



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 245–252



## Effets de la surface libre et du rapport d'aspect sur la transition de l'écoulement de Taylor–Couette

### Effects of free surface and aspect ratio on the transition of the Taylor–Couette flow

Ammar Mahamdia <sup>a</sup>, Ahcène Bouabdallah <sup>a</sup>, Salah Eddine Skali <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire d'énergétique, faculté des sciences/physique-USTHB, BP 32, El-Alia, Bab-Ezzouar, Alger, Algérie

<sup>b</sup> LEMTA-INPL, 2, avenue de la Forêt de Haye, 54504 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

Reçu le 31 mai 2002 ; accepté après révision le 14 janvier 2003

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

---

#### Résumé

Le présent travail porte sur une étude expérimentale de l'écoulement de Taylor–Couette. Nous visons particulièrement les effets de la surface libre et de la hauteur de fluide dans l'espace annulaire sur les conditions d'apparition des deux premières instabilités.

Les résultats expérimentaux sont obtenus par utilisation de la technique polarographique. A cet effet des électrodes en platine sont implantées sur la paroi interne du cylindre extérieur fixe. Elles permettent de mesurer la valeur temporelle moyenne du gradient pariétal de vitesse et de réaliser l'analyse spectrale par transformée rapide de Fourier des fluctuations associées pour connaître la structure de l'écoulement. Les résultats obtenus mettent en évidence l'existence d'une hauteur critique  $H_c$  de la colonne de liquide. Cette hauteur affecte la transition laminaire-turbulent de l'écoulement. **Pour citer cet article : A. Madamdia et al., C. R. Mecanique 331 (2003).**

© 2003 Published by Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS.

#### Abstract

This work deals with the study of free surface and aspect ratio effects on the instability of the Taylor–Couette flow. The experimental results have been obtained using the polarographic technique. The time-averaged values of the wall velocity gradient have been determined and the spectral analysis of its fluctuations has been done. These first results show the existence of a critical height  $H_c$  of the liquid column. For an aspect ratio  $\Gamma = H/d < 10$ , the laminar turbulent transition occurs without azimuthal wave mode. **To cite this article: A. Madamdia et al., C. R. Mecanique 331 (2003).**

© 2003 Published by Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS.

**Mots-clés :** Mécanique des fluides ; Cylindres coaxiaux ; Écoulement de Taylor–Couette ; Instabilités ; Rapport d'aspect ; Surface libre

**Keywords:** Fluid mechanics; Coaxial cylinders; Taylor–Couette flow; Instabilities; Aspect ratio; Free surface

**Nomenclature**

$R_1$	rayon du cylindre intérieur	$D$	coefficient de diffusion de matière
$R_2$	rayon du cylindre extérieur	$\bar{S}$	gradient pariétal moyen de vitesse
$d = R_2 - R_1$	largeur de l'espace annulaire	$s$	partie fluctuante du gradient pariétal de vitesse
$H$	hauteur du liquide dans l'espace annulaire	$\bar{I}$	valeur moyenne du courant limite de diffusion
$Hc$	hauteur critique	$i$	partie fluctuante du courant de diffusion
$Ta$	nombre de Taylor $= (R_1 \Omega_1 d / \nu) \sqrt{d / R_1}$	$f_0$	fréquence fondamentale du signal
$Z$	position axiale de la microélectrode	$\Omega_1$	vitesse de rotation du cylindre intérieur
$n$	nombre d'électrons mis en jeu dans la réaction d'oxydo-réduction	$\nu$	viscosité cinématique
$F$	nombre de Faraday	$\Gamma = H/d$	rapport d'aspect
$A$	surface active de la microélectrode	$\Gamma_c = Hc/d$	rapport d'aspect critique
$C_0$	concentration de l'ion actif	$\Phi$	diamètre des microélectrodes
$L$	largeur équivalente de la microélectrode ; $L = 0,82\Phi$		

**Abridged English version**

This paper is an experimental analysis of the Taylor–Couette flow. We particularly focus on the effects of the free surface and the height of the fluid between the two cylinders on the first and second modes of instability.

