sont adimensionnalisées par la vitesse de frottement U_τ et les longueurs par ν/U_τ , les équations du mouvement moyen et de l'énergie cinétique turbulente s'écrivent :

$$\frac{dU}{dy} + \tau = 1 - \frac{y}{R_\tau}; \quad \frac{d^2K}{dy^2} - \frac{dW}{dy} + \tau \frac{dU}{dy} - \varepsilon = 0 \tag{1}$$

où l'on a noté :

$$U = \frac{\bar{U}}{U_\tau}; \quad \tau = -\frac{\overline{u'v'}}{U_\tau^2}; \quad K = \frac{1}{2} \frac{\overline{u'_i u'_i}}{U_\tau^2}; \quad W = \frac{1}{2} \frac{\overline{u'_i u'_i v'}}{U_\tau^3} + \frac{\overline{p'v'}}{\rho U_\tau^3}; \quad \varepsilon = \frac{\nu^2 \overline{u'_{i,j} u'_{i,j}}}{U_\tau^4} \tag{2}$$

où les fluctuations de vitesse sont notées u'_i , $i = 1$ dans la direction x_1 de l'écoulement moyen, $i = 2$ dans la direction x_2 orthogonale aux parois du canal, $i = 3$ dans la direction x_3 perpendiculaire à l'écoulement moyen et parallèle aux parois, la notation, i désigne la dérivation dans la direction x_i et la sommation sur indices répétés dans (2) est implicite. Les quantités intervenant dans (1) où $y := x_2 U_\tau/\nu$ mettent en jeu les variables pariétales classiques dont l'indice classique + est systématiquement omis. L'équation de quantité de mouvement, qui a été intégrée à vue, dépend explicitement de $R_\tau = hU_\tau/\nu$. L'intégration des Éqs. (1) fournit immédiatement :

$$U = y \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{R_\tau} \right) - \int_0^y \tau dy \tag{3a}$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} R_\tau - \int_0^{R_\tau} \tau dy; \quad \frac{dK}{dy} - W = \int_0^y \left[\varepsilon - \tau \frac{dU}{dy} \right] dy; \quad \int_0^{R_\tau} \left[\tau \frac{dU}{dy} - \varepsilon \right] dy = 0 \tag{3b,c,d}$$

Comme $\tau > 0$, l'Éq. (3a) indique que la vitesse en régime turbulent est plus petite qu'en régime laminaire à la même valeur de R_τ . La solution de Poiseuille est retrouvée $\tau = 0$, avec $U_{\max} = R_\tau/2$, $U_b = R_\tau/3$, si U_b désigne la vitesse débitante donnant accès au nombre de Reynolds débitant, $R_b := 2U_b R_\tau = 2R_\tau^2/3$. L'Éq. (3b) montre que U_{\max} est une mesure de l'intensité de cisaillement turbulent dans le canal. Bien que la connaissance de τ soit équivalente à celle de U , la construction de représentations analytiques pour les grandeurs qui précèdent n'est pas indifférente à la façon de procéder. Il faut prendre la précaution de spécifier l'un des deux termes, U ou τ , dans la zone où sa contribution au bilan de quantité de mouvement est la plus faible. Ainsi, la vitesse moyenne doit être spécifiée loin de la paroi, où les effets visqueux sont négligeables et le cisaillement turbulent près de la paroi, où les effets visqueux sont prépondérants. La construction d'une représentation paramétrique de τ dont on déduirait par intégration les profils de vitesse moyenne conduirait pour ceux-ci à une mauvaise représentation du cœur du canal et, par exemple, à une très médiocre reproduction de U_{\max} (vitesse sur l'axe du canal), en regard des profils « flatteurs » de τ donnés dans

