Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Mecanique 335 (2007) 93–98

Comptes Rendus Mecanique

http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Couplage statistique entre vorticité et gradient de scalaire passif dans une turbulence statistiquement homogène et isotrope mise en rotation

Jean-Noël Gence

Laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique, UMR CNRS 5509, université Claude-Bernard – Lyon 1, INSA de Lyon, École centrale de Lyon, 69134 Écully cedex, France

Reçu le 8 janvier 2007 ; accepté le 16 janvier 2007

Disponible sur Internet le 26 février 2007

Présenté par Geneviève Comte-Bellot

Résumé

On considère un champ de scalaire passif au sein d'un champ de fluctuations de vitesse d'un écoulement turbulent, l'ensemble des deux possédant des propriétés statistiques homogènes et isotropes. Ils sont brusquement soumis à une rotation de solide, qui produit des corrélations triples entre deux composantes du gradient de scalaire et la vorticité. Une phénoménologie et une analyse d'ordre de grandeur de ces corrélations, qui sont nulles avant la mise en rotation, sont proposées. ***Pour citer cet article : J.-N. Gence, C. R. Mecanique 335 (2007).***

Abstract

Statistical correlations between the passive scalar gradient and vorticity in homogeneous and isotropic turbulence submitted to a solid body rotation. Initially homogeneous and isotropic turbulence with velocity and passive scalar fluctuations is submitted to solid-body rotation. It is shown, using the basic equations, that triple correlations between two components of the scalar gradient and vorticity appear. A phenomenological and order-of-magnitude analysis is proposed. ***To cite this article: J.-N. Gence, C. R. Mecanique 335 (2007).***

Mots-clés : Turbulence ; Scalaire passif ; Effets de rotation

Keywords: Turbulence; Passive scalar; Rotation effects

Abridged English version

The evolution of a passive scalar in a turbulent flow is characterised by scalar and velocity gradients γ_i and $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, whose statistical correlations have clear physical meanings. When scalar and velocity fluctuations are homogeneous and isotropic, no such second-order correlations exist, since they form the components of a third order isotropic

Adresse e-mail : jean-noel.gence@ec-lyon.fr.

1631-0721/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crme.2007.01.003

tensor. At the third correlation order, the sum $\overline{\gamma_i\gamma_j d_{ij}}$, where d_{ij} is the rate of strain, is positive and is well known to be the 'production' of $\overline{\gamma^2} = \overline{\gamma_i\gamma_i}$. However, there is no equivalent for the antisymmetric vorticity tensor ω_{ij}, nor the corresponding vorticity vector ω_i. In the present Note, it is shown that, when the turbulent flow is suddenly subjected to a mean velocity field corresponding to a rigid-body rotation, new correlations $\overline{\gamma_i\gamma_j\omega_k}$ necessarily appear, and a phenomenology is proposed for their origin.

This result arises from the evolution equations (5) of these correlations, whose time derivatives are computed at time $t = 0^+$, immediately following the beginning of the mean solid body motion (Eq. (8)). The triple correlations are shown to be proportional to the mean rotation rate, and to the production rate of $\overline{\gamma^2}$ computed immediately before the appearance of the mean rotation (Eq. (15)). An order-of-magnitude analysis of these correlations is proposed, showing that when the Schmidt number Sc is smaller than unity, they scale as $\sqrt{Sc}$ (Eq. (14)), but are independent of that number when it is larger than one (Eq. (13)).

