Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Mecanique 334 (2006) 34–41

COMPTES RENDUS
MECANIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Fermetures compatibles avec la théorie de distorsion rapide en turbulence homogène

Jean Piquet

Laboratoire de mécanique des fluides, UMR 6598 CNRS, École centrale de Nantes, BP92101, 44321 Nantes cedex, France

Reçu le 18 janvier 2005 ; accepté après révision le 25 octobre 2005

Disponible sur Internet le 6 décembre 2005

Présenté par Pierre Perrier

Résumé

Les développements de distorsion rapide à petit temps à partir d'un état isotrope pour les fonctionnelles représentatives d'une turbulence homogène rotationnelle sont utilisés systématiquement pour formuler des lois de fermeture pour les termes rapides des équations pour les anisotropies de la turbulence, et, éventuellement, pour l'équation de la stropholyse symétrisée, $\mathbf{Q}^*$. Il est montré que les fermetures de la forme $\mathbf{G}^* = \mathsf{G}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*]$, à la fois pour $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{Y}^{(4)}$ et $\mathbf{Q}^{(5*)}$, ne sont pas compatibles avec la distorsion rapide à petit temps, outre qu'elles ne peuvent être réalisables. En revanche, les fermetures de la forme $\mathbf{Y}^{(4)} = \mathsf{Y}[\mathbf{b}, \mathcal{W}, \zeta]$, $\mathbf{M}^* - \mathbf{Y}^{(4)}/3 = \mathsf{M}[\mathbf{b}, \mathcal{W}, \zeta]$, $\mathbf{Q}^* = \mathsf{Q}[\mathbf{b}, \mathcal{W}, \zeta]$ sont compatibles avec la distorsion rapide. Les développements des fonctionnelles isotropes sont identifiés au troisième ordre en temps et un modèle réalisable est formulé pour la seule fermeture Y. Enfin il est montré que les fermetures obtenues sont consistantes avec l'existence d'ondes inertielles amorties dans le problème de rotation pure. ***Pour citer cet article : J. Piquet, C. R. Mecanique 334 (2006).***

Abstract

Closures compatible with the RDT of homogeneous turbulence. We use small-time rapid distortion expansions for a homogeneous rotational turbulence starting from an isotropic state to build closure relationships for rapid terms in the equations for turbulence, and for the symmetrized stropholysis equation. We show that closures like $\mathbf{G}^* = \mathsf{G}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*]$, both for $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{Y}^{(4)}$ and eventually $\mathbf{Q}^{(5*)}$, are not compatible with RDT. Also, closures $\mathbf{Y}^{(4)} = \mathsf{Y}[\mathbf{b}, \mathcal{W}, \zeta]$, $\mathbf{M}^* - \mathbf{Y}^{(4)}/3 = \mathsf{M}[\mathbf{b}, \mathcal{W}, \zeta]$, $\mathbf{Q}^* = \mathsf{Q}[\mathbf{b}, \mathcal{W}, \zeta]$ are compatible with RDT. The expansions of isotropic functionals of this type are identified to third-order in time and a realisable model is given for the single Y closure. Finally it is shown that the obtained closures are consistent with damped inertial waves in the pure rotation problem. ***To cite this article: J. Piquet, C. R. Mecanique 334 (2006).***

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Turbulence ; Distorsion rapide ; Pression–déformation

Keywords: Fluid mechanics; Turbulence; Realisability; Pressure–strain

Adresse e-mail : Jean.Piquet@ec-nantes.fr (J. Piquet).

1631-0721/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crme.2005.10.019

Abridged English version

We use small-time rapid distortion expansions for an homogeneous rotational turbulence starting from an isotropic state to build closure relationships for rapid terms in the equations for turbulence anisotropies defined in (4), and eventually for the symmetrized stropholysis equation defined in (8). We show that closures such as $\mathbf{G}^* = \mathsf{G}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*]$, both for $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{Y}^{(4)}$ defined in (4) and eventually $\mathbf{Q}^{(5*)}$ defined in (10), are not compatible with RDT. Given the fact that such closures have been proved to be unrealisable [12], the corresponding choice can be hardly considered as plausible. In contrast, isotropic closures of the form $\mathbf{Y}^{(4)} = \mathsf{Y}[\mathbf{y}, \mathcal{W}, \zeta]$, $\mathbf{M}^* - \mathbf{Y}^{(4)}/3 = \mathsf{M}[\mathbf{b}, \mathcal{W}, \zeta]$, $\mathbf{Q}^* = \mathsf{Q}[\mathbf{b}, \mathcal{W}, \zeta]$ can be made consistent with RDT, using the method of undetermined coefficients. This is done in three steps: (i) we write the most general fully symmetric, trace-free, isotropic functional G using the diagrammatic method [12]. N terms are required to a given order in time, each of which, like (12) or (13), involves an unknown coefficient; (ii) we substitute into the obtained expression the RDT expansions of $\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathcal{W}, \zeta$ considered as functions of $(\mathcal{a}, \mathcal{W}, \zeta)$ and reorder in time the results which are of the form $\mathsf{G}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathcal{W}, \zeta] = \mathcal{G}[\mathcal{a}, \mathcal{W}, \zeta]$; (iii) it remains to identify the resulting expansions with the RDT expansions [1] of $\mathbf{G}^*[\mathcal{a}, \mathcal{W}, \zeta]$. The closures are given by formulae (17)–(19) and realisability can be enforced for $\mathbf{Y}^{(4)}$ (see Eq. (23)). The pure rotation case is finally considered for the simplest, nontrivial truncation of foregoing closures. It is found that the stropholysis is responsible for the damped evolution of an initial anisotropic state towards isotropy, in agreement with the behaviour of inertial waves in the linear RDT problem.

1. Introduction

La théorie de distorsion rapide (RDT) permet de décrire des écoulements turbulents à évolution lente, les interactions non linéaires n'ayant pas le temps de propager la cascade d'énergie vers les échelles dissipatives. Ainsi le temps caractéristique de la distorsion, $\|\mathbf{S}\|^{-1} := \{\mathbf{S}^2\}^{-1/2}$, est petit devant le temps, $\varepsilon/\overline{q^2}$, caractéristique des effets non linéaires. Il en résulte que les effets liés aux transferts linéaires (« rapides ») d'énergie peuvent être prédits de façon satisfaisante, les effets non linéaires étant pris en compte de façon approximative, mais souvent suffisante, au niveau des transferts « lents ». Dans ce qui suit, nous établissons les formes de fermeture compatibles avec la RDT aux petits temps et nous discutons certaines limitations de ces formes. D'une façon générale [1], les tenseurs mis en jeu dans les équations aux corrélations en un point prennent la forme générale :

$$\mathbf{G}^* = \mathsf{G}^*[\mathcal{a}, \mathcal{W}, \zeta] \tag{1a}$$

d'un développement choisi autour de l'état isotrope et mettent en jeu les déformations et rotations cumulées (1b) :

