



## Diagramme de Laguerre

Houman Borouchaki <sup>a,\*</sup>, Nicolas Flandrin <sup>b</sup>, Chakib Bennis <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Université de technologie de Troyes, GSM-LASMIS, BP 2060, 10010 Troyes cedex, France

<sup>b</sup> Institut français du pétrole, 1 et 4, avenue de Bois-Préau, 92852 Rueil-Malmaison cedex, France

Reçu le 17 novembre 2004 ; accepté après révision le 19 juillet 2005

Disponible sur Internet le 31 août 2005

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

---

### Résumé

Dans cette Note, nous proposons une généralisation d'un algorithme efficace et rapide de construction incrémentale de la triangulation de Delaunay au cas de la triangulation régulière d'un nuage de points dans  $\mathbb{R}^d$  dont le dual est le diagramme de Laguerre. En particulier, la formule du transport des centres des boules circonscrites aux simplexes de Delaunay se généralise naturellement au cas de la triangulation régulière. Des exemples numériques de diagrammes de Laguerre en trois dimensions sont présentés. *Pour citer cet article : H. Borouchaki et al., C. R. Mécanique 333 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**The Laguerre diagram.** This Note presents a generalization of a known fast and robust algorithm of incremental construction of the Delaunay triangulation to the case of the regular triangulation of points in  $\mathbb{R}^d$ . In particular, the transport formula of simplex circumball centers are naturally extended to the case of the regular triangulation. The associated Laguerre diagram can then be obtained by duality from the regular triangulation. Some numerical examples of Laguerre diagrams in three dimensions are given. *To cite this article: H. Borouchaki et al., C. R. Mécanique 333 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Mécanique des solides numérique ; Triangulation de Delaunay ; Triangulation régulière ; Diagramme de Voronoï ; Diagramme de Laguerre ; Diagramme de puissance

*Keywords :* Computational solid mechanics; Delaunay triangulation; Regular triangulation; Voronoï diagram; Laguerre diagram; Power diagram

---

\* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : [houman.borouchaki@utt.fr](mailto:houman.borouchaki@utt.fr) (H. Borouchaki), [nicolas.flandrin@ifp.fr](mailto:nicolas.flandrin@ifp.fr) (N. Flandrin), [chakib.bennis@ifp.fr](mailto:chakib.bennis@ifp.fr) (C. Bennis).

## Abridged English version

The Delaunay triangulation [1] of a set  $S$  of points in  $\mathbb{R}^d$  is such that the open circumballs of its simplices contain no point of  $S$ . This triangulation is the dual of the set of Voronoï polyhedra [2] of  $S$ . The Voronoï polyhedron associated with a point of  $S$  is the set of its closest points in  $\mathbb{R}^d$  with respect to other points of  $S$ . The duality relates the  $k$ -faces of simplices of the triangulation to the  $(d - k)$ -faces of Voronoï polyhedra. Thus, with each simplex of the triangulation is associated a vertex of one of the Voronoï polyhedra, which is the center of the circumball of the simplex. The Voronoï polyhedra of  $S$  constitute a graph whose nodes are the vertices and edges are the edges of Voronoï polyhedra. By duality, this graph represents also the Delaunay triangulation of  $S$ . An extension of this graph consists in associating a weight to each point and modulating the proximity notion by this weight [3,4]. This weighted diagram is called the Laguerre diagram of  $S$ . The Laguerre polyhedron associated with a point of  $S$  is the set of points in  $\mathbb{R}^d$  whose ‘power’ is smallest with respect to this point than the other points of  $S$ . The dual of Laguerre polyhedra is also a triangulation called regular triangulation. The Delaunay and regular triangulations of  $S$  verify the same ‘empty sphere’ property: for each simplex of the triangulation, there is a point (the center) which is closer to the simplex vertices than the other points of  $S$ . The generic algorithm of incremental construction of the Delaunay triangulation (the Delaunay kernel) can also be applied for the regular triangulation.

