



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 295–302



Un modèle discret du couplage entre les fils dans une structure tissée

Bilel Ben Boubaker^{a,*}, Bernard Haussy^a, Jean-François Ganghoffer^b

^a ESEO, 4, rue Merlet de la Boulaye, BP 926, 49009 Angers cedex 01, France

^b LEMTA, UMR 7563, ENSEM, 2, avenue de la Forêt de Haye, BP 160, 54504 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

Reçu le 2 décembre 2002 ; accepté après révision 4 mars 2003

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

L'objectif de cette Note est de modéliser le couplage entre les fils chaîne et trame d'une structure tissée d'armure toile, et d'en analyser l'impact en terme de courbe de traction unidirectionnelle. A partir d'un modèle discret d'une structure tissée établi à l'échelle mésoscopique par une formulation variationnelle, on introduit l'effet des forces de contact du fil transverse, dont on évalue l'énergie potentielle associée. La forme initiale du fil, décrit par une poutre plane ondulée supposé périodique à l'échelle mésoscopique, est décrite par un développement en série de Fourier. On exprime les coefficients de la série en fonction de la force de contact, supposée s'exercer au sommet des ondulations, ainsi que des propriétés mécaniques du fil sollicité. La force de contact est ensuite exprimée en fonction des caractéristiques mécaniques du fil transverse, et du déplacement vertical du point de contact. L'énergie potentielle de couplage alors construite, en supposant la continuité du déplacement aux points de contact. La forme d'équilibre du fil sollicité en traction est obtenue numériquement par minimisation de l'énergie potentielle totale. La courbe de traction simulée reproduit de façon satisfaisante le comportement mesuré ; on analyse les contributions respectives des effets de flexion et d'extension du fil. La prise en compte du couplage a pour effet de rigidifier la réponse du fil ; on montre l'effet des paramètres géométriques et mécaniques du fil transverse. *Pour citer cet article : B. Ben Boubaker et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A discrete model for the coupling between the yarns in a woven fabric. The coupling between yarns in a piece of fabric has been analysed at the mesoscopic scale, in terms of its impact on the macroscopic unidirectional behaviour. Starting from a discrete model of a woven structure associated to a variational formulation of the equilibrium of the structure, the coupling between both yarns is introduced, the potential energy of which is calculated. The initial shape of the yarn, represented by a planar undulated beam supposed to be periodic, is described by a Fourier series. The coefficients of the series are expressed vs. the contact force exerted at the top of the undulations, and vs. the mechanical properties of the solicited yarn. The contact force is then expressed vs. the mechanical properties of the transverse yarn and vs. the vertical displacement of the contact point. The potential energy of the coupling is then built, assuming the continuity of the displacement at the contact points. The

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : bilel.ben_boubaker@eseo.fr (B. Ben Boubaker), bernard.haussy@eseo.fr (B. Haussy), jfgangho@ensem.inpl-nancy.fr (J.-F. Ganghoffer).

equilibrium shape of the yarn submitted to unidirectional traction is obtained numerically as the minimum of the total potential energy. The simulated traction curve reproduces in a satisfactory manner the observed behaviour. The respective contributions of the flexional and extensional effects of the yarn are analysed. The consideration of the coupling enhances the rigidity of the response of the yarn; one demonstrates the effect of the geometrical and mechanical parameters of the transverse yarn. **To cite this article: B. Ben Boubaker et al., C. R. Mecanique 331 (2003).**

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Mots-clés : Solides et structures ; Structures tissées ; Modèles discrets ; Comportement mécanique ; Couplage entre les fils ; Courbe de traction

Keywords : Solids and structures; Woven structures; Discrete models; Mechanical behaviour; Coupling between yarns; Traction behaviour

Abridged English version

The analysis of the deformations and shape forming of woven structures such as textiles is nowadays an important scientific and technological topic, due to the wide range of applications of these structures: e.g., composites with a woven reinforcement used in aerospace industry for their gain of weight; clothes industry, or geotextiles. Due to their discrete nature, it is necessary to analyse the behaviour from the scale of a yarn or a set of intertwined yarns, possibly accounting for their mechanical coupling. A discrete model of a set of intertwined yarns has been established [4], whereby nodes endowed with a mass and a rotational rigidity are connected by rigid bars to form a two-dimensional truss. The set of four bars that delineate a quadrilateral area is further endowed with a torsion deformation mode. The equilibrium shape of the whole network is obtained as the minimum of its potential energy. The present work extends the developed discrete model to the consideration of the interaction between both sets of yarns at their contact nodes; the case of a single yarn submitted to the reaction forces exerted by the transverse yarns at the summits of the undulations is analysed.

