

Intégrale Mv pour la propagation de fissure dans un milieu viscoélastique

Rostand Moutou Pitti, Frédéric Dubois*, Octavian Pop, Nicolas Sauvat, Christophe Petit

Université de Limoges, Laboratoire de mécanique modélisation des matériaux et structures du génie civil, Centre universitaire d'Egletons, 19300 Egletons, France

Reçu le 21 mai 2007 ; accepté le 26 juin 2007

Disponible sur Internet le 10 septembre 2007

Présenté par Huy Duong Bui

Résumé

Ce travail présente le développement analytique d'une nouvelle intégrale Mv découplant les modes de rupture durant le processus de propagation d'une fissure dans un milieu viscoélastique. La base du développement repose sur les théorèmes de conservation de l'énergie, des intégrales indépendantes et sur une combinaison de champs réels et virtuels induisant une forme bilinéaire de l'énergie libre. L'utilisation généralisée du principe des travaux virtuels est la base du principe de découplage des modes de rupture. L'introduction du comportement viscoélastique via une formulation discrétisée de l'énergie libre permet d'obtenir une généralisation de cette intégrale caractérisée par une indépendance de son domaine d'intégration. **Pour citer cet article :** R. Moutou Pitti et al., *C. R. Mécanique* 335 (2007).

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Mv -integral for the crack growth in a viscoelastic media. The main purpose of this Note is the development of a new integral Mv separating mixed mode fracture during a crack growth process in a viscoelastic media. The mathematical developments are based on conservative laws, the independent path integrals and the combination of real and virtual displacement fields inducing a bilinear form of the strain energy density. The uncoupling fracture mode is based on a generalization of the virtual work principle. The introduction of the viscoelastic behavior through an incremental formulation of the free energy allows the generalization of this path independent path integral. **To cite this article:** R. Moutou Pitti et al., *C. R. Mécanique* 335 (2007).

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Rupture ; Modes mixtes ; Viscoélasticité ; Intégrales indépendantes

Keywords: Rupture; Mixed modes; Viscoelasticity; Path independent integrals

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : frederic.dubois@unilim.fr (F. Dubois).

Abridged English version

Many engineering crack growth processes are generally caused by complex loadings causing mixed modes fractures. The crack growth approach is usually based upon an energy balance. Many authors have proposed numerical approaches which allow computing stress intensity factors (local approaches) or the energy release rate (global approaches). In this latter case, independent path integrals (the J integral or Gv integral) have been developed. Generally, these integrals are used for anisotropic media, characterized by a hereditary behavior (viscoelasticity, for example). On the other hand, the M -integral is employed in order to operate a fracture mode separating. However, this approach is limited to isotropic and elastic media. Thus, this Note deals with a generalization of the M -integral in order to separate fracture modes in a viscoelastic media during the crack growth process.

The conservative law, through the Noether's theorem (1), is used in an Arbitrary Lagrangian Eulerian description (ALE). Its combination with a real and virtual displacements (2) allows us to obtain a Lagrangian variation (3). If we suppose that crack δa is oriented in the x_1 -direction (see Fig. 1(a)), the combination of displacements (2), expressions (4) and derivation form (5) in Eq. (2), we obtain relation (5). Applying a Gauss–Ostrogradski's transformation in the last equation, we obtain the generalization of the Noether's theorem applied for a bilinear form F^\bullet (6) of the strain energy density in which ∂V is a closed curvilinear contour around the crack tip. In order to define the general form of the M -integral, we use a decomposition of the curvilinear contour introducing contours $(\Gamma 1)$, $(\Gamma 2)$, their inside surfaces and crack lip segments denoted $B_1 B_2$ and $A_2 A_1$, expression (8) (see Fig. 1(b)). Taking into account this decomposition, Eq. (10) defines the general form of the M -integral characterized by a non-dependence integration domain. The bilinear form of the free energy density integrates the viscoelastic behavior, through a spectral decomposition of the creep tensor components, expression (12). Considering the Staverman's integral, we obtain the relation (13). Introducing this form in the M -integral definition (10), we obtain the final discretised expression (14).