The test cell presented in Fig. 1 consists of two plexiglass coaxial cylinders. The rotation of the inner cylinder ( $R_1 = 35$  mm) is achieved by means of a variable speed DC electric motor. The outer cylinder ( $R_2 = 41$  mm) is fixed. The gap and the aspect ratio are defined respectively as:  $d = R_2 - R_1 = 6$  mm and  $\Gamma = H/d$ . The height  $H$  of the fluid filling the annular gap varies from 0 to 120 mm (i.e.,  $0 \leq \Gamma \leq 20$ ). The experimental results have been obtained using the polarographic technique. Platinum probes ( $\phi = 0.5$  mm) mounted flush with the outer cylinder allowed the local measurement of the wall velocity gradient. The technical details can be found in [8,9]. Thirteen polarographic probes are regularly distributed along the outer cylinder. The distance between two probes is 5 mm. The first probe is located at  $Z = 15$  mm from the bottom of the experimental set-up. The modifications of the flow structure were observed as function of the Taylor number defined by:  $Ta = R_1^{1/2} \Omega_1 d^{3/2} \nu^{-1}$  where  $\nu$  is the kinematic viscosity and  $\Omega_1$  the angular velocity of the inner cylinder. In a previous study [7], achieved by a direct visualization technique, the effect of the fluid column  $H$  on the flow stability, for a gap  $d = 10$  mm, has been investigated. From the maximum value corresponding to the full filled gap ( $H = 20d$ ), the height of the fluid column is progressively reduced by means of an orifice situated at the bottom of the flow system.

The dumping of the azimuthal wave is observed until it disappears below the value  $Hc = 10d$  ( $\Gamma_c = 10$ ). However, the axial wave (Taylor cell) remains present. In the photograph in Fig. 2, taken for the case  $\Gamma = 12 > \Gamma_c$ , the dumping of the azimuthal wave is observed, while in Fig. 3 for the case  $\Gamma = 8 < \Gamma_c$ , the azimuthal wave no longer exists.

The time-averaged values of the wall velocity gradient  $\bar{S}$  are determined and the spectral analysis of the fluctuations is performed. The gradient  $\bar{S}$  is measured at  $Z = 15$  mm from the bottom of the flow system and for three values of the height:  $H = 20; 50; 70$  mm. The evolution of the gradient  $\bar{S}$  as function of  $Ta$  is presented on Fig. 4. In the subcritical laminar flow ( $Ta < 41$ )  $\bar{S}$  varies as  $Ta$ . The first critical value of the Taylor number,  $Tc_1 = 41$ , corresponding to the appearance of the Taylor vortices, does not depend on  $H$ .

The two spectra in Fig. 5(a) ( $H = 70$  mm) and Fig. 5(b) ( $H = 30$  mm) are obtained for  $Ta = 113$ , corresponding to the azimuthal waves domain in an infinite geometry. They show the effects of the height  $H$  on the wall shear fluctuations detected at  $Z = 15$  mm. In the spectrum in Fig. 5(a),  $f_0$  (1 Hz) represents the wave frequency. This frequency does not appear in the spectrum in Fig. 5(b).

The two other spectra Figs. 6(a) and 6(b), corresponding to the positions  $Z = 15$  mm and  $Z = 60$  mm, obtained in turbulent regime ( $Ta = 700$ ), show an inhomogeneous character of the flow in the axial direction. The azimuthal wave of frequency  $f_0$  (Fig. 6(a)) is still present at  $Z = 15$  mm. The presence of several frequencies (Fig. 6(b)) characterizes the degradation of the azimuthal wave and the appearance of secondary instabilities (Fig. 7). In this case we do not notice any simple relationship between the frequencies which appear in the spectrum. These first results show the existence of a critical height  $Hc = 10$ . For aspect ratios  $\Gamma = H/d < 10$ , the laminar-turbulent transition occurs directly without azimuthal wave mode. Thus, for  $H < Hc$ , the inhomogeneity of flow is observed. In fact spirals [7] appear in the neighborhood of the free surface and propagate progressively downwards to the bottom when the Taylor number is increased.