Tableau 1

Données de simulation directe considérées

Table 1

Considered direct numerical simulation data

R_τ [ref.]	R_b	$N_x \times N_y \times N_z$	Δx^+	Δz^+	Δy_{CL}^+	Δy_w^+	L_x/h	L_z/h	$U_\tau T_{\text{int}}/h$	U_{max}/U_τ
<u>90</u> [10]	2601	256 × 61 × 256	14,4	7,2	4,724	0,1233	48	24	201	17,515
<u>100</u> [3]	2890	64 × 64 × 64	19,6	9,8	3,272	0,0535	4 π	2 π	24	17,401
<u>109,43</u> [4]	3220,4	96 × 96 × 65	18	7,2	2,685	0,0329	5 π	2 π	2559	17,527
<u>130</u> [10]	3908	192 × 81 × 192	14,25	7,125	5,1	0,1	24	12	104,6	17,694
<u>150,2</u> [3]	4560	128 × 96 × 128	18,4	7,36	3,276	0,0375	5 π	2 π	30	17,852
<u>150,5</u> [4]	4586,2	128 × 97 × 128	18,4	7,36	2,462	0,0201	5 π	2 π	2061	17,872
<u>178,13</u> [1]	5600	128 × 129 × 128	17,7	5,9	4,37	0,0536	4 π	4 $\pi/3$	10	18,301
<u>180</u> [10]	<i>5645</i>	256 × 121 × 256	16,88	8,44	4,718	0,0618	24	12	?	18,206
<u>180</u> [6]	5731	256 × 128 × 256	9	4,5	5,918	0,201	12,8	6,4	40	18,643
180 [in 4]	3245 (?)	128 × 128 × 128	18	9	4,4	0,0542	12,8	6,4	5	18,01
<u>186,34</u> [7]	<i>5873</i>	? × 98 × ?	8,9	4,5	6,09	0,0998	12	4	22	18,284
<u>194,3</u> [in 4]	5800	128 × 128 × 128	20	10	2,52	0,014	4 π	2 π	9	17,441
<u>210,7</u> [in 4]	6666	160 × 128 × 160	14,8	7,4	5,17	0,0635	3,57 π	1,9 π	4,9	18,18
<u>297,9</u> [4]	10031,1	128 × 193 × 128	18,4	7,36	2,437	0,01	2,5 π	π	277	19,43
<u>364</u> [10]	<i>12624</i>	256 × 161 × 256	16,88	8,44	7,147	0,0702	12	6	?	20,08
<u>392,24</u> [2]	13750	256 × 193 × 192	9,7	6,5	4,81	0,0295	2 π	π	?	20,133
<u>395</u> [6]	14147	512 × 192 × 512	9,88	4,94	3,258	0,148	12,8	6,4	36	20,628
<u>395,76</u> [4]	13924,9	192 × 257 × 192	16,4	6,54	2,43	0,0075	2,5 π	π	129	20,184
<u>546,74</u> [7]	<i>20119,7</i>	1536 × 257 × 1536	8,9	4,5	6,71	0,0415	8 π	4 π	10 U_b/L_x	20,990
<u>587,19</u> [2]	<i>21905,4</i>	384 × 257 × 384	9,7	4,8	7,2	0,0442	2 π	π	?	21,263
<u>640</u> [6]	24428	1024 × 256 × 1024	8	4	5,011	0,152	12,8	6,4	9,5	21,83
<u>642,54</u> [4]	24272,2	288 × 257 × 384	17,7	5,32	5,257	0,0215	2,5 π	π	40	21,545
<u>720</u> [10]	25527	512 × 321 × 512	16,88	8,44	7,068	0,0347	12	6	?	21,377
<u>934</u> [7]	<i>37034</i>	3072 × 385 × 2304	9,2	3,8	7,641	0,0312	8 π	3 π	9,2 U_b/L_x	22,445
<u>1020</u> [6]	41441	2048 × 448 × 1536	6,38	4,25	7,29	0,154	12,8	6,4	13,6	23,057
<u>1451</u> [10]	<i>60543</i>	1024 × 481 × 1024	16,96	8,48	9,49	0,124	12,0	6,0	2,12	21,12
<u>2004,3</u> [7]	<i>87178</i>	6144 × 633 × 4608	8,2	3,8	8,898	0,3231	8 π	3 π	?	24,897

Colonne 1, Nombre de Karman et publication de référence. [in 4] signifie : données de Horiuti ($R_\tau = 180$), Kristoffersen et Anderson ($R_\tau = 194,3$), Gilbert et Kleiser ($R_\tau = 210,7$). Colonne 2, Nombre de Reynolds débitant. Colonne 3, nombre de points de maillage longitudinalement, normalement et transversalement. Colonne 4, résolution longitudinale. Colonne 5, résolution transversale. Colonne 6, pas normal maximum (sur l'axe). Colonne 7, pas normal minimum (à la paroi). Colonne 8, taille longitudinale de la boîte de calcul. Colonne 9, taille transversale de la boîte de calcul. Colonne 10, temps d'intégration pour obtenir les statistiques (échelle différente pour les données [7] spécifiée). Colonne 11, vitesse maximale (sur l'axe). Les chiffres en italiques sont des estimations. Les données [5,6] sont en positionnement entrelacé. Note : les données [10] décrivent la totalité du canal.

Column 1, Karman number and reference publication. [in 4] means: data of Hiruti ($R_\tau = 180$), Kristoffersen and Anderson ($R_\tau = 194,3$), Gilbert and Kleiser ($R_\tau = 210,7$). Column 2, mean-flow Reynolds number. Column 3, number of grid points longitudinally, normally and transversally. Column 4, longitudinal resolution. Column 5, transverse resolution. Column 6, maximum normal grid size (at the centreline). Column 7, minimum normal grid size (at the wall). Column 8, longitudinal length of the computational box. Column 9, transverse width of the computational box. Column 10, integration time for statistics. Column 11, maximum velocity (on the axis). Italic values are estimations. Data [5,6] use staggered grids. Note: data [10] cover the full channel in the normal direction.

