



## Solution analytique pour le transfert de masse entre puits en milieu poreux hétérogène

Jean-Philippe Carlier<sup>a,b,\*</sup>, Philippe Ackerer<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Institut de mécanique des fluides et des solides, UMR 7507 CNRS-ULP, Strasbourg, France

<sup>b</sup> LUMEN-LEMTA, ESSTIN, Université Henri Poincaré, Nancy 1, 2, rue Jean Lamour, 54519 Vandoeuvre les Nancy cedex, France

Reçu le 12 décembre 2002 ; accepté après révision le 8 avril 2003

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

---

### Résumé

La solution analytique développée par Dagan et Indelman (Water Resources Res. 35 (12) (1999) 3639–3647) pour la modélisation du transport d'un traceur en milieu poreux hétérogène de dimensions infinies et sous condition hydrodynamique d'un dipôle est généralisée par la prise en compte de conditions aux limites à flux nul. Les résultats obtenus sont comparés à ceux correspondants au domaine infini ce qui permet de mettre en évidence une influence importante de ces limites sur l'éluion au puits de pompage et de souligner les effets des paramètres de l'hétérogénéité du milieu. Les résultats analytiques sont enfin comparés à des données expérimentales de laboratoire et présentent une bonne adéquation avec ceux-ci. **Pour citer cet article :** J.-P. Carlier, P. Ackerer, C. R. Mecanique 331 (2003).

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**Analytical solution for mass transfer between wells in heterogeneous porous media.** The analytical solution developed by Dagan and Indelman (Water Resources Res. 35 (12) (1999) 3639–3647) for modelling the transport of a tracer in an infinite heterogeneous porous media in a dipole flow is extended by accounting for the presence of no flow finite boundaries. The results obtained are compared to those corresponding to the infinite domain, emphasizing the important influence of the boundaries on the elution at the pumping well and the effect of the medium's heterogeneity. The analytical results are then compared to experimental data and provide good matching. **To cite this article:** J.-P. Carlier, P. Ackerer, C. R. Mecanique 331 (2003).

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Milieu poreux ; Transfert de masse ; Conditions limites ; Stochastique ; Dipôle

*Keywords:* Porous media; Mass transfer; Limit conditions; Stochastic; Dipole

---

---

\* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : [jean-philippe.carlier@esstin.uhp-nancy.fr](mailto:jean-philippe.carlier@esstin.uhp-nancy.fr) (J.-P. Carlier).

### Abridged English version

A stochastic approach of flow and transport equations in porous media is a convenient way to take the heterogeneity of local properties into account; thus it requires numerous hypothesis and simplifications, among which an unbounded flow domain and uniform mean velocity. For concrete applications, it is nevertheless of great interest to study more specific geometries, and specifically bounded domains.

The present work generalises a result obtained by Dagan and Indelman [3] for the particular case of dipole flow in an heterogeneous porous medium with an investigation on the impact of no flow boundaries on the analytical expression of the elution concentration.

We will study flow and transport in a vein of porous medium of constant thickness bounded by two impervious planes where an injection and a pumping well are located (Fig. 1). Logconductivity is considered as a random space function of known mean  $\langle Y \rangle = \ln K_G$ , variance  $\sigma_Y^2$  and autocorrelation axisymmetric function  $\rho_Y(R)$ . With a first order approach, a set of partial derivatives equations constituted of stochastic forms of Darcy's law and of mass conservation equation can be written. This system is then to be solved assuming zero flux conditions at the walls and prescribed heads at both wells.

If we now consider resident concentration at the pumping well,  $C(x, t)$ , and assume the initial concentration to be zero in the whole domain, and a given concentration at the injection well  $C = C_0(t)$ , it can be shown that  $C(x, t)$  can be expressed as the integral of the injection concentration times the marginal probability density function of travel time of a particle between the two wells.

To evaluate this probability density function, the corresponding flow field in homogeneous medium has first to be calculated. Using a curvilinear system of coordinates, the values of the two first statistical moments of travel time can be simply deduced, leading to a semi-analytical expression of resident concentration.

The elution curve plotted in Fig. 2 for a step injection in homogeneous medium emphasizes the large influence of the existence of boundaries on the arrival time which decreases quickly as the channel tightens.

In addition to this effect, heterogeneities in the logconductivity distribution result in an anticipated breakthrough at the pumping well and a smoother shape of the elution curve. This influence is all the more acute as the value of  $\sigma_Y^2$  becomes large (within the limit of first order stochastic theories, assumed to be  $\sigma_Y^2 < 1$ ), and can be explained by the setting of preferential flow path of low logconductivity.

