Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Mecanique 333 (2005) 257–263
COMPTES RENDUS MECANIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Structure des développements de distorsion rapide à petits temps en turbulence homogène

Jean Piquet

Laboratoire de mécanique des fluides, UMR 6598 CNRS, École centrale de Nantes, BP 92101, 44321 Nantes cedex, France

Reçu le 29 septembre 2004 ; accepté après révision le 4 novembre 2004

Disponible sur Internet le 18 janvier 2005

Présenté par Pierre Perrier

Résumé

A petits temps suivant la distorsion d'un état isotrope, la théorie de distorsion rapide fournit la forme tensorielle des développements des grandeurs turbulentes en un point pour les écoulements turbulents homogènes rotationnels en moyenne. Il est considéré que la consistance avec de tels développements doit être assurée pour tout modèle de fermeture. La note décrit la structure générale de ces développements et examine certaines de leurs propriétés. Il est montré comment les effets cumulés (de déformation et de rotation) sont mis en jeu. ***Pour citer cet article : J. Piquet, C. R. Mecanique 333 (2005).***

Abstract

On the closure of rapid terms for rotational mean flows. For small times following the distortion of an isotropic state, rapid-distortion theory provides the tensorial form of one-point correlation expansions for homogeneous rotational turbulent mean flows. It is considered that the consistency with such expansions must be satisfied by any closure model. The Note describes the general structure of these expansions as well as some of their properties. It is shown how cumulated effects (strain and rotation) are involved. ***To cite this article: J. Piquet, C. R. Mecanique 333 (2005).***

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Turbulence ; Distorsion rapide ; Pression-déformation

Keywords: Fluid mechanics; Turbulence; Realisability; Pressure-strain

Abridged English version

Rapid-distortion theory (RDT) assumes that turbulence is subjected to modifications that are rapid enough not to leave time to nonlinear interactions (which develop on a timescale ε/q^2) to cascade energy towards small

Adresse e-mail : Jean.Piquet@ec-nantes.fr (J. Piquet).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2004.11.004

scales. Hence $\{\mathbf{S}^2\}^{1/2}q^2/\varepsilon \gg 1$. Nonlinear interactions are thus neglected. If we, moreover, consider inviscid RDT, the shape of the spectra is irrelevant. Then the small-time expansion of Fourier amplitudes given by the RDT equations (2) allows a computation of the small-time time expansion of the spectral velocity tensor, $\Phi_{ij}(\mathbf{k},t)$, in terms of its value at $t=0$, $\Phi_{ij}(\mathbf{K})$, which is assumed to be isotropic. An integration over the wave number $\mathbf{K}$ yields the expansions of quantities defined by Eqs. (4). Due to the homogeneity hypothesis, the rotational part of the mean flow is not arbitrary and depends on the cumulated strain, A, in a manner specified by (5), (6). The turbulent kinetic energy $q^2/2$ is given by (7), and, as it is the main quantity which involves the mean cumulated compression, every quantity is normalized by q^2. For irrotational flows, the fact that principal axii of $\mathbf{b}$ $(=\mathbf{y})$ – the nondimensional Reynolds-stress anisotropy tensor defined in Eq. (4) – and A^*, the cumulated distortion, coincide, an univoqual relationship between $\mathbf{b}$ and A^* being available [4–6]. For mean rotational flows, this is no longer the case and it is necessary to distinguish between the componental anisotropy, $\mathbf{b}$, and the dimensional anisotropy, $\mathbf{y}$, defined also in (4). Both small-time expansions (8), (9) show the influence of rotational effects under a cumulated form which appears at the second order in time. The use [13–15] of canonical decompositions of fourth-order tensors $\mathbf{M}$ and $\mathbf{Y}^{(4)}$ involved in the rapid transfer terms present in $\mathbf{b}$- and $\mathbf{y}$-equations allows one to specify the expansions (12), (13) of the purely symmetric, trace-free parts, $\mathbf{M}^{(4^*)}$ and $\mathbf{Y}^{(4^*)}$ of these fourth-order tensors. In particular, rotational terms enter $3\mathbf{M}^{(4^*)}-\mathbf{Y}^{(4^*)}$ (which vanishes in irrotational flows) as second-order effects. The stropholysis which represents the sensitivity of the rapid pressure-strain tensor to rotational effects, as indicated by (14) is similarly expanded, see (15). The higher-order tensor term $\mathbf{Q}^{(5)}$ appearing in the equations for $\mathbf{Q}$ is finally treated in the same way: its canonical decompositions is given by (16) as well as the RDT expansions of the purely symmetrical components (18), (19), up to third order in time.