## 1. Introduction

L'étude des instabilités hydrodynamiques et de la transition vers le régime chaotique dans le cas de l'écoulement de Taylor–Couette a connu ces dernières années des développements importants. Ce type d'écoulement confiné entre deux cylindres coaxiaux présente une grande richesse de phénomènes rencontrés au cours du mouvement. Depuis les travaux de Taylor [1] on connaît les conditions d'apparition de la première instabilité (cellules toriques). Le mécanisme d'évolution de cette structure en fonction de la vitesse de rotation du cylindre intérieur a trouvé une explication par la prise en compte des effets non linéaires effectuée par Stuart [2]. Par la suite des travaux théoriques et expérimentaux ont été consacrés aux effets de géométries et de conditions initiales sur le mécanisme d'évolution de la structure de l'écoulement. De nouveaux types d'écoulements en spirale [3] et [4] ont été observés en fonction des différents protocoles expérimentaux mis en œuvre. Ainsi LIM et al. [5] ont montré que les montées rapides en vitesse modifient de façon notable la structure de l'écoulement, en particulier la taille des cellules. A notre connaissance les effets de la surface libre n'ont pas été étudiés dans le cas de deux cylindres coaxiaux. Seule, une étude récente [6] a été consacrée aux effets de la surface libre sur l'écoulement entre deux cônes coaxiaux. Ces travaux montrent l'importance de l'effet des limitations géométriques et des conditions initiales sur la structure de l'écoulement de Taylor–Couette. Dans cette perspective, notre contribution, à caractère expérimental, porte sur les effets de la surface libre et du rapport d'aspect sur la transition de l'écoulement dans l'espace annulaire.

## 2. Dispositif expérimental

Les mesures sont réalisées sur un dispositif (Fig. 1) constitué de deux cylindres coaxiaux en plexiglass de rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Le cylindre intérieur ( $R_1 = 35$  mm) est entraîné par un moteur à courant continu équipé d'un variateur de vitesse. Le cylindre extérieur ( $R_2 = 41$  mm) est maintenu immobile. La variation progressive de la vitesse de rotation du cylindre intérieur est assurée par un dispositif électronique de contrôle. Le jeu radial et le rapport d'aspect sont définis par  $d = R_2 - R_1 = 6$  mm et  $\Gamma = H/d$ . La hauteur  $H$  du fluide contenu entre les deux cylindres peut varier de 0 à 120 mm, soit  $0 < \Gamma < 20$ . Les différents régimes d'écoulement sont caractérisés par le nombre de Taylor tel que défini par Stuart :  $Ta = R_1^{1/2} \Omega_1 d^{3/2} \nu^{-1}$  où  $\nu$  est la viscosité cinématique.

Les mesures sont effectuées pour différentes valeurs de la hauteur du fluide  $H > Hc$  et  $H < Hc$ ;  $Hc$  étant une valeur critique [7].

Des sondes en platine ( $\Phi = 0,5$  mm) implantées en affleurant la paroi interne du cylindre fixe permettent la mesure locale du gradient pariétal de vitesse selon la mise en œuvre de la méthode polarographique [8,9]. Treize sondes sont alignées suivant la direction axiale à 5 mm l'une de l'autre. La première est située à  $Z = 15$  mm du fond de l'espace annulaire. Le fluide utilisé est une solution électrochimique comprenant un couple redox (Ferri-Ferrocyanure de potassium) et un électrolyte indifférent (chlorure de potassium) en excès.

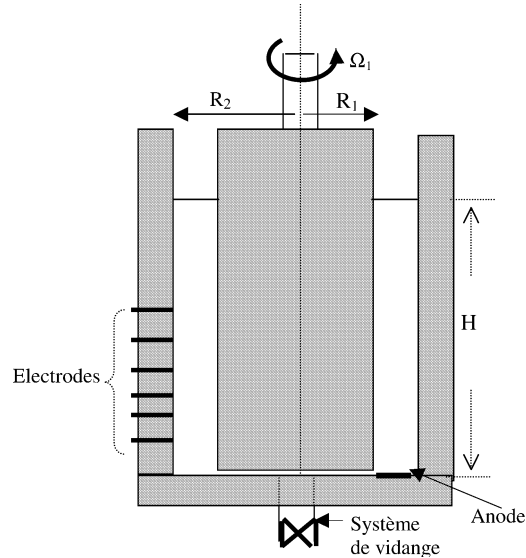


Fig. 1. Schéma du dispositif expérimental.

Fig. 1. Scheme of the test cell.

### 3. Technique de mesures et méthode d'analyse

Un étude qualitative préalable [7], basée sur une technique de visualisation, a permis d'observer l'effet de la hauteur de la colonne de fluide sur les modifications de structures. Le présent travail, utilisant la méthode polarographique, la complète de façon quantitative par des mesures du gradient pariétal moyen de vitesse et par l'analyse spectrale des fluctuations associées.

