



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 332 (2004) 189–194



Courants caractéristiques et analyse de SER

Yoann Morel, Sylvain Morvan, Olivier Vacus

CEA/CESTA, BP 2, 33114 Le Barp, France

Reçu le 4 juillet 2003 ; accepte après révision le 7 janvier 2004

Présenté par Pierre Perrier

Résumé

Dans cette Note, nous revenons sur la théorie des courants caractéristiques introduite il y a une trentaine d'années dans le cadre des problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques. Nous proposons un cadre mathématique simple et définissons rigoureusement cette notion. Nous discutons ensuite l'importance qu'elle peut prendre en vue de l'analyse de la Surface Equivalent Radar (SER) des obstacles, en particulier en basse fréquence. Un exemple est présenté, pour une géométrie 3-D, qui montre la puissance de cette décomposition. *Pour citer cet article : Y. Morel et al., C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Eigen currents and RCS analysis. In this Note, we return to the theory of characteristic modes which was introduced 30 years ago for electromagnetic scattering problems. A simple mathematical framework is proposed and complete definitions are given. The potential interest of this theory in terms of Radar Cross Section (RCS) analysis is then discussed, especially in the low frequency case. Finally, a 3-D example is presented to illustrate the efficiency of this decomposition. *To cite this article: Y. Morel et al., C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Ondes ; Courants caractéristiques ; EFIE ; Analyse de surface équivalent radar (SER) ; Opérateur de scattering

Keywords: Waves; Characteristic currents; EFIE; Radar cross section (RCS) analysis; Scattering operator

Abridged English version

In this Note we deal with harmonic electromagnetic scattering problems in unbounded domains as formulated with (1). As far as low frequency RCS analysis is concerned (when the target is not large with respect to the wavelength), the difficulty is not to compute the induced currents on the surface Γ , but rather to understand the physical phenomena which the scattering is based on. For practical purposes, we would like to find out an adapted decomposition, as meaningful as the bright point model in the high frequency case. This turns out to be possible using the characteristic currents, or eigenmodes, as they have been first introduced in [4], and studied in [3].

To define them properly, we consider both ingoing and outgoing solutions \mathbf{E}^\pm to (1). We derive from the Stratton-Chu formulae two impedance operators:

$$\mathbb{L}^\pm(\mathbf{J})(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \times \left(k \int_{\Gamma} \left(G^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{J}(\mathbf{y}) - \frac{1}{k^2} \nabla_{\mathbf{y}} G^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{J}(\mathbf{y}) \right) d\gamma(\mathbf{y}) \times \mathbf{n} \right)$$

where G^\pm are respectively the ingoing and outgoing Green's functions. We introduce their decomposition into real and imaginary part, $G^\pm = G_R \pm iG_I$, and consequently expand the impedance operators as

$$\mathbb{L}^\pm = \mathbb{L}_R \pm i\mathbb{L}_I$$

The key point of the proofs lies in the compactness of \mathbb{L}_I , which is also definite positive. As stated in Theorem 1, it can be deduced from these properties that $\exists\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_*$, $\exists\{\mathbf{J}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in TC^\infty(\Gamma, \mathbb{R}^3)$, such that

$$\mathbb{L}_I \mathbf{J}_n = \lambda_n \mathbb{L}_R \mathbf{J}_n$$

These currents \mathbf{J}_n are the characteristic currents. The two sets of all ingoing and all outgoing far fields \mathbf{e}_n^- and \mathbf{e}_n^+ associated to these currents form two orthogonal bases in $L^2(S)$. Moreover, when written from the first base to the other, the scattering operator is diagonal (see Theorem 3):

$$\mathcal{S}_{\mathcal{Q}\{\mathbf{e}_n^-\}\{\mathbf{e}_n^+\}} = \operatorname{diag}[\alpha_n], \quad \text{with } \alpha_n = -\frac{1 - j\lambda_n}{1 + j\lambda_n}$$

Orthogonality actually occurs for far field patterns, which explains why this diagonalisation can be seen as a powerful tool for RCS analysis.

Another interesting feature lies in the fact that the associated eigenvalue indicates whether a characteristic current contributes to the RCS or not:

- when $|\lambda_n|$ is large, $\alpha_n \simeq 1$: the contribution can be neglected (recall that, without any obstacle, $\mathcal{S}_{\mathcal{O}} = \operatorname{Id}$);
- when $|\lambda_n|$ is small, $\alpha_n \simeq -1$: the characteristic mode is dominant (in case of total reflexion, $\mathcal{S}_{\mathcal{O}} = -\operatorname{Id}$).