1. Introduction

La théorie de distorsion rapide (RDT) est utile pour comprendre la dynamique et les structures de la turbulence sujette à d'intenses modifications de l'écoulement moyen. Son hypothèse de base est que la turbulence est soumise à un changement suffisamment brutal de celui-ci pour que les interactions non linéaires n'aient pas le temps de propager la cascade d'énergie vers les échelles dissipatives. Si $\|\mathbf{S}\| := \{\mathbf{S}^2\}^{1/2}$ mesure le taux de déformation moyen – $\{\mathbf{A}\}$ désigne la trace de $\mathbf{A}$ –, on admet que $\|\mathbf{S}\|q^2/\varepsilon \gg 1$. Dès lors, les termes non linéaires et les effets visqueux sont négligeables. De fait, la théorie reste valable pour décrire des écoulements turbulents à évolution lente (mais dans ce cas la condition initiale appropriée n'est pas en général isotrope) où les structures tourbillonnaires dominantes sont celles de la RDT : alternances de vorticité longitudinale et anti-longitudinale (« double-roller » eddies), présence de régions localisées d'intenses vorticité transversale ou vitesse longitudinale (« streaks »). Les paramètres de grande échelle (comme les quantités du second ordre) étant donnés, les spectres ont, lors de la distorsion rapide, des formes différentes des formes habituelles puisque les taux de déformation et de rotation imposés sont assez forts pour dominer les effets non linéaires. Par suite, le taux de déformation peut influer directement sur les petites échelles du spectre qui n'aura pas de forme équilibrée [1]. Toutefois, on peut montrer que dans le cas non visqueux, la forme de ces spectres n'est pas affectée par la distorsion.

Le tenseur $\mathbf{M}$ décrivant le problème RDT est en général une fonction de la déformation cumulée et de la rotation cumulée définies par :

$$A(t) := \int_0^t \mathbf{S}(t')\,\mathrm{d}t' \,; \qquad W(t) := \int_0^t \mathbf{W}(t')\,\mathrm{d}t' \tag{1}$$

Pour un spectre initial donné, le tenseur spectral des corrélations doubles, $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$, dans l'espace des nombres d'onde $\mathbf{k}$, ne peut être calculé que dans de rares cas de façon analytique. Les solutions disponibles sont connues de longue date et incluent les cas d'un écoulement moyen irrotationnel, d'un cisaillement pur et d'une rotation pure [2,3]. Par une intégration convenable du tenseur spectral, il est possible dans des cas encore plus rares d'en déduire la forme analytique des corrélations doubles (déformations pures planes ou axisymétriques). En règle générale, et même pour des écoulements moyens irrotationnels, il n'est possible d'effectuer l'intégration analytiquement qu'à des temps très petits. Les corrélations doubles au cinquième ordre en $\|A\|$ ont pu ainsi être déterminées [4–6] où a été déduit le développement en séries du terme rapide en fonction de **b**, déviateur adimensionnel des corrélations doubles de vitesse, qui n'est fonction univoque de A que dans le cas d'un écoulement moyen irrotationnel.

Pour un écoulement moyen rotationnel, les axes principaux de **b** ne sont plus alignés avec ceux de A, et le déviateur **y**, caractéristique de l'anisotropie dimensionnelle, diffère de **b**. Dans ce qui suit, nous examinons le développement à petit temps de la solution de distorsion rapide la plus générale dans un repère tournant à la vitesse angulaire Ω, dans le cas où **S** ne dépend pas du temps. Les développements qui suivent ont été obtenus au moyen du calculateur symbolique MAPLE, suivant en cela la suggestion [7]. La croissance très rapide du nombre de termes à intégrer dans les développements du spectre des corrélations doubles de vitesse nous a limité en pratique au quatrième ordre en temps. Pour des questions de place, nous présentons dans ce qui suit les développements obtenus en général au troisième ordre en temps.

2. Développements de distorsion rapide

Nous considérons dans ce qui suit les développements de distorsion rapide à petits temps, à partir d'un état initial isotrope. Ils sont obtenus par développement limité autour de $t=0$ des équations spectrales (2) de la distorsion rapide, pour les transformées de Fourier, $\hat{v}_i(\mathbf{k})$, des fluctuations de vitesse $\mathbf{v}' =: \operatorname{rot}\Psi'$.