$$\mathcal{a}(t) := \int_0^t \mathbf{S}(t')\,\mathrm{d}t'\,; \quad \mathcal{W}(t) := \int_0^t \mathbf{W}(t')\,\mathrm{d}t'\,; \quad \zeta(t) = \int_0^t \omega(t')\,\mathrm{d}t' \tag{1b}$$

où $\mathbf{S}$ et $\mathbf{W}$ sont respectivement les parties symétrique et antisymétrique du gradient de vitesse moyenne, tandis que $\omega = -\varepsilon : \Omega$ désigne le tenseur de rotation du repère associé à sa vitesse angulaire Ω. Nous nous intéressons dans ce qui suit à la solution du problème de fermeture des termes rapides lorsque l'on retient comme équations possibles du problème les équations pour les tenseurs d'anisotropie adimensionnelle $\mathbf{b}$ et $\mathbf{y}$, et, éventuellement l'équation pour la stropholyse symétrisée $\mathbf{Q}^*$ [2]. Une telle base d'équations constitue une généralisation à priori adéquate du cas d'un écoulement moyen irrotationnel pour lequel $\mathbf{b} = \mathbf{y}$ et $\mathbf{Q}^* = \mathbf{0}$. Dans ce cas, on sait [3–5] que les vecteurs propres de $\mathcal{a}$ et de $\mathbf{b}$ étant alignés, $\mathbf{b} = \mathsf{b}(\mathcal{a})$ ou $\mathcal{a} = \mathsf{b}^{-1}(\mathbf{b})$, si bien qu'une fermeture univoque peut être construite pour la partie rapide, $\mathbf{T}^{(\mathrm{r})}$, des corrélations pression-déformation, à partir de l'expression RDT de $\mathsf{T}^{®}$ $(\mathcal{a}^*)$. La fonctionnelle adéquate prend la forme d'une fonctionnelle isotrope $\mathbf{T}^{(\mathrm{r})} = \mathsf{T}^{(\mathrm{r})}(\mathsf{b}^{-1}(\mathbf{b})) = \mathbf{T}^{(\mathrm{r})}[\mathbf{b}]$ qui a été déterminée au cinquième ordre en $\|\mathbf{b}\|$ dans [5]. Pour un écoulement moyen rotationnel, les axes principaux de $\mathbf{b}$ ne sont plus alignés avec ceux de $\mathcal{a}$, et le déviateur $\mathbf{y}$, caractéristique de l'anisotropie dimensionnelle, diffère de $\mathbf{b}$. Rappelons que $\mathbf{G}^*$ est un tenseur totalement symétrique à traces toutes nulles introduit à partir du tenseur $\mathbf{G}$ le générant par utilisation de la décomposition canonique de $\mathbf{G}$ [2,6,7]. En outre, la rotation cumulée n'est pas arbitraire en turbulence homogène puisque la vorticité moyenne, $\mathbf{w}(t) = \varepsilon : \mathbf{W}(t)$, doit satisfaire l'équation d'Helmholtz. Cela se traduit par le fait [1] que $\mathbf{w}(t) = \exp_+[\mathcal{a}]\mathbf{w}^{(0)}$ où $\exp_+[\cdot]$ désigne l'opérateur d'exponentiation, à condition que $\mathbf{S}$ et $\mathcal{a}$ commutent [8], ce qui est le cas pour les déformations stationnaires le plus souvent considérées. Ecrire une dépendance fonctionnelle sous la forme (1a) revient donc à écrire une dépendance fonctionnelle de l'état initial de la vorticité.

2. Les équations retenues et leur fermeture

Les équations de travail sont obtenues en turbulence homogène à partir de l'équation pour les transformées de Fourier, $\hat{v}_i(\mathbf{k})$, des fluctuations de vitesse $\mathbf{v}' =: \mathrm{rot}\,\Psi'$.

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}\hat{v}_i}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{ij}\hat{v}_j \ ; \quad \mathcal{M}_{ij}(t) := -\nu k^2\delta_{ij} + 2\frac{k_i k_p}{k^2}V^{(\mathrm{a})}_{p,j} - \widetilde{V}_{i,j} \ ; \quad \frac{\bar{\mathrm{d}}k_i}{\mathrm{d}t} = -k_p V_{p,i} \ ; \quad k_i(t=0) = K_i \tag{2}$$

où $\bar{\mathrm{d}}/\mathrm{d}t$ est la dérivée particulaire à $\mathbf{K}$ constant, c'est-à-dire dérivée en suivant le mouvement, $\mathbf{k} = (\mathbf{F}^{-\mathrm{T}})\cdot\mathbf{K}$, défini à partie du gradient de déformation $\mathbf{F}(t)$ [10]. $\widetilde{\mathbf{V}}$ et $\mathbf{V}^{(\mathrm{a})}$, la vitesse moyenne absolue, s'expriment en fonction de la vitesse moyenne relative $\mathbf{V}$ et de Ω selon :

$$V^{(\mathrm{a})}_{i,j} = V_{i,j} - \varepsilon_{ijm}\Omega_m \ ; \quad \widetilde{V}_{i,j} = V_{i,j} - 2\varepsilon_{ijm}\Omega_m, \qquad w^{(\mathrm{a})}_i = w_i + 2\Omega_i \ ; \quad \widetilde{w}_i = w_i + 4\Omega_i \tag{3}$$

où les vorticités moyennes correspondantes ont été aussi spécifiées. On forme à partir de (3) l'équation pour le tenseur spectral des corrélations doubles de vitesse, $\Phi_{ij}(\mathbf{k}) := \overline{\hat{v}_i(-\mathbf{k})\hat{v}_j(\mathbf{k})}$, et les équations cherchées résultent de l'intégration à tout l'espace des nombres d'onde $\mathbf{k}$, sachant que :

$$\overline{u'_i u'_j} = \overline{q^2}\left(\frac{1}{3}\delta_{ij} + b_{ij}\right) = \int \Phi_{ij}\,\mathrm{d}\mathbf{k} \ ; \qquad Y_{ij} := \overline{\Psi'_{p,i}\Psi'_{p,j}} = \overline{q^2}\left(\frac{1}{3}\delta_{ij} + y_{ij}\right) = \int \frac{k_i k_j}{k^2}\Phi_{nn}\,\mathrm{d}\mathbf{k}$$

$$\overline{q^2}M_{ijpq} := \int \frac{k_i k_j}{k^2}\Phi_{pq}\,\mathrm{d}\mathbf{k} \ ; \qquad \overline{q^2}Y^{(4)}_{ijpq} := \int \frac{k_i k_j k_p k_q}{k^4}\Phi_{nn}\,\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{4}$$

$$\overline{q^2}M^{(6)}_{ijlmpq} := \int \frac{k_i k_j k_l k_m}{k^4}\Phi_{pq}\,\mathrm{d}\mathbf{k} \ ; \qquad \overline{q^2}Y^{(6)}_{ijlmpq} := \int \frac{k_i k_j k_l k_m k_p k_q}{k^4}\Phi_{nn}\,\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{5}$$