1. Introduction

Les matériaux à base de polymères présentent souvent un comportement viscoélastique dans lesquels peuvent se propager une fissure. Les outils de modélisation et de conception doivent pouvoir, aujourd'hui, intégrer la mécanique de la rupture afin de prédire les seuils critiques d'amorçage de propagation. Le bilan énergétique est complexe car, d'une part, le processus de dissipation est de deux natures (dissipation par viscosité dans le matériau et par progression du front de fissure) et, d'autre part, les modes mixtes de sollicitation (mode d'ouverture et de cisaillement) sont fortement anisotropes. Les outils de modélisation modernes en mécanique de la rupture utilisent des approches énergétiques globales [1] mettant en jeu les champs mécaniques lointains à faible gradient au détriment des méthodes locales [2] perturbées par la forte singularité des champs mécaniques. Les approches par intégrales invariants, de type Gv [3], permettent aujourd'hui de séparer les dissipations énergétiques dues respectivement aux propriétés viscoélastiques du milieu et au processus de fissuration. Or, ces techniques ne sont mises en œuvre que pour des cinétiques simples et ne permettent pas un découplage de mode mixte. L'intégrale M [4] permet ce découplage mais est limitée aux comportements élastiques. Cette étude présente une généralisation des intégrales Gv et M qui permettra le découplage de mode adapté à un milieu viscoélastique pour le processus d'amorçage et de propagation de fissure.

2. Conservation de l'énergie

Pour un milieu volumique homogène fissuré V , le théorème de Noether [5] postule que la variation du Lagrangien L est nulle pour tous temps t choisi arbitrairement, et tous champs de déplacement réels δu et virtuels δv cinématiquement admissibles :

$$\delta L = \int_t \int_V \delta F^\bullet dV dt = 0 \quad (1)$$

où F^\bullet désigne la forme bilinéaire de l'énergie libre définie par Chen [4]. Si on se situe dans une configuration Lagrangienne Eulérienne Arbitraire [6], on écrit :

$$\begin{aligned} \delta \tilde{v}_i &= \delta v_i; & \delta \tilde{v}_i &= 0; & \delta \tilde{v}_i &= \delta v_i + \delta v_i^* \\ \delta \tilde{u}_i &= \delta u_i; & \delta \tilde{u}_i &= 0; & \delta \tilde{u}_i &= \delta u_i + \delta u_i^* \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \tilde{v} : \text{représentation Eulérienne} \\ v^* : \text{représentation Lagrangienne} \end{array} \right) \quad (2)$$

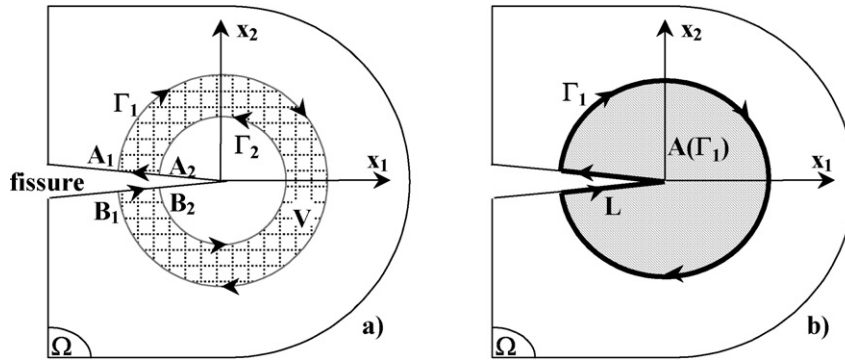


Fig. 1. Domaines d'intégration.

Fig. 1. Integration domains.

