Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Mecanique 333 (2005) 550–556
COMPTES RENDUS MECANIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

L'approche variationnelle de la fatigue : des premiers résultats

André Jaubert [a], Jean-Jacques Marigo [a,b,*]

[a] *LPMTM (UPR-CNRS 9001), université Paris-nord, 93430 Villetaneuse, France*
[b] *LMM (UMR 7607), université Paris VI, 4, place Jussieu, case 162, 75252 Paris cedex 05, France*

Reçu le 2 mars 2005 ; accepté après révision le 7 juin 2005

Présenté par Pierre Suquet

Résumé

En adoptant un principe de moindre énergie, une énergie de surface de type Dugdale et une condition d'irréversibilité, on construit un modèle de décollement de film mince opérant aussi bien sous chargement monotone que sous chargement cyclique. On montre en particulier que lorsque la longueur caractéristique de la loi de Dugdale est petite devant celle du film, on obtient « à la limite » la loi de propagation de Griffith sous chargement monotone et une loi de fatigue de type Paris sous chargement cyclique. ***Pour citer cet article : A. Jaubert, J.-J. Marigo, C. R. Mecanique 333 (2005).***

Abstract

Variational approach of fatigue: first results. By using a principle of least energy and a Dugdale surface energy with an irreversibility condition, we build a debonding model of thin films valid both for monotone and cyclic loading. We show that, if the internal length introduced in Dugdale model is small in comparison to the film length, then the growth of the debonding follows Griffith's law under monotone loading and a Paris-type law under cycling loading. ***To cite this article: A. Jaubert, J.-J. Marigo, C. R. Mecanique 333 (2005).***

Mots-clés : Fatigue ; Énergie de surface ; Mécanique de la Rupture ; Calcul des variations

Keywords: Fatigue; Surface energy; Fracture Mechanics; Calculus of Variations

Abridged English version

We consider an inextensible, perfectible flexible and semi-infinite film which is initially bonded to a support. The end of the film is submitted to a constant axial tension N and to a variable transversal displacement V_t, Fig. 1.

* Auteur correspondant.
Adresse e-mail : marigo@lmm.jussieu.fr (J.-J. Marigo).

1631-0721/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crme.2005.06.008

If the opening displacement field at time t is v_t, then the potential energy of the film at time t is given by (1). The irreversibility of the debonding is introduced by using a memory variable, the *accumulated* opening displacement field, the value of which at time t, δ_t, is a function of the history of the opening displacement field $\{v_\tau\}_{\tau\leqslant t}$ and is given by (2). Thus the surface energy at time t, $\mathcal{S}(\delta_t)$, is defined in terms of δ_t and is given by (3). In (3), ϕ_d denotes Dugdale's surface energy density, i.e. $\phi_d(\delta)=\min\{G_c\delta/d; G_c\}$, where G_c is the interface toughness and d an internal length. Finally, the prescribed opening history $t\mapsto V_t$ of the film end $x=0$ is discretized by considering the sequence $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in order to define the evolution of the debonding as the solution of the incremental minimization problem (4), (5). This incremental problem admits a unique solution $\{v_i,\delta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, solution which is independent of the discretization, Proposition 2.1. The main properties of the solution are given when the loading is cyclic, V_t oscillating between 0 and V_M. The internal length d is considered as a parameter and is introduced in the notation as a superscript. The index i refers to the end of an half-cycle: the odd indices refer to the end of a loading phase ($V_{2i-1}=V_M$) whereas the even ones refer to the end of an unloading phase ($V_{2i}=0$).

During any unloading phase, the accumulated opening does not evolve and the opening displacement returns to 0: $v^d_{2i}=0$, $\delta^d_{2i}=\delta^d_{2i-1}$. At the end of the ith loading phase, the film is divided into three zones: (i) in the interval $(0,\ell^d_{2i-1})$ the film is perfectly debonded, $\delta^d_{2i-1}>d$ and no more cohesive force acts; (ii) in the interval $(\ell^d_{2i-1},\lambda^d_{2i-1})$, $0<\delta^d_{2i-1}<d$ and the film is submitted to cohesive forces of magnitude G_c/d; (iii) in the interval $(\lambda^d_{2i-1},+\infty)$ the film is still perfectly bonded, $\delta^d_{2i-1}=0$. The position of the tips ℓ^d_{2i-1} and λ^d_{2i-1} are given by the nonlinear system (7). A careful study of (7) leads to the following fundamental results:

Proposition 0.1 (Fatigue phenomenon). *At given d, for any amplitude V_M of the cycles, the tips of the perfectly debonded and cohesive zones tend to ∞ when the number of cycles goes to ∞.*

Proposition 0.2 (For small d, convergence to Griffith law at short term, fatigue is a second order effect). *At a given number of cycles, when d goes to* 0, *the length of the cohesive zone goes to* 0 *while the length of the perfectly debonded zone tends to the value given by Griffith law after one cycle.*

The previous result needs to consider a number of cycles of the order of L/d in order to render account for fatigue when d is small. By introducing a real parameter T we rescale the number of cycles with (8).

Proposition 0.3 (For small d, convergence to a macroscopic 'Griffith crack'). *At a given T, when d tends to 0, the length of the cohesive zone tends to* 0, *the length of the perfectly debonded zone tends to a value $\ell(T)$, the surface energy and the potential energy converge to the value corresponding to that perfectly debonded zone of length $\ell(T)$. That allows to define a macroscopic energy release rate $G(T)$ associated to $\ell(T)$.*

Proposition 0.4 (For small d, convergence to a Paris fatigue law). *The evolution of the length of the macroscopic perfectly debonded zone is governed by a Paris law $\dot{\ell}\equiv \mathrm{d}\ell/\mathrm{d}T=f(G)$, the relation between the growth rate $\dot{\ell}$ and the macroscopic energy release rate G is given by the implicit equation* (11). *In particular, for small values of G, $\dot{\ell}$ is approximatively given by the power law* (12).

1. Introduction

À ce jour il n'existe pas de cadre général de la rupture permettant, à partir d'une formulation unique, de rendre compte des différents phénomènes observés. L'usage des ingénieurs est d'adopter le modèle de Griffith pour rendre compte de la propagation de fissures « à court terme » (sous chargement monotone par exemple), et le(s) modèle(s) phénoménologique(s) de Paris [1] « à long terme » (sous chargement cyclique par exemple). Aucun lien formel n'a véritablement été établi entre ces lois en dehors de quelques essais numériques [2] à partir de modèles de forces cohésives. De plus, les lois de fatigue utilisées sont d'origine essentiellement phénoménologique, leur forme et les paramètres à identifier pouvant changer d'un problème à l'autre sans que l'on sache dégager de façon claire ce qui tient du matériau, de la géométrie ou du chargement. On se propose ici d'établir ce lien et même de *construire* des lois de fatigue à partir de lois de rupture plus générales. Tout repose sur les trois ingrédients suivants : (i) un principe de moindre énergie ; (ii) une énergie de surface de type Dugdale–Barenblatt ; (iii) une condition d'irréversibilité. Chacun de ces ingrédients joue un rôle essentiel : sans condition d'irréversibilité *ou* avec une énergie de surface de Griffith, on ne peut pas rendre compte de la fatigue ; la convergence de la loi de propagation issue du modèle de Dugdale vers la loi de Griffith ou la loi de Paris repose essentiellement sur des convergences « en énergie » comme dans [3]. Cette approche, qui est a priori développable dans un cadre très général, sera mise en œuvre ici sur le problème « le plus simple possible ».

2. Formulation du problème d'évolution de la décohésion d'un film mince

Nous considérons un film mince inextensible et parfaitement flexible, de largeur unité et de longueur semi-infinie qui est parfaitement collé à l'instant initial à un socle rigide de normale $\mathbf{e}_2$. L'extrémité $x = 0$ du film est soumise à une tension constante $-N\mathbf{e}_1$, $N > 0$, et une déflexion $V_t\mathbf{e}_2$ dépendant du temps, Fig. 1. On note $\mathbf{U}_t(x) = u_t(x)\mathbf{e}_1 + v_t(x)\mathbf{e}_2$ le déplacement d'un point du film d'abscisse x à l'instant t. Les composantes u_t et v_t vérifient les conditions cinématiques : $u_t(+\infty) = v_t(+\infty) = 0$ et $v_t(0) = V_t$. La dépendance en temps de la déflexion imposée V_t peut être arbitraire, on y distingue les phases de charge ($t \mapsto V_t$ croissante) des phases de décharge ($t \mapsto V_t$ décroissante). Comme le film est parfaitement flexible, l'énergie potentielle du film à l'instant t se réduit au travail de la force de tension dans le déplacement $u_t(0)$. Comme il est inextensible, cette énergie peut s'exprimer en terme du champ de déflexion v_t. Dans le cadre des petits déplacements, elle s'écrit (le prime désignant la dérivée spatiale) :