1. Introduction

L'évolution d'un champ de scalaire passif $\theta(\vec{x}, t)$ (température ou concentration par exemple) au sein d'un écoulement, est décrite par la classique équation de convection-diffusion, et il est trivial de rappeler que ce champ n'évolue que s'il n'est pas initialement homogène, c'est à dire parfaitement mélangé. En d'autres termes, son gradient $\frac{\partial\theta}{\partial x_i}$, noté γ_i dans ce qui suit, ne doit pas être nul pour qu'il puisse diffuser. Par ailleurs, pour que l'action du champ de vitesse ne se réduise pas globalement à un simple transport que l'on pourrait éliminer par un changement de référentiel, il est aussi nécessaire que le gradient de vitesse $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$, ne soit pas nul. Ces remarques élémentaires permettent de conclure que les mécanismes essentiels qui interviennent dans l'évolution d'un champ de scalaire passif associé à un écoulement, mettent en jeu les gradients de ce champ et de celui de vitesse. Pour un champ de scalaire initialement inhomogène évoluant dans un écoulement turbulent, les effets associés à ces deux gradients qui sont alors aléatoires, vont se manifester d'un point de vue statistique, à travers les diverses corrélations qui naissent entre leurs fluctuations.

Dans le cas particulier où ces fluctuations sont réparties de manière statistiquement homogène et isotrope, les corrélations $\overline{\gamma_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}$ sont nulles puisqu'elles constituent un tenseur isotrope d'ordre impair. En revanche, il n'en est pas de même de la somme de corrélations

$$e_\theta = \overline{\gamma_i\gamma_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{\gamma_i\gamma_j d_{ij}}$$

où d_{ij} note le taux de déformation local et instantané, c'est à dire la partie symétrique du gradient de vitesse. En effet, comme le rappelle l'équation d'évolution de $\overline{\gamma^2} = \overline{\gamma_i\gamma_i}$, qui, dans cette situation, se réduit à :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\gamma^2}}{\mathrm{d}t} = -2\overline{d_{ij}\gamma_i\gamma_j} - 2D\overline{\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}} = -2e_\theta - 2D\overline{\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}} \tag{1}$$

cette quantité scalaire intervient dans le terme du second membre classiquement interprété comme une « production » de $\overline{\gamma^2}$. Celle-ci est liée aux processus d'étirement et contraction, qui rapprochent ou éloignent les surfaces iso-scalaire, donc font varier la norme du gradient de scalaire. On peut alors facilement en déduire que le tenseur d'ordre pair $\overline{\gamma_i\gamma_j d_{kl}}$ est lui-même non-nul, et possède une forme particulière qui est détaillée dans cette Note. Toutefois, le tenseur analogue mettant en jeu la partie antisymétrique ω_{kl} du gradient de vitesse est à nouveau nul, car il s'écrit en introduisant le vecteur taux de rotation local ω_p :

$$\overline{\gamma_i\gamma_j\omega_{kl}} = -\varepsilon_{klp}\overline{\omega_p\gamma_i\gamma_j}$$

c'est-à-dire est relié au tenseur isotrope d'ordre impair nécessairement nul $\overline{\omega_p\gamma_i\gamma_j}$.

Nous montrons dans cette Note, que ce dernier point cesse d'être vrai, si on fait subir une rotation de solide à cette turbulence initialement homogène et isotrope. On prouve qu'au contraire, ces corrélations naissent au premier ordre en temps sous l'effet du taux de rotation imposé, et qu'on peut alors écrire dans ce dernier cas :

$$\overline{\gamma_i\gamma_j\frac{\partial u_k}{\partial x_l}} = \overline{\gamma_i\gamma_j d_{kl}} - \varepsilon_{klp}\overline{\gamma_i\gamma_j\omega_p}$$

La rotation de solide contribue ainsi à créer des corrélations entre le gradient de scalaire passif et la vorticité. On vérifie toutefois que les corrélations $\overline{\gamma_i\omega_k}$ qui sont initialement nulles à cause de l'isotropie statistique, ne subissent pas l'effet de rotation à cet ordre temporel. Ces résultats sont à rapprocher formellement de la création des corrélations triples de vorticité qui naissent dans les mêmes conditions, comme l'ont montré Gence et Frick [1].

