Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 569–574

COMPTES RENDUS
MECANIQUE

L'équation de la stropholyse

Jean Piquet

Laboratoire de mécanique des fluides, UMR 6598 CNRS, École centrale de Nantes, 44321 Nantes cedex, France

Reçu le 4 mars 2003 ; accepté après révision le 6 juin 2003

Présenté par Pierre Perrier

Résumé

On montre dans cette Note que la modélisation des écoulements turbulents homogènes rotationnels en moyenne exige de considérer, à coté des effets liés au nombre de composantes de la fluctuation de vitesse et à la dimensionalité de celle-ci, les effets directement liés à la rotation moyenne de l'écoulement à travers un tenseur du troisième ordre, la stropholyse. On forme l'équation pour la partie complètement symétrique de cette stropholyse et on discute les prérequis nécessaires à la fermeture des termes qui interviennent dans cette équation. ***Pour citer cet article : J. Piquet, C. R. Mecanique 331 (2003).***

Abstract

The stropholytic equation. It is shown that the modelling of homogeneous turbulent flows with mean rotation requires the consideration of stropholytic effects, besides componentality and dimensionality effects. Stropholytic effects are directly related to the mean-flow rotationality. The equation for the purely symmetric stropholysis is established and prerequisites for the closure of terms involved in this equation are discussed. ***To cite this article: J. Piquet, C. R. Mecanique 331 (2003).***

Mots-clés : Turbulence ; Stropholyse

Keywords: Turbulence; Stropholytic effects

Abridged English version

The homogeneous turbulence modelling of the pressure-strain tensor, T_{ij}, is usually based on the Lumley decomposition [1]. The rapid-part modelling problem amounts to determining the fourth-order tensor M_{ijpq} defined by (2) as a functional of tensorial arguments, the anisotropy of Reynolds stresses, $\mathbf{b}$ – this single term is sufficient in the case of mean irrotational flows – and other tensorial arguments: the so-called dimensional anisotropy, $\mathbf{y}$, defined from (5b) and the so-called stropholysis, Q_{ijk}, which is responsible for mean rotational effects, and measures the sensitivity of pressure-strain to mean vorticity. By virtue of the canonical decompositions (12)–(14) of third- and fourth-order tensors, only the purely symmetrical part, Q^*_{ijk}, of Q_{ijk} is required, besides $\mathbf{b}$ and $\mathbf{y}$, for a complete description of $\mathbf{M}$, as shown by a comparison with rapid-distorsion theory (see discussion

Adresse e-mail : Jean.Piquet@ec-nantes.fr (J. Piquet).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-0721(03)00123-2

of §1). This Note gives Eqs. (15), (16) satisfied by $\mathbf{Q}^*$ under the homogeneity assumption and reduces as much as possible their associated modelling problems, using realisability (§4) and Cayley–Hamilton-type (§5) arguments.

1. Introduction

La modélisation du tenseur des corrélations pression-déformation T_{ij} est un enjeu important en turbulence homogène. Celle-ci s'effectue à travers la décomposition de Lumley [1] en partie lente, $T_{ij}^{(s)}$, et partie rapide proportionnelle au gradient, $V_{p,q}^{(a)}$, de vitesse moyenne absolue. On est alors conduit classiquement à :

$$T_{ij} := \rho^{-1}\overline{p(u_{i,j}+u_{j,i})} = T_{ij}^{(s)} + 2(M_{ipqj}+M_{jpqi})V_{q,p}^{(a)} \tag{1}$$

Le problème de fermeture se pose alors pour $T_{ij}^{(s)}$ et pour le tenseur du quatrième ordre M_{ijpq}, défini comme une intégrale sur tous les nombres d'onde $\mathbf{k}$ dans l'espace spectral, où $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ est le tenseur spectral des corrélations doubles de vitesse :

$$M_{ijpq} := \int \frac{k_p k_q}{k^2}\Phi_{ij}(\mathbf{k})\,\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{2}$$