La mesure de la valeur moyenne du courant limite de diffusion  $\bar{I}$  résultant de la réaction d'oxydo-réduction :  $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-} + e^- \rightleftharpoons \text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$  permet de déterminer la valeur du gradient pariétal moyen de vitesse  $\bar{S}$  selon [8] et [9] à partir de la relation :  $\bar{I} = (0,807)nFACo(D^2\bar{S}/L)^{1/3}$ . Le gradient pariétal qui correspond à l'écoulement perturbé s'écrit :  $S = \bar{S} + s$ ;  $s$  représente la partie fluctuante. A ce gradient est associé un courant limite de diffusion :  $I = \bar{I} + i$ .

Après développement de la relation entre  $S$  et  $I$  nous obtenons pour la solution quasi-stationnaire :  $\frac{s}{\bar{S}} = 3i/\bar{I}$ .

Nous caractérisons les fluctuations du courant  $i$  en mesurant la racine carrée de la valeur quadratique moyenne de ces fluctuations :  $\sqrt{i^2}$ . Nous pouvons ainsi déterminer la valeur du taux de fluctuations du gradient pariétal de vitesse  $\sqrt{s^2}/\bar{S}$  tant que celui-ci reste inférieur à 30 %.

Les mesures en valeurs moyennes du gradient pariétal de vitesse sont complétées par l'analyse spectrale des fluctuations réalisée par transformée rapide de Fourier.

### 4. Résultats

Dans l'étude précédente [7] menée par visualisation nous avons étudié l'effet de la hauteur  $H$  de l'espace annulaire sur la stabilité de l'écoulement. A partir de la hauteur maximum de remplissage nous avons procédé à une vidange très lente au moyen d'une petite vanne située au fond de l'appareil. Nous avons constaté l'affaiblissement progressif de l'amplitude de l'onde azimutale et, en deçà d'une valeur notée  $Hc = 10d$  ( $\Gamma_c = 10$ ), elle n'est plus observée au sein l'écoulement. Alors que l'onde axiale relative aux cellules de Taylor est toujours présente.

Pour une meilleure qualité des images les photographies (Figs. 2, 3, 7) sont réalisées avec un espace annulaire plus large :  $d = 10$  mm, respectivement pour les rapports d'aspect  $\Gamma = 12 > \Gamma_c$ ,  $\Gamma = 8 < \Gamma_c$  et  $\Gamma = \Gamma_c = 10$ . La complète similitude des phénomènes a été vérifiée pour les espaces annulaires  $d = 4,2$  mm,  $d = 6$  mm et  $d = 10$  mm.

Les résultats obtenus par la technique polarographique permettent de représenter l'évolution du gradient pariétal moyen de vitesse ( $\bar{S}$ ) en fonction du nombre de Taylor  $Ta$  et pour différentes hauteurs de fluide  $H > H_c$  et  $H < H_c$ . Ils mettent en évidence l'apparition des cellules de Taylor ainsi que la nature des structures successives.

L'évolution de  $\bar{S}$  en fonction de  $Ta$  est donnée en Fig. 4, pour différentes valeurs de  $H$  inférieures ou supérieures à la hauteur critique de remplissage. Les mesures de  $\bar{S}$  sont effectuées au moyen de la sonde située à la position  $Z = 15$  mm à partir du fond du dispositif. En régime laminaire subcritique ( $Ta \leq 41$ ) le gradient pariétal de vitesse  $\bar{S}$  varie linéairement en fonction de  $Ta$ ; il n'est pas affecté par la hauteur de remplissage. Le point de singularité qui apparaît sur les courbes au voisinage de  $Ta = 41$  indique une modification de la structure de l'écoulement qui correspond à la naissance des cellules de Taylor.

Pour  $\Gamma$  supérieur à  $\Gamma_c$  ( $H = 70$  mm) une modification notable de la courbe de croissance de  $\bar{S}$  en fonction de  $Ta$  est observée dans le domaine  $70 < Ta < 85$ , ce qui traduit la présence d'ondes azimuthales.