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}\hat{v}_i}{\mathrm{d}t} = M_{ij}\hat{v}_j\ ; \quad M_{ij}(t) := -\nu k^2\delta_{ij} + 2\frac{k_ik_p}{k^2}V^{(a)}_{p,j} - \widetilde{V}_{i,j}\ ; \quad \frac{\bar{\mathrm{d}}k_i}{\mathrm{d}t} = -k_pV_{p,i}\ ; \quad k_i(t=0) = K_i \tag{2}$$

où $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ est la dérivée particulaire à **K** constant, c'est à dire dérivée en suivant le mouvement, $\mathbf{k} = (\mathbf{F}^{-\mathrm{T}})\cdot\mathbf{K}$, défini à partie du gradient de déformation moyenne $\mathbf{F}(t)$. $\widetilde{\mathbf{V}}$ et $\mathbf{V}^{(a)}$, la vitesse moyenne absolue, s'expriment en fonction de la vitesse moyenne relative **V** et de Ω selon :

$$V^{(a)}_{i,j} = V_{i,j} - \varepsilon_{ijm}\Omega_m\ ; \quad \widetilde{V}_{i,j} = V_{i,j} - 2\varepsilon_{ijm}\Omega_m \quad \text{et} \quad W^{(a)}_i = W_i + 2\Omega_i; \quad \widetilde{W}_i = W_i + 4\Omega_i \tag{3}$$

où les vorticités correspondantes ont été aussi spécifiées (voir par exemple [8]). Il est alors possible, par utilisation de (2), de développer **k** et $\hat{v}_i(\mathbf{k})$ au voisinage de $t=0$, pour tout champ moyen. L'intégration sur le nombre d'onde **K** des ordres en temps successifs – en tenant compte de l'isotropie initiale pour $\Phi_{ij}(\mathbf{K})$ –, de chacune des relations (4) qui spécifient les tenseurs en un point en fonction de $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$,

$$\begin{aligned}
&\overline{v'_iv'_j} = \overline{q^2}\left(\frac{1}{3}\delta_{ij} + b_{ij}\right) = \int \Phi_{ij}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\ ; \qquad Y_{ij} := \overline{\Psi'_{p,i}\Psi'_{p,j}} = \overline{q^2}\left(\frac{1}{3}\delta_{ij} + y_{ij}\right) = \int \frac{k_ik_j}{k^2}\Phi_{nn}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\\
&\overline{q^2}M_{ijpq} := \int \frac{k_ik_j}{k^2}\Phi_{pq}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\ ; \qquad \overline{q^2}Y^{(4)}_{ijpq} := \int \frac{k_ik_jk_pk_q}{k^4}\Phi_{nn}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\\
&\overline{q^2}M^{(6)}_{ijlmpq} := \int \frac{k_ik_jk_lk_m}{k^4}\Phi_{pq}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\ ; \qquad \overline{q^2}Y^{(6)}_{ijlmpq} := \int \frac{k_ik_jk_lk_mk_pk_q}{k^4}\Phi_{nn}\,\mathrm{d}\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{4}$$

fournit les développements au voisinage de l'isotropie de toutes les quantités susceptibles de nous intéresser lors de la construction des modèles de fermeture. Notons tout d'abord que le champ de vorticité moyenne, $\mathbf{w}^{(a)}(t)$, n'est pas arbitraire en turbulence homogène et qu'il résulte, par intégration de l'équation du tourbillon moyen, de la connaissance de la déformation cumulée, $A(t)$.

$$\overline{\mathbf{w}}^{(a)}(t) = \exp\big[A(t)\big]\cdot\overline{\mathbf{w}}^{(a)}(0) \tag{5}$$

où $\exp[\cdot]$ désigne l'opérateur d'exponentiation. La formule (5) peut être développée à petits temps pour fournir :

$$\overline{\mathbf{w}}^{(a)}(t)=\left[\left[1+\frac{1}{3}\{A\}+\frac{1}{18}\{A\}^2+\frac{1}{18}\{A^{*3}\}+\frac{1}{162}\{A\}^3\right]\mathbf{I}+\left[1+\frac{1}{3}\{A\}+\frac{1}{18}\{A\}^2+\frac{1}{12}\{A^{*2}\}\right]A^*\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3}\{A\}\right]A^{*2}\right]\cdot\overline{\mathbf{w}}^{(a)}(0) \tag{6}$$

