Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 357–364

COMPTES RENDUS MECANIQUE

L'espace articulaire de la Robotique Industrielle est un espace vectoriel

Bertrand Tondu

Laboratoire d'étude des systèmes informatiques et automatiques, institut national de sciences appliquées, campus de Rangueil, 31077 Toulouse, France

Reçu le 14 octobre 2002 ; accepté après révision le 19 février 2003

Présenté par Pierre Perrier

Résumé

La modélisation mathématique des robots industriels est fondée sur la nature vectorielle de l'espace articulaire à n dimensions du robot défini comme chaîne cinématique à n degrés de liberté. Or, à notre avis, la nature vectorielle de cet espace articulaire n'a pas été suffisamment discutée dans la littérature. Nous établissons la nature vectorielle de l'espace articulaire de la robotique industrielle à partir des études fondamentales de B. Roth sur les vissages. ***Pour citer cet article : B. Tondu, C. R. Mecanique 331 (2003).***

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Industrial Robotics joint space is a vector space. The mathematical modelling of industrial robots is based on the vectorial nature of the n-dimensional joint space of the robot, defined as a kinematic chain with n degrees of freedom. However, in our opinion, the vectorial nature of the joint space has been insufficiently discussed in the literature. We establish the vectorial nature of the joint space of an industrial robot from the fundamental studies of B. Roth on screws. ***To cite this article: B. Tondu, C. R. Mecanique 331 (2003).***

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Robotique ; Robotique industrielle ; Espace articulaire ; Preuve de Roth

Keywords: Robotics; Industrial robotics; Joint space; Roth's proof

Abridged English version

An industrial robot is typically an open kinematic chain of $n+1$ rigid links $C_{i,\ 0\leqslant i\leqslant n}$, where C_0 is the robot fixed base, C_n is the robot end-effector, and the kinematic pairs $(C_{i-1}, C_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ are linked by means of one degree of freedom rotoïd or prismatic joints of axis $L_{i,\ 1\leqslant i\leqslant n}$ with the associated joint variable $q_{i,\ 1\leqslant i\leqslant n}$ (Fig. 1). The joint configuration of the robot can thus naturally be defined by the data of n joint variable values

Adresse e-mail : Bertrand.Tondu@insa-tlse.fr (B. Tondu).

1631-0721/03/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-0721(03)00074-3

as emphasized in R. Paul's fundamental book [1]. Recent Robotics books, however, introduce the notion of joint vector $\boldsymbol{q} = [q_1, \ldots, q_n]^{\mathrm{T}}$, which implies to consider joint space as a n-dimensional vector space [2–4]. The vector nature of joint space is fundamental for the kinematic modelling of robots and we think that this question has not been discussed thoroughly enough in Robotics literature.

The analysis of the joint space considered as a vector space must highlight a commutative internal additive law. Because joint space is the control space of the robot, the combination of the n joint controls defining the robot control as the 'sum' of the n elementary joint controls, written in Eq. (1), can be naturally regarded as an internal law. Due to the kinematic chain structure of the robot, this additive law expresses the composition of joint motions, and its commutativity '$[\ldots q_i \ldots]^{\mathrm{T}} + [\ldots q_j \ldots]^{\mathrm{T}} = [\ldots q_j \ldots]^{\mathrm{T}} + [\ldots q_i \ldots]^{\mathrm{T}}$ would mean that performing joint motion q_i before joint motion q_j leads to the same robot tool position and orientation in space as performing joint motion q_j before joint motion q_i. Once this specific commutativity is proved, the nature of joint space considered as a vector space can be determined.

Its analysis will be developed by means of displacement homogeneous matrices, which are used regularly in Robotics. The notion of common normal to two successive joint axes of the robot leads to the classical Denavit–Hartenberg parametrization, which states that it is possible to associate a frame R_i to each robot link C_i and thus the motion of link C_i in relation to C_{i-1} can be mathematically expressed by the displacement of frame R_{i-1} into frame R_i. This displacement can be represented by a 4×4 homogeneous transformation matrix, which historically has been called a matrix $\boldsymbol{A}$; we will specify it a Denavit–Hartenberg matrix and we will note it $\boldsymbol{A}_i(q_i)$. Here we only need to know that this matrix has the form $\boldsymbol{D} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]$ where $\boldsymbol{R}$ is a 3×3 vector rotation matrix, $\boldsymbol{t}$ is a 3 dimension vector and $\mathbf{0}$ is the row matrix $[0\,0\,0]$, which generalizes the notion of base change matrix into the notion of frame change matrix $\boldsymbol{D} = \left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}' & \overrightarrow{OO'} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ where $(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$ is the base associated to the frame (O', X', Y', Z') transformed by displacement of matrix $\boldsymbol{D}$.