Après l'apparition des cellules de Taylor ( $Ta > 41$ ), on constate un faible écart entre les valeurs de  $\bar{S}$  correspondant à  $H = 70$  mm ( $\Gamma > 10$ ),  $H = 50$  mm ( $\Gamma < 10$ ) et  $H = 20$  mm ( $\Gamma < 10$ ). Cette différence est, à notre avis, due à la modification du nombre de cellules de Taylor lorsque  $Ta$  varie. Le changement du nombre et donc de la taille des cellules entraîne en fait un déplacement relatif de la position de l'électrode de mesure par rapport à la cellule elle-même affectant ainsi la valeur de la mesure locale.

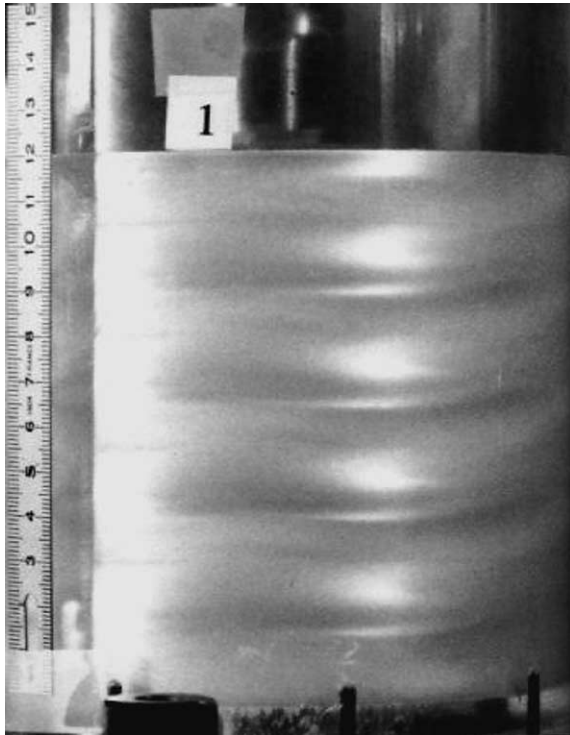


Fig. 2. Photographie de l'écoulement pour  $\Gamma = 12$  et  $Ta = 270$ .  
Fig. 2. Flow observation for  $\Gamma = 12$  and  $Ta = 270$ .

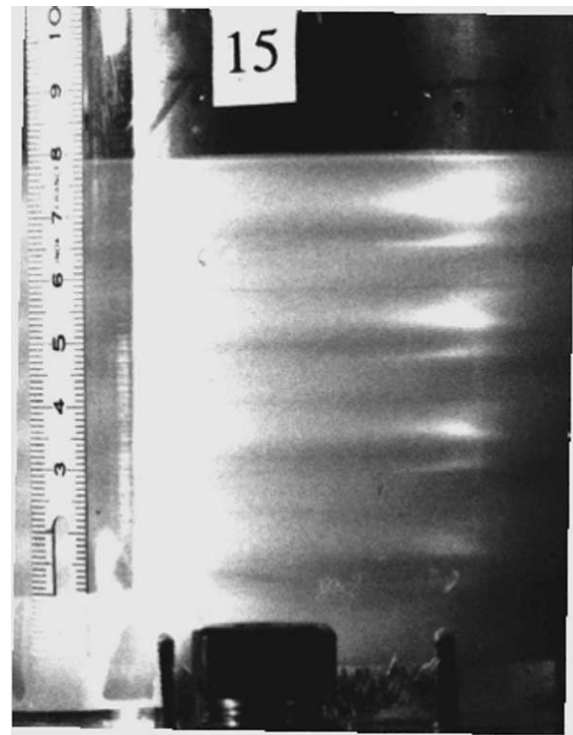


Fig. 3. Photographie de l'écoulement pour  $\Gamma = 8$  et  $Ta = 390$ .  
Fig. 3. Flow observation for  $\Gamma = 8$  and  $Ta = 370$ .