The initial shape of the yarn (warp) is supposed to be described by a periodic planar undulated beam, the equation of which being expressed as a Fourier series truncated to the n -th first harmonics. Under the application of a punctual effort F exerted at a point having abscissa $x = c$, the vertical displacement field along the beam can be expressed as $w(x) = (2FL^3/(\pi^4 EI_{\text{poutre}})) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \sin(k\pi c/L) \sin(k\pi x/L)$ following Timoshenko [5]. The weft is accordingly submitted to a set of punctual forces exerted by the warp at the summits of its undulations: its shape is defined by the Fourier series coefficients:

$$a_k = \frac{2R_{\text{ch/tr}} L_{\text{tr}}^3}{\pi^4 EI_{\text{tr}}} \sum_{p=1}^{m/2} \frac{1}{k^4} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{m} \left(2p - \frac{3}{2}\right)\right) - \sin\left(\left(2p - \frac{1}{2}\right) \frac{k\pi}{m}\right) \right] \quad \forall k \in [1, m]$$

with L_{tr} the projected length between both extremities, and $m = N_{\text{ch}}$ the number of half periods. The continuity between both yarns on their contact zones is supposed to be maintained. One then deduces the equilibrium shape of the weft:

$$w(y) = \frac{2R_{\text{ch/tr}} L_{\text{tr}}^3}{\pi^4 EI_{\text{tr}}} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^{m/2} \frac{1}{k^4} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{m} \left(2p - \frac{3}{2}\right)\right) - \sin\left(\left(2p - \frac{1}{2}\right) \frac{k\pi}{m}\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi y}{L_{\text{tr}}}\right)$$

After some calculations, one deduces from previous expression the reaction force exerted by the warp on the weft at the contact points:

$$\forall y = y_{c_j}, \quad |w(y)| = \tilde{w} = \frac{2R_{\text{ch/tr}}}{\pi^4 EI_{\text{tr}}} \left(\frac{L_{\text{tr}}}{m}\right)^3 \Leftrightarrow R_{\text{ch/tr}} = \frac{\pi^4}{2} \frac{EI_{\text{tr}}}{(L_{\text{tr}})^3} \tilde{w} \quad (5)$$

with $L_{\text{tr}}/m = L_{\text{p}}^{\text{tr}}$ the half-period length. As a matter of comparison, a similar analysis made by Euler gives a quite comparable value, $R_{\text{ch/tr}} = 48(EI/(L_{\text{p}})^3) \tilde{w}$, [6]. The action and reaction principle immediately gives the reaction force exerted by the weft on the warp, according to $R_{\text{tr/ch}} = -R_{\text{ch/tr}} = -(\pi^4/2)((EI)_{\text{tr}}/(L_{\text{p}}^{\text{tr}})^3) w_{\text{s-tr}}$. The

summation of the reaction forces at all summits (number N) gives the coupling work between the yarns, which gives an additional contribution to the work of external forces.

Lastly the deformation mechanisms are analyzed, in terms of an extensional deformation, linearly growing with the applied force, and a flexional deformation, that reaches a saturation value when the yarn has exhausted all its undulations.

1. Introduction

L'analyse des déformations et des capacités de mise en forme de nappes textile présente de nos jours un grand intérêt en raison de l'utilisation très répandue et variée de ces structures (composites à renforts tissés utilisés en construction mécanique ; industrie de l'habillement ; géotextiles). Peu de travaux ont été consacrés à l'étude du couplage entre fils, hormis des analyses 3D par éléments finis dans un cadre de mécanique du contact classique [1].