On notera à ce stade de la présentation l'intérêt de la représentation [9,10] de $\Re(\Phi)$, partie réelle du tenseur spectral, sous la forme $e\mathbf{P} + \Re(z\mathbf{NN})$, où $e := \{\Phi\}/2$ et $z := \Phi : \mathbf{N}^*\mathbf{N}^*/2$ où $\mathbf{k}$, $\mathbf{N}, \mathbf{N}^*$ désignent les vecteurs propres de la matrice (orthogonale) de rotation autour de $\mathbf{k}$ et $\mathbf{P} = \mathbf{1} - \mathbf{kk}/k^2$. La décomposition $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(\mathrm{e})} + \mathbf{b}^{(\mathrm{z})}$, qui en résulte, est omniprésente à travers ce travail puisque $\mathbf{y}$ s'identifie à l'anisotropie de directivité ($\mathbf{y} = -2\mathbf{b}^{(\mathrm{e})}$), tandis que l'anisotropie de polarisation $\mathbf{b}^{(\mathrm{z})} = \mathbf{b} + \mathbf{y}/\mathbf{2}$ est issue de l'intégration de $\Re(z\mathbf{NN})$. Les équations retenues incluent celles, désormais classiques, pour q^2, ε (omises) et pour $\mathbf{b}$ et $\mathbf{y}$:

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}b_{ij}}{\mathrm{d}t} = 2\{\mathbf{bS}^*\}b_{ij} - \frac{2}{3}S^*_{ij} - \left[b_{ik}\widetilde{V}_{j,k} + b_{jk}\widetilde{V}_{i,k} - \frac{2}{3}\left(\{\mathbf{bS}^*\}\delta_{ij} + \{\mathbf{S}\}b_{ij}\right)\right] + T^{(\mathrm{r})}_{ij} + \frac{\varepsilon}{\overline{q^2}}\left(\phi^{(\mathrm{b})}_{ij} + 2b_{ij}\right) \tag{6}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}y_{ij}}{\mathrm{d}t} = 2\{\mathbf{bS}^*\}y_{ij} - \frac{2}{3}S^*_{ij} - \left[y_{ik}V_{k,j} + y_{jk}V_{k,i} - \frac{2}{3}\left(\{\mathbf{yS}^*\}\delta_{ij} + \{\mathbf{S}\}y_{ij}\right)\right] + U^{(\mathrm{r})}_{ij} + \frac{\varepsilon}{\overline{q^2}}\left(\phi^{(\mathrm{y})}_{ij} + 2y_{ij}\right) \tag{7}$$

On remarquera que le gradient de vitesse « tiltée » apparaît dans la seule Éq. (6) alors que l'Éq. (7) est indépendante de la rotation du repère. Toutefois les effets rotationnels ne peuvent être ignorés dans l'Éq. (7) car ils sont présents dans le terme rapide $\mathbf{U}^{(\mathrm{r})}$. Les décompositions canoniques permettent de déterminer $\mathbf{T}^{(\mathrm{r})}$ et $\mathbf{U}^{(\mathrm{r})}$. $\mathbf{T}^{(\mathrm{r})}$ est défini [11] par :

$$\overline{q^2}T^{(\mathrm{r})}_{ij} := \rho^{-1}\overline{p'^{(\mathrm{r})}\left(v'_{i,j} + v'_{j,i}\right)} = 2\overline{q^2}(M_{ipqj} + M_{jqpi})V^{(\mathrm{a})}_{q,p}$$

d'où l'on tire :

$$T^{(\mathrm{r})}_{ij} = 4M^*_{ijpq}S^*_{pq} - 2\bar{w}^{(\mathrm{a})}_p Q^*_{pij} + T^{(\mathrm{rex})}_{ij} \ ; \qquad Q^*_{ijk} = \frac{1}{6}\langle\varepsilon_{ipq}M_{jqpk}\rangle \tag{8}$$

avec la contribution explicite :

$$T^{(\mathrm{rex})}_{ij} = \frac{2}{5}S^*_{ij} + \frac{6}{7}\left[(b_{ip} + y_{ip})S^*_{jp} + (b_{jp} + y_{jp})S^*_{ip} - \frac{2}{3}\{(\mathbf{b}+\mathbf{y})\mathbf{S}^*\}\delta_{ij}\right] + \frac{2}{3}\left(\Delta_{ip}W^{(\mathrm{a})}_{jp} + \Delta_{jp}W^{(\mathrm{a})}_{ip}\right)$$

où $\Delta := \mathbf{b} - \mathbf{y}$ et $\mathbf{S}^* = \mathbf{S} - \{\mathbf{S}\}\mathbf{1}/3$, tandis que le terme correspondant dans l'équation pour $\mathbf{y}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} U^{(\mathrm{r})}_{ij} = {} & 2S^*_{pq}\left(Y^{(4*)}_{ijpq} - M^*_{ijpq}\right) - S^*_{pq}\left(\varepsilon_{mjp}Q^*_{miq} + \varepsilon_{mpi}Q^*_{mjq}\right) + \frac{2}{3}\{\Delta\mathbf{S}^*\}\delta_{ij} + \frac{2}{5}S^*_{ij} \\ & + \frac{4}{7}\left[(2y_{ik} + b_{ik})S^*_{jk} + (2y_{jk} + b_{jk})S^*_{ik} - \frac{2}{3}\{(2\mathbf{y}+\mathbf{b})\mathbf{S}^*\}\delta_{ij}\right] \end{aligned} \tag{9}$$

La stropholyse $\varepsilon_{ipq} M_{jqpk}$ décrit la sensibilité du terme rapide $\mathbf{T}^{(\mathrm{r})}$ à la vorticité moyenne de l'écoulement. La quantité $Q_{ijk} + \varepsilon_{ijk}/6 - \varepsilon_{ikp} y_{jp}/2$ est intégrale en $\mathbf{k}$ de $-k_j \mathfrak{J}(z\mathbf{N}_i\mathbf{N}_k)/k$. Cette intégrale est la seule quantité dont dépend $\mathbf{Q}^*$, partie totalement symétrique de $\mathbf{Q}$, dont l'équation s'écrit sous la forme RDT (10) reprise de [2] :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q^*_{ijk}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{2}{3}\{\mathbf{S}\} Q^*_{ijk} + 4S^*_{mq} Q^{(5)}_{ijkmq} + \frac{2}{3} S^*_{mq}\big\langle \varepsilon_{inq}\big(M^*_{jmnk} + Y^{(4)}_{jmnk}\big)\big\rangle_{(3)} \\ &+ \frac{1}{9}\big[\big\langle \varepsilon_{imq} S^*_{jq}(2b_{mk} - y_{mk})\big\rangle_{(3)} - S^*_{mq}(b_{mn} + y_{mn})\langle \delta_{ij}\varepsilon_{knq}\rangle_{(3)}\big] + w^{(\mathrm{a})}_m\big(2M^*_{mijk} + Y^{(4)}_{mijk}\big) \\ &+ \frac{1}{9}\big[\big\langle (b_{ij} - y_{ij}) w^{(\mathrm{a})}_k\big\rangle_{(3)} - w^{(\mathrm{a})}_n\big\langle \delta_{ij}(2y_{nk} + b_{nk})\big\rangle_{(3)}\big] + \left(\Omega_m - \frac{1}{6} w^{(\mathrm{a})}_m\right)\big\langle \varepsilon_{ipm} Q^*_{jkp}\big\rangle_{(3)} \qquad (10)\end{aligned}$$