2. Équations d'évolution des corrélations triples des fluctuations de vorticité et du gradient d'un scalaire passif

On note ω_i les composantes des fluctuations de vorticité (moitié du rotationnel du champ de vitesse), et Ω_i celles du vecteur taux de rotation appliqué à l'instant $t=0$ à l'écoulement turbulent statistiquement homogène et isotrope, qui contient le champ de scalaire passif ayant ces mêmes caractéristiques statistiques. Dans un référentiel galiléen, on obtient pour les instants ultérieurs, l'équation d'évolution (voir Gence et al. [1]) :

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = \varepsilon_{plm} x_l \Omega_m \frac{\partial \omega_i}{\partial x_p} + d_{im}\Omega_m - u_p \frac{\partial \omega_i}{\partial x_p} + d_{ip}\omega_p + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_p \partial x_p} \tag{2}$$

dans laquelle les quantités u_p représentent les fluctuations de vitesse. On sait que ce champ de vitesse moyenne de rotation de solide imposé, est solution de l'équation du champ de vitesse moyenne $\overline{U}_p$, si l'on suppose l'homogénéité statistique des fluctuations de vitesse.

Pour ce qui concerne le champ scalaire, si l'on note $\overline{\Theta}$ la valeur moyenne, θ les fluctuations autour de celle-ci, et D le coefficient de diffusion, on aurait avec un écoulement turbulent quelconque :

$$\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial t} = -\overline{U}_p \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_p} - \frac{\partial \overline{u_p\theta}}{\partial x_p} + D \frac{\partial^2 \overline{\Theta}}{\partial x_p \partial x_p}$$

Il s'en déduit pour le gradient moyen $\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_i}$, noté $\overline{\Gamma}_i$:

$$\frac{\partial \overline{\Gamma}_i}{\partial t} = -\overline{U}_p \frac{\partial \overline{\Gamma}_i}{\partial x_p} - \frac{\partial \overline{U}_p}{\partial x_i}\overline{\Gamma}_p - \frac{\partial^2 \overline{u_p\theta}}{\partial x_i \partial x_p} + D \frac{\partial^2 \overline{\Gamma}_i}{\partial x_p \partial x_p}$$

On peut alors conclure que $\overline{\Gamma}_i = 0$ est solution de cette équation si ce gradient est nul à l'instant initial, et si les fluctuations restent dans un état statistique homogène (c'est à dire sans la contribution de $\overline{u_p\theta}$). Par suite, la rotation de solide, qui préserve l'homogénéité statistique, n'induit pas de gradient moyen pour le champ scalaire, dont les fluctuations évoluent alors conformément à :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\overline{U}_p \frac{\partial \theta}{\partial x_p} - u_p \frac{\partial \theta}{\partial x_p} + D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_p \partial x_p}$$

En tenant compte du fait que le champ de vitesse moyenne est donné dans ce cas par :

$$\overline{U}_p = -\varepsilon_{plm} x_l \Omega_m$$

on en déduit pour le gradient γ_i, l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial t} = \varepsilon_{plm} x_l \Omega_m \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_p} + \varepsilon_{pim}\Omega_m \gamma_p - u_p \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_p} - d_{ip}\gamma_p + \varepsilon_{pim}\omega_m \gamma_p + D \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial x_p \partial x_p} \tag{3}$$

Les équations gouvernant respectivement la corrélation double $\overline{\gamma_i\omega_k}$ ainsi que la corrélation triple $\overline{\gamma_i\gamma_j\omega_k}$ (qui ne dépendent que du temps), s'obtiennent alors à partir de (2) et (3), en considérant les relations :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\gamma_i\omega_k}}{\mathrm{d}t} = \overline{\gamma_i \frac{\partial \omega_k}{\partial t} + \omega_k \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\gamma_i\gamma_j\omega_k}}{\mathrm{d}t} = \overline{\gamma_i\gamma_j \frac{\partial \omega_k}{\partial t} + \gamma_i\omega_k \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} + \gamma_j\omega_k \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}}$$