Moreover, the only possible accumulation point for λ_n (resp. α_n) is located at infinity (resp. 1): this means that only a finite number of modes contribute to the RCS. The last step consists in numerical tests which show that the lower the frequency is, the less the number of significant modes. Note that this first presentation will be completed in [5].

1. Introduction

Quoique ancienne, la résolution par méthodes intégrales des problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques en milieu non borné est un sujet qui suscite aujourd'hui encore de nombreux travaux. Pour beaucoup, ces travaux récents sont motivés par la seule montée en fréquence, montée qui s'accompagne de coûts de calculs et de stockage conséquents.

Malheureusement, en matière d'analyse de Surface Equivalent Radar (SER), le calcul, même exact, des courants induits, puis des champs rétrodiffusés, n'est pas toujours une information suffisante. Et, paradoxalement, c'est pour des obstacles de taille raisonnable vis-à-vis de la longueur d'onde, que le plus de questions restent en suspens : quelle partie de la cible contribue le plus à la SER ? Dans quel secteur angulaire (angle d'incidence de l'onde, et angle d'observation) ? Comment ces phénomènes varient-ils en fonction de la fréquence ? A l'image du domaine des hautes fréquences où s'est imposée la notion de points brillants, une décomposition de la SER en contributions élémentaires serait utile. D'autant que des outils pratiques traditionnels, comme l'analyse en distance (réponses impulsionnelles, basées sur la transformée de Fourier inverse des résultats obtenus en fréquence), sont peu adaptés aux cas des basses fréquences.

Pour toutes ces raisons, nous proposons dans cette Note de reprendre les travaux présentés il y a une trentaine d'années dans [4], puis [3], relatifs aux *courants caractéristiques* ou *courants propres*. Dans un cadre mathématique

classique, nous montrons que la définition de ces courants est assez naturelle. Nous énonçons rigoureusement des résultats esquissés dans [3], en particulier la diagonalisation de l'opérateur de diffusion. Ces résultats seront démontrés dans [5]. Enfin, nous montrons, dans le cas d'un obstacle 3-D (non axisymétrique) que cette théorie est bien adaptée au cas des basses fréquences.

2. Définitions et énoncé des résultats

2.1. Cadre fonctionnel et mise en équations

Soit \mathcal{O} un ouvert borné de \mathbb{R}^3 . On notera Ω son complémentaire ($\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}$) et Γ sa frontière. Dans cette Note, par souci de simplicité, cette frontière sera supposée de classe C^∞ . On désignera par $C^\infty(\Omega)$ (resp. $H^s(\Omega)$) l'espace des champs de vecteurs (complexes) dont chaque composante admet une régularité C^∞ (resp. H^s). On utilisera aussi l'espace de Hilbert $H_{\text{rot}}(\Omega)$, muni de son produit scalaire usuel, et les espaces $C^\infty(\Gamma)$ et $H^s(\Gamma)$ de champs de vecteurs définis sur Γ (espaces de traces), ainsi que ceux des champs de vecteurs tangents à Γ , $TC^\infty(\Gamma)$ et $TH^s(\Gamma)$. La normale sortante à Γ sera notée \mathbf{n} .

Considérons un champ excitateur \mathbf{E}^{inc} . En régime harmonique, pour des ondes de vecteur d'onde k et un obstacle parfaitement conducteur, une formulation du problème de diffraction est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{E}^+ \in H_{\text{rot}}(\Omega) \text{ tel que} \\ \text{rot rot } \mathbf{E}^+ = k^2 \mathbf{E}^+ & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{E}^+ \times \mathbf{n} = -\mathbf{E}^{\text{inc}} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} (\text{rot } \mathbf{E}^+ \times \mathbf{r} - ik|\mathbf{r}|\mathbf{E}^+) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

La condition de rayonnement à l'infini utilisée ici est la condition sortante de Silver–Müller; elle assure l'unicité de la solution \mathbf{E}^+ au problème (1) (voir [1] ou [2]), solution dite « sortante ».

Rappelons qu'on peut conclure à l'identique pour les champs entrants; nous noterons $\mathbf{E}^- \in H_{\text{rot}}(\Omega)$ la solution du problème de diffraction associée à la condition entrante.