où la seule fermeture « rapide » supplémentaire est celle pour $Q^{(5*)}_{ijkmn} = \frac{1}{6}\langle \varepsilon_{ipq} M^{(6)}_{qjmnpk}\rangle$. Laissant de coté le terme de compression pure, les trois premiers termes du second membre dépendent de la seule déformation moyenne, les trois derniers représentent les effets de la vorticité moyenne et de la rotation du repère. *Deux choix de fermeture vont être étudiés dans ce qui suit*. Si nous retenons les Éqs. (6), (7), (10), les variables $\mathbf{b}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{Q}^*$ peuvent être prises comme arguments des fonctionnelles G inconnues qui s'écrivent à priori :

$$\mathbf{M}^* = \mathsf{M}\big[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*\big], \quad \mathbf{Y}^{(4*)} = \mathsf{Y}\big[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*\big], \quad \mathbf{Q}^{(5*)} = \mathsf{Q}\big[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*\big] \qquad (11)$$

La détermination précise de ces fonctionnelles, de façon consistante avec la distorsion rapide s'effectue par la méthode des coefficients indéterminés. Celle-ci consiste à écrire dans une première étape le développement le plus général possible d'une fonctionnelle isotrope totalement symétrique et à traces toutes nulles dépendant de plusieurs arguments au moyen de la méthode diagrammatique [12]. Ce développement se compose de N termes. Chaque terme, lui-même totalement symétrique et à traces toutes nulles, met en jeu un coefficient k_n (pouvant dépendre des invariants conjoints, il est alors développé en temps en fonction de ceux-ci), $n = 1, \ldots, N$, à déterminer. Parmi ces N termes, les plus simples (correspondant au diagramme « double barre », [12]) font intervenir la notation $\langle \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\rangle$ définie par le tenseur totalement symétrique à traces toutes nulles :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\rangle_{ijpq} :&= \langle A_{ij} B_{pq}\rangle_{(6)} - \frac{1}{7}\big[2\big\langle \delta_{ij}(A_{pk}B_{qk} + A_{qk}B_{pk})\big\rangle_{(6)} + \{\mathbf{A}\}\langle \delta_{ij} B_{pq}\rangle_{(6)} + \{\mathbf{B}\}\langle \delta_{ij} A_{pq}\rangle_{(6)}\big] \\ &+ \frac{1}{35}\big[2\{\mathbf{AB}\} + \{\mathbf{A}\}\{\mathbf{B}\}\big]\delta^{(4)}_{ijpq} \qquad (12)\end{aligned}$$

et si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$:

$$\langle \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}\rangle_{ijpq} := \langle A_{ij} A_{pq}\rangle_{(3)} - \frac{1}{7}\{\mathbf{A}\}\langle \delta_{ij} A_{pq}\rangle_{(6)} - \frac{2}{7}\big\langle \delta_{ij} A^2_{.pq}\big\rangle_{(6)} + \frac{1}{35}\big[2\big\{\mathbf{A}^2\big\} + \{\mathbf{A}\}^2\big]\delta^{(4)}_{ijpq}$$

avec $\delta^{(4)}_{ijpq} := \delta_{ij}\delta_{pq} + \delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}$, l'indice (3) ou (6) indiquant le nombre de termes dans la sommation. Ainsi, $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}$ symétriques, $\langle A_{ij} B_{pq}\rangle_{(6)} := A_{ij}B_{pq} + A_{ip}B_{jq} + A_{iq}B_{jp} + A_{jp}B_{jq} + A_{jq}B_{ip} + A_{pq}B_{ij}$. De même, pour tout tenseur $\mathbf{A}$ symétrique et pour tout vecteur $\mathbf{V}$,

$$\langle \mathbf{A} \otimes \mathbf{V}\rangle_{ijk} := \langle A_{ij} V_k\rangle_{(3)} - \frac{2}{5} V_p\langle \delta_{ij} A_{kp}\rangle_{(3)} - \frac{1}{5}\{\mathbf{A}\}\langle \delta_{ij} V_k\rangle_{(3)} \qquad (13)$$

Dans ce qui suit $\mathbf{A}$ pourra être $\mathbf{b}$ ou $\mathbf{y}$, $\mathbf{V}$ pourra être tout vecteur construit à partir de $\mathbf{b}$, $\mathbf{y}$ ou $\mathbf{Q}^*$ par contraction. La deuxième étape consiste à substituer dans la forme obtenue (11) les développements RDT [1] : $\mathbf{b} = \mathbf{b}(a, \mathcal{W}, \zeta)$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(a, \mathcal{W}, \zeta)$, $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^*(a, \mathcal{W}, \zeta)$, si bien que les fonctionnelles G deviennent $\mathcal{G}[a, \mathcal{W}, \zeta]$. Par exemple :

$$\mathbf{M}^* = \mathsf{M}\big[\mathbf{b}(a, \mathcal{W}, \zeta), \mathbf{y}(a, \mathcal{W}, \zeta), \mathbf{Q}^*(a, \mathcal{W}, \zeta)\big] \equiv \mathcal{M}[a, \mathcal{W}, \zeta]$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système linéaire des k_n's produit par identification de $\mathcal{G}[a, \mathcal{W}, \zeta]$ avec les développements RDT de $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{Y}^{(4*)}$, $\mathbf{Q}^{(5*)}$ à l'ordre connu [1] de ces développements. La procédure complète a été programmée sous MAPLE et produit les résultats suivants.

$$\mathbf{Q}^{(5*)} = \mathsf{Q}\big[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*\big] = \frac{7}{40}\big\langle \mathbf{b} \otimes \mathbf{Q}^*\big\rangle \qquad (14)$$

ou une formule identique dans laquelle $\mathbf{b}$ est remplacé par $\mathbf{y}$, avec :

$$\big\langle \mathbf{b} \otimes \mathbf{Q}^*\big\rangle_{ijkpq} := \big\langle b_{ij} Q^*_{kpq}\big\rangle_{(10)} - \frac{2}{9}\big\langle \delta_{ij}\big\langle b_{kn} Q^*_{npq}\big\rangle_{(3)}\big\rangle_{(10)} + \frac{4}{63} b_{mn}\big\langle Q^*_{imn}\delta^{(4)}_{jkpq}\big\rangle_{(5)}$$