A coté de la compression cumulée, $\{A\}\mathbf{I}/3$, A^*, pur déviateur de A, désigne la distorsion cumulée. On reconnaît dans (6) le terme d'étirement tourbillonnaire dans la direction de la vorticité initiale et le terme de gauchissement produisant le changement d'orientation de $\mathbf{w}^{(a)}$ avec le temps. Dans ce qui suit nous travaillerons avec le tenseur $\mathbf{W}^{(a)}:=-\varepsilon\cdot\mathbf{w}^{(a)}(t)/2$ et son intégrale $W^{(a)}(t)$. L'énergie cinétique turbulente (4) se trouve être la seule autre quantité qui prenne en charge la compression moyenne $\{\mathbf{S}\}$ de l'écoulement :

$$\overline{q^2}=\overline{q_0^2}\left[1-\frac{2}{3}\{A\}+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\{A^{*2}\}+\frac{1}{3}\{A\}^2\right)+\frac{4}{9}\left(\frac{2}{7}\{A^{*3}\}-\frac{2}{5}\{A\}\{A^{*2}\}-\frac{1}{9}\{A\}^3\right)\right]+\mathrm{O}(t^4) \tag{7}$$

L'expression (7) fait en effet intervenir le développement à l'ordre quatre de $\mathbf{e}^{-2\{A\}/3}$ qui est la solution de distorsion rapide pour le problème de compression pure [7]. Afin d'éliminer une influence directe de la compression, toutes les grandeurs seront normalisées par l'énergie cinétique turbulente. Les invariants conjoints dépendant du taux de rotation cumulé et de la vitesse angulaire cumulée du repère n'apparaissent qu'à l'ordre t^4. Le taux de déformation joue seul à travers ses invariants sur les trois premières dérivées temporelles de l'énergie cinétique turbulente, une indication de la faible, mais néanmoins présente, influence de la force de Coriolis dans le mécanisme de distorsion rapide. Une application de (7) au cas des écoulements plans à déformation et rotation inégales ($S_{12}=S/2,\ W_{12}=-w_3/2=S/R$) montre une croissance initiale de q^2 plus modérée pour les écoulements elliptiques ($R<1$) qu'hyperboliques ($R>1$), par le biais d'une contribution au quatrième ordre proportionnelle à $1-R^{-2}$. L'examen d'un écoulement cisaillé en repère tournant ($S_{12}=W_{12}=S/2,\ \Omega_3=\Omega$) dépendant de $R=-2\Omega/S$ montre une asymétrie entre les états R et $-1-R$ dès les petits temps et donc une absence de similitude de Bradshaw [3,9,10].

Les anisotropies $\mathbf{b}$ et $\mathbf{y}$ sont données par :

$$\mathbf{y}=-\frac{4}{15}A^*-\frac{2}{3}\left[\frac{2}{7}\left(A^{*2}-\frac{1}{3}\{A^{*2}\}\mathbf{I}\right)\right]-\frac{1}{5}(A^*W-WA^*)+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{15}\left(\frac{46}{35}\{A^{*2}\}+\{W^2\}\right)A^*\right.$$
$$\left.+\frac{1}{7}(A^{*2}W-WA^{*2})-\frac{1}{5}\left(A^*W^2+W^2A^*-\frac{2}{3}\{A^*W^2\}\mathbf{I}\right)\right]+\mathrm{O}(t^4) \tag{8}$$

$$\mathbf{b}=\mathbf{y}-\frac{4}{15}[A^*W^{(a)}-W^{(a)}A^*]+\frac{4}{5}\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{7}\{W^2\}+\frac{13}{7}t\{W\omega\}-\frac{2}{7}t^2\{\omega^2\}\right)A^*+\frac{1}{7}(A^{*2}W^{(a)}-W^{(a)}A^{*2})\right.$$
$$+\frac{2}{7}\left(A^*W^2+W^2A^*-\frac{2}{3}\{W^2A^*\}\mathbf{I}\right)-\frac{8}{21}t^2\left(A^*\omega^2+\omega^2A^*-\frac{2}{3}\{\omega^2A^*\}\mathbf{I}\right)$$
$$\left.-\frac{1}{7}(A^{*2}W-WA^{*2})-\frac{1}{7}t(A^{*2}\omega-\omega A^{*2})-\frac{1}{21}t\left(WA^*\omega+\omega A^*W-\frac{2}{3}\{WA^*\omega\}\mathbf{I}\right)\right]+\mathrm{O}(t^4) \tag{9}$$

où $W_{ij}^{(a)}=W_{ij}+\widehat{\omega}_{ij}$, les symboles W et w désignant les intégrales en temps de W et w, l'intégrale en temps de ω étant notée $t\omega$ ou $\widehat{\omega}$. Si l'écoulement moyen est irrotationnel, alors à l'ordre quatre, en accord avec [6] :

$$\mathbf{b}=\mathbf{y}=\left[-\frac{4}{15}+\frac{92}{1575}\{A^{*2}\}+\frac{124}{3465}\{A^{*3}\}\right]A^*+\left[-\frac{4}{21}+\frac{62}{1155}\{A^{*2}\}\right]\left[A^{*2}-\frac{1}{3}\{A^{*2}\}\mathbf{I}\right]+\cdots$$

