



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 332 (2004) 223–229



Dispersion de Taylor généralisée à un fluide à propriétés physiques variables

Christophe Felder, Constantin Oltean, Mikhail Panfilov, Michel Buès

*Laboratoire environnement, géomécanique et ouvrages – ENSG – INPL, rue du Doyen Marcel Roubault,
BP 40, 54501 Vandoeuvre-lès-Nancy, France*

Reçu le 30 septembre 2003 ; accepté après révision le 7 janvier 2004

Présenté par Charles-Michel Marle

Résumé

Cette étude porte sur la dispersion engendrée par un soluté non-réactif, injecté verticalement dans une cellule Hele–Shaw initialement saturée par un fluide au repos. L'application d'une méthode de développement asymptotique a permis l'extension du modèle classique de Taylor à la situation où, dans la zone de mélange, la masse volumique, la viscosité dynamique ainsi que le coefficient de diffusion moléculaire varient en fonction de la concentration. L'évolution des variables moyennées sur l'ouverture de la cellule est alors décrite par une équation de convection–dispersion dans laquelle le nouveau tenseur de dispersion dépend de la concentration. *Pour citer cet article : C. Felder et al., C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Generalized Taylor dispersion for heterogeneous fluid. The investigation of non-reactive miscible solute dispersion in a vertical Hele–Shaw cell is considered. An asymptotic method is used to extend Taylor model to the case of the fluid density, the dynamic viscosity and the molecular diffusion coefficient are solute concentration-dependent. It is demonstrated that the averaged variables over the gap are governed by a convection–dispersion equation in which the dispersion tensor is concentration-dependent. *To cite this article : C. Felder et al., C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Dispersion ; Homogénéisation ; Méthode asymptotique ; Cellule de Hele–Shaw ; Fluides à propriétés physiques variables

Keywords : Fluid mechanics; Dispersion; Homogenization; Asymptotic method; Hele–Shaw cell; Heterogeneous fluids

Abridged English version

We consider the displacement of a non-reactive miscible solute into a Hele–Shaw cell. Let us note by b its opening and H its length, such as, if $\varepsilon = b/H$, then $\varepsilon \ll 1$. A double-scale expansion method [4] can then be

Adresse e-mail : michel.bues@ensg.inpl-nancy.fr (M. Buès).

used in order to substitute the system of dimensionless equations (1) to (4), characterizing the micro-scale solute displacement, for another one which describes, at the macro-scale, an equivalent phenomenon. In other words, what are, to the macroscopic scale, the global velocity and the dispersion tensor form which characterize the convection–dispersion phenomenon when: (i) density, dynamic viscosity and molecular diffusion vary versus solute concentration; and (ii) both Péclet and Reynolds numbers are of order $1/\varepsilon$?

The response of this question is obtained by using a classical asymptotic development to order ε^2 . Eq. (9) is introduced in the basic equations (2) and (5)–(8). The two first equations, i.e., (5) and (6), correspond to homogeneous equations obtained by an averaging procedure applied to Eqs. (1) and (3). The last two equations, i.e., (7) and (8), are obtained by the difference between (5)–(1) and (6)–(3) and represent the deviations from the mean values. By identifying the terms of the same power in ε , a succession of problems to be solved is obtained having as unknowns the terms of the asymptotic developments. The most important results are presented in Section 3. Thus, the transient, advection and diffusion terms of the convection–dispersion equation (26) are obtained by summing, term by term, Eqs. (21), (24) and (25) multiplied respectively by 1, ε and ε^2 . The global velocity is given by a relationship equivalent to Darcy's law (30) while the terms of the hydrodynamic dispersion tensor are given by the relation (33). It is easy to see that the components of the diffusion tensor and those of the hydrodynamic dispersion tensor present the same magnitude order equal to ε . Moreover, the global dispersion tensor (34), that depends on the solute concentration distribution, can be considered as an extension of the classical Taylor dispersion [1,2].