On suppose alors que $T_{ij}^{(s)}$ et M_{ijpq} sont des fonctionnelles isotropes du tenseur adimensionnel d'anisotropie $\mathbf{b}$ défini en fonction du tenseur des corrélations doubles de vitesse R_{ij} par $b_{ij} := R_{ij}/2K - \delta_{ij}/3$. Malheureusement, si cette hypothèse s'avère justifiée dans le cas des écoulements moyens irrotationnels, il n'en va pas de même dans le cas des écoulements rotationnels. Il est facile de montrer qu'alors :

$$T_{ij} = T_{ij}^{(s)} + 2(M_{ipqj}+M_{jpqi})S_{pq} - (Q_{ijk}+Q_{jik})W_k^{(a)} \tag{3}$$

où $\mathbf{W}^{(a)}$ est la vorticité absolue de l'écoulement moyen. Le tenseur Q_{ijk} qui est responsable des effets rotationnels est le tenseur de stropholyse [2] défini par :

$$Q_{ijk} := -\overline{u_j\psi_{i,k}} = \varepsilon_{ipq}M_{jqpk} \tag{4}$$

Dans (4), ψ désigne le potentiel vecteur (fonction de courant) des fluctuations de vitesse $\mathbf{u}$. Il est remarquable qu'en turbulence homogène, le tenseur $\mathbf{Q}$ s'annule pour toutes les contractions d'indice possibles et qu'il génère les tenseurs du second ordre suivants :

$$\varepsilon_{imp}Q_{mjp} = \overline{u_i u_j} = \int \Phi_{ij}(\mathbf{k})\,\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{5a}$$

$$\varepsilon_{imp}Q_{pmj} = Y_{ij} := \overline{\psi_{k,i}\psi_{k,j}} = \int \frac{k_i k_j}{k^2}\Phi_{kk}(\mathbf{k})\,\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{5b}$$

$$\varepsilon_{imp}Q_{jpm} = X_{ij} := \overline{\psi_{i,k}\psi_{j,k}} \tag{5c}$$