The robot control requires the composition of the displacements achieved by means of the product of corresponding homogeneous matrices. The question is then to understand how joint motions can be commutative for locating the robot tool although the composition of displacement matrices is not commutative. To solve the problem, we emphasize the importance of '*Roth's proof*' which establishes the commutativity of two affine rotations whose axes are rigidly linked, and generalizes the result to the case of two screws. As illustrated in Figs. 2(a) and 2(b), B. Roth compares the result of the rotation about $\$_{\boldsymbol{B}}$ followed by the rotation about $\$_{\boldsymbol{A}}$ with the reverse sequence. If we call $\boldsymbol{A}$ the matrix of rotation about $\$_{\boldsymbol{A}}$ and $\boldsymbol{B}$ the matrix of rotation about $\$_{\boldsymbol{B}}$ in the fixed frame (O, X, Y, Z), the rotation sequence about $\$_{\boldsymbol{B}}$ then about $\$_{\boldsymbol{A}}$ is defined by matrix $\boldsymbol{AB}$. If the reverse sequence is considered, after the first rotation $\$_{\boldsymbol{A}}$, the axis $\$_{\boldsymbol{B}}$ is in a new position $\$_{\boldsymbol{B}_2}$. Remarking that $\boldsymbol{B}$ is the matrix of the rotation $\$_{\boldsymbol{B}_2}$ in the frame (O', X', Y', Z') resulting of the rotation of fixed frame (O, X, Y, Z) about $\$_{\boldsymbol{A}}$, and since $\boldsymbol{A}^{-1}$ is the frame change matrix from (O', X', Y', Z') into (O, X, Y, Z), the matrix $\boldsymbol{B}_2$ of rotation about $\$_{\boldsymbol{B}_2}$, expressed in the frame (O, X, Y, Z), can be determined as a similarity transformation $\boldsymbol{B}_2 = (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{ABA}^{-1}$. Consequently, the result of the rotation about $\$_{\boldsymbol{A}}$ followed by the rotation about $\$_{\boldsymbol{B}}$ is defined by matrix $(\boldsymbol{ABA}^{-1})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AB}$, which establishes the commutativity of the considered rotations. We show that the fundamental result of Roth's proof, never cited in Robotics manuals, can be extended to the kinematic chain of an n d.o.f. industrial robot. Let us consider two given axes L_i and L_j, $i \neq j$, of the robot kinematic chain. For analysing the commutativity of L_i and L_j joint displacements, we can assume that all other joint variables are zero. Therefore, axes L_i and L_j are rigidly linked as axes L_1 and L_i, axes L_j and L_n. The demonstration of B. Roth applies directly by substituting L_i to $\$_{\boldsymbol{A}}$, L_j to $\$_{\boldsymbol{B}}$, and the robot end-effector to the considered mobile system driven by axis $\$_{\boldsymbol{B}}$, as illustrated in Fig. 2(c). It follows that joint space is a vector space. However robot joint displacement commutativity does not imply robot joint motion commutativity since the robot tool motion depends on the order of joint motion controls.

Finally it is important to stress that to demonstrate the vector nature of the robot joint space we needed the classical product of mappings achieved by the premultiplication of corresponding homogeneous matrices $\boldsymbol{D}_{i,\ 1 \leqslant i \leqslant n}$. The location of the robot tool in the task space referred to a reference frame attached to the robot base, in the form of matrix $\boldsymbol{T}_n$, is given by the relationship: $\boldsymbol{T}_n = \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2 \cdots \boldsymbol{D}_{n-1}\boldsymbol{D}_n$. Because determining matrices $\boldsymbol{D}_i$ is rather difficult in practice, the kinematics modelling of robots is based on the product transformation of successive frame changes (that can be called 'relative product transformation' and achieved by the postmultiplication of corresponding homogeneous matrices as opposed to the classical 'absolute product transformation') leading to the fundamental relationship: $\boldsymbol{T}_n = \boldsymbol{A}_1(q_1)\boldsymbol{A}_2(q_2)\cdots\boldsymbol{A}_{n-1}(q_{n-1})\boldsymbol{A}_n(q_n)$. We think that this fundamental and neat result in Industrial Robotics has masked the importance of Roth's proof to ensure the commutativity of joint displacements.