Similarly, a decreasing  $I_Y$  causes a larger spreading of the elution curve that can be explained by an increasing number of heterogeneities encountered by a particle between the two wells.

These theoretical results are finally compared to a set of experimental data obtained from eight tests conducted on the MARCEAUS model [1], a large size laboratory device packed with a weakly heterogeneous medium, and show a very good agreement in terms of breakthrough time and shape of the elution curve.

## 1. Introduction

Le dispositif du dipôle pompage-injection connaît de nombreuses applications dans le domaine de la dépollution de sols contaminés ou l'identification de paramètres [1]. L'utilisation d'une approche stochastique permet de prendre en compte l'hétérogénéité du milieu et d'obtenir les moments statistiques de la vitesse et de la charge autour d'un puits [2] ou d'accéder à une expression analytique de la concentration au puits de pompage fonction de la concentration d'injection [3].

Nous nous intéressons ici à l'extension du champ de cette solution analytique par la prise en compte de plans imperméables limitant le domaine, ce qui permettra son application à des modèles de laboratoires dont les domaines sont de faibles dimensions.

Dans cette Note, nous présentons dans un premier temps la méthode de résolution du problème du doublet en présence de conditions aux limites simples et étudions l'impact de celles-ci sur la courbe d'éluion. L'influence des paramètres quantifiant l'hétérogénéité du milieu est ensuite mesurée. Nous appliquons enfin les résultats obtenus

aux données expérimentales issues de MARCEAUS’ de l’Institut de Mécanique des Fluides et des Solides de Strasbourg (UMR CNRS–Univ. Strasbourg I 7507) [1].

## 2. Calcul de la solution analytique

On utilise un système de coordonnées cartésiennes dans l’espace. L’écoulement se situe dans une veine de milieu poreux d’épaisseur constante entre deux puits d’injection et de pompage situés respectivement à  $x_2 = -a/2$ ,  $x_1 = 0$  et  $x_2 = +a/2$ ,  $x_1 = 0$  (Fig. 1). On considère la logconductivité  $Y = \ln K$  comme une fonction aléatoire de l’espace dont on connaît la moyenne  $\langle Y \rangle = \ln K_G$ , la variance  $\sigma_Y^2$  et la fonction d’autocorrélation axisymétrique stationnaire  $\rho_Y(R)$  avec  $R^2 = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]/I_Y^2 + (x_3 - y_3)^2/I_v^2$  où  $I_Y$  et  $I_v$  sont les échelles intégrales horizontales et verticales, respectivement, définissant l’anisotropie statistique du milieu  $e = I_v/I_Y$ . On décompose la logconductivité suivant  $Y = \langle Y \rangle + Y'$ , soit la somme d’un terme moyen et de fluctuations.

On cherche alors à résoudre le système d’équations aux dérivées partielles suivant :

- Conservation de la masse :

$$\nabla \cdot V = f \tag{1}$$

avec  $f$  terme puits/source.

- Conservation de la quantité de mouvement (loi de Darcy) :

$$V = -\frac{K_G}{n} \exp(Y') E \tag{2}$$

où  $E = \nabla H$  et  $n$  est la porosité supposée constante.

- Avec les conditions limites suivantes :

$$H = H_w \text{ pour } x_1^2 + \left(x_2 + \frac{a}{2}\right)^2 = r_w^2 \text{ et } H = -H_w \text{ pour } x_1^2 + \left(x_2 - \frac{a}{2}\right)^2 = r_w^2$$

$\nabla H(x) = 0$  pour  $x_2 = \pm a/2$ ,  $a$  étant la largeur du domaine.