Laissons de coté le tenseur X_{ij} donné par (5c). Il peut être éliminé parce qu'en turbulence homogène, $R_{ij} + X_{ij} + Y_{ij} = 2K\delta_{ij}$. A coté de $\mathbf{b}$ (d'invariants $\mathrm{II} := -b^2_{.ii}/2$ et $\mathrm{III} := b^3_{.ii}/3$) caractéristique du nombre de composantes u_i de la fluctuation de vitesse (un écoulement est $2C$ si $\Delta_b := 1 + 9\,\mathrm{II} + 27\,\mathrm{III} \geqslant 0$ s'annule, il a deux composantes égales si $\Delta_a := 4\,\mathrm{II}^3 + 27\,\mathrm{III}^2 \leqslant 0$ s'annule), il apparait un tenseur $\mathbf{Y}$ caractéristique de la dimensionalité de la turbulence (donnant en particulier les directions x_i de variation de ψ). De ce tenseur de trace $2K$, introduit dans [3], on peut extraire un déviateur de dimensionalité $y_{ij} := Y_{ij}/2K - \delta_{ij}/3$ (d'invariants II_y et III_y, tels que $\Delta_y := 1 + 9\,\mathrm{II}_y + 27\,\mathrm{III}_y \geqslant 0$ s'annule pour des écoulements 2D). Afin de tenir compte de la relation (2), quelques auteurs [2–5] ont tenté de modéliser $\mathbf{M}$ comme une fonctionnelle isotrope de $\mathbf{b}$ et de $\mathbf{y}$. Les conditions de symétrie ($M_{ijpq} = M_{jipq} = M_{ijqp}$), d'incompressibilité ($M_{ippq} = 0$) et de normalisation ($M_{iipq} = Y_{pq},\ M_{ijpp} = R_{ij}$) spécifient complètement la partie linéaire de $\mathbf{M}[\mathbf{b},\mathbf{y}]$ [2–6]. Malheureusement, dans le cas d'un écoulement de rotation pure, tout modèle de la forme $\mathbf{M}[\mathbf{b},\mathbf{y}]$ conduit, comme d'ailleurs tout modèle $\mathbf{M}[\mathbf{b}]$, à la stationarité des invariants d'anisotropie II et III, en contradiction flagrante avec les théories de distorsion rapide. En outre, le modèle linéaire $\mathbf{M}[\mathbf{b},\mathbf{y}]$ ne peut, comme son homologue $M[\mathbf{b}]$, être réalisable. Enfin, nous avons pu montrer que dans le cas d'un écoulement moyen de cisaillement pur, un modèle $\mathbf{M}[\mathbf{b},\mathbf{y}]$ ne pouvait être, et a fortiori $\mathbf{M}[\mathbf{b}]$, consistant avec la théorie de distorsion rapide qu'au premier ordre en temps. La relation (3) indique d'emblée que la stropholyse est ce qui manque dans la modélisation. Kassinos et Reynolds [5] ont montré qu'un modèle dépendant de la stropholyse totalement symétrisée $\mathbf{Q}^*$ et « tout linéaire » $\mathbf{M}[\mathbf{b},\mathbf{y},\mathbf{Q}^*]$ permettait de retrouver une réponse des contraintes de Reynolds à une rotation pure rapide. Malheureusement, un tel modèle conduit à des oscillations non amorties de l'anisotropie dans la direction de la rotation [5,6] alors que la théorie de distorsion rapide conduit à des oscillations amorties. L'amortissement n'a pu être provoqué [4] que par l'introduction d'un terme ad-hoc produisant la « randomisation rotationnelle » voulue en raison du mélange de phase dû à la dispersivité anisotrope des ondes d'inertie. Enfin, le modèle « tout linéaire » [5] *ne peut être consistant avec la théorie de distorsion rapide qu'au premier ordre en temps* car le terme linéaire en $\mathbf{Q}^*$ dans $\mathbf{M}$ *ne peut contribuer à sa partie totalement symétrique*, $\mathbf{M}^*$. Enfin, certaines conditions nécessaires de réalisabilité ne sont pas satisfaites par ce modèle.

2. La modélisation

Les considérations qui précèdent indiquent qu'il n'y a que peu d'espoir de progresser dans la modélisation des écoulements fortement rotationnels, et en particulier de retrouver les propriétés des solutions exactes – pour $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ – de distorsion rapide [7], quand elles existent, sans prendre en compte le terme de stropholyse par sa propre équation. C'est à cet effort que l'auteur de la présente Note s'attache. La première étape est d'identifier les équations de travail qui accompagneront une modélisation de type $\mathbf{M}[\mathbf{b},\mathbf{y},\mathbf{Q}^*]$. Il nous faut évidemment les équations pour $\mathbf{b}$, $\mathbf{y}$, et $\mathbf{Q}^*$. Nous laissons celles pour $\mathbf{b}$ et $\mathbf{y}$ qui sont classiques (voir par exemple [5–8]) et nous nous concentrons sur l'équation pour $\mathbf{Q}^*$ qui, elle, ne l'est pas, suivant en cela la voie ouverte dans [5]. La méthode la plus expéditive [7, p. 253], est de partir de l'équation pour M_{ijpq} [8] :

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}M_{ijpq}}{\mathrm{d}t} &= T^{(S)}_{ijpq} - E_{ijpq} + 2V^{(a)}_{m,n}\big(M^{(6)}_{inpqmj} + M^{(6)}_{njpqmi}\big) - \widetilde{V}_{m,n}(M_{inpq}\delta_{jm} + M_{njpq}\delta_{im})\\ &\quad + \overline{V}_{m,n}\big(2M^{(6)}_{ijpqmn} - M_{ijmp}\delta_{nq} - M_{ijmq}\delta_{np}\big)\end{aligned} \tag{6}$$

où la notation $V^{(a)}_{m,n} = \overline{V}_{m,n} - \varepsilon_{mnp}\Omega_p$; $\widetilde{V}_{m,n} = \overline{V}_{m,n} - 2\varepsilon_{mnp}\Omega_p$ désigne respectivement les vitesses absolues et « tiltées » et Ω la vitesse angulaire du repère mobile. Les vorticités correspondantes se déduisent alors de :

$$\widetilde{W}_m := \varepsilon_{mqr}\widetilde{V}_{r,q} = W_m + 2\varepsilon_{rqm}\varepsilon_{rqp}\Omega_p = W_m + 4\Omega_m, \quad W^{(a)}_m = W_m + 2\Omega_m$$