Nous développons dans cette Note un modèle discret d'une nappe et plus particulièrement d'un fil, en introduisant l'effet des couplages entre les fils chaîne et trame, dans un esprit similaire à [2,3].

2. Modèle discret du fil et du tissu

Le tissu est considéré comme une structure élastique orthotrope dont les directions principales d'anisotropie coïncident avec les directions chaîne et trame. La structure est modélisée par un réseau de poutres élastiques connectées en des articulations de type rotule sans friction, qui se déploie dans un plan à l'état naturel [4]. Chaque nœud du treillis d'indices (i, j) est doté d'une masse m (supposée identique pour tous les nœuds) et d'une rigidité en rotation $C_{i,j}^b$ qui autorise des rotations autour des axes x, y . Un ressort de rigidité $C_{i,j}^t$ est placé selon chacune des deux diagonales du rectangle formé par quatre poutres (Fig. 1 (a) et (b)) : le treillis est ainsi doté d'une torsion à l'échelle du quadrilatère formé par les quatre poutres. Les variables cinématiques du modèle sont définies en terme des déplacements verticaux $w_{i,j}$ des nœuds (i, j) et des rotations $\psi_{xi,j}$ et $\psi_{yi,j}$ des barres autour des axes des x et des y , respectivement.

On s'intéresse dans ce qui suit au comportement d'un seul fil ondulé et sollicité en traction dans son plan initial, que l'on isole du treillis par la pensée (présentement le fil de chaîne), Fig. 2. L'objectif est de décrire l'effet des interactions exercées par les fils transverses présents au sein du treillis initial.

Le fil est discrétisé de façon similaire à la nappe, par un ensemble d'éléments analogiques masses-ressorts, à l'échelle microscopique (discrétisation d'une période d'ondulation). Les masses ponctuelles sont connectées par des ressorts d'extension d'une rigidité $C_{ei} = EA/\Delta$ et chaque nœud est doté d'une rigidité en flexion $C_{bi} = EI/\Delta$ (Δ étant le pas de discrétisation).

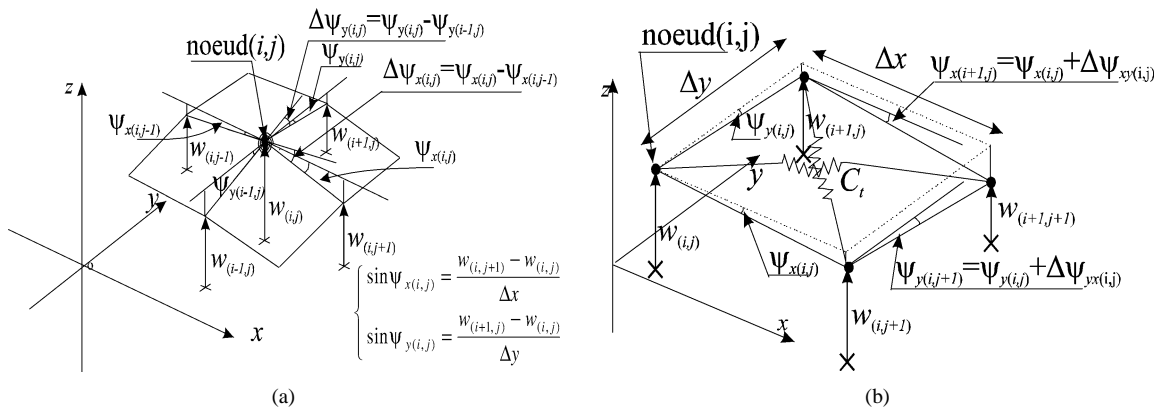


Fig. 1. Modèle discret du tissu : comportement en flexion et en torsion. (a) Déformation en flexion; (b) déformation en torsion.
 Fig. 1. Discrete model of fabric: (a) flexional deformation; (b) torsional deformation.