$$\mathcal{P}(v_t) = \frac{N}{2}\int_0^\infty v_t'(x)^2\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Pour tenir compte de l'irréversibilité du décollement, nous introduisons une variable, notée δ_t, fonction de x et mémorisant l'histoire de la déflexion. Nous optons ici (toujours pour des raisons de simplicité) pour le choix suivant (le point désignant la dérivée par rapport au temps) :

$$\delta_t(x) = \int_0^t \big\langle \dot{v_\tau}(x)\big\rangle\,\mathrm{d}\tau \quad \text{avec } \langle f\rangle = \max\{0, f\} \tag{2}$$

δ_t représente le taux cumulé d'ouverture jusqu'à l'instant t entre le film et le socle. La zone parfaitement collée à l'instant t correspond aux points où $\delta_t = 0$, i.e. les points où $v_\tau = 0$, $\forall\tau \leqslant t$.

On choisit comme densité d'énergie de surface ϕ_d l'énergie de Dugdale, i.e. $\phi_d(\delta) = \min\{G_c\delta/d; G_c\}$, que nous aurons à comparer avec celle de Griffith, $\phi_0(0) = 0$ et $\phi_0(\delta) = G_c$ si $\delta > 0$. Dans la définition de ϕ_d, d représente une longueur interne caractéristique et G_c la ténacité de l'interface. L'irréversibilité de la décohésion est prise en

Fig. 1. Géométrie et chargement.

Fig. 1. Geometry and loading.

compte en faisant dépendre l'énergie de surface à l'interface non pas de l'ouverture du film à l'instant considéré, mais du taux cumulé d'ouverture jusqu'à cet instant. Autrement dit l'énergie de surface à l'instant t s'écrit

$$\mathcal{S}(\delta_t) = \int_0^\infty \phi_d\big(\delta_t(x)\big)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

Avec le modèle de Dugdale, seuls les points où $0 \leqslant \delta_t \leqslant d$ sont susceptibles d'être soumis à des forces cohésives, ceux où $\delta_t > d$ sont parfaitement (et définitivement) décollés comme dans le modèle de Griffith.

En suivant les idées introduites dans [4] et reprises largement depuis, dans [5] par exemple, l'irréversibilité exige de formuler dans un premier temps le problème de minimisation d'énergie sous forme incrémentale. (On peut ensuite construire un problème d'évolution en temps continu, en faisant tendre le pas de temps vers 0 et en passant à la limite, comme dans [5]. Mais cela ne s'avérera pas nécessaire ici compte tenu du résultat d'indépendance de la solution par rapport à la discrétisation, Proposition 2.1.) Une fois le chemin de chargement discrétisé, l'indice i faisant référence au pas de temps, on a à résoudre une séquence de problèmes de minimisation, la solution au pas i dépendant des solutions aux pas précédents. Spécifiquement, en notant $\mathcal{V}_i$ l'ensemble des déflexions admissibles au pas i et $\mathcal{E}_i(v)$ l'énergie totale du film à ce pas pour une déflexion v,

$$\mathcal{V}_i = \big\{v \in W^{1,2}(0,\infty):\ v(0) = V_i,\ v \geqslant 0\big\}, \qquad \mathcal{E}_i(v) = \mathcal{P}(v) + \mathcal{S}\big(\delta_{i-1} + \langle v - v_{i-1}\rangle\big) \tag{4}$$

le problème incrémental s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Pour } i \in \mathbb{N}^* \textit{ et } v_0 = \delta_0 = 0, \quad \textit{trouver } v_i \in \mathcal{V}_i \textit{ et } \delta_i \textit{ tels que} \\ \mathcal{E}_i(v_i) = \min_{v\in\mathcal{V}_i} \mathcal{E}_i(v), \qquad \delta_i = \delta_{i-1} + \langle v_i - v_{i-1}\rangle \end{array}} \tag{5}$$

Le reste de l'étude s'appuie sur le résultat d'existence, d'unicité et d'indépendance vis à vis de la discrétisation suivant qui est très spécifique au problème traité. (Il suffit par exemple de faire dépendre la ténacité de x pour perdre l'unicité et d'être amené à distinguer les solutions correspondant à des minima relatifs de celles correspondant à des minima absolus.)