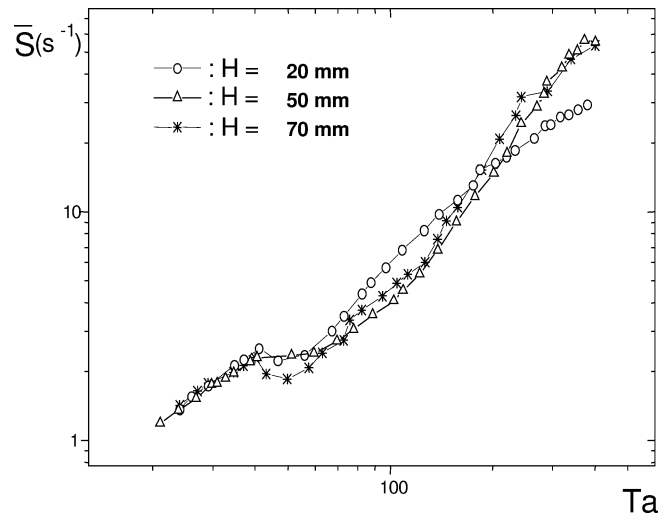


Fig. 4. Effet de la hauteur  $H$  sur la valeur du gradient pariétal moyen de vitesse  $\bar{S}$  en fonction du nombre de Taylor  $Ta$  pour :  $H = 20$  mm ( $\circ$ ),  $H = 50$  mm ( $\Delta$ ),  $H = 70$  mm ( $*$ ).

Fig. 4. Effect of the level  $H$  on the value of the mean wall velocity gradient  $\bar{S}$  versus the Taylor number  $Ta$  for:  $H = 20$  mm ( $\circ$ ),  $H = 50$  mm ( $\Delta$ ),  $H = 70$  mm ( $*$ ).

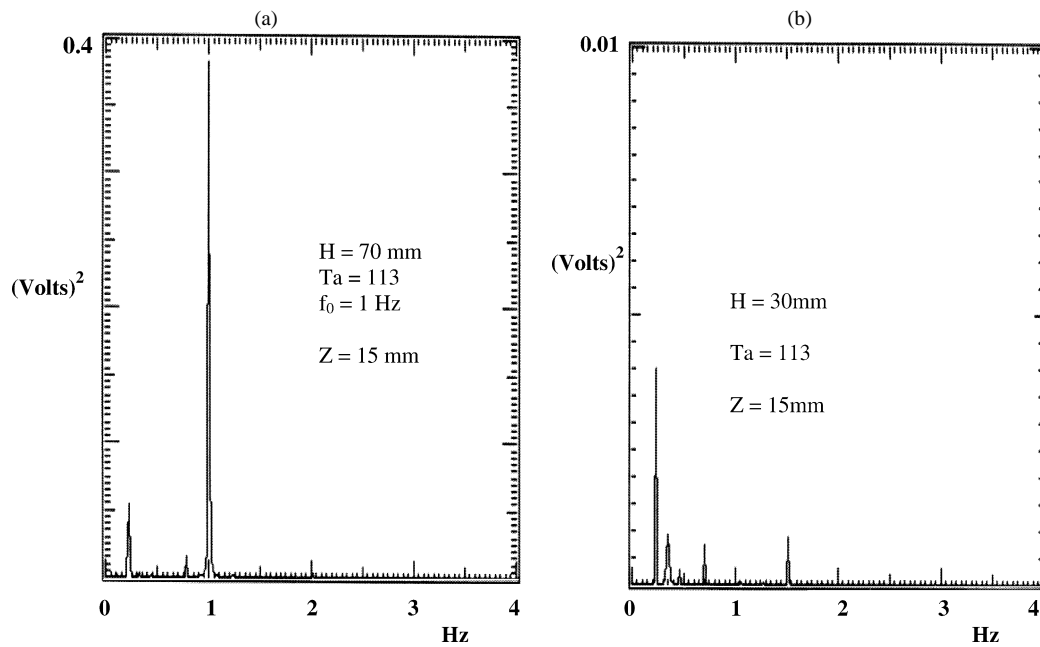


Fig. 5. (a) Spectre représentant la densité d'énergie des fluctuations pour  $H = 70$  mm à la position  $Z = 15$  mm. (b) Spectre représentant la densité d'énergie des fluctuations pour  $H = 30$  mm à la position  $Z = 15$  mm.

Fig. 5. (a) Spectrum of power density of fluctuations for  $H = 70$  mm at the position  $Z = 15$  mm. (b) Spectrum of power density of fluctuations for  $H = 30$  mm at the position  $Z = 15$  mm.