Il vient alors, en tenant compte de l'homogénéité statistique et de l'incompressibilité :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\gamma_i\omega_k}}{\mathrm{d}t} = \Omega_m\big(\overline{\gamma_i d_{km}} + \varepsilon_{pim}\overline{\gamma_p\omega_k}\big) - \overline{d_{ip}\gamma_p\omega_k} + \overline{d_{kp}\gamma_i\omega_p} + \varepsilon_{pim}\overline{\omega_k\omega_m\gamma_p} + \nu\overline{\gamma_i \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial x_p \partial x_p}} + D\overline{\omega_k \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial x_p \partial x_p}} \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\gamma_i\gamma_j\omega_k}}{\mathrm{d}t} = \Omega_m\left(\varepsilon_{pim}\overline{\gamma_p\gamma_j\omega_k} + \varepsilon_{pjm}\overline{\gamma_p\gamma_i\omega_k}\right) + \Omega_m\overline{d_{km}\gamma_i\gamma_j} - \left(\overline{d_{ip}\gamma_p\gamma_j\omega_k} + \overline{d_{jp}\gamma_p\gamma_i\omega_k}\right)$$
$$+ \varepsilon_{pim}\overline{\omega_m\omega_k\gamma_p\gamma_j} + \varepsilon_{pjm}\overline{\omega_m\omega_k\gamma_p\gamma_i} + \nu\overline{\gamma_i\gamma_j\frac{\partial^2\omega_k}{\partial x_p\partial x_p}} + D\left(\overline{\gamma_i\omega_k\frac{\partial^2\gamma_j}{\partial x_p\partial x_p}} + \overline{\gamma_j\omega_k\frac{\partial^2\gamma_i}{\partial x_p\partial x_p}}\right) \tag{5}$$

On vérifie qu'en annulant Ω_m, on retrouve les équations qui auraient été obtenues dans une turbulence statistiquement homogène et isotrope.

3. Contribution de la rotation à l'instant initial

A l'instant $t = 0^+$, les termes en facteur de Ω_m dans l'Éq. (4) sont nuls, puisque leur valeur est celle qu'ils possèdent dans la turbulence isotrope juste avant l'application de la rotation. En effet, $\overline{\gamma_i d_{km}}$ est alors un tenseur isotrope d'ordre impair, et il en est de même de l'autre terme qui s'écrit encore en introduisant la partie antisymétrique ω_{ij} du gradient de vitesse $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$:

$$\varepsilon_{pim}\overline{\gamma_p\frac{1}{2}\varepsilon_{kpq}\omega_{qp}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{mip}\varepsilon_{pkq}\overline{\gamma_p\omega_{qp}} = \frac{1}{2}(\delta_{mk}\delta_{iq} - \delta_{ik}\delta_{mq})\overline{\gamma_p\omega_{qp}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\delta_{mk}\overline{\gamma_p\omega_{ip}} - \delta_{ik}\overline{\gamma_p\omega_{mp}}\right)$$

On peut vérifier ainsi que la rotation n'a aucune contribution à la dérivée temporelle de $\overline{\gamma_i\omega_k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{kpq}\overline{\gamma_i\omega_{qp}}$ qui est initialement nulle, et donc conclure que la rotation n'a aucun effet sur cette quantité au premier ordre en temps. En revanche, si à $t = 0^+$, la première parenthèse en facteur de Ω_m est nulle dans l'Éq. (5) pour les mêmes raisons d'isotropie statistique, il n'en est pas de même de l'autre terme constitué par le tenseur du quatrième ordre $\overline{d_{km}\gamma_i\gamma_j}(t)$. Ce dernier doit encore posséder son expression isotrope symétrique vis à vis des indices k et m, ainsi que des indices i et j, c'est à dire être de la forme :

$$\overline{d_{km}\gamma_i\gamma_j} = A\delta_{km}\delta_{ij} + B(\delta_{ki}\delta_{mj} + \delta_{kj}\delta_{mi})$$

En utilisant le fait que d_{ip} est de trace nulle à cause de l'incompressibilité, et que la double contraction sur i et k ainsi que sur j et m fournit le terme d'étirement contraction $e_\theta(t)$ apparaissant dans l'Éq. (1), on obtient l'expression valable à l'instant initial :

$$\overline{d_{km}\gamma_i\gamma_j}(0) = \frac{e_\theta(0)}{5}\left[\frac{1}{2}(\delta_{ki}\delta_{mj} + \delta_{kj}\delta_{mi}) - \frac{1}{3}\delta_{km}\delta_{ij}\right] \tag{6}$$