Proposition 2.1. *Quel que soit le trajet de chargement, le problème incrémental admet une unique solution. De plus cette solution est indépendante de la discrétisation choisie pour chaque phase de charge ou de décharge qui peuvent donc être traitées en un seul pas de temps.*

3. Évolution du décollement sous chargement cyclique

On suppose désormais que la déflexion imposée en $x = 0$, V_i, varie de façon cyclique entre 0 et V_M. L'indice i se réfère à l'extrémité d'un demi cycle, les indices impairs correspondant à la fin de montée en charge ($V_{2i+1} = V_M$) et les indices pairs à la fin des décharges ($V_{2i} = 0$), cf. Fig. 1.

3.1. Cas de l'énergie de Griffith

Il est intéressant de regarder tout d'abord ce que l'on obtiendrait si l'on adoptait l'énergie de surface de Griffith, i.e. si l'on résolvait le problème (5) avec ϕ_0 comme énergie de surface. On montre facilement la

Proposition 3.1. *Si l'on avait adopté l'énergie de surface de Griffith, i.e. ϕ_0 à la place de ϕ_d, et si l'on avait soumis le film à un chargement cyclique, V_i variant entre* 0 *et V_M, alors le décollement aurait suivi la loi de propagation de Griffith* :

(1) *Durant la première montée en charge la longueur de décohésion ℓ aurait crû avec la déflexion imposée en* 0*, V, de façon à ce que le taux de restitution d'énergie potentielle $G = \frac{NV^2}{2\ell^2}$ reste égal à la ténacité G_c.*

(2) *Le décollement n'aurait plus évolué après la première montée en charge, il n'y aurait pas eu de phénomène de fatigue. La longueur décollée après la première montée en charge serait restée à la valeur* $\ell_1^0 = \sqrt{\frac{N}{2G_c}}V_M$.

Il est donc clair que l'on ne peut pas rendre compte de la fatigue avec l'énergie de Griffith, même en tenant compte de l'irréversibilité. On va voir qu'il en va tout autrement avec l'énergie de Dugdale.

3.2. Cas de l'énergie de Dugdale

On montre que l'évolution du décollement, i.e. la solution du problème incrémental (5), possède les propriétés suivantes :

1. *Première montée en charge.* Durant cette phase $\delta_t = v_t$. Dès la mise en charge une zone cohésive apparaît au voisinage de $x = 0$. Dans cette zone, la déflexion est comprise entre 0 et d et des forces cohésives d'intensité G_c/d agissent. Cette zone s'étend lorsque t augmente. Si $V_M > d$, une zone parfaitement décollée apparaît à son tour au voisinage de $x = 0$. Dans cette zone, la déflexion est supérieure à d et plus aucune force cohésive n'agit. À la fin de la première montée en charge, si $V_M > d$, la zone parfaitement décollée sera $(0, \ell_1)$, la zone cohésive sera (ℓ_1, λ_1) et la zone collée sera $(\lambda_1, +\infty)$, les pointes étant données par
$$\ell_1 = \sqrt{\frac{N}{2G_c}}(V_M - d), \qquad \lambda_1 = \sqrt{\frac{N}{2G_c}}(V_M + d) \tag{6}$$
les champs v_1 et δ_1 s'en déduisant facilement.
2. *Phases de décharge.* Le taux cumulé d'ouverture n'évolue pas durant les phases de décharge et le film retourne à sa configuration de déplacement initiale à la fin d'une phase de décharge : $v_{2i} = 0$ et $\delta_{2i} = \delta_{2i-1}$.
3. $i^{ème}$ *montée en charge,* $i > 1$. Les zones parfaitement décollée et cohésive avancent à chaque montée en charge. À la fin de la $i^{\text{ième}}$ montée en charge, la zone parfaitement décollée est l'intervalle $(0, \ell_{2i-1})$, la zone cohésive l'intervalle $(\ell_{2i-1}, \lambda_{2i-1})$, le reste du film est collé. Les pointes ℓ_{2i-1} et λ_{2i-1} sont données par le système suivant
$$\begin{cases} (\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1})^2 + 2(\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1})\ell_{2i-1} = \frac{2N}{G_c}V_M d \\ \sum_{j=1}^{i} \langle \lambda_{2j-1} - \ell_{2i-1} \rangle^2 = \frac{2N}{G_c}d^2 \end{cases} \tag{7}$$
La déflexion v_{2i-1} s'en déduit facilement alors que l'ouverture cumulée s'écrit $\delta_{2i-1} = \sum_{j=1}^{i} v_{2j-1}$.