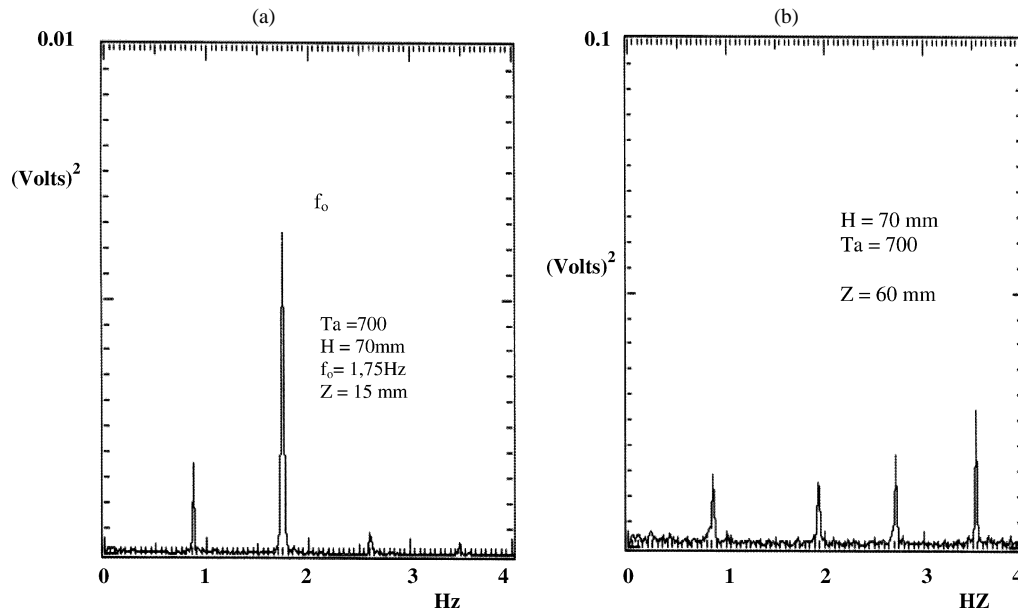


Fig. 6. (a) Spectre représentant la densité d'énergie des fluctuations pour  $H = 70\text{ mm}$  à la position  $Z = 15\text{ mm}$ . (b) Spectre représentant la densité d'énergie des fluctuations pour  $H = 70\text{ mm}$  à la position  $Z = 60\text{ mm}$ .

Fig. 6. (a) Spectrum of power density of fluctuations for  $H = 70\text{ mm}$  at the position  $Z = 15\text{ mm}$ . (b) Spectrum of power density of fluctuations for  $H = 70\text{ mm}$  at the position  $Z = 60\text{ mm}$ .

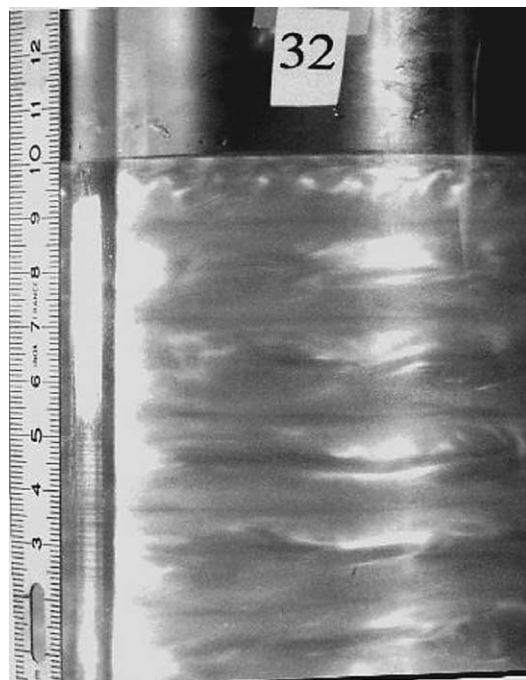


Fig. 7. Photographie montrant la présence d'instabilités secondaires au voisinage de la surface libre pour  $\Gamma = 10$  et  $Ta = 1000$ .

Fig. 7. Photograph showing the presence of secondary instabilities near the free surface for  $\Gamma = 10$  and  $Ta = 1000$ .

L'analyse spectrale des signaux délivrés par deux sondes polarographiques situées respectivement aux positions  $Z = 15$  mm et  $Z = 60$  mm a permis de préciser la structure de l'écoulement.