Ce résultat qui est précis à l'ordre t^3 repose sur l'hypothèse implicite plausible que la modélisation d'effets de non invariance par réflexion relève plutôt de $\mathbf{b}$ que de $\mathbf{y}$. Ensuite :

$$\mathbf{Y}^{(4*)} = \left(\frac{2755}{5292} - \frac{922725}{196196}\mathrm{II}_y\right)\langle\mathbf{y}\otimes\mathbf{y}\rangle + \frac{85}{1323}\langle\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}\rangle - \frac{65}{2646}\langle\mathbf{b}\otimes\mathbf{y}\rangle + \frac{1125}{2156}\langle\mathbf{y}\otimes\mathbf{y}^2\rangle + \frac{280125}{196196}\langle\mathbf{y}^2\otimes\mathbf{y}^2\rangle$$
$$- \frac{11}{126}\langle\mathbf{y}\cdot\varepsilon\cdot\mathbf{Q}^*\rangle - \frac{5}{63}\langle\mathbf{b}\cdot\varepsilon\cdot\mathbf{Q}^*\rangle + \frac{115}{168}\langle\mathbf{y}^2\cdot\varepsilon\cdot\mathbf{Q}^*\rangle + \frac{31}{33}\langle\mathbf{Q}^*\otimes\mathbf{Q}^*\rangle + \frac{25}{36}\langle\mathbf{T}^{(1)}_{yQ}\rangle \tag{15}$$

où, $\forall\mathbf{A}$ symétrique :

$$\langle\mathbf{A}\cdot\varepsilon\cdot\mathbf{Q}^*\rangle_{ijpq} := \langle(\varepsilon_{imk}A_{mj} + \varepsilon_{jmk}A_{mi})Q^*_{kpq}\rangle_{(6)} - \frac{2}{7}A_{mn}\langle\delta_{ij}\left(\varepsilon_{pmk}Q^*_{qnk} + \varepsilon_{qmk}Q^*_{pnk}\right)\rangle_{(6)}$$

$$\langle\mathbf{Q}^*\otimes\mathbf{Q}^*\rangle_{ijpq} := \langle Q^*_{ijk}Q^*_{pqk}\rangle_{(3)} - \frac{2}{7}\langle\delta_{ij}q^{(2)}_{pq}\rangle_{(6)} - \frac{2}{15}\{Q^*_{mnk}Q^*_{mnk}\}\delta^{(4)}_{ijpq}$$

$$\langle\mathbf{T}^{(1)}_{yQ}\rangle_{ijpq} := y_{kn}\left[\langle y_{ij}\left(\varepsilon_{mnp}Q^*_{kmq} + \varepsilon_{mnq}Q^*_{kmp}\right)\rangle_{(6)} - \frac{2}{7}Q^*_{rkm}\langle\delta_{ij}\left(\varepsilon_{mnq}y_{rp} + \varepsilon_{mnp}y_{rq}\right)\rangle\right]$$
$$+ \frac{2}{7}\varepsilon_{mnr}\langle\delta_{ij}\left(Q^*_{pkm}y_{rq} + Q^*_{qkm}y_{rp}\right)\rangle_{(6)}$$

avec $q^{(2)}_{ij} := Q^*_{imn}Q^*_{imn} - \frac{1}{3}\{Q^*_{mnk}Q^*_{mnk}\}\delta_{ij}$ et classiquement, $\mathrm{II}_y = -\frac{1}{2}\{\mathbf{y}^2\}$.

Enfin, il n'est pas possible de modéliser $\mathbf{M}^*$ au moyen d'une fonctionnelle $\mathsf{M}[\mathbf{b},\mathbf{y},\mathbf{Q}^*]$ de façon consistante avec la distorsion rapide. On trouve en effet :

$$\mathbf{M}^* = \frac{1}{3}\mathbf{Y}^{(4*)} + \mathbf{M}^{(\mathrm{rot})} - \frac{61015}{190512}\langle\mathbf{y}\otimes\mathbf{y}\rangle - \frac{15025}{190512}\langle\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}\rangle + \frac{9505}{47628}\langle\mathbf{b}\otimes\mathbf{y}\rangle + \frac{1381}{18144}\langle\mathbf{b}\cdot\varepsilon\cdot\mathbf{Q}^*\rangle$$
$$- \frac{2263}{18144}\langle\mathbf{y}\cdot\varepsilon\cdot\mathbf{Q}^*\rangle - \frac{3049}{1188}\langle\mathbf{Q}^*\otimes\mathbf{Q}^*\rangle + \frac{101725}{1064448}\langle\mathbf{b}^2\cdot\varepsilon\cdot\mathbf{Q}^*\rangle - \frac{136375}{152064}\langle\mathbf{T}^{(1)}_{bQ}\rangle \tag{16a}$$

où le terme $\mathbf{M}^{(\mathrm{rot})}$ rassemble tous les termes de $\mathsf{M}[a, \mathcal{W}, \zeta]$ irréductibles à la modélisation. A l'ordre trois, il se réduit à :

$$\mathbf{M}^{(\mathrm{rot})} = \frac{8}{567}\langle\mathcal{W}^{(\mathrm{a})2}\otimes a^*\rangle \tag{16b}$$

Ce résultat négatif confirme le caractère non physique d'un choix que l'on a démontré par ailleurs conduire à des modèles non réalisables [12]. Il indique en outre qu'une base différente de variables est requise pour les fonctionnelles et suggère le choix $\mathsf{G}[\mathbf{b},\mathbf{y},\mathcal{W},\zeta]$ qui dispense de travailler avec les Éqs. (10). La contrepartie est que dorénavant les fonctionnelles à spécifier sont de la forme : $\mathbf{M}^* = \mathsf{M}[\mathbf{b},\mathbf{y},\mathcal{W},\zeta]$, $\mathbf{Y}^{(4*)} = \mathsf{Y}[\mathbf{b},\mathbf{y},\mathcal{W},\zeta]$, $\mathbf{Q}^* = \mathsf{Q}[\mathbf{b},\mathbf{y},\mathcal{W},\zeta]$. Nous inspirant des définitions (4) des grandeurs ci-dessus, nous supposerons de façon plus restrictive que :

$$\mathbf{M}^* - \mathbf{Y}^{(4*)}/3 = \mathsf{M}[\mathbf{b},\mathcal{W},\zeta], \quad \mathbf{Y}^{(4*)} = \mathsf{Y}[\mathbf{y},\mathcal{W},\zeta], \quad \mathbf{Q}^* = \mathsf{Q}[\mathbf{b},\mathcal{W},\zeta]$$

selon l'argument que les effets rotationnels influencent davantage $\mathbf{b}$ que $\mathbf{y}$. La méthode des coefficients indéterminés donne alors (17) :

$$\mathbf{Q}^{(3*)} = \frac{5}{42}\langle\mathbf{b}\otimes\overline{\mathcal{W}}^{(\mathrm{a})}\rangle + T_Q(3) \tag{17}$$

où le terme $T_Q(3)$ d'ordre supérieur est donné en appendice. En outre,

$$\mathbf{Y}^{(4*)} = \frac{15}{28}\langle\mathbf{y}\otimes\mathbf{y}\rangle + \frac{1125}{2156}\langle\mathbf{y}\otimes\mathbf{y}^2\rangle \tag{18}$$

