Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
C. R. Mecanique 334 (2006) 669–673
COMPTES RENDUS MECANIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Construction d'un ensemble d-dominant sur un graphe en utilisant un critère donné

Alexandre Delye de Clauzade de Mazieux, Michel Marot, Monique Becker *

Laboratoire SAMOVAR CNRS, UMR 5157, Institut national des télécommunications – GET INT, 9, rue C. Fourier, 91011 Evry CEDEX, France

Reçu le 21 juillet 2006 ; accepté le 11 septembre 2006

Disponible sur Internet le 19 octobre 2006

Présenté par Jacques Arsac

Résumé

Les ensembles d-dominants dans les graphes sont très importants en ingénierie des systèmes et réseaux. Leurs constructions constituent donc un thème de recherche essentiel. Nous proposons une heuristique permettant de construire de tels ensembles en utilisant un critère donné. Nous simplifions l'heuristique présentée ailleurs. Nous la généralisons, et démontrons l'exactitude de l'heuristique généralisée. Cette heuristique a pour avantage d'être distribuée et de supporter le passage à l'échelle. ***Pour citer cet article : A. Delye de Clauzade de Mazieux et al., C. R. Mecanique 334 (2006).***

Abstract

Construction of a d-dominating set on a graph by using a given criterion. d-dominating sets in graphs are very important in system and network engineering. Their constructions is thus an important research topic. An heuristic which forms such sets by using a given criterion is proposed. We simplify the heuristic presented elsewhere. We extend it and prove the correctness of the extended heuristic. This heuristic has the advantage of being distributed and scalable. ***To cite this article: A. Delye de Clauzade de Mazieux et al., C. R. Mecanique 334 (2006).***

Mots-clés : Théorie des graphes ; Arbres ; Sélection de caryommes ; Recherche opérationnelle ; Ensembles d-dominants ; Heuristique

Keywords: Graph theory; Trees; Clusterhead selection; Operational researches; d-dominating set; Heuristic

1. Introduction

Un ensemble de sommets S d'un graphe $G = (E, V)$ est d-dominant si tout sommet de E est à distance au plus d de l'un des sommets de S. Ces ensembles jouent un rôle important dans plusieurs problèmes de télécommunications et en calcul distribué. En effet, ces sommets sont en quelque sorte « idéalement placés » dans le graphe.

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : alexandre.delye@int-evry.fr (A. Delye de Clauzade de Mazieux), michel.marot@int-evry.fr (M. Marot), monique.becker@int-evry.fr (M. Becker).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2006.09.001

Un algorithme a été présenté dans l'article [1], permettant la formation d'ensembles d-dominants. Celui-ci utilisait comme critère de choix l'adresse de chaque sommet : un élément de S était un sommet pour lesquel l'adresse réalisait, pour au moins l'un des sommets de son voisinage à d sauts, un maximum des adresses à d sauts. Nous présentons ici, dans la partie 2, un algorithme simplifié et valable pour un critère choisi, ce qui semble plus raisonnable que d'utiliser l'adresse du sommet et n'introduit pas de complexité trop grande. Dans la partie 3, nous démontrons la convergence de cet algorithme. Dans la partie 4, nous exposons ses caractéristiques.

2. Présentation de l'algorithme

Pour $x \in E$, $\mathcal{V}_x(i)$ est le voisinage à moins de i sauts de x ; $(\mathcal{V}_x(i))_i$ est une suite croissante au sens de l'inclusion d'ensemble. Soit Y un ensemble sur lequel on dispose d'une relation d'ordre total. Soit v une fonction de E dans Y, injective. Soit X l'image de E par v ; v réalise alors une bijection de E sur X dont la fonction inverse est notée v^{-1} : $\forall x \in E\ v^{-1}(v(x)) = x$.

L'algorithme se déroule en $2d$ étapes. Les d premières constituent la *phase Max*. Les d dernières forment la *phase Min*. Tout sommet tient à jour deux listes *Winner* et *Sender*, de taille $2d + 1$. Winner est une liste d'éléments de X. Sender est une liste d'éléments de E. Nous notons $W_k(x)$ et $S_k(x)$ les images en x des fonctions W_k et S_k, définies par récurrence.