This Note presents a generalization of a fast incremental algorithm of construction of the Delaunay triangulation [5] to the regular triangulation. The initial algorithm consists of several acceleration steps and in particular, the fast computation of the new simplices centers which is useful for the Delaunay kernel. We show that this computation can naturally be extended to the case of regular triangulation. Some examples are given to illustrate the application of the Laguerre diagrams in 3D.

## 1. Introduction

La triangulation de Delaunay [1] d’un ensemble  $S$  de points de  $\mathbb{R}^d$  est telle que les boules ouvertes circonscrites aux simplexes ne contiennent aucun point de  $S$ . Cette triangulation est le dual de l’ensemble des polyèdres de Voronoï [2] associés à  $S$ . Le polyèdre de Voronoï associé à un point de  $S$  est l’ensemble des points de  $\mathbb{R}^d$  plus proches de ce point que des autres points de  $S$ . La dualité fait correspondre les  $k$ -faces des simplexes de la triangulation aux  $(d - k)$ -faces des polyèdres de Voronoï. Ainsi, à chaque simplexe de la triangulation est associé un sommet d’un des polyèdres de Voronoï, qui est le centre de la sphère circonscrite à ce simplexe. Les polyèdres de Voronoï de  $S$  constituent un graphe dont les nœuds sont les sommets et les arêtes sont les arêtes des polyèdres de Voronoï. Par dualité, ce graphe représente aussi la triangulation de Delaunay de  $S$ . Une généralisation de ce graphe consiste à associer un poids à chaque point et de le prendre en compte dans la notion de proximité [3,4]. On définit ainsi le diagramme de Laguerre de  $S$ . Le polyèdre de Laguerre associé à un point de  $S$  est l’ensemble des points de  $\mathbb{R}^d$  dont la « puissance » est plus petite par rapport à ce point qu’aux autres points de  $S$ . Le dual des polyèdres de Laguerre représente aussi une triangulation appelée triangulation régulière. Les triangulations de Delaunay et régulière de  $S$  vérifient la même propriété de sphères vides : pour chaque simplexe de la triangulation, il existe un point (le centre) plus « proche » des sommets du simplexe que des autres points de  $S$ . L’algorithme de construction incrémentale de la triangulation de Delaunay, le noyau de Delaunay, peut aussi être appliqué pour la construction incrémentale de la triangulation régulière.

Cette Note présente une généralisation d’un algorithme rapide de construction incrémentale de la triangulation de Delaunay [5] au cas de la triangulation régulière. L’algorithme d’origine comprend plusieurs étapes d’accélération, en particulier le calcul rapide des centres des nouveaux simplexes utiles pour le noyau de Delaunay. Nous montrerons que ce calcul s’étend naturellement au cas de la triangulation régulière. Quelques exemples sont donnés pour illustrer les diagrammes de Laguerre en trois dimensions.

## 2. Noyau de Delaunay

La méthode incrémentale de construction de la triangulation de Delaunay consiste à insérer un point de  $S$  dans une triangulation de Delaunay de points déjà insérés. Elle repose sur le lemme général suivant [6–8] :

**Lemme 2.1.** *La réunion des simplexes dont la boule ouverte circonscrite contient un point inséré interne à la triangulation est un polyèdre étoilé par rapport à ce point ; les simplexes définis en reliant ce point aux faces frontalières du polyèdre constituent alors la nouvelle triangulation de celui-ci ; la triangulation du complémentaire de ce polyèdre reste inchangée.*