1. Introduction

Lors du transport d'un soluté non-réactif entre deux plaques planes distantes de b avec un profil des vitesses du type Poiseuille, Aris [1], en généralisant les travaux de Taylor [2], montre que l'évolution de la concentration moyennée sur l'ouverture b est décrite par une équation de convection-diffusion avec un coefficient de diffusion effectif. Bien que cette approche ait été établie pour un écoulement unidimensionnel d'un fluide homogène, elle est généralement adoptée pour les études portant sur des écoulements bidimensionnelles et transitoires de fluides hétérogènes où les hypothèses de Taylor ne sont pas forcément vérifiées. Nous nous proposons d'analyser théoriquement le phénomène de convection–dispersion dans le cas d'un contraste de masse volumique et de viscosité dynamique et d'une diffusion moléculaire fonction de la concentration en soluté. Ce modèle devrait compléter les travaux antérieurs [3] et valider, en terme de transport, l'analogie entre la dispersion en milieu poreux et la dispersion en cellule de Hele–Shaw.

2. Formulation du problème

Considérons une cellule Hele–Shaw constituée de deux plaques planes parallèles de dimensions identiques $L \times H$. Notons par b l'espace entre les deux plaques, initialement saturé par un fluide au repos. A l'aide d'une aiguille de diamètre $\phi < b$, injectons verticalement à vitesse constante V_{inj} un soluté de fraction massique C_{inj} . Le problème considéré consiste alors à déterminer la forme du tenseur de dispersion dans la zone de mélange formée par le déplacement induit, à l'intérieur de laquelle la masse volumique, la viscosité dynamique ainsi que la diffusion moléculaire varient en fonction de la fraction massique du soluté.

L'existence de deux échelles de longueurs séparées – l'une, microscopique ou locale, repérée par x_3 et l'autre macroscopique, repérée par x_1 et x_2 , où x_i ($i = 1, \dots, 3$) sont les coordonnées d'un système orthonormé orientés suivant les directions : verticale descendante ($i = 1$), horizontale ($i = 2$) et ouverture du canal ($i = 3$) –, nous a conduit à rechercher la solution à l'aide d'une méthode asymptotique [4,5]. Cette méthodologie a été appliquée au système d'équations (Navier–Stokes, continuité, bilan de soluté, conditions aux limites et condition de symétrie

par rapport à $b/2$) décrivant le transport d'un soluté à travers le chenal d'écoulement. Ecrit sous la forme adimensionnelle, il vient :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_k)}{\partial \bar{x}_k} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_3)}{\partial \bar{x}_3} = 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon^2 \bar{\rho} \operatorname{Re} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{t}} + \varepsilon^2 \bar{\rho} \operatorname{Re} \left(\bar{V}_k \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}_k} + \frac{1}{\varepsilon} \bar{V}_3 \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}_3} \right) + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_k} \delta_{ik} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_3} \delta_{i3} = \varepsilon^2 \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_i}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_k} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_i}{\partial \bar{x}_3^2} \right) + G \bar{\Delta} \rho \quad (2)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{C}_m)}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\bar{V}_k \bar{\rho} \bar{C}_m)}{\partial \bar{x}_k} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (\bar{V}_3 \bar{\rho} \bar{C}_m)}{\partial \bar{x}_3} = \frac{1}{\operatorname{Pe}} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} \left(\bar{D}_m \bar{\rho} \frac{\partial \bar{C}_m}{\partial \bar{x}_k} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left(\bar{D}_m \bar{\rho} \frac{\partial \bar{C}_m}{\partial \bar{x}_3} \right) \right] \quad (3)$$

$$\bar{V}_i|_{\bar{x}_3=0} = \bar{V}_i|_{\bar{x}_3=1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{C}_m}{\partial \bar{x}_3} \Big|_{\bar{x}_3=0} = \frac{\partial \bar{C}_m}{\partial \bar{x}_3} \Big|_{\bar{x}_3=1} = \frac{\partial \bar{C}_m}{\partial \bar{x}_3} \Big|_{\bar{x}_3=0.5} = 0 \quad (4)$$

avec :