Enfin,

$$M^* = \frac{1}{3}\mathbf{Y}^{(4*)} - \frac{10}{189}\langle\mathbf{b}\otimes\mathcal{W}^{(\mathrm{a})2}\rangle + \frac{55}{504}\langle\mathbf{b}\otimes\left(\mathbf{b}\mathcal{W}^{(\mathrm{a})} - \mathcal{W}^{(\mathrm{a})}\mathbf{b}\right)\rangle \tag{19}$$

Les termes d'ordre quatre, omis ici pour des raisons de place, dépendent à la fois de $\mathcal{W}$ et de ζ, une dépendance de la seule vorticité absolue cumulée étant exclue, en contradiction avec une hypothèse effectuée dans [13]. Ainsi, des modèles qui ne dépendraient que de la vorticité absolue cumulée ne pourraient être consistants au delà du troisième ordre avec la distorsion rapide à petits temps. Pour des écoulements irrotationnels, (19) se réduit à :

$$\mathbf{Y}^{(4*)} = 3\mathbf{M}^* = \left(\frac{15}{28} - \frac{362475}{196196}\mathrm{II}_b\right)\langle \mathbf{b}\otimes\mathbf{b}\rangle + \frac{1125}{2156}\langle \mathbf{b}\otimes\mathbf{b}^2\rangle + \frac{280125}{196196}\langle \mathbf{b}^2\otimes\mathbf{b}^2\rangle \tag{20}$$

où $\mathbf{b} = \mathbf{y}$ a été utilisé. La forme (20) conduit à la fermeture $\mathbf{T}^{(\mathrm{r})}(\mathbf{b})$ suivante pour le terme rapide :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{(\mathrm{r})} = {} & \left(\frac{2}{5} - \frac{78}{49}\mathrm{II} - \frac{1350}{539}\mathrm{III} - \frac{2036880}{343343}\mathrm{II}^2\right)\mathbf{S} + \left(\frac{12}{7} + \frac{4500}{3773}\mathrm{II} - \frac{1680750}{343343}\mathrm{III}\right)\left(\mathbf{bS} + \mathbf{Sb} - \frac{2}{3}\{\mathbf{bS}\}\delta\right) \\ & - \left(\frac{90}{49} + \frac{1746900}{343343}\mathrm{II}\right)\left(\mathbf{b}^2\mathbf{S} + \mathbf{Sb}^2 - \frac{2}{3}\{\mathbf{b}^2\mathbf{S}\}\delta\right) + \left[\left(\frac{15}{7} + \frac{197775}{49049}\mathrm{II}\right)\{\mathbf{bS}\} + \frac{1125}{539}\{\mathbf{b}^2\mathbf{S}\}\right]\mathbf{b} \\ & + \left(\frac{1125}{539}\{\mathbf{bS}\} + \frac{280125}{49049}\{\mathbf{b}^2\mathbf{S}\}\right)\left(\mathbf{b}^2 + \frac{2}{3}\mathrm{II}\delta\right)\end{aligned} \tag{21}$$

où II_b et $\mathrm{III}_b = \frac{1}{3}\{\mathbf{b}^3\}$ designent les invariants de $\mathbf{b}$. Quoique la structure de (21) soit la même que celle de [5], ses coefficients d'ordre supérieur à deux en $\|\mathbf{b}\|$ en diffèrent. Etant donnée la consistance de (21) avec [4], cette fermeture est considérée comme correcte parce qu'elle satisfait identiquement la version RDT de l'Éq. (6) : si nous substituons $\mathbf{b}(a^*)$ dans (21) et le résultat dans la version RDT de (6), nous retrouvons l'expression de $\mathrm{d}\mathbf{b}/\mathrm{d}t$ résultant de $\mathbf{b}(a^*)$.

3. Premières justifications et réalisabilité

3.1. Réalisabilité

Un modèle dimensionnellement réalisable [2] peut être proposé pour $\mathbf{Y}^{(4*)}$. Les contraintes nécessaires énoncées dans [2] imposent que :

$$\mathbf{Y}^{(4*)} = \left(\frac{7}{27} - \frac{4}{3}\mathrm{II}_y\right)\langle \mathbf{y}\otimes\mathbf{y}\rangle - \frac{4}{9}\langle \mathbf{y}\otimes\mathbf{y}^2\rangle - \frac{2}{3}\langle \mathbf{y}^2\otimes\mathbf{y}^2\rangle \quad \text{si } \Delta_{Py} := 1 + 9\mathrm{II}_y + \mathrm{III}_y = 0 \tag{22}$$

si bien qu'un modèle réalisable satisfaisant (22) et compatible avec la distorsion rapide au quatrième ordre en temps s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}^{(4*)} = {} & \left[\frac{7}{27} + \frac{209}{756}\Delta_{Py} - \left(\frac{4}{3} + \frac{302641}{588588}\Delta_{Py}\right)\mathrm{II}_y + \Delta_{Py}\left(-\frac{5}{693}\{\mathcal{W}^2\} + \frac{5}{154}\{\zeta^2\} + \frac{25}{693}\{\mathcal{W}\zeta\}\right)\right]\langle \mathbf{y}\otimes\mathbf{y}\rangle \\ & - \left(\frac{4}{9} - \frac{18749}{19404}\Delta_{Py}\right)\langle \mathbf{y}\otimes\mathbf{y}^2\rangle - \left(\frac{2}{3} - \frac{1232767}{588588}\Delta_{Py}\right)\langle \mathbf{y}^2\otimes\mathbf{y}^2\rangle\end{aligned} \tag{23}$$

En revanche, il n'est pas possible de formuler un modèle réalisable à la fois en dimensions et en composantes pour $\mathbf{Q}^*$ et pour $\mathbf{M}^*$, satisfaisant l'ensemble des conditions énoncées dans [2]. Ce résultat négatif n'est pas forcément rédhibitoire si l'on se souvient que les conditions de réalisabilité de Reynolds pour les modèles de la forme $\mathbf{M}[\mathbf{b}]$ ne peuvent être satisfaites en $\mathbf{y}$, la dimensionalité étant déterminée par sa propre condition de normalisation $M_{iipq} = \delta_{pq}/3 + y_{pq}$.

Si nous nous limitons au cas des écoulements moyens stationnaires $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$, si bien que $a = t\mathbf{S}$, $\mathcal{W} = t\mathbf{W}$, $\zeta = t\omega$, le temps intervient dans toutes les fermetures qui précèdent et celles ci augmentant indéfiniment même lorsque t devient $\mathrm{O}(q^2/\varepsilon)$, les effets non linéaires ne peuvent plus être négligés. Nous posons donc $t = \alpha q^2/\varepsilon$ $(\alpha > 0)$, un choix compatible avec la formulation des modèles algébriques [1] qui revient à supposer que le temps d'application de la distorsion est du même ordre que la durée de vie des structures énergétiques de la turbulence.