On en déduit la proposition suivante qui traduit le phénomène de fatigue :

Proposition 3.2. *Quelle que soit l'amplitude V_M du cycle, les suites ℓ_{2i-1} et λ_{2i-1} sont croissantes et tendent vers l'infini quand i tend vers l'infini. Le film tend donc à se décoller complètement.*

4. Les lois limites lorsque $d \to 0$

On suppose que la longueur caractéristique de Dugdale d est petite (devant une longueur de référence L). En prenant d comme petit paramètre, on s'intéresse au comportement asymptotique de la solution du problème d'évolution du décollement lorsque d tend vers 0. La position des pointes des zones parfaitement décollée et cohésive à la fin de la i-ème montée en charge sont notées maintenant ℓ_{2i-1}^d et λ_{2i-1}^d de façon à faire apparaître explicitement le paramètre d. Comme la longueur de la zone cohésive $\lambda_{2i-1}^d - \ell_{2i-1}^d$ et l'avancée à chaque cycle des pointes $\ell_{2i+1}^d - \ell_{2i-1}^d$, $\lambda_{2i+1}^d - \lambda_{2i-1}^d$ sont de l'ordre de d, on obtient le premier résultat de convergence suivant, conforme à [3] :

Proposition 4.1 (Loi de Griffith à court terme). *À nombre de cycles fixé i, quand $d \to 0$, les pointes des zone parfaitement décollée et cohésive ℓ^d_{2i-1} et λ^d_{2i-1} tendent,* quel que soit i, *vers la longueur décollée ℓ^0_1 prévue par la théorie de Griffith à la fin du* premier cycle, *cf. Proposition* 3.1.

Autrement dit, la fatigue est un phénomène du second ordre. Le nombre de cycles nécessaires pour décoller le film d'une longueur L est de l'ordre de L/d. On fait donc un changement d'échelle de nombre de cycles en introduisant un paramètre *réel* positif T :

$$T \mapsto i_d(T) = \left[\frac{TL}{d}\right] \tag{8}$$

$[\cdot]$ représentant la partie entière. On obtient alors un nouveau résultat de convergence :

Proposition 4.2. *À T fixé, quand $d \to 0$, les pointes des zones parfaitement décollée et cohésive $\ell^d_{2i_d(T)-1}$ et $\lambda^d_{2i_d(T)-1}$ tendent vers une limite commune $\ell(T)$. De plus l'énergie potentielle et l'énergie de surface tendent respectivement vers $\frac{NV_M^2}{2\ell(T)}$ et $G_c\ell(T)$, i.e. vers les valeurs associées à un film parfaitement décollé sur une longueur $\ell(T)$ et parfaitement collé ailleurs. Ceci permet de définir un taux de restitution d'énergie potentielle* macroscopique *associé à cette fissure* macroscopique *de longueur $\ell(T)$: $G(T) = \frac{NV_M^2}{2\ell(T)^2}$.*