$$\bar{x}_k = \frac{x_k}{H} \quad (k = 1, 2), \quad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{b}, \quad \bar{P} = \frac{b^2}{\mu_a V_{\text{inj}} H} (P - \rho_a g x_1), \quad \bar{t} = \frac{V^*}{H} t, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_a}, \quad \bar{V}_i = \frac{V_i}{V^*}$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_a}, \quad \bar{C}_m = \frac{C_m}{C_{\text{inj}}}, \quad \bar{\Delta} \rho = \frac{\rho - \rho_a}{\rho_{\text{inj}} - \rho_a}, \quad \bar{D}_m = \frac{D_m}{D_{m\infty}}$$

et P [$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$] la pression, g [LT^{-2}] l'accélération de la pesanteur, t [T] le temps, V^* [LT^{-1}] la vitesse caractéristique de l'écoulement (e.g., $V^* = V_{\text{inj}}$), V_i [LT^{-1}] les composantes du vecteur vitesse, C_m [-] la concentration massique, D_m [L^2T^{-1}] le coefficient de diffusion moléculaire, $D_{m\infty}$ [L^2T^{-1}] le coefficient de diffusion moléculaire à dilution infinie, ρ [ML^{-3}], μ [$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$], ρ_a , μ_a , ρ_{inj} et μ_{inj} les masses volumiques et les viscosités dynamiques à l'intérieur de la zone de mélange, du fluide ambiant ('a') et du fluide injecté ('inj'). $\operatorname{Pe} = V^* H / D_{m\infty}$ représente le nombre de Péclet, $\operatorname{Re} = \rho_a V^* H / \mu_a$ le nombre de Reynolds, $G = V_g / V^*$ avec $V_g = (\rho_{\text{inj}} - \rho_a) b^2 g / \mu_a$ un nombre caractérisant l'importance relative des forces de pesanteur par rapport aux forces visqueuses et δ_{ik} le symbole de Kronecker ($k = 1, 2$). Afin de simplifier l'écriture, l'élément attaché à toute variable adimensionnelle, i.e., « $\bar{\quad}$ », sera omis dans les paragraphes suivants.

3. Méthodologie

Les équations homogénéisées sont obtenues en moyennant les Éqs. (1) et (3) selon l'épaisseur de la cellule. En utilisant les conditions imposées par l'Éq. (4) on obtient :

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho V_k \rangle}{\partial x_k} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \langle \rho C_m \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho V_k C_m \rangle}{\partial x_k} = \frac{1}{\operatorname{Pe}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle D_m \rho \frac{\partial (C_m)}{\partial x_k} \right\rangle \quad (6)$$

où on note $\langle \bullet \rangle = \int_0^1 \bullet dx_3$. En soustrayant l'Éq. (5) à (1) et (6) à (3), les oscillations induites par homogénéisation s'expriment alors :

$$\frac{\partial (\rho - \langle \rho \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_k - \langle \rho V_k \rangle)}{\partial x_k} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (\rho V_3)}{\partial x_3} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial (\rho C_m - \langle \rho C_m \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial (V_k \rho C_m - \langle V_k \rho C_m \rangle)}{\partial x_k} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (V_3 \rho C_m)}{\partial x_3}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Pe}} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(D_m \rho \frac{\partial C_m}{\partial x_k} - \left\langle D_m \rho \frac{\partial C_m}{\partial x_k} \right\rangle \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(D_m \rho \frac{\partial C_m}{\partial x_3} \right) \right] \quad (8)$$

Postulons ensuite l'existence d'un développement asymptotique pour toute fonction f définie dans le domaine d'étude, i.e. :

$$\forall f, \quad f(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = f_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon f_1(\mathbf{x}, t) + O(\varepsilon^2) \quad (9)$$

avec $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ le vecteur position et f_n les quantités perturbées à l'ordre n . En outre, si la fonction f dépend de la fraction massique (e.g., ρ , μ et D_m), alors un développement de type Taylor peut être utilisé. Dans ces conditions :

$$f_0 = f(C_{m0}) \quad \text{et} \quad f_1 = C_{m1} \left. \frac{df}{dC_m} \right|_{C_m=C_{m0}} \quad (10)$$

Considérons également que le déplacement du soluté à travers l'ouverture de la cellule satisfasse les conditions suivantes : Pe et Re sont du même ordre et soit $1/\varepsilon$ cet ordre. Introduisons le développement (9) dans le système d'Éqs. (2) et (5)–(8). En identifiant les termes de même puissance en ε , on obtient une succession de problèmes à résoudre dont les inconnues sont les termes des développements asymptotiques. Dans le paragraphe suivant, uniquement les développements intervenant dans la résolution du système de base seront détaillés.