Les formules de Stratton–Chu montrent comment les champs \mathbf{E}^- et \mathbf{E}^+ peuvent se déduire des courants électriques \mathbf{J} induits sur l'obstacle :

$$\mathbf{E}^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^{\text{inc}} + ik \int_{\Gamma} \left(G^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{J}(\mathbf{y}) - \frac{1}{k^2} \nabla_y G^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{div}_\Gamma \mathbf{J}(\mathbf{y}) \right) d\gamma(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}} \quad (2)$$

où l'on a noté div_Γ l'opérateur de divergence surfacique (voir [1] ou [2] par exemple), et $G^\pm(x, y) = e^{\pm ik|x-y|}/4\pi|x-y|$, les fonctions de Green respectivement entrante et sortante. On réécrit alors la condition à la surface de l'objet à l'aide de la relation (2). Les courants \mathbf{J} apparaissent ainsi comme solution des équations intégrales suivantes :

$$\mathbb{L}^\pm(\mathbf{J})(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \times \left(k \int_{\Gamma} \left(\mathbf{J}(\mathbf{y}) - \frac{1}{k^2} \nabla_x \text{div}_\Gamma \mathbf{J}(\mathbf{y}) \right) G^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\gamma(\mathbf{y}) \times \mathbf{n} \right) = \mathbf{in} \times (\mathbf{E}^{\text{inc}} \times \mathbf{n})(\mathbf{x}) \quad (3)$$

Ces relations intégrales définissent deux opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1, \mathbb{L}^+ et \mathbb{L}^- , dits opérateurs d'impédance. Ces opérateurs sont symétriques non hermitiens. Dans cette Note, nous utiliserons la décomposition du noyau de Green en

$$G^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\cos(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|} \pm i \frac{\sin(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|} = G_R(x, y) \pm i G_I(x, y)$$

et la décomposition correspondante des opérateurs \mathbb{L}^\pm :

$$\mathbb{L}^\pm = \mathbb{L}_R \pm i\mathbb{L}_I \quad (4)$$

Enfin, nous noterons \mathbf{e}^\pm le champ lointain associé à \mathbf{E}^\pm : $\mathbf{E}^\pm(\mathbf{x}) = \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} [\mathbf{e}^\pm(\hat{x}) + O(\frac{1}{|\mathbf{x}|})]$ quand $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ avec $\hat{x} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, et nous ferons référence à l'opérateur de diffusion qui, au champ lointain entrant du problème de diffraction par l'obstacle \mathcal{O} , associe les champ lointain sortant :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{O}} : \begin{matrix} (L^2(S))^2 \\ \mathbf{e}^- \mapsto \mathbf{e}^+ \end{matrix} \rightarrow (L^2(S))^2 \quad (5)$$

Dans le cas présent, avec un obstacle parfaitement conducteur, $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ est un opérateur unitaire : $\|\mathcal{S}_{\mathcal{O}}\| = 1$.

2.2. Enoncés des résultats

Nous pouvons à présent formuler les principaux résultats relatifs aux courants caractéristiques.

Théorème 1. *Pour tout obstacle \mathcal{O} (de frontière Γ de classe C^∞) et les opérateurs définis par les relations (3) et (4), $\exists \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_*$, $\exists \{\mathbf{J}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in TC^\infty(\Gamma, \mathbb{R}^3)$, tels que*

$$\mathbb{L}_I \mathbf{J}_n = \lambda_n \mathbb{L}_R \mathbf{J}_n \quad (6)$$

De plus, il n'existe pas de points d'accumulation des λ_n ailleurs qu'à l'infini.

Par définition, les courants \mathbf{J}_n sont les *courants caractéristiques*, à la fréquence k , de l'obstacle \mathcal{O} considéré.

Théorème 2. *Les champs lointains entrant et sortant caractéristiques (i.e. associés aux courants caractéristiques \mathbf{J}_n) sont deux à deux orthogonaux dans $L^2(S)$. Après normalisation, on obtient ainsi :*

$$(\mathbf{e}_n^+, \mathbf{e}_m^+) = \delta_{nm} \quad \text{et} \quad (\mathbf{e}_n^-, \mathbf{e}_m^-) = \delta_{nm}$$

En d'autres termes, les familles $\{\mathbf{e}_n^+\}$ et $\{\mathbf{e}_n^-\}$ forment deux bases de $L^2(S)$ constituées respectivement de champs lointains sortant et entrants.

Le dernier résultat découle naturellement des deux précédents.