1. Introduction

La robotique industrielle vise la réalisation de tâches globalement analogues à celles que l'opérateur humain effectue avec ses bras en substituant à ceux-ci un bras artificiel unique, à poste fixe mais à large champs d'action, dont l'organe terminal porte l'outil propre à la tâche. Un tel bras artificiel est un ensemble de corps connectés en une chaîne cinématique par l'intermédiaire d'articulations qui sont, essentiellement, des liaisons à 1 degré de liberté (d.d.l.) de type pivot ou glissière, encore qualifiées en robotique de liaisons rotoïdes et prismatiques.[1] Un robot industriel est donc, typiquement, une chaîne cinématique simple de $n+1$ corps, généralement rigides, $C_{i,\ 0\leqslant i\leqslant n}$, dont le corps C_0 constitue la base fixe, le corps C_n l'organe terminal et dont les couples cinématiques $(C_{i-1}, C_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont articulés par l'intermédiaire de liaisons $L_{i,\ 1\leqslant i\leqslant n}$ caractérisées par leur axe de rotation ou de translation auxquels on associe une variable articulaire $q_{i,\ 1\leqslant i\leqslant n}$ (Fig. 1). La configuration articulaire d'un robot industriel à n liaisons est donc naturellement définie par l'ensemble des valeurs données aux n variables articulaires correspondantes, comme le souligne R. Paul dans son ouvrage fondamental [1]. Cependant, les ouvrages plus récents de robotique introduisent la notion de vecteur articulaire, noté $\boldsymbol{q}$, défini comme l'entité regroupant les n variables articulaires $q_{i,\ 1\leqslant i\leqslant n}$. L'espace articulaire est alors défini comme l'espace vectoriel à n dimensions des vecteurs articulaires [2–4].

Or, selon nous, la nature vectorielle de cet espace articulaire de la robotique industrielle n'a pas été suffisamment discutée. Pourtant cette question est fondamentale pour la commande des robots qui est basée sur l'élaboration et la résolution de l'équation géométrique fondamentale f mettant en relation le « vecteur » articulaire $\boldsymbol{q}$ et la situation $\boldsymbol{x}$ de l'outil regroupant position cartésienne et orientation au sein de ce qu'on appelle l'espace de la tâche : $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{q})$.

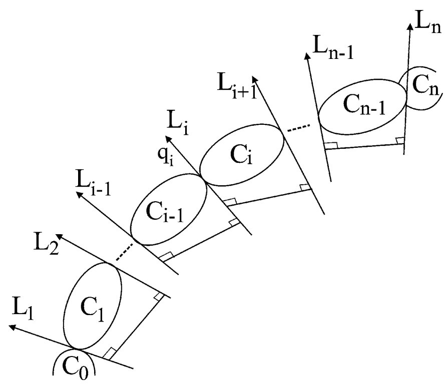

Fig. 1. Le robot industriel en tant que chaîne cinématique simple de corps liés par des liaisons axiales dont les normales communes sont à la base de sa modélisation géométrique.

Fig. 1. The industrial robot, described as a simple kinematic chain linked axially, for which the common normals form the basis of the geometric model.

[1] Cette restriction du choix des articulations du robot à des liaisons à 1 d.d.l., dont on peut trouver l'origine dans la simplicité de conception mécanique et de motorisation qui en découle, n'est, cependant, pas un handicap pour la robotique industrielle puisque toute articulation à n d.d.l. (par exemple une rotule) peut être décomposée en n articulations à 1 d.d.l.

La résolution de cette relation fondamentale conduit à l'équation $\boldsymbol{q} = f^{-1}(\boldsymbol{x})$, où $\boldsymbol{q}$ apparaît comme l'ensemble des commandes articulaires assurant – dans les limites mécaniques du robot – la réalisation d'un mouvement imposé à l'outil dans l'espace de la tâche. De ce point de vue, la nature vectorielle de l'espace articulaire de commande est essentielle pour la validité des modèles mathématiques de la robotique. Nous cherchons à en établir la nature dans le cadre de cette Note.

2. Définition de la loi interne de l'espace articulaire

Soit un robot industriel à n liaisons rotoïdes ou prismatiques. La commande de ce robot peut être naturellement définie comme l'opération consistant à donner aux n variables articulaires, $q_{i,\ 1\leqslant i\leqslant n}$, n valeurs définies par rapport à un zéro articulaire arbitraire. L'entité $\boldsymbol{q}$ regroupant les n variables articulaires est donc, à la fois, l'ensemble des coordonnées généralisées de la chaîne cinématique définissant une configuration articulaire donnée et la commande qui fait passer le robot de sa configuration articulaire zéro à la configuration articulaire considérée. Or, supposer que cette entité $\boldsymbol{q}$ est un vecteur signifie qu'elle est élément d'un espace vectoriel disposant d'une loi interne lui conférant une structure de groupe commutatif. Si tel est le cas, et si l'on associe à cette loi interne la loi externe définie comme la multiplication des n variables articulaires par un même scalaire réel, on confère à l'espace articulaire une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il apparaît naturel de considérer comme loi interne de l'espace articulaire la combinaison des n commandes articulaires définissant la commande du robot comme la « somme » des n commandes articulaires élémentaires :