Afin de simplifier la démarche analytique, nous définissons une variable temporelle et spatiale $\alpha(x_1, x_2, t)$ qui, associée à l'expression (2) dans le Lagrangien (1), donne :

$$\delta L = \int_V \int_t \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \delta u_{i,\alpha} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}^*} \delta u_{i,\alpha}^* + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \delta v_{i,\alpha} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}^*} \delta v_{i,\alpha}^* \right) dV dt \tag{3}$$

Si nous supposons que la fissure de longueur δa est orientée dans la direction x_1 , Fig. 1, nous obtenons les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot \delta u_{i,\alpha}^* &= \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot \delta u_i^* \right)_{,\alpha} - \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} \cdot \delta u_i^* \\ \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot \delta v_{i,\alpha}^* &= \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot \delta v_i^* \right)_{,\alpha} - \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} \cdot \delta v_i^* \end{aligned} \quad \left(\delta u_{i,\alpha} = \frac{\partial u_{i,\alpha}}{\partial x_1} \delta a \text{ et } \delta v_{i,\alpha} = \frac{\partial v_{i,\alpha}}{\partial x_1} \delta a \right) \tag{4}$$

En s'appuyant sur une description eulérienne (2), la prise en compte de l'Éq. (4) dans le Lagrangien (1) conduit à :

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_V \int_t \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,j}} \cdot u_{i,1} \right)_{,j} - \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,j}} \cdot v_{i,1} \right)_{,j} \right) dV dt \delta a \\ &\quad - \int_V \int_t \left(\left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \delta u_{i,1} \right)_{,\alpha} - F_{,1}^\bullet(u) + \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \delta v_{i,1} \right)_{,\alpha} - F_{,1}^\bullet(v) \right) dV dt \delta a = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Par application du théorème de Gauss–Ostrogradski [7] au premier terme de l'Éq. (5) et en considérant la stationnarité du Lagrangien pour toute variation δa de la fissure, on obtient le théorème de Noether généralisé à la propagation de la fissure, et ce, quel que soit le temps t :

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_{\partial V} \left(F^\bullet \cdot n_1 - \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,j}} \cdot u_{i,j} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,j}} \cdot v_{i,j} \right) \cdot n_j \right) d\Gamma \\ &\quad + \int_V \left(\left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \delta u_{i,1} \right)_{,\alpha} + \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \delta v_{i,1} \right)_{,\alpha} - (F_{,1}^\bullet(u) + F_{,1}^\bullet(v)) \right) dV = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

(∂V : contour fermé frontière de V).

3. Intégrale Mv

Pour des raisons de simplifications, introduisons les notations suivantes :

$$I_1(u, v) = F^\bullet \cdot n_1 - \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,j}} \cdot u_{i,1} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,j}} \cdot v_{i,1} \right) \quad \text{et}$$

$$I_2(u, v) = \left(\left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \delta u_{i,1} \right)_{,\alpha} + \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \delta v_{i,1} \right)_{,\alpha} - (F^\bullet_{,1}(u)) + F^\bullet_{,1}(v) \right) \quad (7)$$

En définissant les contours linéiques et surfaciques, on écrit successivement, Fig. 1(a) :

$$\partial V = \Gamma_1 + B_1 B_2 + \Gamma_2 + A_2 A_1 \quad \text{et} \quad V = A(\Gamma_1) - A(\Gamma_2) \quad (8)$$

En considérant les notations (7) et (8) dans l'égalité (6), nous obtenons l'expression suivante :

$$\int_{\Gamma_1} I_1(u, v) d\Gamma + \int_{A(\Gamma_1)} I_2(u, v) dV + \int_{A_2 A_1} I_1(u, v) d\Gamma + \int_{B_1 B_2} I_1(u, v) d\Gamma$$

$$= - \int_{\Gamma_2} I_1(u, v) d\Gamma + \int_{A(\Gamma_2)} I_2(u, v) dV \quad (9)$$

En prenant en compte les différentes orientations des domaines imposées par leur normale sortante respective, nous pouvons également écrire :

$$M = \int_{\Gamma_1} I_1(u, v) d\Gamma + \int_{A(\Gamma_1)} I_2(u, v) dV + \int_{A_2 A_1} I_1(u, v) d\Gamma + \int_{B_1 B_2} I_1(u, v) d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma_2} I_1(u, v) d\Gamma + \int_{A(\Gamma_2)} I_2(u, v) dV \quad (10)$$