Phase initiale : $k = 0$

$$\forall x \in E \quad W_0(x) = v(x), \quad S_0(x) = x$$

Phase Max : $k \in [\![1; d]\!]$

Les fonctions W_{k-1} et S_{k-1} étant construites :

Pour $x \in E$, soit $y_k(x)$ le sommet (unique) de $\mathcal{V}_x(1)$ tel que :

$$\forall y \in \mathcal{V}_x(1) \setminus \{y_k(x)\} \quad W_{k-1}(y_k(x)) > W_{k-1}(y)$$

Avec ces notations :

$$\forall x \in E \quad W_k(x) = W_{k-1}(y_k(x)), \quad S_k(x) = y_k(x)$$

Phase Min : $k \in [\![d + 1; 2d]\!]$

Les fonctions W_{k-1} et S_{k-1} étant construites :

Pour $x \in E$, soit $y_k(x)$ le sommet (unique) de $\mathcal{V}_x(1)$ tel que :

$$\forall y \in \mathcal{V}_x(1) \setminus \{y_k(x)\} \quad W_{k-1}(y_k(x)) < W_{k-1}(y)$$

Avec ces notations :

$$\forall x \in E \quad W_k(x) = W_{k-1}(y_k(x)), \quad S_k(x) = y_k(x)$$

Définition 2.1 *(Construction de S).* Soit S l'ensemble défini par : $S = \{x \in E,\ W_{2d}(x) = v(x)\}$.[1]

Théorème 2.2. *Tout sommet $x \in E \setminus S$ peut déterminer au moins un sommet de S qui est dans $\mathcal{V}_x(d)$, et ce, en utilisant uniquement sa liste* Winner :

- *Si x trouve une paire $(v(y))$ dans sa liste* Winner *(c'est-à-dire si $v(y)$ apparaît au moins une fois dans chacune des deux phases), alors $y \in S \cap \mathcal{V}_x(d)$; Si le sommet x trouve plusieurs paires, il choisit le sommet y dont la valeur $v(y)$ est la plus petite parmi les paires trouvées.*
- *Sinon, soit le sommet y tel que $v(y) = W_d(x)$. Alors $y \in S \cap \mathcal{V}_x(d)$.*

Le théorème précédent, dont nous donnons la preuve dans la section suivante, permet de conclure immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2.3. *S est un ensemble d-dominant pour le graphe G.*

[1] Cette définition diffère de celle donnée dans [1] mais lui est équivalente (cf. Théorème 3.12, page 672).

3. Démonstration de l'algorithme

Nous ne démontrons pas les trois premiers lemmes qui sont directement issus des précédentes définitions.

Lemme 3.1. *Soit $k \in [\![1; d]\!]$ et soit $x \in E$, alors*

- $W_k(x) = \mathrm{Max}\{W_{k-1}(y), y \in \mathcal{V}_x(1)\}$,
- *$S_k(x)$ est l'unique élément y de $\mathcal{V}_x(1)$ tel que $W_{k-1}(y) = W_k(x)$.*

Lemme 3.2. *Soit $k \in [\![d+1; 2d+1]\!]$ et soit $x \in E$, alors*

- $W_k(x) = \mathrm{Min}\{W_{k-1}(y),\ y \in \mathcal{V}_x(1)\}$,
- *$S_k(x)$ est l'unique élément y de $\mathcal{V}_x(1)$ tel que $W_{k-1}(y) = W_k(x)$.*

Lemme 3.3.

$$\forall x \in E\ \forall k \in [\![0; d]\!] \quad W_k(x) = \mathrm{Max}\big\{v(y),\ y \in \mathcal{V}_x(k)\big\}$$

Définition 3.4. Nous notons $M(x)$ la valeur $W_d(x)$.