[14,15] par exemple. En revanche, une identification partant des profils de vitesse (au moyen de fonctions de paroi par exemple) fournirait de médiocres profils pour τ , avec de piètres restitutions du cisaillement maximum τ_{max} . Le cœur de l'écoulement doit donc être étudié à partir des profils de vitesse puisque les effets visqueux y sont négligeables.

Le Tableau 1 rassemble quelques éléments importants concernant les simulations directes utilisées. Il fait ressortir plusieurs éléments : (i) le nombre N_y de points définissant le profil de vitesse moyenne est, lorsque R_τ augmente, bien plus important que ce que fournissent les meilleures expériences au même nombre de Karman. Il en résulte que des données fiables de simulation directe sont à même de donner des informations d'une finesse inégalée. (ii) A coté de la résolution et de la précision du schéma de discrétisation, la taille du domaine est un paramètre fondamental. Elle contrôle de façon décisive l'intensité globale de cisaillement turbulent présente dans le calcul, et donc la vitesse maximum. C'est pourquoi, deux simulations au même nombre de Karman peuvent produire des valeurs de U_{max} différentes. Une taille de domaine insuffisante produit en outre des corrélations longitudinales à deux points qui ne décroissent pas à zéro en raison de l'existence de très grosses structures persistantes sur toute la longueur du

domaine [6–8]. Elle produit aussi, eu égard à une valeur faible de L_z , une insuffisante structuration transversale (selon z) de l'écoulement. Il en résulte que le temps d'établissement d'un régime statistiquement stationnaire est allongé, l'insuffisante convergence se manifestant par de faibles oscillations spatiales du frottement turbulent τ en dessous de la droite $1 - R_\tau y$, voire par un manque de symétrie par rapport au plan $y = R_\tau$. Au moins pour $R_\tau = 590$ et à un moindre degré pour $R_\tau = 395$, ces deux symptômes peuvent être relevés sur les données [2] qui apparaissent particulièrement bruitées au voisinage de l'axe, en comparaison avec les données concurrentes. Il en va de même pour les données [10], intéressantes en ce qu'elles portent sur l'ensemble du canal, mais qui ne sont pas établies (et présentent donc une asymétrie marquée) au moins pour $R_\tau = 720$ et 1451. Le choix des simulations retenues, soulignées dans la première colonne de la Table 1, résulte donc d'un compromis entre la taille du domaine et la durée d'intégration qui produit les statistiques. (iii) Bien que les valeurs U_{\max} varient entre deux exploitations au même nombre de Karman, les profils réduits U/U_{\max} sont virtuellement identiques. Les comportements asymptotiques au voisinage de $U = U_{\max}$ peuvent donc être considérés comme crédibles même si les valeurs de U_{\max} diffèrent.

3. Nous examinons dans ce qui suit le comportement asymptotique du défaut de vitesse quand $y \rightarrow R_\tau$, à travers la variable $\xi := 1 - y/R_\tau$. Ce comportement asymptotique est envisagé polynomial ce qui justifie de poser à priori (4a) où $\mathcal{A}(\xi) \rightarrow \mathcal{A}_0$ quand $\xi \rightarrow 0$. Afin de mettre en évidence ce comportement, l'indicateur (4b) est introduit :

$$1 - \frac{U}{U_{\max}} = \mathcal{A}\xi^m; \quad \mathcal{M} = \frac{R_\tau \xi \, dU/dy}{U_{\max} - U} \tag{4a,b}$$

Une zone en $\mathcal{M} = m$ avec m constant au voisinage de $\xi = 0$ révèle une loi asymptotique en puissance pour le défaut de vitesse normalisé (4a). La Fig. 1 montre le bon collapsus des données DNS autour de $m = 2$ sur l'axe. *Le défaut de vitesse s'annule donc quadratiquement* en ξ , ce qui implique une valeur finie de d^2U/dy^2 sur l'axe du canal, contrairement au cas d'une couche limite où la décroissance du défaut est plutôt exponentielle [16]. Ce résultat asymptotique apparaît *générique* pour l'écoulement en canal. Précédemment, l'intérêt de la loi en puissance pour le problème du canal plan avait été signalé dans [17]. Malheureusement, la valeur de m issue des données expérimentales qui y était déduite, était basée sur un échantillonnage de points excluant le voisinage de l'axe. La loi quadratique (4a) a déjà été proposée [18] au service d'une description empirique de couches limites (voir aussi [19], pp. 480 et suiv.). La fonction $\mathcal{A}(\xi; R_\tau)$ est considérée dans la Fig. 2. Elle se comporte comme $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1\xi^2 + \mathcal{A}_2\xi^4 + \dots$ au voisinage de l'axe, les coefficients dépendant de R_τ . Le problème est alors de minimiser cette dépendance par une renormalisation convenable de \mathcal{A}_0 , laissant pour l'instant de côté les termes suivants du développement. Il apparaît que $T_0 = 2\mathcal{A}_0U_{\max}/R_\tau$ est une fonction monotone décroissante de R_τ qui se révèle paramétrable par :