Finalement, l'égalité (10) montre l'indépendance de l'intégrale M vis-à-vis du domaine d'intégration choisi, dès lors qu'on opère la correction induite par la pression sur les lèvres de la fissure. En faisant tendre $A(\Gamma_2)$ vers 0, cela correspond à prendre L comme longueur cumulée pour les segments $A_2 A_1$ et $B_1 B_2$, A_2 et B_2 étant confondus avec la pointe de fissure, Fig. 1(b). Dans le cas d'un matériau viscoélastique, nous proposons d'introduire la notion de bilinéarité proposée par Chen dans la forme générale définie par Staverman [8], et ce, de la façon suivante :

$$F^\bullet(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_{0^-}^t \int_{0^-}^t [2 \cdot J_{ijkl}(t - \xi) - J_{ijkl}(2 \cdot t - \xi - \beta)] d\sigma_{ij}^u(\xi) d\sigma_{ij}^v(\beta) \quad (t, \xi \text{ et } \beta : \text{ temps}) \quad (11)$$

$(\sigma_{ij}^{(v)})$ et $(\sigma_{ij}^{(u)})$ sont respectivement les contraintes virtuelles et réelles. $J_{ijkl}(t)$ désigne les composantes du tenseur de fluage. L'ensemble de ces composantes peut être mis sous la forme d'une série de Prony :

$$J_{ijkl}(t) = J_{ijkl}^o + \sum_{m=1}^M J_{ijkl}^m \cdot (1 - \exp\{-\lambda_{ijkl}^m \cdot t\}) \quad (12)$$

En introduisant la forme (12) dans l'expression bilinéarisée de l'énergie libre ($\kappa \in \{u, v\}$), nous obtenons :

$$F^\bullet(t) = \frac{1}{2} J_{ijkl}^o \cdot \sigma_{ij}^u \cdot \sigma_{ij}^v + \sum_{m=1}^M \frac{1}{2} J_{ijkl}^m \cdot {}^m \sigma_{ij}^u \cdot {}^m \sigma_{ij}^v \quad \text{avec } {}^m \sigma_{ij}^\kappa = \int_{0^-}^t (1 - \exp\{-\lambda_{ijkl}^m \cdot (t - \tau)\}) \cdot \frac{\partial \sigma_{kl}^\kappa}{\partial \tau} d\tau \quad (13)$$

En insérant l'Éq. (13) dans l'expression (10), l'intégrale M peut se mettre sous la forme généralisée M_v^m :

$$M_v^m = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma_1} [({}^m \sigma_{ij}^v)_{,1} \cdot {}^m u_i - {}^m \sigma_{ij}^u \cdot {}^m v_{i,1}] \cdot n_j d\Gamma - \frac{1}{2} \cdot \int_L ({}^m \sigma_{ij}^v \cdot {}^m u_{i,1} + {}^m \sigma_{ij}^u \cdot {}^m v_{i,1}) d\Gamma$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \int_{A(\Gamma_1)} [{}^m \sigma_{ij}^v \cdot ({}^m \varepsilon_{ij}^u)_{,1} + {}^m \sigma_{ij}^u \cdot ({}^m \varepsilon_{ij}^v)_{,1} - ({}^m \sigma_{ij}^v \cdot {}^m \varepsilon_{ij}^u + {}^m \sigma_{ij}^u \cdot {}^m \varepsilon_{ij}^v)_{,1}] dV \quad (m \in \{o, 1, \dots, M\}) \quad (14)$$

${}^m\kappa_i, {}^m\varepsilon_{ij}^{\kappa}$ désignent les composantes des champs de déplacements et de déformations induits respectivement par les champs de contrainte de composantes ${}^m\sigma_{ij}^{\kappa}$ ($\kappa \in \{u, v\}$). Le premier terme de l'intégrale (14) permet le découplage de modes pour une fissure stationnaire [4]. Le second terme prend en compte une éventuelle pression sur les lèvres de la fissure. Enfin, le dernier terme permet de garder l'indépendance du domaine d'intégration lors d'une propagation de fissure. Par analogie avec le taux de restitution d'énergie, l'expression (14) peut s'écrire via les formes réelles et virtuelles des facteurs d'intensité de contrainte ${}^mK_{\alpha}^u$ et ${}^mK_{\alpha}^v$ et les complaisances élastiques réduites ${}^mC_{\alpha}$ (α : mode de rupture) :