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q_2 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \\ q_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

Du fait même de la structure de chaîne cinématique du robot, cette loi additive se traduit physiquement par la composition des mouvements articulaires : la somme '$[0, \ldots, 0, q_i, 0, \ldots, 0] + [0, \ldots, 0, q_j, 0, \ldots, 0]$' signifie par conséquent la composition du mouvement articulaire d'axe L_i, de variable q_i, avec le mouvement articulaire d'axe L_j, de variable q_j. La définition du robot industriel implique que cette composition opère sur des rotations et translations de l'espace. Elle profite donc des propriétés du groupe des déplacements de l'espace. Mais, au sein de ce groupe, la propriété de commutativité fait défaut. Cette commutativité de la loi interne est essentielle pour la mathématisation vectorielle du robot industriel mais également pour le fonctionnement même du robot. Dire que la loi interne est commutative signifie, en effet, que la réalisation du mouvement articulaire q_i précédant celle du mouvement articulaire q_j conduit à la même situation $\boldsymbol{x}$ de l'outil que la réalisation du mouvement q_j précédant celle du mouvement q_i. Autrement dit, la commutativité de cette loi interne assure que la mise en position et en orientation de l'outil du robot est indépendante de l'ordre dans lequel sont passées les commandes articulaires. L'outil des matrices homogènes de déplacement tel que la robotique industrielle en fait usage va nous permettre de développer l'étude de cette propriété de commutativité.

3. Représentation géométrique du robot à l'aide des matrices de déplacement

Fondée sur la notion de normale commune aux axes successifs, la très classique paramétrisation de Denavit–Hartenberg conduit à une modélisation géométrique de la chaîne du robot associant systématiquement à chaque corps C_i un repère $R_i = (O_i, X_i, Y_i, Z_i)$. Le mouvement de C_i par rapport à C_{i-1} se traduit alors mathématiquement par le déplacement du repère R_{i-1} en le repère R_i que l'on peut représenter sous la forme d'une matrice homogène 4×4 appelée parfois matrice de Denavit–Hartenberg et que nous noterons plus loin $\boldsymbol{A}_i(q_i)$. Dans le cadre de cette note, il nous suffit de savoir que cette matrice a la forme générale $\boldsymbol{D} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \hline \boldsymbol{0} & 1 \end{array}\right]$ où $\boldsymbol{R}$ est une matrice 3×3 de rotation vectorielle, $\boldsymbol{t}$ est un vecteur de l'espace vectoriel à trois dimensions et $\boldsymbol{0}$ la matrice ligne [0 0 0]. De telles matrices opèrent sur les coordonnées homogènes d'un vecteur point $\boldsymbol{u}$ sous la forme $[\boldsymbol{u}\ 1]^{\mathrm{T}}$,[2] ou sur les coordonnées d'un vecteur direction $\boldsymbol{u}$ sous la forme $[\boldsymbol{u}\ 0]^{\mathrm{T}}$. Les matrices homogènes de déplacement forment un groupe de représentation matricielle des déplacements de l'espace.

La commande du robot met en œuvre la composition de ces déplacements traduite par le produit matriciel des matrices homogènes correspondantes. Cependant, la non-commutativité des déplacements dans l'espace implique de prendre en considération leur ordre de succession. De manière classique, la composition du déplacement de matrice homogène $\boldsymbol{D}_2$ suivi du déplacement de matrice homogène $\boldsymbol{D}_1$, définis dans le repère de référence $\Re = (O, X, Y, Z)$, a pour matrice correspondante $\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2$. Mais on peut introduire une seconde interprétation de ce produit matriciel fondée sur la compréhension de toute matrice homogène de déplacement comme matrice de changement de repère $\Re = (O, X, Y, Z)$ en $R' = (O', X', Y', Z')$ où $\boldsymbol{t} = \overrightarrow{OO'}$ et $\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{i}'\ \boldsymbol{j}'\ \boldsymbol{k}']$, $(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$ étant la base associée au repère (O', X', Y', Z') dont les vecteurs sont exprimés dans la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ associée au repère (O, X, Y, Z). Si nous considérons alors deux changements successifs de repères réalisés, respectivement, par les matrices de déplacement $\boldsymbol{D}_1$ générant le repère R_1 à partir du repère de référence R, et $\boldsymbol{D}_2$ générant le repère R_2 à partir de R_1, le produit matriciel $\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2$ représente la matrice de ce changement global de repère R en R_2. Nous appellerons « composition relative » ce mode de composition par opposition à la composition classique des applications que nous appellerons « composition absolue ».