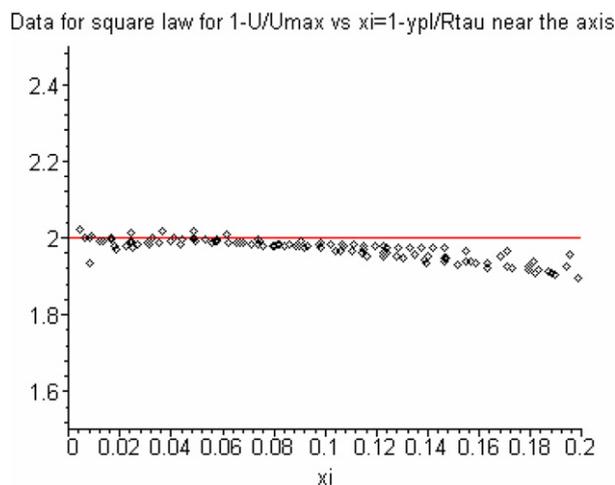


Fig. 1. Mise en évidence du comportement quadratique de la fonction $\mathcal{A}(\xi; R_\tau)$ définie par (4a) résultant de \mathcal{M} défini par (4b) (en ordonnée), en fonction de $\xi = 1 - y/R_\tau$ (en abscisse). \diamond , données DNS : 109, [4]; 178, [2]; 180, [6]; 395, [6]; 550, [8]; 933, [8]; 1020, [6]; 2003, [8].
 Fig. 1. Evidence of the quadratic behaviour of the function $\mathcal{A}(\xi; R_\tau)$ defined by (4a) resulting from \mathcal{M} defined by (4b) (in ordinates), as a function of $\xi = 1 - y/R_\tau$ (in abscissa). \diamond , DNS data : 109, [4]; 178, [2]; 180, [6]; 395, [6]; 550, [8]; 933, [8]; 1020, [6]; 2003, [8].

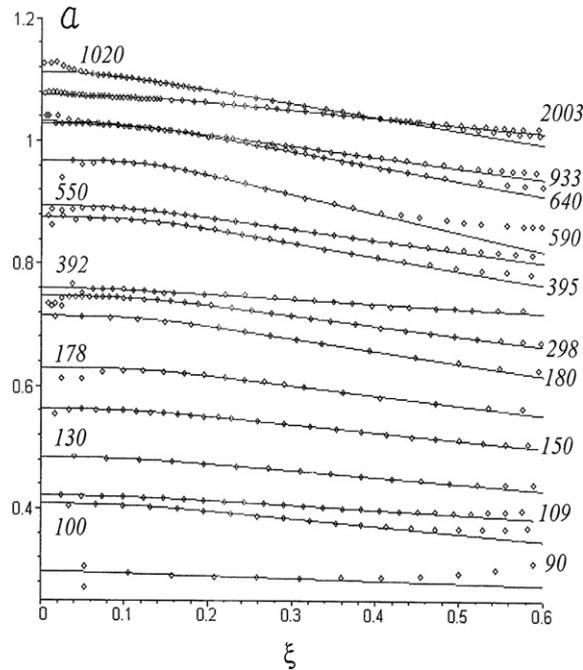


Fig. 2. Distribution de la fonction $\mathcal{A}(\xi; R_\tau)$ définie par (4a) (en ordonnée) en fonction de $\xi = 1 - y/R_\tau$ (en abscisse). \diamond , données DNS, de bas en haut coté droit de la figure : 90, [10]; 100, [3]; 109, [4]; 130, [10]; 150, [4]; 178, [2]; 180, [6]; 298, [4]; 392, [2]; 395, [6]; 550, [8]; 590, [2]; 640, [6]; 933, [8]; 1020, [6]; 2003, [8]. Les parties rectilignes correspondent à $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}_c + \mathcal{B}_c \xi$, valable dans le coeur de l'écoulement. Chaque courbe est décalée par rapport à la courbe au R_τ immédiatement inférieur de $\mathcal{A} = 0,05$. La dispersion des profils est $0,324 \leq \mathcal{A}_0 \leq 0,44$ (hors décalage des courbes).