On remarque dans l'éq. (6) que trois fermetures sont nécessaires, pour le terme linéaire (rapide)

$$M^{(6)}_{ijpqmn} := \int \frac{k_p k_q k_m k_n}{k^4}\Phi_{ij}(\mathbf{k})\,\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{7}$$

pour le terme lent $T^{(S)}_{ijpq}$ et pour la destruction par effets visqueux E_{ijpq}. On déduit alors (plus facilement que dans [5], éq. (E1.38)) de l'éq. (6) :

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}Q_{ijk}}{\mathrm{d}t} &= \varepsilon_{its}\big(T^{(S)}_{sjtk} - E_{sjtk}\big) - \tfrac{2}{3}\{\mathbf{S}\}Q_{ijk} + 2W^{(a)}_{wq}\varepsilon_{its}M^{(6)}_{sqtkwj} - W_{wq}(Q_{ijw}\delta_{qk} + \varepsilon_{iqs}M_{sjwk})\\ &\quad - \widetilde{W}_{rq}(Q_{iqk}\delta_{jr} + \varepsilon_{itr}M_{qjtk}) + 2S^*_{wq}\varepsilon_{its}M^{(6)}_{sqtkwj} - S^*_{rq}(Q_{iqk}\delta_{jr} + \varepsilon_{itr}M_{qjtk})\\ &\quad + S^*_{wq}\big(2\varepsilon_{its}M^{(6)}_{jstkwq} - Q_{ijw}\delta_{qk} - \varepsilon_{iqs}M_{sjwk}\big)\end{aligned} \tag{8}$$

où $S_{pq} = \{S\}\delta_{pq}/3 + S^*_{pq}$. Suivant en cela [5,6], on réduit ensuite la présence du tenseur d'ordre 6, $\mathbf{M}^{(6)}$, au moyen de l'identité :

$$2S^*_{wq}\varepsilon_{its}M^{(6)}_{sqwjtk} = 2S^*_{wq}\varepsilon_{its}M^{(6)}_{sjwqtk} - 2\varepsilon_{its}S^*_{sj}Y_{tk} + 2S^*_{jq}Q_{iqk} - 2\varepsilon_{itj}S^*_{wq}\big(Y^{(4)}_{wqtk} + M_{wqtk}\big) + 2\varepsilon_{itq}S^*_{wq}\big(Y^{(4)}_{jwtk} + M_{jwtk}\big) \tag{9}$$

si bien que (8) devient :

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}Q_{ijk}}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_{its}\big(\Phi^{(S)}_{sjtk} - E_{sjtk}\big) - \tfrac{2}{3}\{\mathbf{S}\}Q_{iqk} + \mathcal{R}^Q_{ijk} + \mathcal{D}^Q_{ijk} \tag{10}$$

où :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^Q_{ijk} &:= S^*_{mj}Q_{imk} - S^*_{mk}Q_{ijm} + \varepsilon_{itq}S^*_{wq}(M_{jwtk} + M_{jtwk}) - 2\varepsilon_{its}S^*_{sj}Y_{tk} - 2\varepsilon_{itj}S^*_{wq}\big(Y^{(4)}_{wqtk} + M_{wqtk}\big)\\ &\quad + 2\varepsilon_{itq}S^*_{wq}Y^{(4)}_{jwtk} + 4S^*_{wq}\varepsilon_{its}M_{sjwqtk} \end{aligned} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^Q_{ijk} &:= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{jqm}\widetilde{W}_mQ_{iqk} + \varepsilon_{kmq}W_mQ_{ijq}) - W^{(a)}_m\big(Y_{kj}\delta_{mi} - Y^{(4)}_{mkij} - M_{mikj}\big)\\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\widetilde{W}_mM_{ijmk} + W_mM_{mjik})\end{aligned} \tag{11b}$$