Or, la relation fondamentale de la robotique est fondée sur ce mode de « composition relative ». La position et l'orientation de l'organe terminal C_n du robot par rapport au repère fixe R_0 peuvent, en effet, être exprimées sous la forme d'une matrice homogène $\boldsymbol{T}_n$ définissant la situation du repère R_n dans R_0. En ayant recours aux matrices de Denavit–Hartenberg $\boldsymbol{A}_i(q_i)$, la matrice $\boldsymbol{T}_n$ peut être déterminée comme le résultat des n changements successifs de repère qui s'exprime par le produit matriciel « à droite » des $\boldsymbol{A}_i(q_i)$:

$$\boldsymbol{T}_n = \boldsymbol{A}_1(q_1)\mathrm{A}_2(q_2)\cdots\boldsymbol{A}_{n-1}(q_{n-1})\boldsymbol{A}_n(q_n) \tag{2}$$

Cette relation géométrique fondamentale de la robotique est particulièrement puissante par le lien qu'elle institue entre espace articulaire et espace de la tâche. Elle constitue une expression explicite de la relation $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{q})$ en représentant $\boldsymbol{x}$ sous la forme de la matrice $\boldsymbol{T}_n$ et conduit à une résolution analytique de la relation de commande $\boldsymbol{q} = f^{-1}(\boldsymbol{x})$ [1]. Elle masque cependant le problème fondamental de la nature vectorielle de l'espace articulaire en laissant de côté la question de l'influence de l'ordre de réalisation des n commandes articulaires.

4. Commutativité des déplacements articulaires au sein de la chaîne cinématique des robots industriels

Dans une étude de synthèse sur les vissages, B. Roth [5,6] établit la commutativité de deux rotations affines dont les axes sont liés de façon rigide (c'est-à-dire leur distance et leur inclinaison sont fixes) en faisant appel à la notion de transformation de similitude.[3] Le qualificatif de « *preuve de Roth* » a été introduit par certains biomécaniciens dans leurs études des systèmes de coordonnées appliqués à la physiologie des membres locomoteurs [8–10]. Par contre cette référence à la preuve de Roth est, à notre connaissance, ignorée des auteurs actuels d'ouvrages de robotique.[4]

---

[2] Un point P de l'espace affine euclidien sera représenté par un vecteur $\boldsymbol{u}$ lié à l'origine O du repère de référence tel que $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{OP}$ et sera appelé vecteur point ; les vecteurs libres de l'espace seront appelés vecteurs direction.

[3] Rappelons que deux matrices $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont semblables s'il existe une matrice carrée inversible $\boldsymbol{P}$ telle que $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{P}$. Nous qualifierons la transformation de $\boldsymbol{M}$ en $\boldsymbol{N}$ de transformation de similitude (« similarity transformation » [7]). Par ailleurs, rappelons que la notion de matrice semblable peut être associée à l'expression du changement de base d'une application linéaire dans un espace vectoriel. On peut facilement appliquer cette notion aux matrices homogènes de déplacement. Soit un déplacement de l'espace de matrice homogène $\boldsymbol{B}$ dans un repère R et de matrice $\boldsymbol{B}'$ dans un second repère R' ; notons $\boldsymbol{A}$ la matrice homogène de changement de repère R en R' ; on a alors $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ (3).

[4] Il est important de noter que, de manière surprenante, B. Roth lui-même ne mentionne pas sa preuve dans ses travaux postérieurs de Robotique (voir, par exemple, [11–13]). Dans son traité classique de *Cinématique Théorique* [14] il mentionne son travail sur les vissages (p. 371) sans le relier, cependant, au concept de robot.