La mise à jour incrémentale de la triangulation de Delaunay est donc divisée en deux parties : recherche et destruction des simplexes dont la boule ouverte circonscrite est non vide et création des nouveaux simplexes prenant en compte le point inséré. Appelons cavité associée à un point à insérer, le polyèdre formé par les simplexes à « sphères non vides » et « boule » la retriangulation de la cavité prenant en compte le point une fois inséré. La mise à jour de la triangulation revient alors à déterminer la cavité et à construire la boule. Cet algorithme déjà ancien est malgré tout le plus efficace. Nous en rappelons une version [5], utilisant la notion de transport de structures, qui permet une construction inductive de la boule à partir de la cavité. En effet, si  $s = [f, X]$  est un simplexe de la boule où  $f$  est une face externe de la cavité et  $X$  le point à insérer, alors il existe un simplexe  $t$  de la cavité qui est défini par  $t = [f, Y]$  et on peut définir  $s$  à partir de  $t$  en remplaçant  $Y$  par  $X$ . Nous montrons alors que l'on peut transporter la structure de  $t$  pour définir la structure de  $s$  en utilisant des opérations élémentaires bien adaptées au critère de Delaunay. Nous évitons ainsi la résolution de systèmes ou l'évaluation de signes de déterminants traduisant l'appartenance d'un point à une sphère [9].

Pour déterminer la cavité  $\mathcal{C}$  associée au point  $P$  à insérer, il suffit de rechercher parmi tous les simplexes ceux dont la boule ouverte circonscrite est non vide ; mais cette recherche est coûteuse. Par définition  $\mathcal{C}$  est une partie connexe de  $\mathbb{R}^d$  ; ainsi, ayant l'un de ses éléments, on peut la déterminer par une recherche par adjacence (ou par profondeur dans le graphe). Un simplexe  $K$  est à sphère non vide si le critère de Delaunay correspondant n'est pas valide : la quantité  $C_d(K, P) = d^2(O^K, P) - d^2(O^K, P^K)$  est négative, où  $d(\cdot, \cdot)$  représente la distance euclidienne,  $O^K$  est le centre de la boule ouverte circonscrite à  $K$  et  $P^K$  est un sommet de  $K$ . Comme les coordonnées de  $O^K$  sont en général réelles, le critère est basé sur un calcul inexact (comprenant des erreurs numériques d'arrondi) et peut conduire à des résultats non conformes. Pour pallier ce problème, on fera une hypothèse que l'on validera par la suite.

**Hypothèse.** Si  $f$  est une face quelconque d'un simplexe  $K$ , alors l'évaluation de  $C_v(f, P) = H_f(P)$  (puissance de  $P$  par rapport à l'hyperplan support de  $f$ ) est basée sur un calcul exact où l'on peut répondre de manière robuste à la requête  $C_v(f, P) > 0$ .

Cette hypothèse nous permet la construction de simplexes à volumes positifs. En effet, c'est une condition nécessaire pour garantir une triangulation correcte. On montre par la suite qu'elle est suffisante. Nous définissons la base  $\mathcal{B}$  comme étant l'ensemble des simplexes qui contiennent  $P$ . Par définition,  $\mathcal{B}$  est une partie connexe de  $\mathbb{R}^d$ , étoilée par rapport à  $P$ . La base  $\mathcal{B}$  est incluse dans la cavité  $\mathcal{C}$ . Désignons son complémentaire dans  $\mathcal{C}$  par  $\mathcal{D}$ . Par la suite, nous proposons un algorithme robuste pour l'évaluation de la cavité (qui n'est qu'une version légèrement modifiée de celui de George dans [10]), garantissant son étoilement par rapport à  $P$  ; il est divisé en deux parties : – initialisation, – correction. A partir d'un élément de  $\mathcal{B}$ , par une recherche par adjacence on peut déterminer  $\mathcal{B}$  ; à ce niveau, on utilise des critères de visibilité, donc basés sur un calcul exact (un simplexe  $K$  contient  $P$  si toutes ses faces sont visibles du point  $P$  ou  $\forall f \in K, C_v(f, P) \geq 0$ ). La base  $\mathcal{B}$  vérifie ainsi l'étoilement par rapport à  $P$  et ne contient, dans son intérieur, aucun point autre que  $P$ . De même, dans une recherche par adjacence, à partir des éléments de  $\mathcal{B}$ , on détermine  $\mathcal{D}$  ; ainsi on obtient  $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup \mathcal{D}$ . À ce niveau, on utilise le critère de Delaunay, donc un calcul inexact. On en déduit que la cavité peut éventuellement ne pas être étoilée par rapport à  $P$  et contenir

des points dans son intérieur. Pour cela, on apporte une correction à la cavité. La correction consiste à enlever des éléments de  $\mathcal{D}$  pour retrouver les propriétés voulues de  $\mathcal{C}$ . On obtient l'algorithme suivant :