Théorème 3.5.

$$\forall x \in E\ \forall y \in \mathcal{V}_x(d) \quad M(y) \geqslant v(x)$$

Soit $x \in E$ et $y \in \mathcal{V}_x(d)$. D'après le Lemme 3.3, on a : $M(y) = W_d(y) = \mathrm{Max}\{v(z),\ z \in \mathcal{V}_y(d)\}$. Puisque $x \in \mathcal{V}_y(d)$, on en déduit que $\mathrm{Max}\{v(z),\ z \in \mathcal{V}_y(d)\} \geqslant v(x)$.

Lemme 3.6. *Avec la notation précédente,*

$$\forall x \in E\ \forall k \in [\![d+1; 2d]\!] \quad W_k(x) = \mathrm{Min}\big\{M(y),\ y \in \mathcal{V}_x(k-d)\big\}$$

Démonstration par récurrence sur k, en ayant fixé x.

Lemme 3.7. *Soit $y \in E$. Soit $k \in [\![d+1; 2d]\!]$, alors :*

$$\exists x \in \mathcal{V}_y(k-d) \quad M(x) = W_k(y)$$

De plus, cet élément est unique.

$W_k(y) = \mathrm{Min}\{M(z),\ z \in \mathcal{V}_y(k-d)\}$. Donc il existe x dans $\mathcal{V}_y(k-d)$ tel que $M(x) = W_k(y)$.
x est unique puisque l'application v est injective.

Théorème 3.8. *Soit $x \in E$. Soit y le sommet (unique) tel que $M(x) = W_d(x) = v(y)$. Alors $y \in S$.*

Il s'agit de démontrer que $W_{2d}(y) = v(y)$ d'après la Définition 2.1.

y est dans le voisinage à d sauts de x puisque $W_d(x) = v(y)$, et donc réciproquement, x est dans le voisinage à d sauts de y. D'une part, $\mathrm{Min}\{M(z),\ z \in \mathcal{V}_y(d)\} \leqslant v(y)$ puisque $x \in \mathcal{V}_y(d)$ et $M(x) = v(y)$. D'autre part, le Théorème 3.5 donne : $\forall z \in \mathcal{V}_y(d)\ M(z) \geqslant v(y)$. Donc $\mathrm{Min}\{M(z),\ z \in \mathcal{V}_y(d)\} \geqslant v(y)$.

En conclusion, $\mathrm{Min}\{M(z),\ z \in \mathcal{V}_y(d)\} = v(y)$ et $y \in S$.

Corollaire 3.9. *Soit $x \in E$. Soit y le sommet (unique) tel que $M(x) = W_d(x) = v(y)$. Alors $y \in S \cap \mathcal{V}_x(d)$.*

Le Théorème 3.8 montre que $x \in S$ et sa démonstration fait apparaître que $y \in \mathcal{V}_x(d)$.

Théorème 3.10. *Soit $y \in E$. Soit $k \in [\![d+1; 2d]\!]$. Soit $x \in E$ le sommet (unique) tel que $v(x) = W_k(y)$. Alors $x \in S$.*

Le Lemme 3.7 nous permet d'écrire : $\exists z \in \mathcal{V}_y(k-d)\ M(z) = W_k(y)$, et ce z est unique. On a donc $M(z) = v(x)$. En appliquant le théorème 3.8 à z et x, on a : $x \in S$.

Corollaire 3.11. *Soit $x \in E$. Supposons qu'il existe $y \in E$ tel que l'on retrouve la valeur $v(y)$ au moins une fois dans la phase Max et au moins une fois dans la phase Min pour le sommet x. Alors $y \in S \cap \mathcal{V}_x(d)$.*

Le Théorème 3.10 prouve que $y \in S$ puisque $v(y)$ apparaît dans la phase Min. Et puisque $v(y)$ apparaît au moins une fois dans la phase Max, alors $y \in \mathcal{V}_x(d)$. Donc $y \in S \cap \mathcal{V}_x(d)$.

Notre définition de S (cf. Définition 2.1) diffère de celle donnée dans l'article [1], dans lequel S' est défini ainsi : $S' = \{x \in E,\ \exists k \in [\![d+1; 2d]\!]\ W_k(x) = v(x)\}$.

Clairement, $S \subset S'$. Le théorème suivant montre que l'inclusion réciproque est vraie.