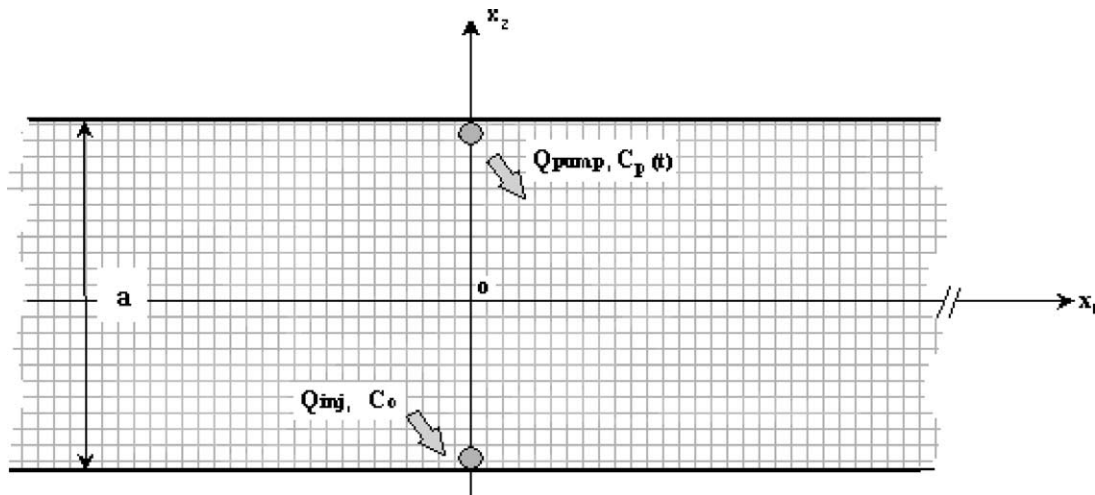


Fig. 1. Domaine d'étude.

Fig. 1. Domain of study.

Si l'on considère la variable  $C(x, t)$  concentration résidente locale [4] et en négligeant les effets de la dispersion à l'échelle des pores [3], l'équation du transport d'un traceur devient :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \cdot \nabla C = 0 \quad (3)$$

que l'on résout avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$C = 0 \quad \text{pour } t = 0 \quad \text{et} \quad C = C_0(t) \quad \text{pour } x \in A_0, t > 0$$

$A_0$  étant l'enveloppe du puits d'injection.

L'expression du temps de parcours  $\tau$  d'une particule entre les deux puits est déterminée par intégration de :

$$d\tau = \frac{ds}{V(s, b)}; \quad \tau = 0, s = 0 \quad (4)$$

où  $s$  est une abscisse curviligne sur la ligne de courant étudiée et  $b$  l'origine de la ligne de courant considérée sur  $A_0$ .

Si on note alors  $g(V_{r_0}, \tau)$  la fonction de densité de probabilité jointe de  $V_{r_0}$  (vitesse à une distance  $r_0$  du puits d'injection) et de  $\tau$ , et  $g_V(\tau, b) = (1/U_0) \int_0^\infty V_{r_0} g(V_{r_0}, \tau) dV_{r_0}$  la densité de probabilité marginale de  $\tau$  ( $U_0$  vitesse moyenne sur  $A_0$ ), la concentration résidente au puits de pompage peut s'exprimer comme :

$$C_f(t) = \frac{1}{A_0} \int_{A_0} \int_0^t C_0(t_0) g_V(t - t_0; b) dt_0 db \quad (5)$$

Pour déterminer  $g(V_{r_0}, \tau)$ , il est dans un premier temps nécessaire de résoudre le problème correspondant en milieu homogène. En utilisant une méthode analogue à celle utilisée par Koplik et al. [5] pour un domaine infini, on obtient l'expression de la vitesse moyenne  $U$  :

$$|U| = U = \frac{Q}{\sqrt{2na}} \sqrt{\cosh 2\phi + \cos 2\theta} \quad (6)$$

En émettant l'hypothèse d'un milieu fortement anisotrope ( $e < 0,2$  [3]), nous pouvons obtenir l'expression des deux premiers moments statistiques de  $\tau$ , puis après intégration celles de la concentration au puits de pompage pour un milieu homogène :

– En réponse à un Dirac  $C_0(t) = m_0 \delta(t)$  :

$$C_f^{(hm)}(t') = \frac{m_0 Q \sin^2 \theta}{a^2 (\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\theta)} * H\left(t' - \frac{1}{\pi^2}\right) \quad (7)$$

et  $t' = 2\theta / (\pi^2 \sin 2\theta)$ ,  $t'$  temps réduit avec  $t = (\pi n l / Q) t'$

– En réponse à un échelon de Heaviside  $C_0(t) = C_0 \mathbf{H}(t)$  :

$$C_f^{(hm)}(t') = \frac{\theta(t')}{\pi} C_0 \quad (8)$$

où  $\theta(t')$  est l'inverse de l'expression précédente (7).

### 3. Résultats

#### 3.1. Influence des conditions aux limites ; cas du milieu homogène

L'examen de la courbe d'éluion, données par la Fig. 2 pour une injection de type échelon en milieu homogène, permet de quantifier l'influence importante de la présence des limites à flux nul sur l'écoulement et le transport d'un traceur conservatif.