Les autres termes de (5) étant tous des tenseurs isotropes d'ordre impair à l'instant $t = 0^+$, l'Éq. (5) montre qu'alors la rotation impose à cet instant :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overline{\gamma_i\gamma_j\omega_k}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = \Omega_m\overline{d_{km}\gamma_i\gamma_j}(0) = \frac{e_\theta(0)}{5}\left[\frac{1}{2}(\delta_{ki}\Omega_j + \delta_{kj}\Omega_i) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Omega_k\right] \tag{7}$$

ce qui met en évidence l'apparition d'un couplage statistique entre la vorticité et le gradient du scalaire, sous la forme de la corrélation $\overline{\gamma_i\gamma_j\omega_k}$. On peut noter qu'une analyse analogue, menée à partir de l'équation de $\overline{\gamma_i\omega_k\omega_l}$, montrerait que cette corrélation reste nulle à cet ordre temporel, comme $\overline{\gamma_i\omega_k}$. Soulignons enfin que la contraction de (7) sur i et j prouve que $\overline{\gamma^2\omega_k}$ n'évolue pas non plus à cet ordre, la dérivée temporelle étant nulle. Intuitivement on conçoit que l'effet de rotation ne se manifeste pas immédiatement sur la norme du gradient de scalaire, mais plutôt sur son orientation.

Plus explicitement, si le troisième axe du référentiel est choisi parallèle au taux de rotation imposé, on pose :

$$\Omega_i = \Omega\delta_{i3}$$

et (7) devient :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overline{\gamma_i\gamma_j\omega_k}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{5}\Omega e_\theta(0)\left[\frac{1}{2}(\delta_{ki}\delta_{j3} + \delta_{kj}\delta_{i3}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{k3}\right] \tag{8}$$

On en déduit alors les corrélations qui apparaissent sous l'effet de la rotation, et qui résultent des dérivées non-nulles données par (8). En donnant successivement à k les valeurs 1, 2, 3, on trouve :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overline{\gamma_1\gamma_3\omega_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = \left.\frac{\mathrm{d}\overline{\gamma_2\gamma_3\omega_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{10}\Omega e_\theta(0) \tag{9a}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overline{\gamma_1^2\omega_3}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = \left.\frac{\mathrm{d}\overline{\gamma_2^2\omega_3}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = -\frac{1}{15}\Omega e_\theta(0); \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\overline{\gamma_3^2\omega_3}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = \frac{2}{15}\Omega e_\theta(0) \tag{9b}$$

valeurs dont on peut donner une interprétation physique.

4. Phénoménologie de la naissance de ces corrélations

A titre d'exemple, on propose une phénoménologie de l'apparition des corrélations $\overline{\gamma_3^2\omega_3}$ et $\overline{\gamma_1\gamma_3\omega_1}$ liée à l'application de la rotation, mais les raisonnements valent pour toutes les composantes intervenant dans les relations (9). Dans tout ce qui suit, on notera δf la nouvelle fluctuation de la grandeur aléatoire f apparaissant sous l'effet de la seule rotation, au bout de l'intervalle de temps δt après l'instant initial.

A priori, la mise en rotation n'affecte pas pendant δt la composante γ_3 ni en conséquence γ_3^2. Cette remarque est en accord avec l'Éq. (3), qui, si on ne considère que les termes contenant l'effet de rotation et susceptibles d'avoir une contribution dans des équations de moments, se réduit à :

$$\frac{\partial\gamma_i}{\partial t} = \varepsilon_{pim}\Omega_m\gamma_p = \varepsilon_{pi3}\Omega\gamma_p \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\gamma_3}{\partial t} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\gamma_3^2}{\partial t} = 0$$