3.2. Rotation pure

La validité des fermetures construites repose sur leur capacité à capturer la physique d'écoulements emblématiques de la turbulence homogène. Nous considérons dans ce qui suit le cas particulier d'une turbulence initialement anisotrope soumise à une rotation pure Ω dans la direction x_3. Ce cas dispose d'une solution rapide dans l'espace spectral sous la forme $e(t) = e(0)$, $z(t) = \exp[2\mathrm{i}t\Omega\cdot\mathbf{k}/k]z(0)$ [10,14,15] dont résultent la stationarité de $\mathbf{b}^{(\mathrm{e})}$ (et donc de $\mathbf{y}$)

et les oscillations amorties de $\mathbf{b}^{(z)}$ (ou de $\mathbf{b}$). Dans ce cas les fermetures (17), (19), (23) réduites à leurs seuls termes d'ordre deux s'écrivent :

$$\mathbf{Y}^{(4*)} = C_Y^{(0)} \langle \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} \rangle \; ; \quad \mathbf{M}^* = C_M^{(0)} \langle \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \rangle \; ; \quad \mathbf{Q}^{(3*)} = C_Q^{(0)} \langle \mathbf{b} \otimes \overline{\mathbf{w}}^{(a)} \rangle \tag{24a}$$

avec

$$C_Y^{(0)} = \frac{7}{27} + \frac{209}{756} \varDelta_{Py} \; ; \quad C_M^{(0)} = \frac{5}{28} \; ; \quad C_Q^{(0)} = \frac{5}{42} \alpha \overline{q^2} / \varepsilon \tag{24b}$$

Avec $t^* = \varOmega t$ et le nombre de Rossby $Ro = \varepsilon / \varOmega q^2$, à coté de $\bar{\mathrm{d}} \mathbf{y} / \mathrm{d}t = 0$, les équations à résoudre s'écrivent pour $\mathbf{b}^{(z)}$:

$$\frac{\bar{\mathrm{d}} b_{11}^{(z)}}{\mathrm{d}t^*} = \frac{8}{3} b_{12}^{(z)} - K(7b_{11} + 2b_{22}) \; ; \quad \frac{\bar{\mathrm{d}} b_{22}^{(z)}}{\mathrm{d}t^*} = -\frac{8}{3} b_{12}^{(z)} - K(2b_{11} + 7b_{22}) \; ; \quad \frac{\bar{\mathrm{d}} b_{33}^{(z)}}{\mathrm{d}t^*} = -9K b_{33} \tag{25}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}} b_{12}^{(z)}}{\mathrm{d}t^*} = \frac{4}{3} \big(b_{22}^{(z)} - b_{11}^{(z)} \big) - 5K b_{12} \; ; \quad \frac{\bar{\mathrm{d}} b_{13}^{(z)}}{\mathrm{d}t^*} = \frac{4}{3} b_{23}^{(z)} - 8K b_{13} \; ; \quad \frac{\bar{\mathrm{d}} b_{23}^{(z)}}{\mathrm{d}t^*} = -\frac{4}{3} b_{13}^{(z)} - 8K b_{23} \; ; \quad K = \frac{4}{5} C_Q^{(0)} Ro^{-1}$$

Le système différentiel (25) pour $\mathbf{b}$ ou pour $\mathbf{b}^{(z)}$ a une partie homogène dont les valeurs propres sont $-5K \pm 8\mathrm{i}/3$, $-8K \pm 4\mathrm{i}/3$, $-9K$ si bien qu'il est stable avec un seul point fixe. Ainsi *l'anisotropie décroît de façon amortie vers le point fixe à cause du terme stropholytique se manifestant dans K* :

$$b_{11}^{(\infty)} = -b_{22}^{(\infty)} = -\frac{16}{64 + 225K^2} \left[y_{11}^{(0)} - y_{22}^{(0)} - \frac{15}{4} K y_{12}^{(0)} \right]$$

$$b_{12}^{(\infty)} = -\frac{32}{64 + 225K^2} \left[y_{12}^{(0)} + \frac{15}{16} K \big(y_{11}^{(0)} - y_{22}^{(0)} \big) \right]$$

$$b_{13}^{(\infty)} = -\frac{1}{2(1 + 36K^2)} \big(y_{13}^{(0)} - 6K y_{12}^{(0)} \big) \; ; \qquad b_{23}^{(\infty)} = -\frac{1}{2(1 + 36K^2)} \big(y_{23}^{(0)} + 6K y_{13}^{(0)} \big) \tag{26}$$

On constate que si $K = 0$, $\mathbf{b}^{(z)} = 0$ (sauf pour les termes diagonaux à moins que $y_{11}(0) = y_{22}(0)$, $y_{12}(0) = 0$, mais $b_{33} = b_{33}^{(0)}$ indépendamment des conditions initiales, particularité en contradiction avec la forme analytique [14] de $z(t)$). L'évolution vers cet état est telle que b_{11} et b_{22} oscillent en phase, alors que b_{12} est en quadrature avec b_{11}. Pour $K \# 0$, l'intégration du système est possible et l'évolution vers l'état asymptotique (26) est régie par :

$$b_{11} = b_{11}^{(\infty)} + \frac{1}{2} \big(b_{11}^{(0)} - b_{22}^{(0)} - b_{11}^{(\infty)} + b_{22}^{(\infty)} \big) \mathrm{e}^{-5Kt^*} \cos\left(\frac{8}{3} t^* \right) + \frac{1}{2} \big(b_{12}^{(0)} - b_{12}^{(\infty)} \big) \mathrm{e}^{-5Kt^*} \sin\left(\frac{8}{3} t^* \right) + \frac{1}{2} \big(b_{11}^{(0)} + b_{22}^{(0)} - b_{11}^{(\infty)} - b_{22}^{(\infty)} \big) \mathrm{e}^{-9Kt^*}$$

$$b_{22} = b_{22}^{(\infty)} - \frac{1}{2} \big(b_{11}^{(0)} - b_{22}^{(0)} - b_{11}^{(\infty)} + b_{22}^{(\infty)} \big) \mathrm{e}^{-5Kt^*} \cos\left(\frac{8}{3} t^* \right) - \frac{1}{2} \big(b_{12}^{(0)} - b_{12}^{(\infty)} \big) \mathrm{e}^{-5Kt^*} \sin\left(\frac{8}{3} t^* \right) + \frac{1}{2} \big(b_{11}^{(0)} + b_{22}^{(0)} - b_{11}^{(\infty)} - b_{22}^{(\infty)} \big) \mathrm{e}^{-9Kt^*}$$

$$b_{12} = b_{12}^{(\infty)} + \frac{1}{2} \big(b_{12}^{(0)} - b_{12}^{(\infty)} \big) \mathrm{e}^{-5Kt^*} \cos\left(\frac{8}{3} t^* \right) + \frac{1}{2} \big(b_{22}^{(0)} - b_{11}^{(0)} - b_{22}^{(\infty)} + b_{11}^{(\infty)} \big) \mathrm{e}^{-5Kt^*} \sin\left(\frac{8}{3} t^* \right)$$

$$b_{13} = b_{13}^{(\infty)} + \big(b_{13}^{(0)} - b_{13}^{(\infty)} \big) \mathrm{e}^{-5Kt^*} \cos\left(\frac{4}{3} t^* \right) + \big(b_{23}^{(0)} - b_{23}^{(\infty)} \big) \mathrm{e}^{-5Kt^*} \sin\left(\frac{4}{3} t^* \right)$$

$$b_{23} = b_{23}^{(\infty)} + \big(b_{23}^{(0)} - b_{23}^{(\infty)} \big) \mathrm{e}^{-5Kt^*} \cos\left(\frac{4}{3} t^* \right) + \big(b_{13}^{(0)} - b_{13}^{(\infty)} \big) \mathrm{e}^{-5Kt^*} \sin\left(\frac{4}{3} t^* \right) \tag{27}$$