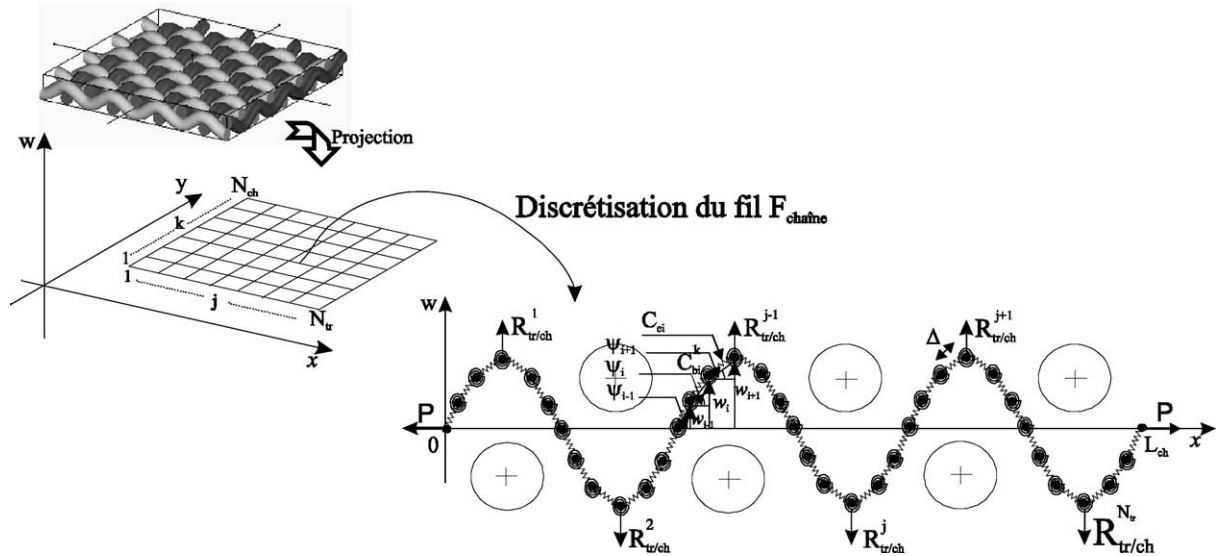


Fig. 2. Modèle discret du fil.
 Fig. 2. Discrete model of the yarn.

La Fig. 2 décrit la cinématique du fil, en terme des déplacements verticaux w_i et des rotations ψ_i (l'axe de rotation étant orthogonal au plan de la figure) des points de connexion.

On exprime tout d'abord la valeur des forces de couplage exercées par les fils transverses (de trame) sur le fil de chaîne, en appliquant les travaux de Timoshenko sur la théorie des poutres à un fil de trame assimilé à une poutre.

3. Forces de réaction dues au contact entre fils

Lors de l'application d'un effort ponctuel F exercé en un point d'abscisse c de la poutre (Fig. 3), sa déformée s'exprime sous la forme d'un développement en série de Fourier limité à n harmoniques,

$$w(x) = \frac{2FL^3}{\pi^4 EI_{poutre}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \sin\left(\frac{k\pi c}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{1}$$

selon Timoshenko [5].

En utilisant le principe de superposition, la forme d'équilibre d'un fil de trame, supposée périodique est posée selon le développement $w(y) = \sum_{k=1}^m a_k \sin(k\pi(y/L_{tr}))$. Le fil est assimilé à une poutre soumise à un ensemble d'efforts ponctuels (aux sommets des ondulations, Fig. 4), dont la forme est alors définie par les coefficients

$$a_k = \frac{2R_{ch/tr}L_{tr}^3}{\pi^4 EI_{tr}} \sum_{p=1}^{m/2} \frac{1}{k^4} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{m} \left(2p - \frac{3}{2}\right)\right) - \sin\left(\left(2p - \frac{1}{2}\right) \frac{k\pi}{m}\right) \right] \quad \forall k \in [1, m] \tag{2}$$

où L_{tr} est la longueur projetée entre les deux extrémités et $m = N_{ch}$ correspond au nombre de demi-périodes (nombre de fils transverses).