La forme (10), (11a) corrige l'éq. (E1.41) de [5] dont les traces partielles ne se contractent pas à zéro. On constate qu'à coté des effets « lents », il existe trois sources de nature différente dans cette équation. La source $\mathcal{R}^Q_{ijk}$ (donnée dans [6] pour le cas $\Omega = 0$) qui dépend des vorticités moyennes (absolue, relative ou « tiltée ») linéairement, et la source $\mathcal{D}^Q_{ijk}$, qui dépend linéairement du taux de distorsion de l'écoulement moyen $\mathbf{S}^*$. Enfin, un terme de compression moyenne est présent. Le principal avantage de (10), (11) par rapport à (8) est que la modélisation de $\mathbf{M}^{(6)}$ n'intervient plus qu'en une seule place, et ce dans $\mathcal{D}^Q_{ijk}$.

3. Les décompositions

Pour étudier séparément chaque contribution, il convient d'introduire les décompositions canoniques [5,7, pp. 251, 252] de $\mathbf{M}$ et de $\mathbf{Q}$ en leurs parties totalement symétrique (notées $\in \mathcal{S}ym$), partiellement symétrique ou antisymétrique, et totalement antisymétrique. Pour les tenseurs nous concernant :

$$Q_{imk} = \tfrac{1}{6}\varepsilon_{imk}\bar{q}^2 + \tfrac{1}{3}\big[\varepsilon_{ikp}R_{pm} + \varepsilon_{mip}Y_{pk} - \varepsilon_{kmp}(Y_{pi} + R_{pi})\big] + Q^*_{imk} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}M_{ijkl} &= M_{(ijkl)} + \tfrac{1}{2}\big(\varepsilon_{zkj}Q^*_{zil} - \varepsilon_{zil}Q^*_{zkj}\big) + \tfrac{1}{6}\big[2K(\delta_{kj}\delta_{il} + \delta_{lj}\delta_{ik} - \delta_{kl}\delta_{ij}) + 3(\delta_{lk}R_{ji} + \delta_{ij}Y_{kl})\\ &\quad + (\delta_{lk}Y_{ji} + \delta_{ij}R_{kl}) - \delta_{kj}(Y_{li} + R_{li}) - \delta_{il}(Y_{jk} + R_{jk}) - \delta_{lj}(Y_{ki} + R_{ki}) - \delta_{ik}(Y_{jl} + R_{jl})\big]\end{aligned} \tag{13}$$

où

$$M_{(ijkl)} := \tfrac{1}{6}\langle M_{ijkl}\rangle \quad \text{avec } \langle M_{ijkl}\rangle := M_{ijkl} + M_{iklj} + M_{iljk} + M_{kjil} + M_{ljik} + M_{klij} \tag{14a}$$

$$Q^*_{imk} := \tfrac{1}{6}\langle Q_{imk}\rangle \quad \text{avec } \langle Q_{imk}\rangle := Q_{imk} + Q_{mki} + Q_{kim} + Q_{mik} + Q_{ikm} + Q_{kmi} \tag{14b}$$

L'avantage de la décomposition (12) est que $\mathbf{Q}^*$ concentre, dans ses composantes indépendantes réduites en nombre par la symétrisation, l'information indépendante de $\mathbf{R}$ et de $\mathbf{Y}$ si bien que l'obtention des fermetures est techniquement simplifiée. Aussi, la modélisation de $T^{(r)}_{ij}$ se réduit à celle des composantes indépendantes de $\mathbf{M}_{(\,)}$. Additionnant les six éqs. (10) correspondant à chaque terme de (14b), il vient :