4. Développement asymptotique

- *Approximation à l'ordre $1/\varepsilon$*

A cet ordre, les Éqs. (2), (7) et (8) peuvent être mises sous la forme :

$$\frac{\partial P_0}{\partial x_3} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial(\rho_0 V_{03})}{\partial x_3} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial(V_{03}\rho_0 C_{m0})}{\partial x_3} = \frac{1}{\varepsilon Pe} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(D_{m0}\rho_0 \frac{\partial C_{m0}}{\partial x_3} \right) \quad (13)$$

L'Éq. (11) montre que les variations de pression se font essentiellement à l'échelle macroscopique. Autrement dit, la pression P_0 ne dépend que de x_1 et x_2 :

$$P_0 = P_0(\mathbf{y}, t) \quad (14)$$

où $\mathbf{y}(x_1, x_2)$ représente le vecteur position. En outre, l'Éq. (12) couplée aux conditions d'adhérence aux parois (Éq. (4)), entraîne :

$$V_{03}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (15)$$

ce qui permet de simplifier l'Éq. (13) et de l'écrire comme :

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(D_{m0}\rho_0 \frac{\partial C_{m0}}{\partial x_3} \right) = 0 \quad (16)$$

En multipliant cette dernière relation par C_{m0} , en appliquant l'opérateur $\langle \bullet \rangle$ et en utilisant les conditions aux limites, on obtient :

$$C_{m0} = C_{m0}(\mathbf{y}, t) \quad (17)$$

ce qui montre que les variations de la fraction massique C_{m0} se font essentiellement à l'échelle macroscopique.

• *Approximation à l'ordre 1*

La condition $Re \sim 1/\varepsilon$, permettant de négliger dans l'Éq. (2) le terme transitoire ainsi que les termes inertiels aussi bien à l'échelle macroscopique que microscopique (Éq. (15)), conduit à :

$$\frac{\partial P_0}{\partial x_k} = \mu_0 \frac{\partial^2 V_{0k}}{\partial x_3^2} + G \Delta \rho_0 \quad \text{et} \quad P_1 = P_1(\mathbf{y}, t) \quad (20)$$

Tout comme P_0 , le champ de pression P_1 ne dépend que des variables macroscopiques. Si $G \sim \varepsilon$ ou $G \sim \varepsilon^2$ la variation de la masse volumique dans l'Éq. (20) peut être négligée. Par contre, si $G \sim 1/\varepsilon$ ou $G \sim 1/\varepsilon^2$, la vitesse caractéristique doit être redimensionnée à l'ordre de V_g (car $V_g \gg V^*$).

De même, l'utilisation des Éqs. (10), (15) et (17) permet de simplifier et de réécrire les développements (6), (7) et (8) sous la forme :

$$\frac{\partial(\rho_0 C_{m0})}{\partial t} + \frac{\partial(\langle V_{0k} \rangle \rho_0 C_{m0})}{\partial x_k} = 0 \quad (21)$$

$$\rho_0 \frac{\partial V_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial[\rho_0(V_{0k} - \langle V_{0k} \rangle)]}{\partial x_k} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial[\rho_0 C_{m0}(V_{0k} - \langle V_{0k} \rangle)]}{\partial x_k} + C_{m0} \rho_0 \frac{\partial V_{13}}{\partial x_3} = \frac{1}{\varepsilon Pe} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(D_{m0} \rho_0 \frac{\partial C_{m1}}{\partial x_3} \right) \quad (23)$$

• *Approximation à l'ordre ε*

L'Éq. (6) donne, quant à elle :

$$\frac{\partial[C_{m0}\langle\rho_1\rangle + \rho_0\langle C_{m1}\rangle]}{\partial t} + \frac{\partial[\rho_0\langle V_{0k}C_{m1}\rangle + C_{m0}\langle V_{0k}\rho_1\rangle + \rho_0 C_{m0}\langle V_{1k}\rangle]}{\partial x_k} = \frac{1}{\varepsilon Pe} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(D_{m0} \rho_0 \frac{\partial C_{m0}}{\partial x_k} \right) \quad (24)$$