Soit $\$_{\boldsymbol{A}}$ et $\$_{\boldsymbol{B}}$ deux axes de rotations affines rigidement liés, de matrices homogènes correspondantes $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ dans un repère de référence fixe (les notations sont celles de B. Roth). On considère, en outre, que l'axe $\$_{\boldsymbol{B}}$ entraîne un ensemble de points appelé système mobile. Roth suppose tout d'abord que la rotation d'angle θ autour de l'axe $\$_{\boldsymbol{B}}$ de matrice $\boldsymbol{B}$ dans le repère fixe est réalisée avant la rotation d'angle ϕ autour de l'axe $\$_{\boldsymbol{A}}$ de matrice $\boldsymbol{A}$ dans le repère fixe, comme illustré Fig. 2(a) pour un point P du système mobile transformé d'abord en P' par la matrice $\boldsymbol{B}$ puis en P'' par la matrice $\boldsymbol{A}$. Le déplacement total du système mobile, défini comme la « composition absolue » de ces deux rotations réalisées dans le repère fixe a, par conséquent, pour matrice homogène $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{AB}$. Si, à présent, nous considérons que la rotation d'axe $\$_{\boldsymbol{A}}$ est réalisée en premier l'axe $\$_{\boldsymbol{B}}$ se retrouve, à l'issue de cette première rotation, dans une nouvelle position $\$_{\boldsymbol{B}_2}$. L'idée fondamentale de B. Roth est de dire que la nouvelle matrice $\boldsymbol{B}_2$ de rotation d'angle θ autour de l'axe $\$_{\boldsymbol{B}_2}$ dans le repère fixe peut être déterminée par une transformation de similitude. Du fait de l'hypothèse d'un lien rigide entre les axes $\$_{\boldsymbol{A}}$ et $\$_{\boldsymbol{B}}$, la rotation d'angle θ autour de l'axe $\$_{\boldsymbol{B}_2}$ est exprimée par la matrice $\boldsymbol{B}$ dans le repère (O', X', Y', Z') résultant de la rotation d'angle ϕ autour de l'axe $\$_{\boldsymbol{A}}$ du repère fixe noté (O, X, Y, Z) (Fig. 2(b)). Puisque $\boldsymbol{A}^{-1}$ est la matrice de changement de repère (O', X', Y', Z') en le repère (O, X, Y, Z), l'équation de transformation de similitude (3) (note 3) conduit à la relation : $\boldsymbol{B}_2 = (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$. Par conséquent, la « composition absolue » correspondante a pour matrice homogène $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}$ qui est bien identique à l'expression de $\boldsymbol{T}$ obtenue précédemment. B. Roth note que la preuve conduite avec des rotations peut être appliqué aux autres types de déplacement, ce qui se comprend facilement puisque tout déplacement est associé à un axe de translation pure, de rotation pure ou de vissage et peut être exprimé par une matrice homogène. Ces déplacements chaînés dont la commutativité est fondée sur une équation de transformation de similitude sont qualifiés par B. Roth de « similarity-transformation motion » c'est-à-dire de mouvements liés par une transformation de similitude.

La preuve de Roth établit la commutativité des déplacements au sein d'une chaîne cinématique à deux corps. Examinons, à présent, le cas d'un robot industriel défini, selon le schéma de la Fig. 1, comme une chaîne cinématique de n axes en translation ou en rotation *rigidement liés par leurs normales communes*. Considérons au sein de cette chaîne deux déplacements quelconques d'axes L_i et L_j, $i \neq j$, de variables articulaires q_i et q_j respectivement, et supposons que les autres axes ne soient pas commandés (i.e., $q_k = 0$ pour $k \neq i$ et $k \neq j$). Les axes L_i et L_j sont alors rigidement liés par une normale commune, comme le sont également les axes L_1 et L_i et les axes L_j et L_n (voir Fig. 2(c)). La preuve de Roth s'applique alors directement à l'analyse de la commutativité des déplacements d'axes L_i et L_j en substituant au vissage d'axe $\$_{\boldsymbol{A}}$ la translation ou rotation d'axe L_i, et au vissage d'axe $\$_{\boldsymbol{B}}$ la translation ou rotation d'axe L_j, et au système mobile l'organe terminal du robot, comme on l'illustre Fig. 2(c) dans le cas d'axes de rotation. La preuve de Roth permet ainsi d'établir la commutativité des déplacements d'axes L_i et L_j et, de façon générale, la commutativité de l'ensemble des déplacements au sein de la chaîne cinématique du robot que nous qualifierons de « commutativité des déplacements articulaires ». La nature vectorielle de l'espace articulaire du robot est la conséquence de cette commutativité spécifique.

Notons $\boldsymbol{D}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, la matrice homogène, de translation ou de rotation, d'axe L_i et de variable q_i, définie dans un repère fixe que nous noterons R_0, et supposons que les n déplacements soient réalisés dans l'ordre de n vers 1, c'est-à-dire que le déplacement d'axe L_n est effectué en premier, suivi par le déplacement d'axe $L_{n-1} \ldots$ jusqu'au déplacement final d'axe L_1. La « composition absolue » de ces n déplacements a pour matrice homogène $\boldsymbol{T}_n$ donnée par :

$$\boldsymbol{T}_n = \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2 \cdots \boldsymbol{D}_{n-1}\boldsymbol{D}_n \tag{4}$$

La propriété de similitude des déplacements au sein de la chaîne cinématique assure la validité de cette équation pour toute autre séquence d'ordre des commandes articulaires. Par ailleurs, il est important de remarquer que cette même équation peut être interprétée comme une « composition relative » au sens où nous l'avons définie précédemment. Chaque matrice $\boldsymbol{D}_i$ peut, en effet, être vue comme la matrice de changement de repère R_{i-1} en R_i, où R_i désigne le repère transformé de R_{i-1} par le déplacement d'axe L_i (le repère R_0 désignant le repère fixe). Or, la construction de $\boldsymbol{T}_n$ à partir des matrices $\boldsymbol{D}_i$ définies dans le repère fixe n'est pas facile à mettre en oeuvre du fait de la complexité d'écriture des rotations affines. Il est, par contre, plus aisé de construire $\boldsymbol{T}_n$ comme