Fig. 2. Distribution of $\mathcal{A}(\xi; R_\tau)$ defined by (4a) (in ordinates) as a function of $\xi = 1 - y/R_\tau$ (in abscissa). \diamond , DNS data, from down to up right side of the figure: 90, [10]; 100, [3]; 109, [4]; 130, [10]; 150, [4]; 178, [2]; 180, [6]; 298, [4]; 392, [2]; 395, [6]; 550, [8]; 590, [2]; 640, [6]; 933, [8]; 1020, [6]; 2003, [8]. Rectilinear parts correspond to $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}_c + \mathcal{B}_c \xi$, valid in the flow core. Each curve is staggered with respect to the one at immediately lower R_τ by $\mathcal{A} = 0.05$. The profiles dispersion is $0.324 \leq \mathcal{A}_0 \leq 0.44$ (on unstaggered curves).

$$T_0 = \frac{13,713}{R_\tau - 30,287} + (R_\tau - 44)(0,04\sqrt{R_\tau} - 0,06672) \exp(-R_\tau/35)H_{44} + 10^{-5}(R_\tau - 400)^2 \left(\frac{0,943}{1000}R_\tau - 0,4473 \right) \exp\left(4 - \frac{1}{100}R_\tau\right)H_{400}; \quad H_R \equiv H(R_\tau - R) \quad (5)$$

où H est la fonction échelon d'Heaviside. Le premier terme de (5) domine très largement une représentation qui est susceptible d'améliorations (et de simplifications) sur la base de simulations directes complémentaires.

4. Dans le cœur de l'écoulement, un comportement linéaire de $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}_c + \mathcal{B}_c \xi$ est bien établi (Fig. 2), avec néanmoins des comportements erratiques (non monotones) de \mathcal{A}_c et \mathcal{B}_c en fonction de R_τ . De tels comportements mettent en cause, à ces valeurs de R_τ au moins, la représentation des profils de vitesse déficitaires au moyen de la vitesse maximum, comme cela est suggéré par exemple dans [20]. Nous introduisons comme précédemment les quantités $T_c = 2\mathcal{A}_c U_{\max}/R_\tau$, $S_c = 3\mathcal{B}_c U_{\max}/R_\tau$ dont la variation en fonction de R_τ a été également paramétrée, Éqs. (6) :

$$T_c = \frac{16,62}{R_\tau - 27,38} + H_{44}(R_\tau - 44)(0,00303\sqrt{R_\tau} - 0,0463) \exp(-R_\tau/48) S_c = \frac{3,0483}{10000} \frac{(R_\tau - 44)H_{44}}{1 - 7,6312 \times 10^{-3}R_\tau + 3,8119 \times 10^{-5}R_\tau^2} \quad (6)$$

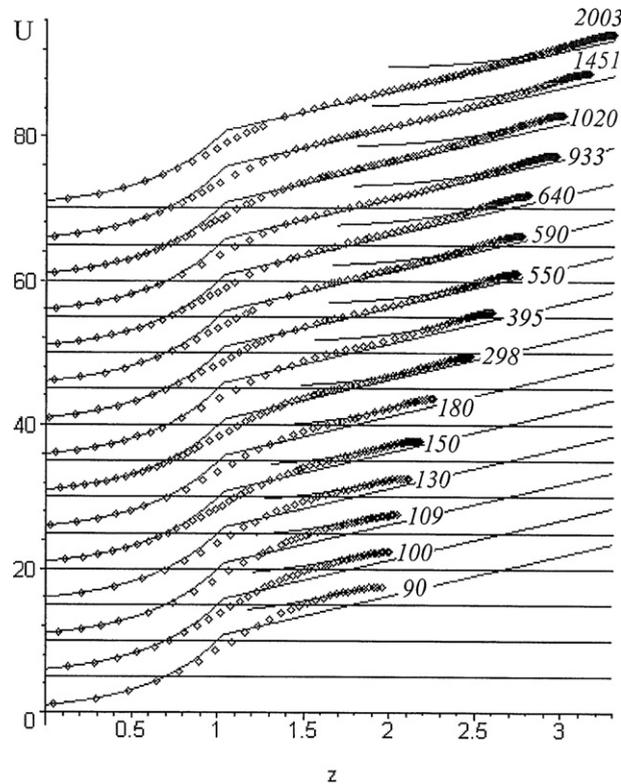


Fig. 3. Profils de vitesse moyenne, U en fonction de $z = \log_{10}(y)$. \diamond , données DNS, de bas en haut : 90, [10]; 100, [3]; 109, [4]; 130, [10]; 150, [4]; 180, [6]; 298, [4]; 395, [6]; 550, [8]; 590, [2]; 640, [6]; 933, [8]; 1020, [6]; 1453 [10]; 2003, [8]. Chaque courbe est décalée par rapport à la courbe au R_τ immédiatement inférieur de $U = 5$. Le modèle composite est indiqué par la courbe délimitée par $1 \leq z \leq \log_{10}(R_\tau)$ ou par $2 \leq z \leq \log_{10}(R_\tau)$. Ont été aussi tracées les courbes $U = y$ et $U = \ln(y)/0,41 + 5,5$.

Fig. 3. Mean flow velocity profiles, U as a function of $z = \log_{10}(y)$. \diamond , DNS data, from down to top: 90, [10]; 100, [3]; 109, [4]; 130, [10]; 150, [4]; 180, [6]; 298, [4]; 395, [6]; 550, [8]; 590, [2]; 640, [6]; 933, [8]; 1020, [6]; 1453 [10]; 2003, [8]. Each curve is staggered with respect to the one at immediately lower R_τ by $U = 5$. The composite model is indicated by the curve limited by $1 \leq z \leq \log_{10}(R_\tau)$ or $2 \leq z \leq \log_{10}(R_\tau)$. Also traced are curves $U = y$ and $U = \ln(y)/0.41 + 5.5$.