En outre, un écoulement de rotation pure initialement isotrope reste isotrope, puisque W et ω n'apparaissent qu'en conjonction avec la déformation cumulée. Les invariants de $\mathbf{b}$ et de $\mathbf{y}$ ne sont identiques que jusqu'à l'ordre trois et ils ne dépendent alors que des invariants de A. L'ordre quatre calculé est donc nécessaire pour distinguer les écoulements 2D et 2C, à travers les invariants II_b et II_y. Les développements (8), (9) coincident avec les formes tensorielles des modèles algébriques explicites de contraintes (EARS models). Le terme dominant $-4A^*/15$ a déjà donné pour **b** dans [2]. Si l'on y introduit $t=\alpha q^2/\varepsilon$, les modèles de viscosité turbulente classiques correspondent à $C_\mu=-8\alpha/15$ et la procédure obtenue « fabrique » alors automatiquement des modèles d'ordre plus élevé. Dans les cas de cisaillement pur ou de cisaillement en repère tournant, les développements qui précèdent sont en bon accord avec [11] et [12], respectivement. On retrouve en particulier que la composante longitudinale R_{11} est plus grande dans le cas cyclonique que dans le cas anticyclonique, alors que la réduction de R_{12} (par rapport au cas $\Omega=0$) dans le cas cyclonique est plus forte que dans le cas anticyclonique.

Pour les tenseurs d'ordre supérieur, il est utile d'introduire la notation suivante $\langle\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\rangle$ définie par le tenseur totalement symétrique à traces nulles :

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\rangle_{ijpq} &:= \langle A_{ij}B_{pq}\rangle_{(6)}-\frac{1}{7}\Big[2\big\langle\delta_{pq}(A_{ik}B_{jk}+A_{jk}B_{ik})\big\rangle_{(6)}+\{\mathbf{A}\}\langle\delta_{ij}B_{pq}\rangle_{(6)}+\{\mathbf{B}\}\langle\delta_{ij}A_{pq}\rangle_{(6)}\Big]\\&\quad+\frac{2}{35}\big[2\{\mathbf{AB}\}+\{\mathbf{A}\}\{\mathbf{B}\}\big]\delta^{(4)}_{ijpq}\end{aligned}\tag{10}$$

et si $\mathbf{A}=\mathbf{B}$:

$$\langle\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\rangle_{ijpq}:=\langle A_{ij}A_{pq}\rangle_{(3)}-\frac{1}{7}\{\mathbf{A}\}\langle\delta_{ij}A_{pq}\rangle_{(6)}-\frac{2}{7}\langle\delta_{ij}A^2_{pq}\rangle_{(6)}+\frac{2}{35}\big[\{\mathbf{A}^2\}-2\{\mathbf{A}\}^2\big]\delta^{(4)}_{ijpq}$$

avec $\delta^{(4)}_{ijpq}:=\delta_{ij}\delta_{pq}+\delta_{ip}\delta_{jq}+\delta_{iq}\delta_{jp}$, l'indice (3) ou (6) indiquant le nombre de termes dans la sommation. Ainsi, $\forall\mathbf{A},\mathbf{B}$ symétriques, $\langle A_{ij}B_{pq}\rangle_{(6)}:=A_{ij}B_{pq}+A_{ip}B_{jq}+A_{iq}B_{jp}+A_{jp}B_{jq}+A_{jq}B_{ip}+A_{pq}B_{ij}$.

De même, pour tout tenseur **A** symétrique et pour tout vecteur **V**,

$$\langle\mathbf{A}\otimes\mathbf{V}\rangle_{ijk}:=\langle A_{ij}V_k\rangle_{(3)}-\frac{2}{5}V_p\langle\delta_{ij}A_{kp}\rangle_{(3)}-\frac{1}{5}\{\mathbf{A}\}\langle\delta_{ij}V_k\rangle_{(3)}\tag{11}$$