On en déduit la déformée de la poutre

$$w(y) = \frac{2R_{ch/tr}L_{tr}^3}{\pi^4 EI_{tr}} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^{m/2} \frac{1}{k^4} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{m} \left(2p - \frac{3}{2}\right)\right) - \sin\left(\left(2p - \frac{1}{2}\right) \frac{k\pi}{m}\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi y}{L_{tr}}\right) \tag{3}$$

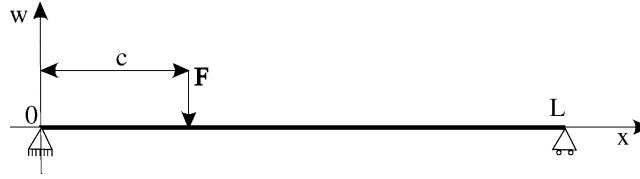


Fig. 3. Poutre de Timoshenko.
Fig. 3. Timoshenko's beam.

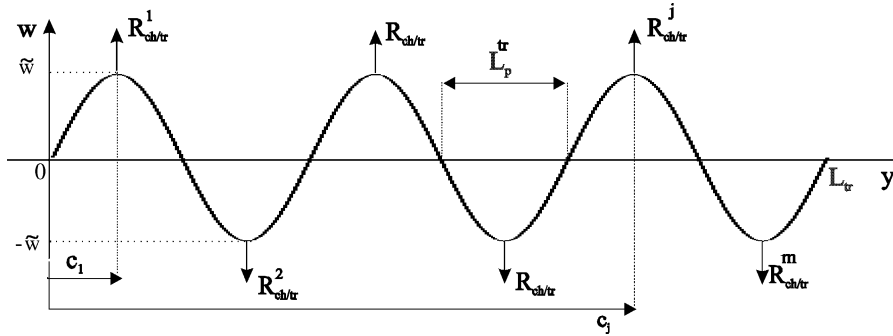


Fig. 4. Distribution des efforts de contact exercés par les fils transverses.
Fig. 4. Distribution of the contact effort exercised by the transverse yarns.

Aux points de contact ($y = c_j$) (Fig. 4), on obtient après un calcul élémentaire

$$\sum \sum = \frac{1}{m^3} \quad \text{pour } y = c_j, \quad \forall j \in [1, m], \quad \text{où } c_j = (2j - 1) \frac{L_{tr}}{2m} \quad (4)$$

On en déduit la valeur de la réaction aux points de contact en fonction de la position \tilde{w} , selon

$$\forall y = y_{c_j} \text{ on a } |w(y)| = \tilde{w} = \frac{2R_{ch/tr}}{\pi^4 EI_{tr}} \left(\frac{L_{tr}}{m} \right)^3 \Leftrightarrow R_{ch/tr} = \frac{\pi^4}{2} \frac{EI_{tr}}{(L_{tr}^3)} \tilde{w} \quad (5)$$

avec $L_{tr}/m = L_{tr}^{tr}$ la longueur d'une demi-période. On retrouve un résultat identique à celui de Timoshenko [5] pour une seule demi-période. Par comparaison, une analyse similaire menée par Euler donne une valeur légèrement différente $R_{ch/tr} = 48(EI/(L_p)^3)\tilde{w}$, [6].

4. Energie potentielle de couplage et courbe de traction d'un fil

En supposant les ondulations du fil de chaîne périodiques, on en exprime la forme selon un développement en série de Fourier limité à N_{tr} harmoniques $w(x) = \sum_{k=1}^{N_{tr}} b_k \sin(k\pi(x/L_{ch}))$, où L_{ch} est la longueur projetée entre les deux extrémités et N_{tr} correspond au nombre de demi-périodes (nombre de fils transverses).

La continuité du déplacement aux points de contact, soit $\delta_{ch} = \delta_{tr}$, conduit, en négligeant la compressibilité des fils (Fig. 5), à la relation suivante entre les positions verticales (l'indice 0 se réfère aux positions initiales)

$$w_{s-tr} = w_{so-tr} + w_{s-ch} - w_{so-ch} \quad (6)$$

Cette relation conduit à l'expression de la réaction exercée par le fil chaîne sur le fil trame

$$R_{ch/tr} = \frac{\pi^4}{2} \frac{(EI)_{tr}}{(L_{tr}^3)} w_{s-tr} = \frac{\pi^4}{2} \frac{(EI)_{tr}}{(L_{tr}^3)} [(w_{so-tr} - w_{so-ch}) + w_{s-ch}] \quad (7)$$