• *Approximation à l'ordre ε^2*

Le terme diffusif de l'Éq. (6) peut s'exprimer comme :

$$\dots = \frac{1}{\varepsilon Pe} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\langle D_{m1} \rangle \rho_0 \frac{\partial C_{m0}}{\partial x_k} + D_{m0} \langle \rho_1 \rangle \frac{\partial C_{m0}}{\partial x_k} + D_{m0} \rho_0 \frac{\partial \langle C_{m1} \rangle}{\partial x_k} \right) \quad (25)$$

5. Équation de transport homogénéisée

Les termes de l'équation de transport homogénéisée sont maintenant obtenus en sommant, membre à membre, les résultats des produits par 1 (resp. ε et ε^2) des Éqs. (21) (resp. (24) et (25)) :

$$\frac{\partial(\langle\rho\rangle\langle C_m\rangle)}{\partial t} + \frac{\partial(\langle V_k\rangle\langle\rho\rangle\langle C_m\rangle)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\langle\rho\rangle D_{kj} \frac{\partial\langle C_m\rangle}{\partial x_j} \right) + o(\varepsilon^2) \quad (26)$$

où les termes D_{kj} représentent les composantes du tenseur de dispersion :

$$D_{kj} = D_{kj}^d + D_{kj}^h \quad \text{avec} \quad D_{kj}^d = \frac{\langle D_m \rangle}{Pe} \delta_{kj} \quad \text{et} \quad D_{kj}^h = -\varepsilon \left(1 + \frac{d\langle\rho\rangle}{d\langle C_m \rangle} \frac{\langle C_m \rangle}{\langle\rho\rangle} \right) \langle V_{0k} \psi_j \rangle \quad (27)$$

avec D_{kj}^d (resp. D_{kj}^h) les termes du tenseur de diffusion (resp. de dispersion hydrodynamique) à l'échelle macroscopique et ψ_j ($j = k = 1, 2$) des fonctions symétriques par rapport à $x_3 = 0.5$, définies comme :

$$\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_3^2} = \frac{\varepsilon Pe}{D_{m0}} (V_{0j} - \langle V_{0j} \rangle) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_3} \Big|_{x_3=1} \quad \text{et} \quad \langle \psi_j \rangle = 0 \quad (28)$$

Ces fonctions permettent d'estimer la solution de l'équation linéaire obtenue par les développements (22) et (23), i.e.,

$$C_{m1} = \psi_k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial C_{m0}}{\partial x_k} + C_{m10}(\mathbf{y}, t) \quad (29)$$

L'expression finale du tenseur de dispersion implique la connaissance de V_{0k} et ψ_j . Comme les variations de masse volumique ρ_0 et de viscosité dynamique μ_0 ne dépendent que des variables macroscopiques (Éq. (10)), alors V_{0k} peut être déterminée par intégration de l'Éq. (20) :

$$V_{0k} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_k} - \delta_{k1} G \Delta \rho_0 \right) (x_3^2 - x_3) \quad (30)$$

En moyennant cette expression selon x_3 , on obtient une relation analogue à la loi de Darcy généralisée :

$$\langle V_{0k} \rangle = -\frac{1}{12\mu_0} \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_k} - \delta_{k1} G \Delta \rho_0 \right) \quad (31)$$

En utilisant, dans l'Éq. (28), les expressions (30) et (31), les fonction ψ_k prennent alors la forme :

$$\psi_k = \frac{\varepsilon \text{Pe}}{24\mu_0 D_{m0}} \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_k} - \delta_{k1} G \Delta \rho_0 \right) \left[x_3^2 (x_3 - 1)^2 - \frac{1}{30} \right] \quad (32)$$

Dans ces conditions, la forme finale de D_{kj}^h est :

$$D_{kj}^h = \varepsilon^2 \frac{\text{Pe}}{210 \langle D_m \rangle} \left(1 + \frac{d\langle \rho \rangle}{d\langle C_m \rangle} \frac{\langle C_m \rangle}{\langle \rho \rangle} \right) \langle V_k \rangle \langle V_j \rangle \quad (33)$$