On retrouve un résultat classique d'amortissement des ondes inertielles [15], la pente initiale de l'amortissement étant liée à la valeur du nombre de Rossby (plus *Ro* est élevé, moins la décroissance est marquée). *Le terme de stropholyse est donc directement lié à cet effet d'amortissement*. C'est pourquoi la fermeture [6] qui implique $\mathbf{Q}^* = \mathbf{M}^* = \mathbf{Y}^{(4*)} = 0$ ne peut le produire et ne restitue qu'une solution oscillante non amortie. Une telle procédure apparaît par ailleurs plus naturelle que les procédures ad-hoc [13,15] conduisant à des résultats analogues. Les résultats qui précèdent justifient à posteriori de retenir $\mathbf{Q}^* = \mathsf{Q}[\mathbf{b}, \mathcal{W}, \zeta]$ plutôt que $\mathbf{Q}^* = \mathsf{Q}[\mathbf{y}, \mathcal{W}, \zeta]$ puisque $\mathbf{y}$ ne joue aucun rôle dynamique en rotation pure.

4. Conclusions

La méthodologie développée à partir de la RDT a montré (i) que le choix fonctionnel $\mathsf{G}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*]$ devait être écarté comme non physique, (ii) que le choix $\mathsf{G}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, t\mathbf{W}, \mathbf{t}\omega]$ ne permettait de formuler une fermeture réalisable que pour $\mathbf{Y}^{(4*)}$. Le traitement pour la fermeture des équations pour les anisotropies caractéristiques développé permet de retrouver la plupart des effets linéaires de l'écoulement de rotation pure, et en particulier les oscillations amorties des ondes inertielles. Néanmoins, sous la forme présente le modèle n'est pas complètement satisfaisant car sa forme RDT ne restitue pas en cisaillement pur l'attraction du système vers le point fixe 1C–2D mise en évidence dans [16,17] (le point fixe produit dans le cas cisaillement+rotation est donné de façon erronée par $\mathbf{b} = 0$, $y_{11} = 7/30 - R/10$, $y_{22} = 7/30 + R/10$, $y_{12} = 0$). Ce comportement non satisfaisant résulte de ce que la structure fonctionnelle des fermetures ne fait intervenir aucun renseignement sur la solution RDT à grands temps, une faiblesse qui reste à corriger.

Annexe A

$$\begin{aligned} T_Q(3) = {} & -\frac{10}{63}\big\langle(\mathbf{b}\mathcal{W} - \mathcal{W}\mathbf{b}) \otimes \Omega\big\rangle_{(3)} - \frac{5}{63}\big\langle(\mathbf{b}\zeta - \zeta\mathbf{b}) \otimes \Omega\big\rangle_{(3)} - \frac{5}{252}\big\langle(\mathbf{b}\zeta - \zeta\mathbf{b}) \otimes \overline{\mathcal{W}}\big\rangle_{(3)} \\ & - \frac{625}{3528}\big\langle\mathbf{b}^2 \otimes \overline{\mathcal{W}}^{(a)}\big\rangle_{(3)} + \frac{25}{63}\big\langle\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \cdot \overline{\mathcal{W}}^{(a)}\big\rangle_{(3)} - \frac{5}{84}\big\langle(\mathbf{b}\mathcal{W} - \mathcal{W}\mathbf{b}) \otimes \overline{\mathcal{W}}\big\rangle_{(3)} \end{aligned}$$

Références

[1] J. Piquet, Structure des développements de distorsion rapide à petits temps en turbulence homogène, C. R. Mecanique 333 (2005) 257–263.
[2] J. Piquet, L'équation de la stropholyse, C. R. Mecanique 331 (2003) 569–574.
[3] M.J. Lee, U. Piomelli, W.C. Reynolds, Useful formulas in the rapid distortion theory of homogeneous turbulence, Phys. Fluids 29 (1986) 3471–3474.
[4] M.J. Lee, Distortion of homogeneous turbulence by axisymmetric strain and dilatation, Phys. Fluids A 1 (1989) 1541–1557.
[5] M.J. Lee, A contribution toward rational modelling of the pressure-strain rate correlation, Phys. Fluids A 2 (1990) 630–633.
[6] S.C. Kassinos, W.C. Reynolds, A structure-based model for the rapid distorsion of homogeneous turbulence, Report TF 61, Thermosciences Division, Depart. Mech. Engineering, Stanford Univ., 1994.
[7] S.C. Kassinos, W.C. Reynolds, M.M. Rogers, One-point turbulent structure tensors, J. Fluid Mech. 428 (2001) 213–248.
[8] R.A. Horn, C.R. Johnson, Topics in Matrix Analysis, Cambridge Univ. Press, 1991, p. 528.
[9] C. Cambon, L. Jacquin, Spectral approach to non-isotropic turbulence submitted to rotation, J. Fluid Mech. 202 (1989) 307–332.
[10] C. Cambon, J. Scott, Linear and nonlinear models of anisotropic turbulence, Ann. Rev. Fluid Mech. 31 (1999) 1–53.
[11] J.L. Lumley, Computational modelling of turbulent flows, Adv. Appl. Mech. 18 (1978).
[12] J. Piquet, Sur la fermeture des termes rapides pour des écoulements moyens rotationnels, C. R. Mecanique 331 (2003) 551–556.
[13] T. Sjöggren, A.V. Johansson, Developments and calibration of algebraic non linear models for terms of the Reynolds-stress transport equations, Phys. Fluids A 12 (6) (2000) 1554–1572.
[14] C. Cambon, N. Mansour, F. Godeferd, Energy transfer in rotating turbulence, J. Fluid Mech. 337 (1997) 303–332.
[15] C. Cambon, L. Jacquin, J.L. Lubrano, Towards a new Reynolds stress model for rotation turbulent flows, Phys. Fluids A 4 (1992) 812–824.
[16] M.M. Rogers, The structure of a passive scalar field with a uniform mean gradient in rapidly sheared homogeneous flow, Phys. Fluids A 3 (1991) 144–154.
[17] C.G. Speziale, X.H. Xu, Towards the development of second-order closure models for non-equilibrium turbulent shear flows, in: 9th Symp. Turbulent Shear Flows, vol. 3, The Pennsylvania State Univ., USA, 1995.