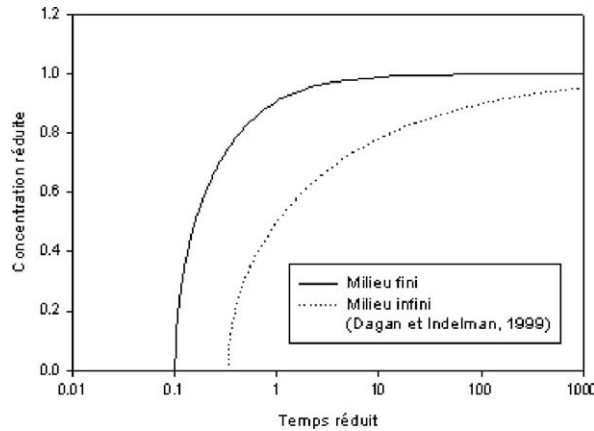


Fig. 2. Concentration d'élution en milieu homogène. Injection échelon.

Fig. 2. Elution concentration in homogeneous medium. Step injection.

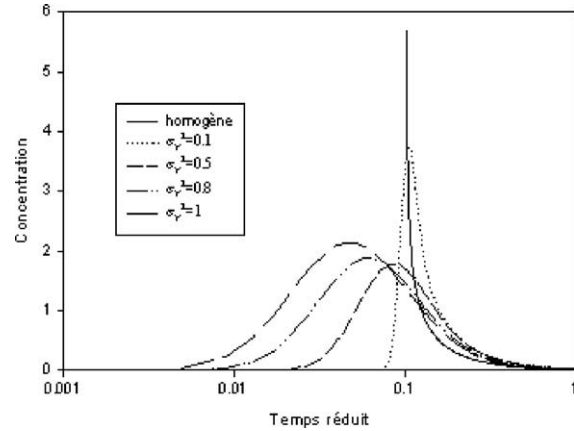


Fig. 3. Concentration d'élution pour différentes valeurs de  $\sigma_Y^2$ . Injection impulsion.

Fig. 3. Elution concentration for different  $\sigma_Y^2$ . Impulse injection.

La courbe montre une arrivée plus rapide du traceur au puits de pompage : les frontières contraignent l'écoulement qui ne peut avoir lieu que dans une partie restreinte du domaine où les vitesses sont alors plus importantes. Ces résultats sont semblables à ceux obtenus pour d'autres configurations [1].

### 3.2. De l'influence des paramètres de l'hétérogénéité du milieu

L'hétérogénéité du milieu (en supposant  $\sigma_Y^2 < 1$ , limite de validité généralement admise) se traduit par une apparition anticipée du traceur au puits de pompage et à un plus grand étalement de la courbe d'élution d'autant plus marqués que  $\sigma_Y^2$  est grand. Cet effet peut être mis en évidence aussi bien en réponse à une injection de type Dirac (Fig. 3) qu'à un échelon.

Physiquement, ce phénomène s'explique par le fait de l'apparition de chemins d'écoulement préférentiels, suivant lesquels la conductivité hydraulique est supérieure à la conductivité moyenne, entraînant des vitesses localement plus importantes.

On peut de la même manière mettre en évidence l'influence de l'échelle intégrale  $I_Y$  qui caractérise l'extension spatiale de  $\rho_Y(R)$ . Plus l'échelle intégrale est petite par rapport aux dimensions du système, et plus les particules de polluant rencontreront successivement un nombre élevé de valeurs de perméabilités différentes, se traduisant, à  $\sigma_Y^2$  fixé, par un « étalement » de la courbe d'élution.

Tous ces résultats sont conformes à ceux obtenus pour un domaine infini [3].

## 4. Comparaison à des résultats expérimentaux

Les résultats précédents sont comparés à ceux obtenus lors d'une série d'expériences effectuées sur le modèle MARCEAUS [1], dispositif expérimental de grandes dimensions ( $L \times l \times h = 6 \times 1 \times 1 \text{ m}^3$ ) contenant un milieu poreux composé de trois sables de perméabilités différentes qui sont disposés par blocs parallélépipédiques de  $40 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$  de manière pseudo-aléatoire, en ménageant une direction préférentielle d'écoulement.