- S'il existe un point interne à  $\mathcal{C}$ , repérer l'un des simplexes de  $\mathcal{D}$  le possédant comme sommet et retirer ce simplex de  $\mathcal{D}$ .
- S'il existe une face frontalière de  $\mathcal{C}$  non visible de  $P$ , repérer le simplex de  $\mathcal{D}$  qui la contient et retirer ce dernier de  $\mathcal{D}$ .
- Itérer si le nombre d'éléments de  $\mathcal{D}$  est modifié.

On constate que dans le pire des cas, la cavité  $\mathcal{C}$  s'identifie à la base  $\mathcal{B}$  si  $\mathcal{D}$  est réduit à l'ensemble vide ; on en déduit la convergence de l'algorithme. Les tests de visibilité assurent la connexité de la cavité ; comme  $\mathcal{B}$  est toujours incluse dans la cavité, cette dernière contient le point  $P$ . Ainsi, la méthode proposée garantit une construction correcte de la triangulation de la cavité prenant en compte  $P$ , à savoir : chaque simplex de cette triangulation est défini par  $P$  et une face frontalière de la cavité. Dans cet algorithme, on a supposé que l'un des éléments de la base est connu. Pour l'obtention de cet élément, il suffit de considérer un simplex quelconque  $K_0$  de la triangulation (en particulier le dernier construit) et de parcourir la triangulation, par adjacence à partir de  $K_0$ , pour aboutir à un élément de la base. Deux éléments consécutifs dans ce parcours ont en commun une face dont l'hyperplan support sépare le premier élément du point  $P$ . Pour éviter les cycles dans ce parcours, on propose, quand un choix est possible, de considérer de manière aléatoire l'une des faces du simplex courant, dont l'hyperplan support sépare le simplex du point  $P$ . Comme il existe toujours un tel parcours, l'algorithme converge. L'efficacité de cette méthode repose sur le choix du simplex initial du parcours,  $K_0$ . En particulier en choisissant  $K_0$  assez proche de  $P$ , on réduit la longueur du chemin reliant  $K_0$  à  $P$ , donc le nombre de simplexes dans le parcours. Il suffit alors que l'un des sommets de  $K_0$  soit assez voisin de  $P$ . Ainsi, pour chaque point, il faut définir ses points voisins. Pour cela, on pourra utiliser une grille de voisinage.

Pour justifier l'hypothèse, on propose un calcul exact du critère de visibilité qui n'est efficace qu'en petites dimensions, en particulier si  $d = 2$  ou  $3$ . En supposant que toutes les coordonnées sont des entiers compris entre  $0$  et une valeur  $N$  donnée, on peut calculer  $H_f(P) = \text{Volume}([f, P])/d!$  de manière exacte si le calcul de la quantité  $N^d$  est exact. En considérant un majorant  $2^m$  pour cette quantité, on obtient  $N < 2^{m/d}$ . Dans la pratique  $m$  est de l'ordre de  $51$  (type réel double précision) ; ainsi le procédé n'est plus efficace pour  $d > 4$ . La méthode proposée n'est pas optimale, mais sa mise en œuvre s'avère assez simple.