Les deux spectres de fréquence (Fig. 5(a) pour  $H = 70$  mm  $> H_c$  et Fig. 5(b) pour  $H = 30$  mm  $< H_c$ ) obtenus pour un même nombre de Taylor  $Ta = 113$ , correspondant au domaine d'ondes azimutales en géométrie infinie, montrent les effets de la hauteur  $H$  du fluide sur les fluctuations à la position  $Z = 15$  mm. Nous notons que la densité de puissance spectrale des fluctuations pour  $H < H_c$ , malgré une augmentation importante de l'échelle ( $\times 40$ ), est très faible comparativement au cas où  $H = 70$  mm ( $\Gamma > 10$ ). Sur le spectre de la Fig. 5(a),  $f_0 = 1$  Hz représente la fréquence de l'onde azimutale. Cette fréquence n'apparaît pas sur le spectre de la Fig. 5(b). L'analyse spectrale confirme bien l'absence d'onde azimutale lorsque  $H < H_c$  ( $\Gamma < \Gamma_c$ ). Les deux autres spectres (Figs. 6(a) et 6(b)) relatifs aux positions  $Z = 15$  mm et  $Z = 60$  mm, obtenus en régime turbulent ( $Ta = 700$ ) montrent qu'il subsiste une inhomogénéité de l'écoulement dans la direction axiale. L'onde azimutale de fréquence  $f_0$  (Fig. 6(a)) est encore présente à la position  $Z = 15$  mm. La présence de plusieurs fréquences (Fig. 6(b)) caractérise la dégradation de l'onde azimutale et l'apparition d'autres instabilités. En effet des spirales [7] apparaissent au voisinage de la surface libre et se propagent progressivement vers la base de l'espace annulaire. Nous ne notons aucune relation simple entre les fréquences contenues dans le spectre : il ne s'agit pas en particulier d'harmoniques, mais probablement d'un état précurseur du chaos.

## 5. Conclusion

Les résultats polarographiques présentés ici confortent nos observations antérieures, obtenues par visualisation. Ils confirment l'existence d'une hauteur critique  $H_c$ . Pour un rapport d'aspect  $\Gamma < 10$ , la transition laminaire-turbulent s'opère directement sans que l'on observe un régime d'onde azimutale. L'apparition de l'onde axiale (cellules de Taylor) n'est pas affectée par la hauteur de remplissage ; dans tous les cas elle s'effectue pour une valeur du nombre de Taylor  $Ta = Tc_1 = 41$ . Pour un rapport d'aspect  $\Gamma < \Gamma_c$ , une forme d'inhomogénéité axiale de l'écoulement est observée. En effet une perturbation en forme de spirales torsadées prenant naissance au voisinage de la surface libre se propage vers le fond du dispositif quand le nombre de Taylor augmente. Cette structure a été observée [7] par visualisation.

## Remerciements

Le présent travail a été réalisé au LEMTA-INPL-UMR CNRS, les auteurs remercient vivement Messieurs M. Lebouché, J. Mallet, M. Souhar et F. Lusseyran. Les auteurs expriment leur sincère gratitude au Professeur G. Cognet (INPGrenoble) pour sa contribution à la mise en forme finale du présent document.

## Références

- [1] G.I. Taylor, Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 223 (1923) 289–343.
- [2] J.T. Stuart, On the non-linear mechanics of hydrodynamics stability, *J. Fluid. Mech.* 4 (1958) 1–21.
- [3] C.D. Andereck, S.S. Liu, H.C. Swinney, Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders, *J. Fluid. Mech.* 164 (1986) 155–183.
- [4] A. Lorenzen, T. Mulin, Anomalous modes and finite-length effects in Taylor–Couette flow, *Phys. Rev. A* 31 (1985) 3463–3465.
- [5] T.T. Lim, Y.T. Chew, Q. Xiao, A new flow regime in Taylor–Couette flow, *Phys. Fluids* 10 (12) (1998) 3233–3235.
- [6] M.N. Noui-Mehidi, M. Wimmer, Free surface effects on the flow between conical cylinders, *Acta Mech.* 135 (1999) 13–25.
- [7] A. Mahamdia, A. Bouabdallah, Effets simultanés des limitations axiale et radiale sur l'écoulement de Taylor–Couette, *Modelling, Measurement and Control Ser. B* 30 (1) (1990) 5–12.
- [8] M. Lebouché, Relation entre les fluctuations pariétales du transfert massique et du gradient de vitesse dans le cas d'un nombre de Schmidt grand, *C. R. Acad. Sci. Paris* 271 (1970) 338–441.
- [9] G. Cognet, Utilisation de la polarographie pour l'étude de l'écoulement de Couette, *J. Mécanique* 10 (1971) 65–90.