La Fig. 4 représente la concentration réduite en fonction du temps réduit la concentration d'élution au puits de pompage pour les huit expériences menées en modifiant la localisation des puits et la courbe correspondant à la réponse théorique pour un milieu homogène. L'hétérogénéité du milieu n'étant pas très marquée, on peut considérer que les résultats théoriques pour un milieu homogène doivent s'approcher de ceux effectivement obtenus. On constate en effet que les temps de percée des courbes expérimentales et de la courbe théorique sont très proches, les valeurs expérimentales étant légèrement inférieures du fait de l'hétérogénéité.

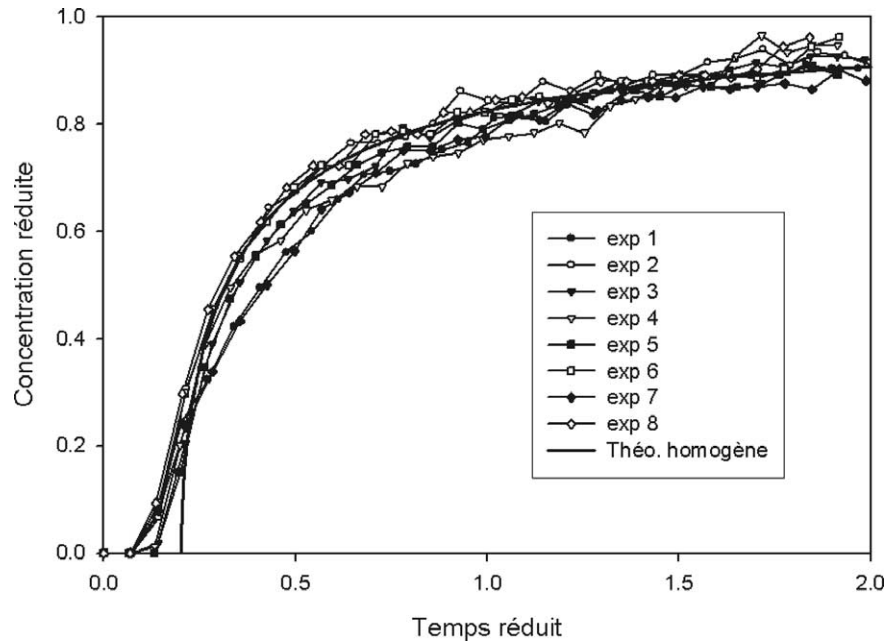


Fig. 4. Courbes expérimentales d'élution en milieu faiblement hétérogène.

Fig. 4. Experimental elution curves for weakly heterogeneous medium.

## 5. Conclusion

La solution analytique développée par Dagan et Indelman [3] pour la modélisation du transport d'un traceur en milieu hétérogène de dimensions infinies et sous condition hydrodynamique d'un dipôle a été généralisée par la prise en compte de conditions aux limites à flux nul. Cette nouvelle solution analytique permet de mettre en évidence l'importance de l'influence de ces limites sur l'élution au puits de pompage, et notamment sur le temps d'apparition du polluant.

Cette méthode permet également de souligner l'influence des différents paramètres régissant l'hétérogénéité du milieu ( $\sigma_Y^2$  et  $I_Y$ ) qui vient s'ajouter à celle des limites.

Ces résultats ont montré une très bonne adéquation avec ceux obtenus expérimentalement à l'aide d'un modèle de laboratoire de grandes dimensions.

De par la possibilité de réduire la dimension du domaine d'application, cette solution peut servir de référence pour les travaux numériques et d'aide pour l'interprétation d'expériences de laboratoire.

## Références

- [1] J.-Ph. Carlier, Etude du transfert de masse en milieu poreux par approche stochastique, Thèse de Doctorat de l'Université Louis Pasteur Strasbourg I, 2002, p. 158.
- [2] P. Indelman, G. Dagan, Solute transport in divergent radial flow through heterogeneous porous media, *J. Fluid Mech.* 384 (1999) 159–182.
- [3] G. Dagan, P. Indelman, Reactive solute transport in flow between a recharging and a pumping well in a heterogeneous aquifer, *Water Resources Res.* 35 (12) (1999) 3639–3647.
- [4] A. Kreft, A. Zuber, On the physical meaning of the dispersion equation and its solutions for different initial and boundary conditions, *Chem. Engrg. Sci.* 33 (1978) 1471–1480.
- [5] J. Koplik, S. Redner, E.J. Hinch, Tracer dispersion in planar multipole flow, *Phys. Rev. E* 50 (6) (1994) 4650–4671.