Les décompositions canoniques [13,14] conduisent à la pose du problème de fermeture sur des tenseurs homogènes, $\mathbf{Y}^{(4^*)}$, $\mathbf{M}^{(4^*)}$, $\mathbf{Q}^*$ c'est à dire totalement symétrique à traces partielles toutes nulles (voir [15] pour les relations entre ces tenseurs homogènes et les tenseurs $\mathbf{Y}^{(4)}$, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{Q}$ définis par l'Éq. (4)). Pour $\mathbf{Y}^{(4^*)}$, la théorie de distorsion rapide conduit à :

$$\mathbf{Y}^{(4^*)}=\frac{4}{105}\langle\mathbf{A}^*\otimes\mathbf{A}^*\rangle+\frac{2}{21}\left[\frac{2}{11}\langle\mathbf{A}^{*2}\otimes\mathbf{A}^*\rangle-\frac{1}{5}\big\langle(A^*W-WA^*)\otimes A^*\big\rangle\right]+\mathrm{O}(t^4)\tag{12}$$

et pour la partie correspondante de $\mathbf{M}^*$:

$$\mathbf{M}^{(4^*)}=\frac{1}{3}\mathbf{Y}^{(4^*)}+\frac{2}{567}\left[4\langle W^{(a)2}\otimes A^*\rangle+\frac{11}{5}\big\langle(A^*W^{(a)}-W^{(a)}A^*)\otimes A^*\big\rangle\right]+\mathrm{O}(t^4)\tag{13}$$

Alors que le taux de rotation cumulé intervient au troisième ordre, $\mathbf{Y}^{(4^*)}$ n'est pas indépendant de la vitesse angulaire cumulée, mais au quatrième ordre seulement. Le résultat [14] selon lequel $\mathbf{Y}^{(4^*)}=3\mathbf{M}^{(4^*)}$ en écoulement irrotationnel est confirmé et l'on trouve au quatrième ordre :

$$\mathbf{Y}^{(4^*)}=\frac{4}{105}\left[1-\frac{314}{715}\{A^{*2}\}\right]\langle A^*\otimes A^*\rangle+\frac{4}{231}\langle A^*\otimes A^{*2}\rangle+\frac{188}{15015}\langle A^{*2}\otimes A^{*2}\rangle+\cdots$$

expression qui produit une corrélation rapide pression-déformation en accord avec [5]. Considérons enfin la stropholyse qui mesure la sensibilité des corrélations rapides pression-déformation [16] au taux de rotation de l'écoulement, et donc la non-invariance par réflexion des corrélations de vitesse, en accord avec l'écriture (14) des corrélations linéaires pression-déformation :

$$\overline{q^2}T^{(r)}_{ij}:=\rho^{-1}\overline{p'^{(r)}(v'_{i,j}+v'_{j,i})}=\overline{q^2}\big[2(M_{ipqj}+M_{jqpi})S_{pq}-(Q_{ijk}+Q_{jik})W^{(a)}_k\big]\tag{14}$$

La stropholyse se développe, pour sa partie totalement symétrisée, en accord avec :

$$\mathbf{Q}^* = -\frac{2}{63}\langle A^* \otimes \overline{w}^{(a)}\rangle + \frac{2}{189}\Big[\big\langle (A^* W^{(a)} - W^{(a)} A^*) \otimes \Omega\big\rangle - \frac{5}{2}\big\langle (A^* \widehat{\omega} - \widehat{\omega} A^*) \otimes \overline{w}^{(a)}\big\rangle$$
$$- \frac{10}{3}\langle A^{*2} \otimes \overline{w}^{(a)}\rangle + \frac{8}{3}\langle A^* \otimes A^* \cdot \overline{w}^{(a)}\rangle\Big] + \mathrm{O}(t^4) \tag{15}$$

et s'annule bien évidemment en écoulement irrotationnel. Alors que la vorticité absolue cumulée, $\overline{w}^{(a)}$, est seule à apparaître à l'ordre deux, l'ordre trois fait apparaître simultanément à la fois la vorticité et la vitesse angulaire cumulées. Parmi les corrélations d'ordre supérieur, une seule (à modéliser) intervient dans l'équation pour la stropholyse [15]. Il s'agit de la quantité $Q^{(5)}_{ijkpq} := \varepsilon_{imn} M^{(6)}_{njmkpq}$ qui possède des propriétés analogues à son homologue du troisième ordre. Ses traces partielles satisfont :

$$Q^{(5)}_{iikpq} = 0\,; \quad Q^{(5)}_{ikkpq} = 0\,; \quad Q^{(5)}_{kikpq} = 0\,; \quad Q^{(5)}_{ijkpp} = Q^{(5)}_{ijpkp} = Q^{(5)}_{ijppk} = Q_{ijk}$$