Chaque simplex  $R$  de la boule est défini par le point  $P$  et une face frontalière  $f$  de la cavité. La face  $f$  appartient à un simplex  $K$  de la cavité. Soient  $\mathbf{n}_f$  le vecteur unitaire normal à l'hyperplan support de  $f$  orienté vers  $P^K$  ; on a :  $K = [f, P^K]$  et  $R = [f, P]$ , où les crochets désignent l'enveloppe convexe. Par définition, le centre  $O^R$  de la boule circonscrite à  $R$  appartient à la droite de vecteur directeur  $\mathbf{n}_f$  passant par  $O^K$ . Il existe donc un réel  $t$  vérifiant  $O^R = O^K + t\mathbf{n}_f$ . Soit  $P^f$  l'un des sommets de  $f$ . Si  $M$  est le milieu du segment  $[P^f, P]$ , alors  $O^R$  appartient à l'hyperplan de vecteur normal  $\overrightarrow{P^f P}$  passant par  $M$ , ou  $\overrightarrow{P^f P} \cdot \overrightarrow{MO^R} = 0$ . On peut déterminer  $t$  à partir de ces équations ; en effet,  $MO^R = MO^K + t\mathbf{n}_f$  et  $\overrightarrow{P^f P} \cdot (\overrightarrow{MO^K} + t\mathbf{n}_f) = 0$  ; on a  $\overrightarrow{P^f P} = \overrightarrow{O^K P} - \overrightarrow{O^K P^f}$ ,  $\overrightarrow{O^K M} = (\overrightarrow{O^K P} + \overrightarrow{O^K P^f})/2$  et  $H_f(P) = \overrightarrow{P^f P} \cdot \mathbf{n}_f$ , où  $H_f(P)$  désigne la puissance du point  $P$  par rapport à l'hyperplan support de  $f$ . On en déduit :

$$t = \frac{d^2(O^K, P) - d^2(O^K, P^f)}{2H_f(P)}$$

Nous remarquons que la quantité  $C_d(K, P) = d^2(O^K, P) - d^2(O^K, P^f)$  est associée au critère de Delaunay ; en particulier si  $C_d(K, P) < 0$ , la boule ouverte circonscrite à  $K$  contient  $P$  ; de même, la quantité  $C_v(f, P) = H_f(P)$  est associée à un critère de visibilité ; en particulier si  $C_v(f, P) > 0$ , la face  $f$  est visible du point  $P$ .

### 3. Extension à la triangulation régulière

À chaque point de  $S$  est associé un poids représentant un scalaire positif. La triangulation régulière de  $S$  peut être vue comme la triangulation de Delaunay de  $S$  dans laquelle la quantité  $d^2(Q, \cdot)$  représentant la distance au carré d'un point  $Q$  de  $\mathbb{R}^d$  à un point de  $S$  est remplacée par la quantité  $\Pi(Q, \cdot)$  représentant la puissance de  $Q$  par rapport à un point (pondéré) de  $S$ . Plus précisément la puissance d'un point  $Q$  par rapport à un point pondéré  $P$  de poids  $\omega_P$  est la quantité  $d^2(Q, P) - \omega_P^2$  qui représente la longueur du segment issu de  $Q$  tangent à la boule de rayon  $\omega_P$  centrée en  $P$  si  $Q$  n'appartient pas à cette boule. Les deux quantités  $d^2(Q, \cdot)$  et  $\Pi(Q, \cdot)$  permettent de quantifier la « proximité » d'un point  $Q$  par rapport à un point de  $S$ . Comme la quantité  $\Pi(Q, \cdot)$  peut être négative, l'existence de la triangulation régulière de  $S$  n'est pas garantie. On peut montrer que, si pour tout couple  $(P_1, P_2)$  de points pondérés de  $S$  la relation  $|\omega_{P_1}^2 - \omega_{P_2}^2| \leq d^2(P_1, P_2)$  est satisfaite, alors la triangulation régulière de  $S$  existe. La méthode incrémentale de construction de la triangulation régulière repose aussi sur le noyau de Delaunay (i.e. détermination de la cavité et construction de la boule) en prenant en compte la nouvelle notion de proximité. Dans ce cas, la cavité est définie par l'ensemble des simplexes  $K$  vérifiant  $C_r(K, P) = \Pi(O^K, P) - \Pi(O^K, P^K) < 0$ . On va montrer que la formule du transport du centre peut être appliquée en remplaçant  $d^2(\cdot, \cdot)$  par  $\Pi(\cdot, \cdot)$ .