Théorème 3. *Exprimé de la base $\{\mathbf{e}_n^-\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans la base $\{\mathbf{e}_n^+\}_{n \in \mathbb{N}}$, l'opérateur de diffusion est diagonal :*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{O}}|_{\{\mathbf{e}_n^-\}_{n \in \mathbb{N}} \{\mathbf{e}_n^+\}_{n \in \mathbb{N}}} = \text{diag}[\alpha_n], \quad \text{avec} \quad \alpha_n = -\frac{1 - j\lambda_n}{1 + j\lambda_n}$$

2.3. Premiers commentaires

L'information contenue dans la Théorème 3 est double. Elle réside d'abord dans la diagonalisation de l'opérateur $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$; c'est le résultat de décomposition annoncé dans l'introduction. Elle tient aussi aux valeurs qui peuvent apparaître sur la diagonale :

- si $|\lambda_n|$ est grand, $\alpha_n \simeq 1$: le mode associé ne contribue pas ou peu à la diffraction, donc à la SER (rappelons qu'en l'absence d'obstacle, $\mathcal{S}_{\mathcal{O}} = \text{Id}$) ;
- si $|\lambda_n|$ est petit, $\alpha_n \simeq -1$: le mode associé est prépondérant en terme de SER (pour un phénomène de réflexion totale, $\mathcal{S}_{\mathcal{O}} = -\text{Id}$).

Le fait que le seul point d'accumulation possible des λ_n se situe à l'infini prend ici tout son sens : il signifie que seul un nombre fini de courants propres contribue effectivement à la SER.

Constatons sur un exemple que ces résultats se vérifient en pratique. L'objet retenu ici est une amande métallique (voir Fig. 1 ; c'est un objet 3-D, non axisymétrique, classiquement utilisé en SER comme cas d'intercomparaison

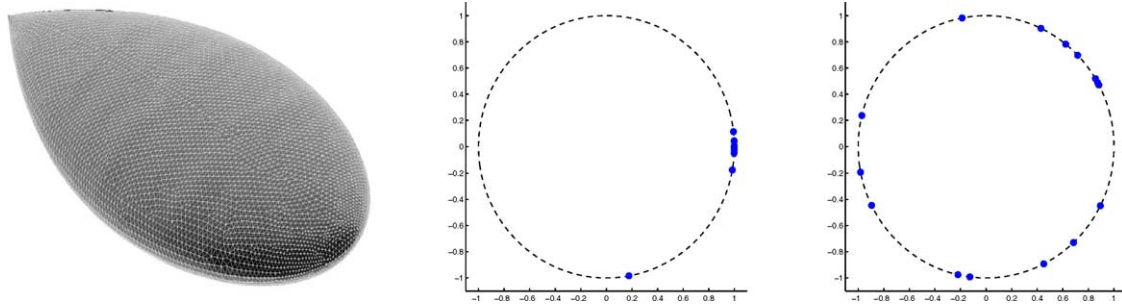


Fig. 1. (Gauche) forme de l’amande ; répartition des α_n pour $\lambda = 2, 4L$ (centre) et $\lambda = 0, 6L$ (droite).
 Fig. 1. (Left) almond shape; α_n distribution for $\lambda = 1.2L$ (center) and $\lambda = 0.8L$ (right).

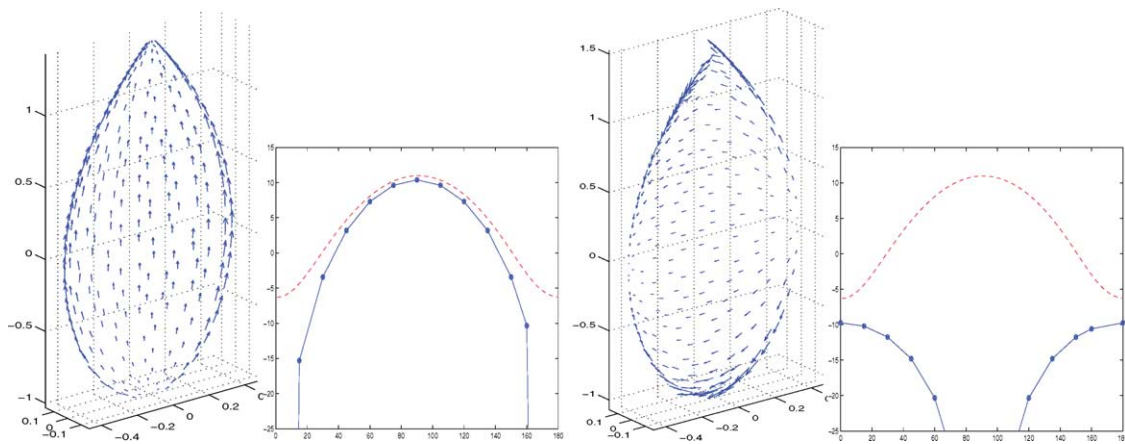


Fig. 2. Premier et deuxième courant caractéristique (resp. gauche et droite), et leur SER associée (bleu) comparée à la SER totale de l’amande (rouge), à 50 MHz, en polarisation HH.
 Fig. 2. First and second characteristic current (resp. left and right), and associated RCS (blue) compared to exact almond RCS (red), HH polarisation at 50 MHz.

calculs-calculs ou calculs-mesures. Le site <http://www.arl.hpc.mil/PET/cta/cea/emcc/benchmark> en donne la définition exacte.