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}Q^*_{ijk}}{\mathrm{d}t} = \big\langle\varepsilon_{its}\big(T^{(s)}_{sjtk} - E_{sjtk}\big)\big\rangle - \tfrac{2}{3}\{\mathbf{S}\}Q^*_{ijk} + \mathcal{D}^{Q^*}_{ijk} + \mathcal{R}^{Q^*}_{ijk} \tag{15}$$

où

$$\mathcal{D}_{ijk}^{Q^*} = 4Q_{ijkwq}^* S_{wq}^* + \tfrac{1}{9}\big[\big\langle\varepsilon_{imp} S_{mj}^*(Y_{pk} - 2R_{pk})\big\rangle - S_{wp}^*(R_{mw} + Y_{mw})\langle\delta_{jk}\varepsilon_{imp}\rangle\big] + \tfrac{2}{3} S_{wq}^*\big\langle\varepsilon_{itq}\big(M_{(jwtk)} + Y_{jwtk}^{(4)}\big)\big\rangle \tag{16a}$$

$$\mathcal{R}_{ijk}^{Q^*} = \big(\Omega_m - \tfrac{1}{6}W_m^{(a)}\big)\big\langle\varepsilon_{jpm} Q_{ipk}^*\big\rangle + W_m^{(a)}\big(Y_{mkij}^{(4)} + 2M_{(mkij)}\big) + \tfrac{1}{9}W_m^{(a)}\big\langle\delta_{im}(R_{jk} - Y_{jk}) - \delta_{ij}(2Y_{mk} + R_{mk})\big\rangle \tag{16b}$$

où les crochets $\langle\cdots\rangle$ désignent les parties complètement symétrisées en i, j, k (cf. éqs. (14)). Il est facile de vérifier que toutes les traces partielles de ces deux termes sont nulles. L'éq. (16a) est nouvelle, l'éq. (16b) a été déjà donnée dans [5], mais sous une forme erronée, non symétrique par substitution circulaire en ijk, et sans les effets de Coriolis.

4. Problème de fermeture

A coté des termes lents et des termes de destruction (modélisables simultanément, voir [8]), les équations précédentes exigent des fermetures pour les termes complètement symétrisés, M_{ijpq}^*, $Y_{ijpq}^{(4)}$ et $Q_{ijkwq}^{(5)*}$ où :

$$Y_{ijpq}^{(4)} = \int \frac{k_i k_j k_p k_q}{k'} \Phi_{mm}(\mathbf{k})\,\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{17a}$$

$$Q_{ijkwq}^{(5)*} := \tfrac{1}{6}\big[\varepsilon_{its}(M_{jstkwq} + M_{kstjwq}) + \varepsilon_{jts}(M_{kstiwq} + M_{istkwq}) + \varepsilon_{kts}(M_{istjwq} + M_{jstiwq})\big] \tag{17b}$$

De telles fermetures doivent être compatibles avec la distorsion rapide, y compris pour les écoulements rotationnels, mieux qu'au premier ordre $\forall\Omega$, et matériellement indifférentes dans la limite d'écoulements de forte rotation. Le problème irrotationnel à conditions initiales isotropes, est caractérisé par $\mathbf{b} = \mathbf{y}$. Dans ce cas, on peut montrer que *le problème de modélisation dégénère* car $Y_{ijpq}^{(4)} = 3M_{(ijpq)}$. En outre, les fermetures doivent produire des oscillations convenablement amorties dans le cas d'un écoulement de rotation pure et, si possible, restituer au moins qualitativement les tendances à la destruction de l'axisymétrie par la rotation mises en évidence dans [8]. Pour cela, trois fonctionnelles doivent être construites en les retenant dépendantes simultanément des effets « nombre de composantes », liés à $\mathbf{b}$, de dimensionalité ($\mathbf{y}$) et de stropholyse ($\mathbf{Q}^*$). Enfin, et c'est le point le plus délicat, *les fonctionnelles doivent être réalisables*. Pour le terme $\mathbf{M}$, par exemple, dans l'état limite $2C$ en axes principaux de $\mathbf{b}$:

$$M_{1jkp}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*] = 0, \quad b_{1k} = -\tfrac{1}{3}\delta_{1k} \quad \text{et} \quad Q_{i1k} = 0, \quad (\text{alors } Q_{2j3} = Q_{3j2}),\ \forall\mathbf{y}, b_{22}, Q_{222} \text{ et } Q_{333} \tag{18}$$