Toutefois, l'apparition de la rotation, associée à l'action du taux de déformation d_{33} pendant δt (qui est choisi suffisamment petit pour que d_{33} soit constant, donc inférieur au temps de Kolmogoroff), contribue à créer une fluctuation de vorticité $\delta\omega_3$ par étirement contraction d'une zone tournant en bloc au taux Ω. Cela est clairement exprimé par la relation :

$$\delta\omega_3 = d_{33}\Omega\delta t$$

déduite de l'Éq. (2) réduite aux seuls termes utiles au raisonnement. Par suite, cette nouvelle fluctuation est proportionnelle à d_{33}, qui est déjà corrélé à γ_3^2 dans la turbulence isotrope initiale (voir (6)), ce qui est en accord avec l'apparition de la corrélation $\overline{\gamma_3^2\delta\omega_3}$. L'action du taux local de déformation d_{ij} sur la rotation imposée se manifeste aussi par des changements d'orientation des zones qui tournent au taux Ω, et qui ne restent pas parallèles à l'axe 3. En particulier, d_{13} qui traduit un basculement de la direction 3 sur la direction 1, contribue à créer une fluctuation de vorticité $\delta\omega_1$, conformément à la relation déduite de (2) :

$$\delta\omega_1 = d_{13}\Omega\delta t \tag{10}$$

Le même mécanisme de basculement, mais avec un signe opposé, affecte le gradient de scalaire, et est représenté par le terme $-d_{ip}\gamma_p$ dans l'Éq. (3). C'est lui qui explique avant l'application de la rotation, l'existence de la corrélation $\overline{d_{13}\gamma_1\gamma_3}$ dans la turbulence isotrope initiale, conformément à la relation (6) qui fournit :

$$\overline{d_{13}\gamma_1\gamma_3} = \frac{e_\theta}{10}$$

Ainsi, (10) montre que $\delta\omega_1$ apparaissant avec la rotation est proportionnelle à d_{13} qui est déjà corrélé avec $\gamma_1\gamma_3$, ce qui est en accord avec la naissance de la corrélation $\overline{\delta\omega_1\gamma_1\gamma_3}$.

5. Ordre de grandeur de ces corrélations et conclusion

Le raisonnement qui suit est voisin de celui qui est développé par Gence et al. [1] pour évaluer les corrélations triples de vorticité qui apparaissent dans les mêmes conditions. On note $\overline{\gamma^2\omega}$ l'ordre de grandeur cherché, l l'ordre de grandeur des échelles de longueur ayant une contribution au gradient de scalaire d'ordre γ, et τ le temps de cohérence de la plus petite des échelles marquant γ ou la vorticité qui est d'ordre $\omega \approx \sqrt{\bar{\varepsilon}/\nu}$, où $\bar{\varepsilon}$ représente le taux de dissipation turbulente. (Les échelles qui marquent $\overline{\omega^2}$ et $\overline{\gamma^2}$ peuvent en effet être différentes et donc avoir des temps caractéristiques d'évolution différents, les plus petites étant associées aux temps les plus faibles.) La relation (7) permet alors d'écrire :

$$\overline{\gamma^2\omega} \approx e_\theta \Omega \tau$$

soit, en introduisant un coefficient sans dimensions :

$$C = \frac{\overline{\gamma^2\omega}}{\sqrt{\overline{\gamma^4}}\sqrt{\overline{\omega^2}}} \approx \frac{e_\theta \Omega \tau}{\gamma^2\omega} = \frac{e_\theta \Omega \tau}{\gamma^2}\sqrt{\frac{\nu}{\bar{\varepsilon}}} \tag{11}$$

En supposant pour simplifier, que les grandes échelles L du scalaire et du champ de vitesse sont du même ordre, le temps de transfert entre échelles du scalaire, donc d'évolution de $\overline{\gamma^2}$ vaut alors $T_L = L/\sqrt{\overline{q^2}}$, où $\overline{q^2} = \overline{u_i u_i}$. On sait en outre que le rapport τ/T_L est d'autant plus petit que le nombre de Reynolds $Re_L = L\sqrt{\overline{q^2}}/\nu$ est grand, ce qui sera supposé dans cette analyse. Par suite, on peut évaluer e_θ en considérant que $\overline{\gamma^2}$ reste constant pendant τ, ce qui revient à négliger le premier membre de l'Éq. (1). Cette hypothèse conduit à :

$$e_\theta \approx D\overline{\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}} \approx D\frac{\gamma^2}{l^2}$$