La encore le premier terme de T_c est largement dominant. Si l'on reporte dans (4a) la forme $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}_c + \mathcal{B}_c \xi$ en y remplaçant \mathcal{A}_c et \mathcal{B}_c par T_c et S_c , respectivement, la représentation (7) est obtenue :

$$\frac{U_{\max} - U}{R_\tau} = \xi^2 \left(\frac{1}{2} T_c + \frac{1}{3} S_c \xi \right); \quad \tau = \xi(1 - T_c - S_c \xi) \tag{7}$$

Elle a été construite pour inclure la solution laminaire $U = U_{\max}(1 - \xi^2)$, $U_{\max} = R_\tau/2$ supposée valable pour $R_\tau \leq 44$, à condition que $T_c = 1$, $S_c = 0$ en $R_\tau = 44$. En outre, il a été exigé qu'à grandes valeurs de R_τ , S_c et T_c décroissent vers zéro comme $1/R_\tau$, de façon à être compatibles avec une représentation du défaut de vitesse avec U_{\max} comme vitesse caractéristique : le profil déficitaire doit être en effet invariant dans la limite $R_\tau \rightarrow \infty$. L'équivalence de (7) à la représentation déficitaire classique résulte de T_c , $S_c \propto 1/R_\tau$ et donc, après simplification par R_τ , $U_{\max} - U \propto \xi^2$, soit une forme particulière de cette représentation. La loi de sillage est maintenant construite sur la seule base de T_0 , T_c et S_c . Elle est choisie sous la forme $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 \xi^2 + \mathcal{A}_2 \xi^4 + \mathcal{A}_3 \xi^6$ pour $0 \leq \xi \leq 0,2$ avec un raccord C^2 en $\xi = 0,2$ avec $\mathcal{A}_c + \mathcal{B}_c \xi$, valable pour $\xi \geq 0,2$, ce qui fixe \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 et \mathcal{A}_3 . L'expression en résultant, à pente nulle sur l'axe, est valable sur tout l'intervalle $0 \leq \xi \leq 0,2$. Evidemment, la représentation composite qui en résulte dépend de R_τ et n'a donc pas de prétention à l'universalité. Comparée aux données dans la Fig. 2, elle est purement locale en ce qu'elle ne fait pas intervenir de condition intégrale comme dans [21–23]. Sa performance peut être appréciée sur la Fig. 3 montrant une gamme représentative de profils de vitesse traités.

5. Il apparaît important de comparer la représentation composite établie en regard des normalisations utilisées pour représenter les profils de vitesse déficitaires. On distingue trois représentations de ceux-ci. Nous avons vu que la

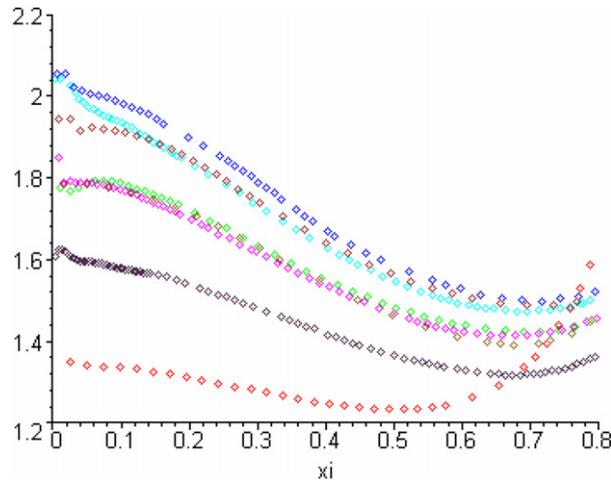


Fig. 4. Représentation $\mathcal{A}(y; R_\tau) := (U_{\max} - U)/[\xi^2 \sqrt{U_{\max}}]$ (en ordonnées) en fonction de ξ (en abscisse), équivalente à l'utilisation de la vitesse de référence $(U_{\max} U_\tau)^{1/2}$. \diamond , données DNS : 109, [4]; 180, [6]; 395, [6]; 550, [8]; 590, [2]; 640, [6]; 933, [8]; 1020, [6]; 2003, [8]. La dispersion des profils est $1,34 \leq \mathcal{A}_0 \leq 2,06$.

Fig. 4. Representation $\mathcal{A}(y; R_\tau) := (U_{\max} - U)/[\xi^2 \sqrt{U_{\max}}]$ (in ordinates) as a function ξ (in abscissa), equivalent to the scaling with the reference velocity $(U_{\max} U_\tau)^{1/2}$. \diamond , DNS data: 109, [4]; 180, [6]; 395, [6]; 550, [8]; 590, [2]; 640, [6]; 933, [8]; 1020, [6]; 2003, [8]. The dispersion of profiles is $1,34 \leq \mathcal{A}_0 \leq 2,06$.