On peut vérifier que, conformément aux résultats des Théorèmes 1 et 3 : les α_n s’accumulent rapidement autour de la valeur 1, et que les α_n s’éloignent de la valeur 1 quand la fréquence augmente.

On représente Fig. 2 le résultat du calcul des deux courants caractéristiques prépondérants. Le courant total et la SER de l’amande se reconstruisent alors principalement avec ces deux courants (voir [5]).

3. Indications pour la démonstration des Théorèmes 1 et 2

Nous nous limitons dans cette Note à quelques idées générales. A noter que le Théorème 3 se déduit directement des deux précédents. On renvoie à [5] pour les démonstrations complètes.

L’opérateur \mathbb{L}_I a un noyau infiniment régulier, c’est donc un opérateur régularisant (i.e. continu de $TH^s(\Gamma, \mathbb{C}^3)$ dans $TH^m(\Gamma, \mathbb{C}^3)$, $\forall (s, m) \in \mathbb{N}^2$). \mathbb{L}_I est donc, en particulier, un opérateur compact.

On introduit ensuite les opérateurs de champ lointain, définis par,

$$a_{\infty}^{\pm} : \mathbf{J} \mapsto \mathbf{e}^{\pm}(\hat{x}) = \frac{k}{4\pi} \mathbf{n} \times \left(\int_{\Gamma} \mathbf{J}(y) e^{\mp i k \hat{x} \cdot y} d\gamma \times \mathbf{n} \right), \quad \hat{x} \in S$$

Ces opérateurs associent au courant \mathbf{J} sur l'objet le champ lointain respectivement sortant et entrant. Ces opérateurs sont injectifs, et d'image dense dans $L^2(S)$ (voir [1]).

On peut alors démontrer la factorisation, $\mathbb{L}_I = (a_{\infty}^{\pm})^* a_{\infty}^{\pm}$ (a^* désignant l'adjoint de l'opérateur A), qui montre que \mathbb{L}_I est défini et positif.

L'opérateur \mathbb{L}_R , tout comme \mathbb{L}_I , est réel et symétrique. Il est de plus d'inverse continu si k ne correspond pas à une fréquence de résonance du problème intérieur.

L'opérateur $\chi^{\pm} = a_{\infty}^{\pm} \mathbb{L}_R^{-1} (a_{\infty}^{\pm})^* : L^2(S) \mapsto L^2(S)$. Produits d'opérateurs régularisants et d'un opérateur continu, les opérateurs χ^{\pm} sont eux-mêmes compacts. Ils sont de plus, par construction, auto-adjoints dans $L^2(S)$. D'après les théories spectrales classiques, il existe deux bases orthonormales $\{\mathbf{e}_n^{\pm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(S)$, ainsi que deux suites de réels $\{v_n^{\pm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ telles que,

$$\chi^{\pm} \mathbf{e}_n^{\pm} = v_n^{\pm} \mathbf{e}_n^{\pm}$$

Si on définit maintenant les courants \mathbf{J}_n^{\pm} suivant,

$$\mathbf{e}_n^{\pm} = a_{\infty}^{\pm} \mathbf{J}_n^{\pm} \iff \mathbf{J}_n^{\pm} = \frac{1}{v_n^{\pm}} \mathbb{L}_R^{-1} (a_{\infty}^{\pm})^* \mathbf{e}_n^{\pm}$$

on s'aperçoit alors, grâce à la factorisation de \mathbb{L}_I et à l'injectivité de a_{∞} , que le courant $\mathbf{J} = \mathbf{J}_n^+ = \mathbf{J}_n^-$ est un courant réel vérifiant l'équation aux valeurs propres (6) annoncée, et associé à la valeur propre $\lambda_n = 1/v_n^+ = 1/v_n^-$.

Références

- [1] D. Colton, R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer-Verlag, 1992.
- [2] J.C. Nédélec, *Electromagnetic and Acoustic Waves*, Springer-Verlag, 2000.
- [3] R.F. Harrington, J.R. Mautz, Theory of characteristic modes for conducting bodies, *IEEE Trans. Antennas and Propagation* 19 (1971) 622–628.
- [4] R.J. Garbacz, *A generalized expansion for radiated and scattered fields*, Ph.D., Ohio State University, 1968.
- [5] D. Bouche, F. Collino, Y. Morel, O. Vacus, *Eigencurrents in electromagnetic scattering problems*, 2003, en préparation.