On peut ainsi écrire (11) :

$$C \approx \frac{e_\theta \Omega \tau}{\gamma^2}\sqrt{\frac{\nu}{\bar{\varepsilon}}} \approx \frac{D\Omega\tau}{l^2}\sqrt{\frac{\nu}{\bar{\varepsilon}}} \tag{12}$$

Pour estimer l et τ, il est nécessaire de tenir compte du nombre de Schmidt $Sc = \nu/D$ (ou de Prandtl si le scalaire est la température). On distinguera ainsi deux situations asymptotiques :

(a) $Sc \gg 1$, auquel cas le scalaire diffuse moins efficacement que la vorticité. On peut alors considérer avec Batchelor [2] que l'évolution des échelles l est gouvernée par des étirements-contractions de temps caractéristique $\tau \approx (\nu/\bar{\varepsilon})^{1/2}$, égal à celui des échelles marquant ω. Quant aux échelles du scalaire elles-mêmes, elles s'évaluent selon $l \approx (\nu D^2/\bar{\varepsilon})^{1/4}$. Dans ces conditions, on déduit de (12) :

$$C \approx \Omega\sqrt{\frac{\nu}{\bar{\varepsilon}}} \approx \frac{L\Omega}{\sqrt{\overline{q^2}}}\frac{1}{\sqrt{Re_L}} \approx Ro_L^{-1}Re_L^{-1/2} \tag{13}$$

en introduisant le nombre de Rossby $Ro_L = \sqrt{\overline{q^2}}/(\Omega L)$, et la relation classique $\bar{\varepsilon} \approx \overline{q^2}^{3/2}/L$.

(b) $Sc < 1$, de sorte que la vorticité diffuse moins que le scalaire et est donc marquée par de plus petites échelles de longueur. Son temps de cohérence, qui est alors plus faible que celui de γ, s'impose ainsi comme valeur de τ dans (11), et vaut donc encore $(\nu/\bar{\varepsilon})^{1/2}$. Par ailleurs, dans l'hypothèse d'un grand nombre de Reynolds permettant l'existence d'un domaine d'inertie, on peut écrire dans ce cas (Corrsin [3]) : $l \approx (D^3/\bar{\varepsilon})^{1/4}$. La relation (12) devient alors :

$$C \approx \Omega\sqrt{\frac{\nu}{\bar{\varepsilon}}}\sqrt{\frac{\nu}{D}} \approx \frac{L\Omega}{\sqrt{\overline{q^2}}}\frac{1}{\sqrt{Re_L}}\sqrt{Sc} \approx Ro_L^{-1}Re_L^{-1/2}Sc^{1/2} \tag{14}$$

Ces évaluations sont évidemment à confirmer dans une simulation numérique ou une expérience. On peut noter, en utilisant le temps τ introduit ci-dessus, que (7) conduit dans tous les cas à la forme générale :

$$\overline{\gamma_i\gamma_j\omega_k} = \frac{e_\theta(0)}{10}\tau\left[\delta_{ki}\Omega_j + \delta_{kj}\Omega_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\Omega_k\right] \tag{15}$$

valable pour cet intervalle de temps suivant l'instant d'apparition de la rotation de solide.

Références

[1] J.N. Gence, C. Frick, Naissance des corrélations triples de vorticité dans une turbulence statistiquement homogène soumise à une rotation, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II b (2001) 351–356.

[2] G.K. Batchelor, Small-scale variation of convected quantities like temperature in a turbulent fluid, part 1, J. Fluid Mech. 5 (1959) 113–133.

[3] S. Corrsin, On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in isotropic turbulence, J. Appl. Phys. 22 (1951) 469–475.