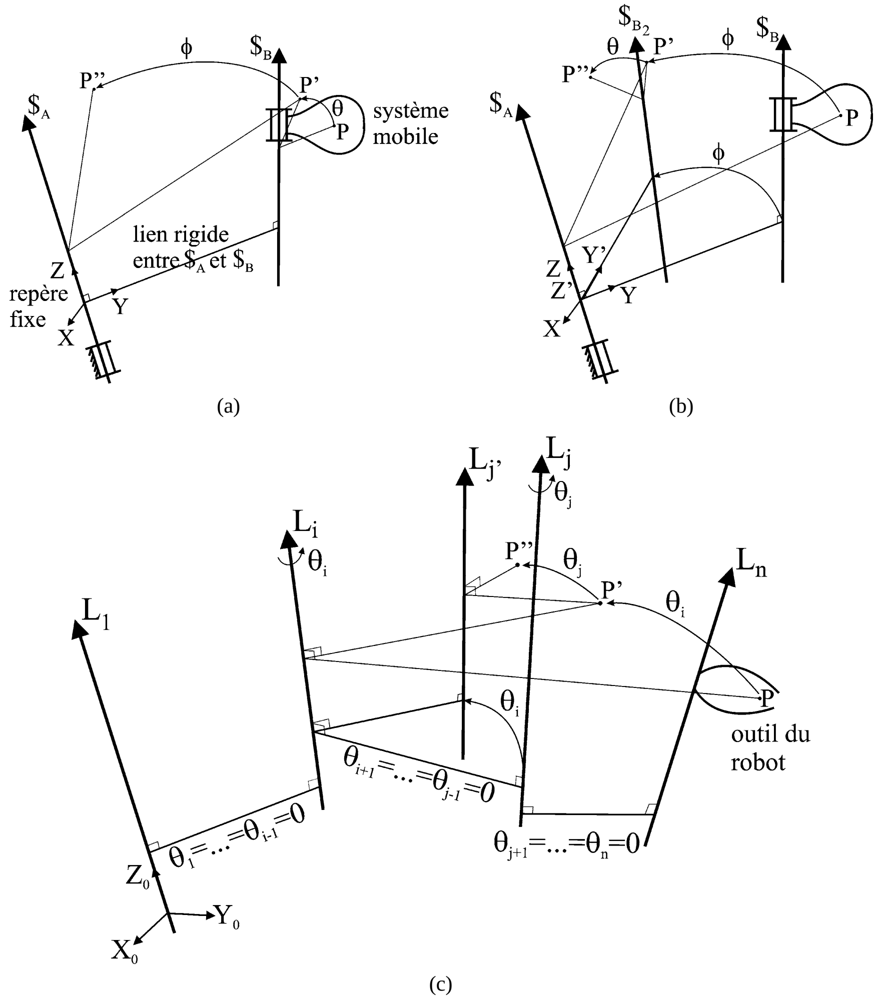

Fig. 2. Commutativité des déplacements articulaires au sein de la chaîne cinématique du robot (voir explications dans le texte) : (a) et (b) analyse de la notion de « mouvement par transformation de similitude » de B. Roth (les notations sont celles de Roth), (c) extension de la preuve de Roth à la chaîne cinématique d'un robot industriel.

Fig. 2. Commutativity of the joint movements in the kinematic chain of the robot (see explanation in the text): (a) and (b) show Roth's notion of 'movement by similitude transformation' (the notation is that of Roth); (c) extension of Roth's proof to the kinematic chain of an industrial robot.

une « composition relative » de rotations et de translations définies par rapport aux axes principaux d'un repère courant. La paramétrisation de Denavit–Hartenberg rend possible cette « composition relative » en associant les repères courants R_i aux normales communes (le repère R_i est alors placé à l'intersection de la normale commune aux axes L_i et L_{i+1} avec l'axe L_{i+1} [1] ou avec l'axe L_i [2]). On peut alors passer de l'Éq. (4) à l'Éq. (2) de la modélisation géométrique du robot $\boldsymbol{T}_n = \boldsymbol{A}_1(q_1)\boldsymbol{A}_2(q_2)\cdots\boldsymbol{A}_{n-1}(q_{n-1})\boldsymbol{A}_n(q_n)$ en substituant à $\boldsymbol{D}_i$, grâce à l'associativité du calcul matriciel, la matrice de Denavit–Hartenberg $\boldsymbol{A}_i(q_i)$ intégrant la translation ou la rotation d'axe L_i de variable articulaire q_i. Ces deux expressions identiques de la modélisation géométrique du robot possèdent naturellement la même propriété de commutativité des déplacements articulaires de variable q_i. Cette commutativité des déplacements articulaires assure l'indifférence du robot à l'ordre des commandes articulaires pour la réalisation d'une situation donnée de l'outil, en position et en orientation, dans l'espace de la tâche, mais il est important de noter qu'elle n'entraîne nullement la commutativité des commandes articulaires au sens où la trajectoire suivie par l'outil dans l'espace de la tâche reste dépendante de l'ordre d'exécution des mouvements articulaires commandés. Ce fait n'est pas lié à la nature vectorielle de l'espace articulaire du robot mais à la nature spécifique du robot en tant que machine à n variables de commande.