Injectée dans l'expression (27), cette dernière relation (33) permet alors d'obtenir les composantes du nouveau tenseur de dispersion :

$$D_{kj} = \frac{\langle D_m \rangle}{\text{Pe}} \delta_{kj} + \varepsilon^2 \frac{\text{Pe}}{210 \langle D_m \rangle} \left(1 + \frac{d\langle \rho \rangle}{d\langle C_m \rangle} \frac{\langle C_m \rangle}{\langle \rho \rangle} \right) \langle V_k \rangle \langle V_j \rangle \quad (34)$$

L'analyse du terme courant nous permet de noter que, si la condition imposée initialement, i.e., $\text{Pe} \sim 1/\varepsilon$, est respectée, alors les contributions des termes diffusif et dispersif sont tout à fait comparables. En outre, si on considère le cas particulier :

- (i) le soluté injecté ne modifie la masse volumique de la zone de mélange ($d\langle \rho \rangle / d\langle C_m \rangle = 0$),
- (ii) le coefficient de diffusion moléculaire reste constant ($\langle D_m \rangle = 1$),
- (iii) l'écoulement est unidirectionnel ($\langle V_2 \rangle = 0$ avec une vitesse constante $\langle V_1 \rangle = 1$),

alors :

- (i) la condition $\text{Pe} \sim 1/\varepsilon$, réécrite sous la forme $\text{Pe} \ll 1/\varepsilon^2$ devient alors consistante avec celle imposée par Taylor [2] pour la validité de son modèle ($b^2 V / H D_m \ll 1$, avec V la vitesse moyenne de l'écoulement et b et H les caractéristiques géométriques d'un tube de section droite circulaire),
- (ii) la composante longitudinale D_{11} du tenseur de dispersion (34) est identique au coefficient effectif de diffusion de Taylor [2] exprimé sous sa forme adimensionnelle.

Sous ces conditions, l'expression (34) doit être considérée comme la forme généralisée du tenseur de dispersion de Taylor pour un fluide à propriétés physiques variables.

On note également que, si le nombre de Péclet à l'échelle macroscopique diminue d'un ordre de grandeur, la forme du tenseur de dispersion, obtenue par un développement asymptotique de toute fonction « f » (9) jusqu'à l'ordre ε^2 , reste identique à la relation (34). Les effets induits par le terme dispersif deviennent dans ce cas négligeables devant le terme diffusif.

6. Conclusions

L'application d'une méthode de développement asymptotique par rapport à l'épaisseur d'une cellule Hele–Shaw a permis la généralisation du modèle classique de Taylor, rigoureusement valide pour le déplacement d'un fluide considéré comme « homogène », i.e., masse volumique, viscosité dynamique et diffusion moléculaire constantes à l'échelle spatio-temporelle, au cas d'un fluide à propriétés physiques variables. Le modèle est représenté par une équation de convection–dispersion portant sur les variables moyennées où la nouvelle forme du tenseur de dispersion dépend de la concentration. Les équations obtenues et injectées dans un code de calcul permettent de décrire de façon satisfaisante l'infiltration d'une solution saline dans une cellule de Hele–Shaw [6].

Références

- [1] R. Aris, On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 235 (1956) 67–77.
- [2] G.I. Taylor, Dispersion of a soluble matter in solvent flowing slowly through a tube, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 219 (1953) 186–203.
- [3] J.L. Auriault, P.M. Adler, Taylor dispersion in porous media: Analysis by multiple scale expansions, *Adv. Water Res.* 18 (1995) 217–226.
- [4] E. Sanchez-Palencia, Non-Homogeneous Media and Vibration Theory, in: *Lecture Notes in Phys.*, vol. 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [5] H. Brenner, D.A. Edwards, *Macrotransport Processes*, Butterworth–Heinemann, London, 1993.
- [6] C. Otean, Ch. Felder, M. Panfilov, M.A. Buès, Transport with a very low density contrast in Hele–Shaw cell and porous medium: evolution of the mixing zone, *Transport in Porous Media* 55 (2004) 339–360.