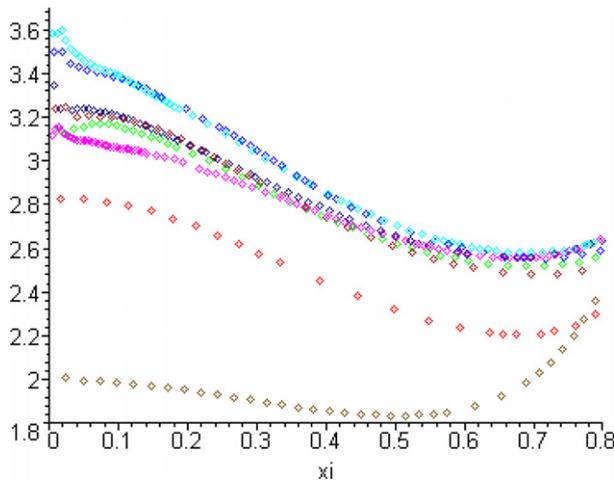


Fig. 5. Représentation $\mathcal{A}(y; R_\tau) := (U_{\max} - U)/[\xi^2 (U_{\max} - U_b)]$ (en ordonnées) en fonction de ξ (en abscisse). \diamond , données DNS : 109, [4]; 180, [6]; 395, [6]; 550, [8]; 590, [2]; 640, [6]; 933, [8]; 1020, [6]; 2003, [8]. La dispersion des profils est $2 \leq \mathcal{A}_0 \leq 3,6$. Elle est très réduite si l'on exclut les deux profils 109 et 180.

Fig. 5. Representation $\mathcal{A}(y; R_\tau) := (U_{\max} - U)/[\xi^2 (U_{\max} - U_b)]$ (in ordinates) as a function of ξ (in abscissa). \diamond , DNS data: 109, [4]; 180, [6]; 395, [6]; 550, [8]; 590, [2]; 640, [6]; 933, [8]; 1020, [6]; 2003, [8]. The dispersion of profiles is $2 \leq \mathcal{A}_0 \leq 3,6$. It is reduced when omitting data 109 and 180.

représentation basée sur U_{\max} conduisait à des variations erratiques des coefficients de \mathcal{A} . Compte tenu de la façon dont ceux-ci avaient été mis à l'échelle, nous en avons déduit la représentation (7) équivalente à la représentation classique basée sur U_τ . Il a été aussi envisagé de travailler avec une échelle mixte, $(U_{\max} U_\tau)^{1/2}$. La Fig. 4 présente l'évolution de $(1 - U/U_{\max}) \sqrt{U_{\max}}/\xi^m$ en fonction de ξ pour $m = 2$ et montre que l'échelle mixte étale les données en $\xi = 0$ de 1,32 à 2,06, soit une dispersion de près de 44 % contre seulement de 17 % avec l'échelle U_{\max} (données de 0,324 à 0,44 pour \mathcal{A} , cf. Fig. 2). Enfin, la représentation [22] $(U_{\max} - U)/(U_{\max} - U_b) = F(\xi)$ a eu un grand succès [23]. Tout en présentant l'inconvénient de faire intervenir une propriété intégrale, U_b , du profil de vitesse, elle impose la présence d'un « point d'ancrage » des profils en $\xi = \xi_0$ tel que $F(\xi_0) = 1$, si bien qu'elle induit l'existence

d'une échelle de longueur $R_\tau(1 - \xi_0)$ qui doit être « universelle » dans la zone du cœur de l'écoulement. La Fig. 5 présente l'évolution de $(U_{\max} - U)/[(U_{\max} - U_b)\xi^m]$ pour $m = 2$ et montre une dispersion de 57 % des données (comprises entre 2 et 3,6) sur la gamme complète des R_τ considérés. Néanmoins, si l'on exclut les profils correspondant aux plus faibles R_τ : 109 et 180, la dispersion apparaît réduite à 11 %, sans que pour autant l'ancrage des profils au point ξ_0 soit vérifié. L'utilisation de cette mise à l'échelle ne peut donc dispenser du paramétrage en R_τ .

6. La présente Note a permis d'établir l'existence d'un comportement quadratique du profil de vitesse sur l'axe du canal et de mettre en évidence une zone assez large où le profil de vitesse dispose d'une représentation analytique (cubique) simple dispensant de l'utilisation de méthodes « à la Coles » pour la description du cœur de l'écoulement. Celles-ci présentent l'inconvénient d'être d'une extrême sensibilité au choix des paramètres de la loi logarithmique.

Remerciements

L'auteur tient à remercier Z.W. Hu et N.D. Sandham pour lui avoir permis l'accès aux données $R_\tau = 90, 733, 1451$ sur le site « Soton » [10] et J.B. Cazalbou pour des discussions constructives qui ont permis l'amélioration du modèle composite.