5. Conclusion

La modélisation géométrique des robots est fondée sur la paramétrisation de Denavit–Hartenberg et la relation matricielle qui en découle établissant le passage entre espace articulaire et espace de la tâche sous la forme d'une composition de changements de repères successifs. Nous pensons que l'élégance de ce résultat essentiel de la robotique industrielle a masqué la question fondamentale de la nature vectorielle de l'espace articulaire. Nous avons cherché, dans le cadre de cette note, à dériver la nature vectorielle de l'espace articulaire des travaux de B. Roth sur la composition de deux vissages dont les axes sont rigidement liés, et dont il établit la commutativité en faisant appel à la relation de similitude liant les matrices homogènes de déplacement dans des repères différents. La preuve de Roth se généralise naturellement à la structure du robot industriel défini essentiellement comme une chaîne cinématique simple d'axes de rotation ou de translation rigidement liés par leurs normales communes. Le robot articulé par ses liaisons mono-axiales surmonte ainsi la non-commutativité des déplacements spatiaux. Bien que la trajectoire de l'outil du robot dans l'espace de la tâche est dépendante de l'ordre de commande des mouvements de ses n articulations, le positionnement final de l'outil est indépendant de cet ordre, ce qui assure une véritable simplicité d'usage de la machine, notamment lors de l'apprentissage de points de la tâche. De ce point de vue, le robot s'oppose aux systèmes locomoteurs naturels dont les articulations sont fondamentalement des liaisons à plusieurs d.d.l. ne bénéficiant pas de cette commutativité spécifique, comme l'illustre les interrogations scientifiques sur la manière dont le cerveau contrôle les rotations non-commutatives de la rotule oculaire [15].

Remerciements

Je tiens à remercier Philippe Coiffet pour ses précieux conseils lors de la relecture de cette Note.

Références

[1] R.P. Paul, Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control, MIT Press, Cambridge, MA, 1981.
[2] J.J. Craig, Introduction to Robotics. Mechanics and Control, Second edition, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
[3] T. Yoshikawa, Foundations of Robotics, MIT Press, Cambridge, MA, 1990.
[4] W. Khalil, E. Dombre, Modélisation, Identification et Commande des Robots, Seconde édition, Hermes Science, Paris, 1999.
[5] B. Roth, The kinematics of motion through finitely separated positions, ASME J. Appl. Mech. Ser. E 34 (3) (1967) 591–598.
[6] B. Roth, Finite-position theory applied to mechanism synthesis, ASME J. Appl. Mech. Ser. E 34 (3) (1967) 599–605.
[7] A. Pettofrezo, Matrices and Transformations, Prentice-Hall, 1966; Réimprimé par Dover, New York, 1978.
[8] W.J. Suntay, E.S. Grood, F.R. Noyes, D.L. Butler, A coordinate system for describing joint positions, Adv. Bioengrg. (1978) 59–62.
[9] E.Y.S. Chao, Justification of triaxial goniometer for the measurement of joint rotation, J. Biomech. 13 (1980) 989–1006.
[10] E.S. Grood, W.J. Suntay, A joint coordinate system for the clinical description of three-dimensional motions: application to the knee, ASME J. Biomech. Engrg. 105 (2) (1983) 136–144.
[11] D.L. Pieper, B. Roth, The kinematics of manipulators under computer control, in: Proc. of 2nd Int. Conf. on the Theory of Machines and Mechanisms, Warsaw, September 1969, pp. 159–168.
[12] B. Roth, Robots, Appl. Mech. Rev. 31 (11) (1978) 1511–1519.
[13] B. Roth, Robots – state of the art in regard to mechanisms theory, ASME J. Mechanisms Transmission and Automation in Design 105 (1) (1983) 11–12.
[14] O. Bottema, B. Roth, Theoretical Kinematics, North-Holland, 1990; Réimprimé chez Dover, New York .
[15] A. Berthoz, Le sens du Mouvement, Odile Jacob, Paris, 1997, p. 162.