Ce tenseur est aussi générateur des tenseurs du quatrième ordre :

$$M_{mnpq} = \varepsilon_{mij} Q^{(5)}_{injpq}\,; \qquad Y^{(4)}_{mjpq} = \varepsilon_{mni} Q^{(5)}_{injpq}\,;$$
$$X^{(4)}_{mipq} = \varepsilon_{mjn} Q^{(5)}_{injpq} = \delta_{mi}\left(\frac{1}{3}\delta_{pq} + y_{pq}\right) - M_{mipq} - Y^{(4)}_{mipq}$$

si bien que la décomposition canonique suivante de $\mathbf{Q}^{(5)}$ s'écrit :

$$Q^{(5)}_{ijkpq} = Q^{(5)}_{(ijkpq)} + \frac{1}{10}(\varepsilon_{ikn} M_{njpq} + \varepsilon_{ipn} M_{njkq} + \varepsilon_{iqn} M_{njkp}) + \frac{1}{5}(\varepsilon_{jkn} M_{nipq} + \varepsilon_{jpn} M_{nikq} + \varepsilon_{jqn} M_{nikp})$$
$$+ \frac{1}{20}(\varepsilon_{ikn} M_{npjq} + \varepsilon_{ikn} M_{nqjp} + \varepsilon_{ipn} M_{nkjq} + \varepsilon_{ipn} M_{nqjk} + \varepsilon_{iqn} M_{nkjp} + \varepsilon_{iqn} M_{npjk})$$
$$- \frac{3}{20}\varepsilon_{ijn} Y^{(4)}_{nkpq} + \frac{1}{60}(\varepsilon_{ikn} Y^{(4)}_{njpq} + \varepsilon_{ipn} Y^{(4)}_{njkq} + \varepsilon_{iqn} Y^{(4)}_{njkp})$$
$$- \frac{13}{60}(\varepsilon_{kjn} Y^{(4)}_{nipq} + \varepsilon_{pjn} Y^{(4)}_{nikq} + \varepsilon_{qjn} Y^{(4)}_{nikp})$$
$$+ \frac{1}{6}\left[\varepsilon_{kji}\left(\frac{1}{3}\delta_{pq} + y_{pq}\right) + \varepsilon_{pji}\left(\frac{1}{3}\delta_{kq} + y_{kq}\right) + \varepsilon_{qji}\left(\frac{1}{3}\delta_{pk} + y_{pk}\right)\right] \tag{16}$$

où la partie purement symétrique de $\mathbf{Q}^{(5)}$ peut être décomposée en partie inhomogène et partie à traces partielles nulles, $\mathbf{Q}^{(5^*)}$:

$$Q^{(5)}_{(ijkpq)} := \frac{1}{20}\langle Q^{(5)}_{ijkpq}\rangle_{(20)} = \frac{1}{30}\langle \delta_{ij} Q^*_{kpq}\rangle_{(10)} + Q^{(5^*)}_{ijkpq} \tag{17}$$

La même démarche a été appliquée pour les deux derniers tenseurs, $\mathbf{Y}^{(6)}$ et $\mathbf{M}^{(6)}$, définis en (4), dont les décompositions canoniques sont omises pour des raisons de place. Seules les développements de distorsion rapide à l'ordre t^3 de leurs parties homogènes totalement symétriques sont spécifiées dans ce qui suit. On trouve :

$$M^{(6^*)}_{ijklpq} = \frac{1}{5} Y^{(6^*)}_{ijklpq} = -\frac{32}{45045}\left[\frac{2}{33}\{A^{*2}\}\langle A^*_{ij}\delta^{(4)}_{klpq}\rangle_{(15)} + \frac{16}{231}\{A^{*3}\}\langle \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{pq}\rangle_{(15)}\right.$$
$$\left. + \big\langle A^*_{ij}\langle A^*_{kl} A^*_{pq}\rangle_{(3)}\big\rangle_{(5)} - \frac{1}{11}\big\langle \delta_{ij}\langle A^*_{kl} A^{*2}_{pq}\rangle_{(6)}\big\rangle_{(5)}\right] \tag{18}$$

$$Q^{(5^*)}_{ijkpq} = \frac{2}{675}\left[\big\langle \overline{w}^{(a)}_i \langle A^*_{jk} A^*_{pq}\rangle_{(3)}\big\rangle_{(5)} - 2\langle \delta_{ij}\overline{w}^{(a)}_k A^{*2}_{pq}\rangle_{(30)} + 2\{A^{*2}\}\langle \overline{w}^{(a)}_i \delta^{(4)}_{jkpq}\rangle_{(5)}\right.$$
$$\left. - \frac{2}{9}\overline{w}^{(a)}_n \big\langle A^*_{in}\langle \delta_{jk} A^*_{pq}\rangle_{(6)}\big\rangle_{(5)}\right] \tag{19}$$

A l'ordre trois, $\mathbf{M}^{(6^*)}$ et $\mathbf{Y}^{(6^*)}$ ne dépendent que de la déformation cumulée et la forme trouvée est en accord avec [17]. On remarque en particulier que $5\mathbf{M}^{(6^*)} = \mathbf{Y}^{(6^*)}$ identiquement en écoulement irrotationnel. Cette égalité est mise en défaut au quatrième ordre en temps qui met en jeu la vorticité absolue. $\mathbf{Q}^{(5^*)}$ dépend aussi de A et, linéairement, de la seule vorticité absolue.