De même, dans l'état limite 2D, $\partial/\partial x_1 = 0$ (si bien que $T_{11}^{(r)} = 0$, $T_{22}^{(r)} = -T_{33}^{(r)}$), nous avons, en axes principaux de $\mathbf{y}$:

$$M_{ij1q}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*] = 0 \quad \text{lorsque } y_{1k} = -\tfrac{1}{3}\delta_{1k},\ Q_{ij1} = 0,\ \hat{w}_1 = 0,\ \forall\mathbf{b}, y_{22}, Q_{222} \text{ et } Q_{333} \tag{19}$$

Du fait que les relations de trace s'écrivent :

$$Q_{iik}^* = 0; \quad M_{(iipq)} = \tfrac{1}{6}(R_{pq} + Y_{pq}), \quad Y_{iipq}^{(4)} = Y_{pq} \tag{20}$$

Il est possible d'écrire $\mathbf{M}_{(\,)}$ et $\mathbf{Y}^{(4)}$ comme une somme de la *même forme a-priori* de contribution à trace nulle $\mathbf{M}^*$ et d'une contribution inhomogène, $\mathbf{M}^{in}$ ou $\mathbf{Y}^{(4)in}$ satisfaisant (20) :

$$M_{ijpq}^{in} := M_{(ijpq)} - M_{ijpq}^* = \bar{q}^2\big[\tfrac{1}{45}\langle\delta_{ij}\delta_{pq}\rangle + \tfrac{1}{42}\big\langle\delta_{ij}(b_{pq} + y_{pq})\big\rangle\big] \tag{21a}$$

$$Y_{ijpq}^{(4)in} := Y_{ijpq}^{(4)} - M_{ijpq}^* = \bar{q}^2\big[\tfrac{1}{15}\langle\delta_{ij}\delta_{pq}\rangle + \tfrac{1}{7}\langle\delta_{ij}y_{pq}\rangle\big] \tag{21b}$$

Les conditions seront toutes traduites sur $\mathbf{M}^*$ – qui concentre la totalité des informations utiles relatives à $\mathbf{T}^{(r)}$ – plutôt que sur $\mathbf{M}$ et sur $\mathbf{Y}^{(4)}$. On notera que le modèle linéaire (non réalisable) étudié par Kassinos et

Reynolds se réduit à $\mathbf{M}^* = \mathbf{0}$, la dépendance $\mathbf{M}[\mathbf{Q}^*]$ n'étant autre que la contribution présente dans décomposition canonique (13). Enfin, dans le cas rotationnel général, les fermetures concrètes $\mathbf{M}^*$ (distinctes) des termes $\mathbf{M}_{(\,)}$ et $\mathbf{Y}^{(4)}$ sont largement dictées par les contraintes (distinctes) de réalisabilité.

5. Dernières relations

Nous aurons aussi besoin d'un théorème de Cayley–Hamilton pour le tenseur totalement symétrique du troisième ordre $\mathbf{Q}^*$. Formons $Z_{ij} := Q^*_{ijk} X_k$ où $\mathbf{X}$ est un vecteur quelconque. Les invariants de $\mathbf{Z}$ sont :

$$Z_{ii} = 0, \quad \mathrm{II}_Z = -\frac{1}{2} Q^*_{ikm} Q^*_{kin} X_m X_n; \quad \mathrm{III}_Z = \frac{1}{3} Q^*_{tms} Q^*_{lns} Q^*_{ltr} X_m X_n X_r$$