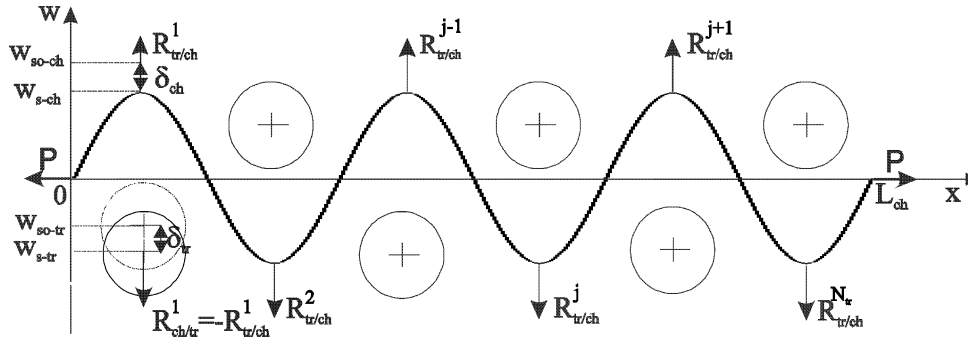


Fig. 5. Fil de chaîne.

Fig. 5. Warp threads.

Le principe de l'action et de la réaction donne immédiatement

$$R_{tr/ch} = -R_{ch/tr} = -\frac{\pi^4 (EI)_{tr}}{2 (L_p^{tr})^3} [(w_{so-tr} - w_{so-ch}) + w_{s-ch}] \quad (8)$$

Le travail de la force de réaction exercée sur le nœud sommet d'indice j est

$$\begin{aligned} W_{R_{tr/ch}^j} &= \int_{w_{so-ch}^j}^{w_{s-ch}^j} R_{tr/ch} dw = \int_{w_{so-ch}^j}^{w_{s-ch}^j} -\frac{\pi^4 (EI)_{tr}}{2 (L_p^{tr})^3} [(w_{so-tr}^j - w_{so-ch}^j) + w] dw \\ &= -\frac{\pi^4 (EI)_{tr}}{2 (L_p^{tr})^3} \left[\left((w_{so-tr}^j - w_{so-ch}^j) w_{s-ch}^j + \frac{1}{2} w_{s-ch}^{j2} \right) - \left((w_{so-tr}^j - w_{so-ch}^j) w_{so-ch}^j + \frac{1}{2} w_{so-ch}^{j2} \right) \right] \quad (9) \end{aligned}$$

Par sommation sur les sommets (indice j), on obtient le travail des forces de réaction

$$W_{couplage} = \sum_{j=1}^{N_{tr}} W_{R_{tr/ch}^j}$$

soit de façon développée

$$\begin{aligned} W_{couplage} &= -\sum_{j=1}^{N_{tr}} \frac{\pi^4 (EI)_{tr}}{2 (L_p^{tr})^3} \left[\left((w_{so-tr}^j - w_{so-ch}^j) w_{s-ch}^j + \frac{1}{2} w_{s-ch}^{j2} \right) - \left((w_{so-tr}^j - w_{so-ch}^j) w_{so-ch}^j + \frac{1}{2} w_{so-ch}^{j2} \right) \right] \end{aligned}$$

expression intégrée dans le travail des efforts extérieurs (poids ; efforts de traction à l'extrémité du fil), soit

$$\begin{aligned} W_{ext} &= W_{tr} + W_{gr} + W_{couplage} \\ W_{ext} &= -\sum_{j=1}^{N_{tr}} \frac{\pi^4 (EI)_{tr}}{2 (L_p^{tr})^3} \left[\left((w_{so-tr}^j - w_{so-ch}^j) w_{s-ch}^j + \frac{1}{2} w_{s-ch}^{j2} \right) - \left((w_{so-tr}^j - w_{so-ch}^j) w_{so-ch}^j + \frac{1}{2} w_{so-ch}^{j2} \right) \right] \\ &\quad + P \left(\sum_{i=1}^n \frac{\Delta}{2} (\psi_i^2 - \psi_{oi}^2) + u_{n+1} \right) - \sum_{i=1}^{n-1} m_i g (w_i - w_i^o) \quad (10) \end{aligned}$$