3. Conclusion

Le principal apport de cette note réside dans l'obtention des développements de distorsion rapide de l'ensemble des grandeurs nécessaires à une modélisation des termes rapides dans le cas d'écoulements homogènes rotationnels. Les développements qui mettent en jeu les déformations et rotations cumulées seront utilisés ultérieurement pour construire des modèles de fermeture compatibles avec la théorie de distorsion rapide aux petits temps. Compte tenu de ce qui précède, ces modèles se présenteront sous une forme nécessairement compatible avec les décompositions canoniques (dont l'Éq. (16)) en partie homogène et inhomogène des tenseurs $\mathbf{Q}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{Y}^{(4)}$ ou de leur homologue d'ordre plus élevé, $\mathbf{Q}^{(5)}$, apparaissant dans l'équation de la stropholyse. Les résultats à la base de la construction de modèles de fermeture sont donc les Éqs. (12), (13), (15) et éventuellement (18), (19). La substitution de (8), (9) et d'éventuellement (15) dans des développements fonctionnels à coefficients indéterminés conduira, par identification aux développements de distorsion rapide (12), (13), (15), (18), (19), à l'obtention des modèles de fermeture cherchés. Cette procédure fera l'objet d'une prochaine Note.

Références

[1] J.C.R. Hunt, D.J. Carruthers, J.C.H. Fung, Rapid distorsion theory as a means of exploring the structure of turbulence, in: L. Sirovich (Ed.), New Perspectives in Turbulence, Springer-Verlag, 1991, pp. 55–103, Chapter 2.

[2] A.A. Townsend, The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge University Press, 1976.

[3] A. Salhi, C. Cambon, An analysis of rotating shear flow using linear theory and DNS and LES results, J. Fluid Mech. 347 (1997) 171–195.

[4] M.J. Lee, U. Piomelli, W.C. Reynolds, Useful formulas in the rapid distorsion theory of homogeneous turbulence, Phys. Fluids 29 (1986) 3471–3474.

[5] M.J. Lee, Distorsion of homogeneous turbulence by axisymmetric strain and dilatation, Phys. Fluids A 1 (1989) 1541–1557.

[6] M.J. Lee, A contribution toward rational modelling of the pressure-strain rate correlation, Phys. Fluids A 2 (1990) 630–633.

[7] W.C. Reynolds, Fundamentals of turbulence for turbulence modelling and simulation, in: Special Course on Modern Theoretical and Experimental Approaches to Turbulence Structure and Modelling, 1987, pp. 1–66, AGARD-R-755.

[8] J. Piquet, Turbulent Flows, Models and Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[9] C. Cambon, J.-P. Benoit, L. Shao, L. Jacquin, Stability analysis and large-eddy simulation of rotating turbulence with organized eddies, J. Fluid Mech. 278 (1994) 175–200.

[10] C.G. Speziale, N. McGholla Lhuiris, Scaling laws for homogeneous turbulent shear flow in a rotating frame, Phys. Fluids A 1 (1989) 99–164.

[11] M.M. Rogers, The structure of a passive scalar field with a uniform mean gradient in rapidly sheared homogeneous flow, Phys. Fluids A 3 (1991) 144–154.

[12] M. Tanaka, S. Yanase, S. Kida, G. Kawahara, Vortical structure in rotating uniformly sheared turbulence, Flow, Turb. & Combust. 60 (1998) 301–331.

[13] S.C. Kassinos, W.C. Reynolds, A structure-based model for the rapid distorsion of homogeneous turbulence. Report TF 61, Thermosciences Division, Department Mech. Engineering, Stanford University, 1994.

[14] S.C. Kassinos, W.C. Reynolds, M.M. Rogers, One-point turbulence structure tensors, J. Fluid Mech. 428 (2001) 213–248.

[15] J. Piquet, L'équation de la stropholyse, C. R. Mécanique 331 (2003) 569–574.

[16] J.L. Lumley, Computational modeling of turbulent flows, Adv. Appl. Mech. 18 (1978) 123–176.

[17] A. Cadiou, J. Piquet, Modélisation du tenseur des corrélations pression-déformation par une équation de transport, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. IIb 21 (1995) 325–330.