Références

- [1] J. Kim, P. Moin, R.D. Moser, Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.* 177 (1987) 133–166.
- [2] R.D. Moser, J. Kim, N. Mansour, DNS of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$, *Phys. Fluids* 11 (1999) 943–945.
Base de données [1,2] disponible sur <http://www.davinci.tam.uuic.edu/data/moser/chandata/>.
- [3] A. Kuroda, N. Kasagi, M. Hirata, A direct numerical simulation of the fully developed turbulent channel flow, in: *Int. Symp. on CFD, Nagoya, 1989*, pp. 1174–1179.
- [4] K. Iwamoto, K. Suzuki, N. Kasagi, Reynolds-number effect on wall turbulence: towards effective feedback control, *Int. J. Heat Fluid Flow* 23 (2002) 678–689.
Base de données disponible sur <http://www.thtlab.t.u-tokyo.ac.jp/DNS/> ; voir aussi : K. Iwamoto, Database of fully developed channel flow, THTLAB Internal Report ILR-0201.
- [5] H. Abe, H. Kawamura, Y. Matsuo, Direct numerical simulation of a fully developed turbulent channel flow with respect to Reynolds number dependence, *ASME J. Fluids Eng.* 123 (2001) 382–393.
- [6] H. Abe, H. Kawamura, H. Choi, Very large-scale structures and their effects on the wall-shear stress fluctuations up to $Re_\tau = 640$, *ASME J. Fluids Eng.* 126 (2004) 835–843.
Base de données pour [5,6] disponible sur <http://www.murasun.me.noda.tus.ac.jp/db/dns/>.
- [7] J.C. del Alamo, J. Jimenez, Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels, *Phys. Fluids* 15 (6) (2003) L41–L44.
- [8] S. Hoyas, J. Jimenez, Scaling of the velocity fluctuation in turbulent channels up to $Re_\tau = 2003$, *Phys. Fluids* 18 (2006) 011702.
- [9] J.C. del Alamo, J. Jimenez, P. Zandonade, R.D. Moser, Scaling of the energy spectra of turbulent channels, *J. Fluid Mech.* 500 (2004) 135–144.
Base de données disponible sur <http://torroja.dmt.upm.es/ftp/channels/data/>.
- [10] Z.W. Hu, N.D. Sandham, DNS databases for turbulent Couette and Poiseuille flow, Report AFM-01/04, Aero. Flight Mech. Group, School Eng. Sci. University of Southampton, 2005.
Base de données disponible sur <http://www.cse.clrc.ac.uk/ceg/uktc/database> et, pour les cas $R_\tau = 90, 130$ et 1433 : <http://www.dnsdata.afm.ses.soton.ac.uk/database/>.
- [11] S.L. Lyons, T.J. Hanratty, J.B. McLaughlin, Large-scale computer simulation of fully developed turbulent channel flow with heat transfer, *Int. J. Num. Methods Fluids* 13 (1991) 999–1028.
- [12] J. Rutledge, C.A. Sleicher, Direct simulation of turbulent flow and heat transfer in a channel. Part I: Smooth walls, *Int. J. Num. Methods Fluids* 16 (1993) 1051–1078.
- [13] A. Gunther, D.V. Papavassiliou, M.D. Warholic, T.J. Hanratty, Turbulent flow in a channel at low Reynolds number, *Exp. Fluids* 25 (1998) 504–571.
- [14] R.L. Panton, Scaling turbulent wall layers, *J. Fluids Eng.* 112 (1990) 425–432.
- [15] R.L. Panton, Review of wall turbulence as described by composite expansions, *Appl. Mech. Rev.* 58 (2005) 1–36.
- [16] W.R.C. Phillips, J.T. Ratnanather, The outer region of a turbulent boundary layer, *Phys. Fluids A* 2 (1990) 427–434.
- [17] M. Oberlack, A unified approach for symmetries in plane parallel turbulent shear flows, *J. Fluid Mech.* 427 (2001) 299–318.
- [18] F.R. Hama, Boundary-layer characteristics for smooth and rough surfaces, *Trans. Soc. Naval Arch. Marine Engrs.* 62 (1954) 333–358.
- [19] J.O. Hinze, *Turbulence*, McGraw-Hill Book Company, 1959.
- [20] W.K. George, L. Castillo, Zero pressure gradient turbulent boundary layer, *Appl. Mech. Rev.* 47 (1997) 307–365.
- [21] D.E. Coles, The law of the wake in the turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.* 1 (1956) 191–226.
- [22] M.V. Zagarola, A.J. Smits, Mean flow scaling of turbulent pipe flow, *J. Fluid Mech.* 373 (1998) 33–79.
- [23] L. Castillo, D.J. Walker, Effect of upstream boundary conditions on the outer flow of turbulent boundary layers, *AIAA J.* 40 (2002) 1292–1299.