$$M_v^m = \sum_{\alpha} \frac{1}{8} \cdot {}^mC_{\alpha} \cdot {}^mK_{\alpha}^u \cdot {}^mK_{\alpha}^m \quad \text{avec} \quad {}^mG_v^{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{1}{8} \cdot {}^mC_{\alpha} \cdot {}^mK_{\alpha}^u \cdot {}^mK_{\alpha}^u \quad \text{et} \quad G_v^{\alpha} = \sum_m {}^mG_v^{\alpha} \quad (15)$$

L'intégrale M_v^m est une généralisation du principe des travaux virtuels qui consiste à faire travailler des champs mécaniques réels dans des cinématiques virtuelles et inversement. Le découplage ou l'isolement de chaque mode de rupture s'effectue en choisissant les champs virtuels pour annuler le travail dans le cadre des modes de rupture que nous souhaitons faire disparaître. La méthode la plus directe est de construire, à l'aide d'un code aux éléments finis, les champs virtuels sur la base des champs mécaniques singuliers [9] faisant intervenir la proportionnalité des champs via les facteurs d'intensité de contrainte. Il s'agit alors d'annuler, à tour de rôle, ces facteurs afin d'isoler le mode de rupture souhaité. Cette opération se fait de la façon suivante :

$${}^mK_1^u = \frac{8 \cdot M_v^m ({}^mK_1^v = 1, {}^mK_2^v = 0)}{{}^mC_1} \quad \text{et} \quad {}^mK_2^u = \frac{8 \cdot M_v^m ({}^mK_1^v = 0, {}^mK_2^v = 1)}{{}^mC_2} \quad (16)$$

Pour chaque mode de rupture, il est alors possible de déterminer le taux de restitution d'énergie partiel ${}^mG_v^{\alpha}$. Une sommation finale, en terme de taux de restitution d'énergie sur l'indice m , l'Éq. (15) permet de calculer sa valeur globale pour l'ensemble des paramètres de la série de Prony.

4. Conclusion

Le développement analytique de l'intégrale M découplant les modes de rupture au cours du processus de propagation de la fissure est présenté. Cette définition incorpore simultanément une pression, pouvant être induite par un fluide quelconque, sur les lèvres de la fissure. Cependant, il reste, à intégrer cette formulation analytique dans les codes aux éléments finis. L'objectif recherché étant de généraliser cette intégrale à des champs thermiques ou hydriques.

Références

- [1] J.R. Rice, A path independent integral and the approximate analysis of strain conservations by notches and cracks, *Journal Applied Mechanics* 35 (1968) 379–385.
- [2] J.H. Chang, D.J. Wu, Computation of mixed-mode stress intensity factors for curved cracks in anisotropic elastic solids, *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007) 1360–1372.
- [3] F. Dubois, C. Petit, Modelling of the crack growth initiation in viscoelastic media by the $G\theta v$ -integral, *Engineering Fracture Mechanics* 72 (18) (2005) 2821–2836.
- [4] F.M.K. Chen, R.T. Shield, Conservation laws in elasticity of J -integral type, *Journal of Applied Mechanics and Physics* 28 (1977) 1–22.
- [5] E. Noether, Invariant variations problem, *Transport Theory and Statistical Physics*, vol. 1, 1918, pp. 183–207.
- [6] M. Attigui, C. Petit, Mixed-mode separation in dynamic fracture mechanics, vol. 84, 1997, pp. 19–36.
- [7] A.M. Kervaire, Sur les formules d'intégration de l'analyse vectorielle, *L'enseignement Mathématique* 3 (1957) 138.
- [8] A.J. Staverman, P. Schwarzl, *Non-Equilibrium Thermodynamics of Viscoelastic Behaviour*, Academic Sciences, The Netherlands, 1952, pp. 486–492.
- [9] G.R. Irwin, Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate, *Journal of Applied Mechanics* 24 (1957) 361–364.