Soient  $R$  un simplexe de la boule défini par le point  $P$  (à insérer) et une face frontalière  $f$  de la cavité, et  $K$  le simplexe de la cavité s'appuyant sur  $f$ . Désignons par  $\mathbf{n}_f$  le vecteur unitaire normal à l'hyperplan support de  $f$  orienté vers  $P^K$ . Le point  $O^R$  dont les puissances par rapport aux sommets de  $R$  sont égales, appartient à la droite de vecteur directeur  $\mathbf{n}_f$  passant par  $O^K$ , et il existe donc un réel  $t$  vérifiant la relation  $O^R = O^K + t\mathbf{n}_f$ . Soient  $P^f$  l'un des sommets de  $f$  et  $M$  le point du segment  $[P^f, P]$  vérifiant la relation  $\Pi(M, P^f) = \Pi(M, P)$ . On peut montrer que  $M$  s'écrit comme :

$$M = \frac{1}{2} \left( P^f + P + \frac{\omega_{P^f}^2 - \omega_P^2}{\|P^f P\|^2} \overrightarrow{P^f P} \right)$$

Comme  $O^R$  appartient à l'hyperplan de vecteur normal  $\overrightarrow{P^f P}$  passant par  $M$ , alors on a  $\overrightarrow{P^f P} \cdot \overrightarrow{MO^R} = 0$ . Cette relation permet d'établir l'expression de  $t$  qui est donnée par :

$$t = \frac{d^2(O^K, P) - d^2(O^K, P^f) - \omega_P^2 + \omega_{P^f}^2}{2H_f(P)} = \frac{\Pi(O^K, P) - \Pi(O^K, P^f)}{2H_f(P)}$$

Ici, la quantité  $C_r(K, P) = \Pi(O^K, P) - \Pi(O^K, P^f)$  est associée au critère de la triangulation régulière; en particulier si  $C_r(K, P) < 0$ , la cavité associée à  $P$  contient  $K$ .

### 4. Exemples

Le premier exemple concerne le nuage de points  $(i, j, k)$  à coordonnées entières défini par les relations  $-10 \leq i, j, k \leq 10$  et  $i^2 + j^2 + 4k^2 < 100$ . La Fig. 1 à gauche montre le diagramme de Voronoï associé. En affectant un poids plus important aux points se trouvant sur les plans diagonaux et en s'assurant que la triangulation régulière correspondante existe, on obtient le diagramme de Laguerre illustré par la Fig. 1 à droite.

Le deuxième exemple concerne une application intéressante des polyèdres de Laguerre développée à l'Institut Français du Pétrole pour la simulation de réservoirs pétroliers. Il s'agit d'insérer un maillage radial autour d'un puits dévié dans un maillage structuré d'un réservoir, en les connectant entre eux à l'aide d'un maillage polyédrique de transition fondé sur les diagrammes de Laguerre. Le maillage hybride ainsi obtenu suit localement les directions des écoulements autour du puits (cf. Fig. 2). A titre indicatif, le maillage de transition comprend 1496 cellules polyédriques et est réalisé en moins d'une seconde sur un Opteron AMD 146 (2 GHz). Le maillage structuré de réservoir n'étant généralement pas uniforme, l'emploi du diagramme de Laguerre permet l'obtention de la conformité globale du maillage, ce qui ne peut être assuré par les diagrammes de Voronoï [11].