où n est le nombre d'éléments discrets et $(u_i)_{i \in [1, n+1]}$ les déplacements en extension des nœuds d'indice i . L'énergie potentielle totale V est alors la différence entre l'énergie de déformation interne U (due à la flexion

et à l'extension du fil) et le travail des forces extérieures, selon

$$U = U_F + U_e = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} C_{bi} (\psi_{i+1} - \psi_i)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} C_{ei} (u_{i+1} - u_i)^2$$

d'où

$$\begin{aligned} V = & \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} C_{bi} (\psi_{i+1} - \psi_i)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} C_{ei} (u_{i+1} - u_i)^2 - P \left(\sum_{i=1}^n \frac{\Delta}{2} (\psi_{0i}^2 - \psi_i^2) + u_{n+1} \right) \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} m_i g (w_i - w_i^0) + \sum_{j=1}^{N_{tr}} \frac{\pi^4}{2} \frac{(EI)_{tr}}{(L_p^{tr})^3} \left[\left((w_{so-ch}^j - w_{so-tr}^j) w_{s-ch}^j + \frac{1}{2} w_{s-ch}^{j2} \right) \right. \\ & \left. - \left((w_{so-tr}^j - w_{so}^j) w_{so-ch}^j + \frac{1}{2} w_{so-ch}^{j2} \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

5. Mécanismes de déformation : effets d'ondulation et d'extension du fil

Dans l'expression précédente, l'indice de sommet j est remplacé par l'indice global de discrétisation, i tel que

$$\begin{cases} w_{s-ch}^j = w_i \\ \sin(\psi_i) = (w_i - w_{i-1})/\Delta \end{cases}, \quad \text{avec } i = \frac{(2j-1)n}{2N_{tr}}$$

On approxime la rotation discrète à partir des valeurs des déplacements verticaux, selon $\psi_i \approx (w_i - w_{i-1})/\Delta$, valeurs qui échantillonnent la position continue $w(x) = \sum_{k=1}^{N_{tr}} b_k \sin(k\pi(x/L))$, selon $\forall i \in [1, n-1]$ $w_i = \sum_{k=1}^{N_{tr}} b_k \sin((k\pi/L)x_i)$ avec $x_i = iL/n$. L'énergie potentielle du fil a pour arguments inconnus les coefficients $(b_i)_i$ de la série de Fourier ainsi que les extensions $(u_2, u_3, \dots, u_{n+1})$ des nœuds du fil ($u_1 = 0$), $V = V(b_1, \dots, b_j, \dots, b_m, u_2, \dots, u_i, \dots, u_{n+1})$. La position d'équilibre du fil est obtenue par minimisation de V ,

$$\frac{\partial V}{\partial b_1} = \dots = \frac{\partial V}{\partial b_j} = \dots = \frac{\partial V}{\partial b_m} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial u_2} = \dots = \frac{\partial V}{\partial u_i} = \dots = \frac{\partial V}{\partial u_{n+1}} = 0 \quad (12)$$

On analyse l'effet du couplage entre les fils (Fig. 6), avec le jeu de paramètres suivant de tissés renforcés par des fibres de carbone : soient

$$\begin{cases} L_0 = 0,1 \text{ m} \\ w_{so-ch} = 0,5 \text{ mm} \\ w_{so-tr} = 0,5 \text{ mm} \\ m = 20 ; \quad n = 400 \end{cases}$$

les paramètres géométriques de discrétisation,

$$\begin{cases} EI_{ch} = 1,47e^{-7} \text{ N} \cdot \text{m} \\ EI_{tr} = 1,47e^{-7} \text{ N} \cdot \text{m} \\ EA_{ch} = 13,72 \text{ N} \end{cases}$$

les propriétés mécaniques des fils trame et chaîne et

$$C_b = EI_{ch}/\Delta, \quad C_e = EA_{ch}/\Delta$$

les rigidités en flexion/extension des ressorts. Le fil est soumis à un effort de traction croissant à ses extrémités ; la ligne moyenne de la poutre est astreinte à rester dans un même plan, et les deux extrémités du fil restent alignées avec la direction de sollicitation.