Théorème 3.12. *Il y a équivalence entre les deux définitions : $S = S'$.*

Soit $x \in S'$. On a $W_{2d}(x) \leqslant W_k(x)$ (cf. Lemme 3.2) d'où $W_{2d}(x) \leqslant v(x)$. Supposons que $W_{2d}(x) < v(x)$. Le Lemme 3.7 implique : $\exists y \in \mathcal{V}_x(d)\ M(y) = W_{2d}(x)$. D'où $y \in \mathcal{V}_x(d)$ et $M(y) < v(x)$. Ceci contredit le Théorème 3.5 qui affirme que $\forall y \in \mathcal{V}_x(d)\ M(y) \geqslant v(x)$. D'où $W_{2d}(x) = v(x)$ et $x \in S$.

Les Corollaires 3.9 et 3.11 démontrent le Théorème 2.2. Il y a équivalence entre notre définition et celle de [1]. La nôtre est plus efficace puisque nous n'avons pas toute la phase Min à parcourir.

4. Caractéristiques de l'algorithme

La construction de l'ensemble d-dominant ne nécessitant pas l'entière connaissance de la topologie et du niveau du critère sur chaque sommet, elle est distribuée. La quantité de traitement à effectuer, par sommet, supporte le passage à l'échelle : si les sommets sont distribués suivant un processus de Poisson de paramètre λ sur le plan infini, si R est le rayon d'émission et si une arête entre deux sommets n'existe que lorsque leur distance est inférieure à R, alors le nombre d'échanges d'un sommet est égal à $2d(1+\lambda\pi R^2)$. Le temps de construction de l'ensemble d-dominant est le temps nécessaire pour l'échange de $2d+1$ données. L'ensemble d-dominant vérifie :

$$x \in S \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{V}_x(d) = \varnothing \quad \text{ou} \quad \exists y \in \mathcal{V}_x(d) \quad v(x) = \mathrm{Max}\{M(z),\ z \in \mathcal{V}_y(d)\}$$

Ceci peut être utilisé pour construire des ensembles dominants en utilisant par exemple le critère des identifiants des sommets [1], ce qui constitue donc un cas particulier. Le degré (nombre de voisins) des sommets peut également être utilisé : il suffit de considérer comme critère le couple constitué du degré d'un sommet et de son identifiant $(d(i), i)$ et d'introduire la relation d'ordre total définie par :

$$\big(d(x), x\big) > \big(d(y), y\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(d(x) > d(y)\big) \text{ ou } \big(d(x) = d(y) \text{ et } x > y\big)$$

L'énergie restante d'un capteur dans un réseau de capteurs peut également être un bon critère dans la construction de l'ensemble d-dominant que constituent les caryommes.

5. Conclusion

Dans ce compte-rendu, nous simplifions (cf. Théorème 3.12) l'heuristique présentée dans [1]. Nous la généralisons à un ensemble X tel que défini plus haut et démontrons l'exactitude de l'heuristique généralisée. Les applications pratiques de cette heuristique sont nombreuses.

On peut, par exemple, montrer que l'énergie d'un réseau de capteurs, ressource rare à optimiser dans ce type de réseau, tire profit d'un routage hiérarchique introduit par la détermination de clusters d'une profondeur maximale d imposée [2]. Ces clusters sont contrôlés par une tête de cluster appelée caryomme. L'ensemble des caryommes est alors un ensemble d-dominant sur le graphe dont les sommets sont les terminaux et les arêtes sont les connexions sans fil entre terminaux.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Madame Marie-Thérèse Chevalier pour sa relecture minutieuse et ses remarques constructives. Que soit également ici remercié Monsieur Sylvain Allano pour les corrections apportées.

Références

[1] A.D. Amis, R. Prakash, T.H.P. Vuong, D.T. Huynh, Max–Min D-cluster formation in wireless ad hoc networks, in: Nineteenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies, Proceedings, 2000.

[2] V. Mhatre, C. Rosenberg, Design guidelines for wireless sensor networks: Communication, clustering and aggregation, Ad Hoc Networks Journal 2 (2004) 45–63.