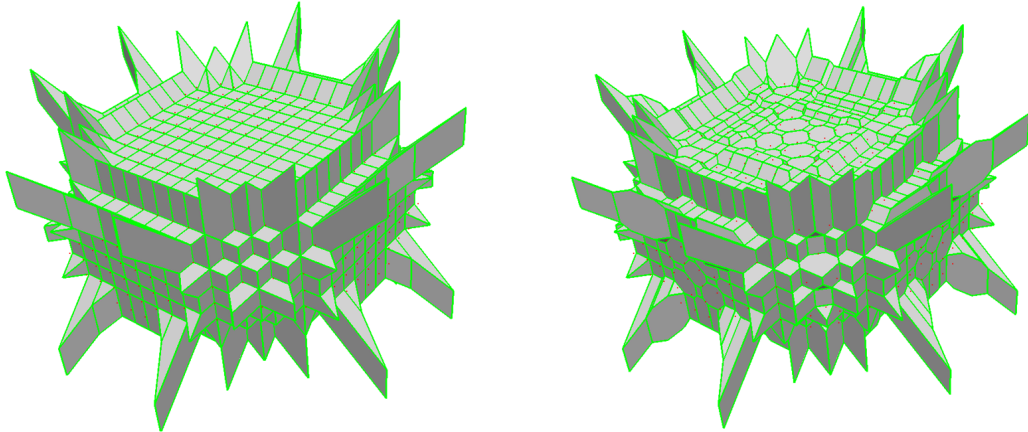


Fig. 1. Diagrammes de Voronoï et de Laguerre.

Fig. 1. Voronoï and Laguerre diagrams.

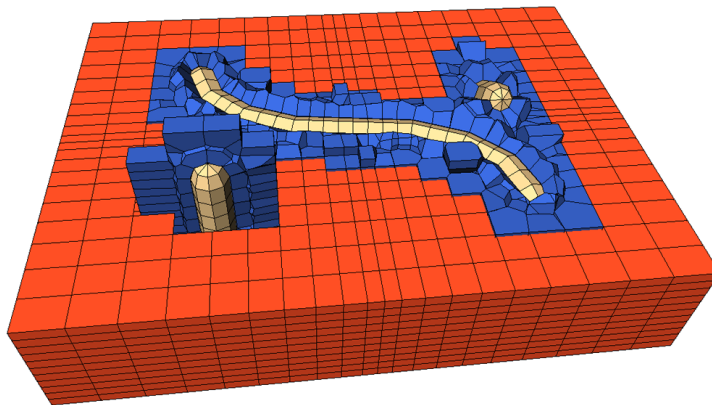


Fig. 2. Maillage hybride.

Fig. 2. Hybrid mesh.

## Références

- [1] B. Delaunay, Sur la sphère vide, *Izv. Akad. Nauk SSSR Otdel. Mat. Estestv. Nauk* 7 (1934) 793–800.
- [2] G. Voronoï, Nouvelles application des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire : Recherches sur les paralléloèdres primitifs, *J. Angew. Math.* 134 (1908) 167–171.
- [3] F. Aurenhammer, Power diagrams: properties, algorithms and applications, *SIAM J. Comput.* 16 (1987) 78–96.
- [4] J.-D. Boissonnat, M. Yvinec, *Géométrie Algorithmique*, Ediscience International, 1995.
- [5] H. Borouchaki, P.L. George, S.H. Lo, Optimal Delaunay point insertion, *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 39 (1996) 3407–3437.
- [6] A. Bowyer, Computing Dirichlet tessellations, *Comput. J.* 24 (1981) 162–166.
- [7] D.F. Watson, Computing the  $n$ -dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes, *Comput. J.* 24 (1981) 167–172.
- [8] F. Hermeline, Triangulation automatique d'un polyèdre en dimension  $N$ , *RAIRO Analyse Num.* 16 (3) (1982) 211–242.
- [9] F. Avnaim, J.D. Boissonnat, O. Devillers, F.P. Preparata, M. Yvinec, Evaluating signs of determinants using single-precision arithmetic, Rapport de recherche INRIA, no 2306, 1994.
- [10] P.L. George, F. Hermeline, Delaunay's mesh of a convex polyhedron in dimension  $d$ . Application for arbitrary polyhedra, *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 33 (1992) 975–995.
- [11] S. Balaven, C. Bennis, J.D. Boissonnat, M. Yvinec, Conforming orthogonal meshes, in: 11th International Meshing Roundtable, Ithaca, NY, USA, September 15–18, 2002, pp. 219–230.