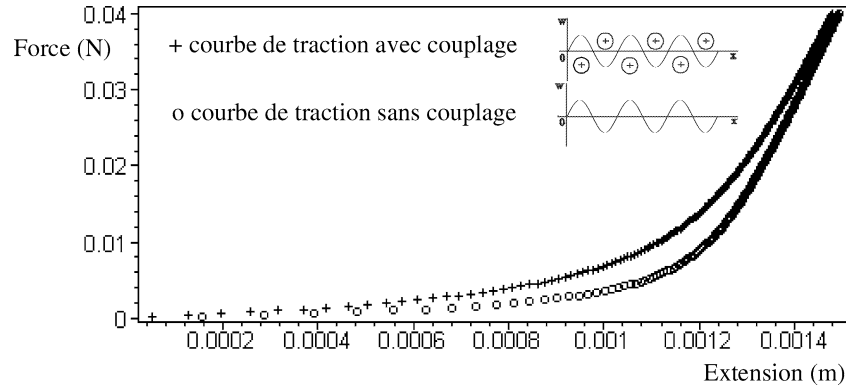


Fig. 6. Courbe de traction unidirectionnelle d'un fil de chaîne : effet du couplage.

Fig. 6. Unidirectional traction curve for a warp thread; the effect of coupling.

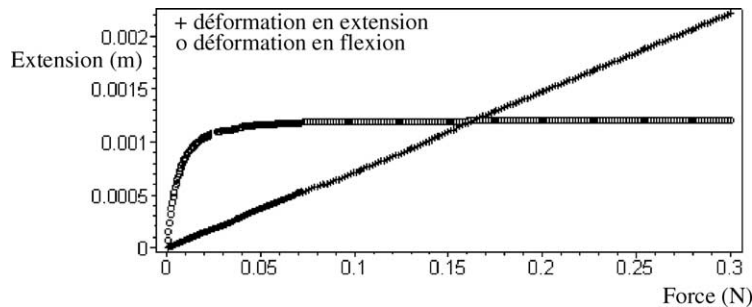


Fig. 7. Variations en fonction de la charge appliquée des déformations de flexion/extension.

Fig. 7. Extension variation, as a function of the deformation applied in flexion/extension.

La prise en compte du couplage conduit à une réponse plus rigide (Fig. 6) : l'extension est définie ici par le déplacement du nœud d'extrémité de la poutre ; on retrouve l'allure en J observée expérimentalement lors de la traction d'un échantillon de tissu.

On sépare alors les effets de flexion des effets d'extension du fil (Fig. 7) : le déplacement lié à la flexion tend vers une valeur limite atteinte lorsque le fil a épuisé ses possibilités de perte d'ondulation, alors que le déplacement extensionnel varie linéairement avec la force appliquée. Ces deux mécanismes de déformation du fil se démarquent alors pour un déplacement de l'ordre de 0,0012, comme le montre la Fig. 6.

L'introduction du couplage entre fils entrelacés à l'échelle macroscopique d'une structure tissée qui prolonge cette étude constitue une perspective importante de développement des modèles discrets de nappes [6,4].

Références

- [1] J. Page, J. Wang, Prediction of shear force using 3D non-linear FEM analyses for a plain weave carbon fabric in a bias extension state, *Finite Element in Analysis and Design* 38 (8) (2002) 755–764.
- [2] X. Provot, Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior, *Graphics Interface* (1995) 147–155.
- [3] M. Magno, J.F. Ganghoffer, Mechanics of planar beams focusing on buckling phenomena, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. Iib* 328 (2000) 283–288.
- [4] B. Ben Boubaker, B. Haussy, J.F. Ganghoffer, Modèles discrets de structures tissées. Analyse de stabilité et de drapé, *C. R. Mecanique* 330 (2002) 871–877.
- [5] S. Timoshenko, *Théorie de la Stabilité Elastique*, Beranger, Paris & Liège, 1947.
- [6] M.S. El Naschie, *Stress-Stability and Chaos in Structural Engineering: An Energy Approach*, McGraw-Hill, London, 1990.