Il reste à trouver la relation $T \mapsto \ell(T)$, i.e. la loi de fatigue limite. Elle ne peut pas être donnée par la loi de Griffith, qui donnerait $\ell(T) = \ell^0_1, \forall T > 0$, ce qui est en contradiction avec la Proposition 3.2. On l'obtient en passant à la limite dans les Éqs. (7). L'Éq. (7_1) fournit tout d'abord la taille de la zone cohésive (qui est de l'ordre de d). On obtient

$$\lim_{d\to 0} \frac{1}{d}\left(\lambda^d_{2i_d(T)-1} - \ell^d_{2i_d(T)-1}\right) = \frac{\sqrt{2NG(T)}}{G_c} \tag{9}$$

la taille de la zone cohésive est donc uniquement fonction du taux de restitution d'énergie potentielle macroscopique. À partir de (7_2), on constate numériquement (la preuve formelle restant à établir) que l'avancée des pointes à chaque cycle tend, à l'ordre 1, vers une valeur ne dépendant que du paramètre T. Autrement dit un régime « stationnaire » se met en place à l'échelle microscopique. En conséquence, la valeur limite de l'avancée représente le taux de propagation de la fissure macroscopique par rapport au paramètre T, $\dot{\ell} = \mathrm{d}\ell/\mathrm{d}T$:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{d\to 0} \frac{L}{d}\left(\lambda^d_{2i_d(T)+2k-1} - \lambda^d_{2i_d(T)-1}\right) = k\dot{\ell}(T) \tag{10}$$

En reportant (9) et (10) dans (7_2), on obtient la

Proposition 4.3 (Loi de fatigue limite). *La relation entre $\dot{\ell}$ et G est donnée par l'équation implicite*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left\langle \sqrt{\frac{G}{G_c}} - j\frac{\dot{\ell}}{L}\sqrt{\frac{G_c}{2N}} \right\rangle^2 = 1 \quad \textit{avec } \langle\cdot\rangle = \mathrm{Max}\{0, \cdot\} \tag{11}$$

qui, pour G donné, admet une solution unique $\dot{\ell}$ si $0 < G < G_c$, l'intervalle $[L\sqrt{\frac{2N}{G_c}}, +\infty)$ si $G = G_c$ et pas de solution si $G > G_c$.

Autrement dit, la loi de fatigue limite obtenue, lorsque $d \to 0$, est une loi de type Paris [1], *$\dot{\ell} = f(G)$, lorsque $G < G_c$ et la loi de Griffith lorsque $G = G_c$. La fonction f est strictement croissante depuis 0 et de classe C^1.*

Finalement, comme G est fonction de ℓ, on obtient une équation différentielle régissant les évolutions de ℓ en fonction de T. En vertu de la Proposition 4.1, la condition initiale est donnée par la loi de Griffith, $\ell(0+) = \ell^0_1$. La loi de Griffith régit donc les évolutions à court terme, la loi de Paris celles à long terme.

On peut remarquer dans (11) que, quand G est petit devant G_c, la loi de Paris obtenue est une loi puissance avec un exposant $3/2$. En utilisant les notations des ingénieurs et en notant $\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}i$ l'avancée de la fissure à chaque cycle, elle s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}i} \approx \frac{d}{3}\sqrt{\frac{2N}{G_c}}\left(\frac{G}{G_c}\right)^{3/2} \quad \text{quand } G \ll G_c \tag{12}$$

Remarque finale. On peut suivre la même démarche et construire ainsi d'autres lois de fatigue en changeant d'énergie de surface, de condition d'irréversibilté, d'énergie potentielle, de géométrie ou de cycle de chargement. Cette étude de la dépendance de la loi de Paris aux paramètres structurels, matériels et environnementaux sera l'objet de futures publications.

Références

[1] P. Paris, M. Gomez, W. Anderson, A rational analytic theory of fatigue, Trend Engrg. 13 (1961) 9–14.
[2] O. Nguyen, E.A. Repetto, M. Ortiz, R.A. Radovitzky, A cohesive model of fatigue crack growth, Int. J. Fracture 110 (2001) 351–369.
[3] J.-J. Marigo, L. Truskinovsky, Initiation and propagation of fracture in the models of Griffith and Barenblatt, Contin. Mech. Thermodyn. 16 (4) (2004) 391–409.
[4] G.A. Francfort, J.-J. Marigo, Stable damage evolution in a brittle continuous medium, Eur. J. Mech. A Solids 12 (2) (1993) 149–189.
[5] A. Mielke, Energetic formulation of multiplicative elasto-plasticity using dissipation distances, Contin. Mech. Thermodyn. 15 (4) (2003) 351–382.