Le polynôme de Cayley–Hamilton pour $\mathbf{Z}$ s'écrit alors pour tout $\mathbf{X}$:

$$X_m X_n X_r \left[Q^*_{ikm} Q^*_{kln} Q^*_{ljr} - \frac{1}{2} Q^*_{kpm} Q^*_{kpn} Q^*_{ijr} - \frac{1}{3} Q^*_{tms} Q^*_{lns} Q^*_{ltr} \delta_{ij} \right] = 0$$

Soit :

$$q^{(5)*}_{ijmnr} - \frac{1}{2} \langle Q^*_{kp\underline{m}} Q^*_{kp\underline{n}} Q^*_{ij\underline{r}} \rangle - \frac{1}{3} \langle Q^*_{t\underline{m}s} Q^*_{l\underline{n}s} Q^*_{lt\underline{r}} \rangle \delta_{ij} = 0 \tag{22}$$

où l'on a posé :

$$q^{(5)*}_{ij\underline{mnr}} := \frac{1}{6} \big(Q^*_{ikm} Q^*_{kln} Q^*_{ljr} + Q^*_{ikn} Q^*_{klr} Q^*_{lmj} + Q^*_{ikr} Q^*_{klm} Q^*_{lnj} + Q^*_{jkm} Q^*_{kln} Q^*_{lir} + Q^*_{jkn} Q^*_{klr} Q^*_{lmi} \\ + Q^*_{jkr} Q^*_{klm} Q^*_{lni} \big)$$

et où l'on a souligné les indices déterminant la partie complètement symétrique. La relation (22) est trivialement satisfaite par la $i - j$ trace,

$$q^{(3)*}_{mnr} := q^{(5)*}_{iimnr} = \langle Q^*_{t\underline{m}s} Q^*_{l\underline{n}s} Q^*_{lt\underline{r}} \rangle.$$

Une autre relation utile, omise pour des raisons de concision, est aussi obtenue à partir de la mn-trace de $\mathbf{q}^{(5)}$. D'autres conditions intéressantes sont obtenues par antisymétrisation partielle de (22).

6. Conclusion

En conclusion, les apports principaux de cette note sont : (i) dans l'examen de la nécessité de recourir aux éqs. (15), (16), pour partie, nouvelles, de la stropholyse symétrisée, (ii) dans l'utilisation de la décomposition canonique et dans la réduction du problème de fermeture au rôle clé de $\mathbf{M}^*$, avec la simple contrainte $\mathbf{Y}^{(4)} = 3\mathbf{M}^*$ pour les écoulements moyens irrotationnels, (iii) du résultat technique (22). L'étude de la réalisabilité de la fermeture pour $\mathbf{M}^*$ fera l'objet d'une note ultérieure.

Références

[1] J.L. Lumley, Computational modeling of turbulent flows, Adv. Appl. Mech. 18 (1978) 123–176.
[2] W.C. Reynolds, S. Kassinos, A one-point model for the evolution of the Reynolds stress and structure tensors in rapidly deformed homogeneous turbulence, Proc. Royal Soc. London A 451 (1995) 87–104.
[3] S. Kida, J.C.R. Hunt, Interaction between different scales of turbulence over short times, J. Fluid Mech. 201 (1989) 411–445.
[4] C. Cambon, L. Jacquin, J.L. Lubrano, Toward a new Reynolds stress model for rotating turbulent flows, Phys. Fluids A 4 (1992) 812–824.
[5] S.C. Kassinos, W.C. Reynolds, A structure-based model for the rapid distorsion of homogeneous turbulence, Thermoscience Division, Dept. Mech. Eng. Report TF-61, Stanford University, 1994.
[6] S.C. Kassinos, W.C. Reynolds, M.M. Rogers, One-point turbulence structure tensors, J. Fluid Mech. 428 (2001) 213–248.
[7] J. Piquet, Turbulent Flows, Springer Verlag, Berlin, 1999.
[8] A. Cadiou, J. Piquet, Modélisation du tenseur des corrélations pression-déformation par une équation de transport, Compt. Rend. Acad. Sci., Ser. IIb 21 (1995) 325–330.