

# Impact non-pénétrant sur le thorax : influence de la courbure sur la propagation des ondes

Quentin Grimal, Salah Naili, Alexandre Watzky

Laboratoire de mécanique physique, CNRS UMR 7052, Faculté des sciences et technologie,  
Université Paris XII-Val de Marne, 61, avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil cedex, France

Reçu le 3 octobre 2001 ; accepté après révision le 1<sup>er</sup> juillet 2002

Note présentée par Robert Dautray.

---

## Résumé

Des études théoriques sont nécessaires pour mieux comprendre les mécanismes de blessures associés à l'onde créée par un impact sur le thorax (Fung dans «Biomechanics Motions, Flow, Stress, and Growth», Springer-Verlag, 1990 ; Cooper et al., J. Trauma 40 (1996) S38–S41), onde susceptible de créer des lésions dans les poumons. Après avoir mis en évidence les effets dus au faible couplage acoustique à l'interface paroi thoracique-poumon (Grimal et al., C. R. Acad. Sci. IIB 329 (2001) 655–662), on étudie, à l'aide d'une méthode analytique approchée, l'influence de la courbure de l'interface. Les résultats sont donnés en termes d'énergie de déformation pour une onde longitudinale transmise ou convertie en onde de cisaillement à l'interface ; il apparaît que la focalisation de l'énergie est importante pour des courbures correspondant à celles du thorax humain. *Pour citer cet article : Q. Grimal et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 569–574.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**biomécanique / ondes / milieu stratifié / propagation / interface / lésion / thorax / impact / courbure / earth-flattening**

## Nonpenetrating impact on the thorax: influence of curvature on wave propagation

## Abstract

Theoretical studies of the propagation of impact waves through the thorax are needed to improve the design of bulletproof jackets and blast protections (Fung in 'Biomechanics Motions, Flow, Stress, and Growth', Springer-Verlag, 1990; Cooper et al., J. Trauma 40 (1996) S38–S41). The influence of the weak acoustic coupling at the interface between the thoracic wall and the lung were described in (Grimal et al., C. R. Acad. Sci. IIB 329 (2001) 655–662); in this work, we study, within the frame of elastodynamics and with an approximate analytical method, the effects of the curvature of this interface. Results are given in terms of strain energy for the pressure wave, transmitted or converted. Focalisation of energy in the medium representing the lung is important for curvatures measured in humans. *To cite this article: Q. Grimal et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 569–574.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**biomechanics / waves / layered media / propagation / interface / injury / thorax / impact / curvature / earth-flattening**

---

Adresses e-mail : grimal@univ-paris12.fr (Q. Grimal); naili@univ-paris12.fr (S. Naili); watzky@univ-paris12.fr (A. Watzky).

***Abridged English version***

The aim of this study is to investigate the effects related to the curvature of the interface between the thoracic wall and the lungs which may contribute to the focalisation of the energy carried by an impact wave on the thorax. The work presented here is an extension of [3] in which details about the model and the method can be found. The model consists of two welded elastic media — one for the thoracic wall (medium A) and one for the lung (medium B) — separated by a spherical interface (Fig. 1). The media are homogeneous, isotropic and obey Hooke's constitutive law; their properties are given in Table 1. The method of solution uses the generalized ray/Cagniard–de Hoop method [3,5] together with a change of variables (Eqs. (1)–(3)), similar to the 'Earth flattening transformation' (EFT) used in geophysics, which is a mapping from the spherical model (Fig. 1) to an equivalent plane model (Fig. 2). This allows us to use again, with some minor modifications, the computer code giving the exact solution in the plane geometry [3]. The solution in the spherical configuration is approximated and the parameters  $m$ ,  $l$  and  $a$  must be determined by numerical tests (in the present study, we used  $m = 3$ ,  $l = 1$ ,  $a = R_s$ ). Since the program deals with homogeneous layers, we discretize media A and B in the equivalent plane geometry to account for the continuously varying mechanical properties; the discretization uses 0,5 mm thick layers. A set of numerical tests showed that both the computer code and the EFT yield physically acceptable results.

A point source of pressure waves is placed at 2 cm below the interface; the history of the source is a 0,3 ms duration Blackman window [4]. The pulse emitted by the source is transmitted to medium B by the spherical interface. We describe, in medium B, the repartition of the maximum of strain energy for generalized rays PP (transmitted pressure wave) and PS (converted transverse wave). Fig. 3 shows the effects of the curvature radius ( $R_i$ ) along the axis  $z$  ( $\theta = 0$ ) (see Fig. 1). While the maximum of transmitted energy along  $z$  decreases in the plane case [3], it increases (when the curvature radius is small enough) in the spherical case. Fig. 4 shows the repartition of energy in medium B; results are presented in the frame  $(I, d, z)$  to allow for comparison with curves presented in [3]. The focalisation of energy around the  $z$  axis, already effective in the plane case due to the weak acoustic coupling at the interface, is enhanced by the curvature. Fung's hypothesis [1] that the thorax's curvature plays a role in the occurrence of injury is supported by our simple model: we found that thoracic wall-lung interface curvature, of the order of magnitude of those measured in humans, contributes to the focalisation of energy in the lung.

---

**1. Introduction**

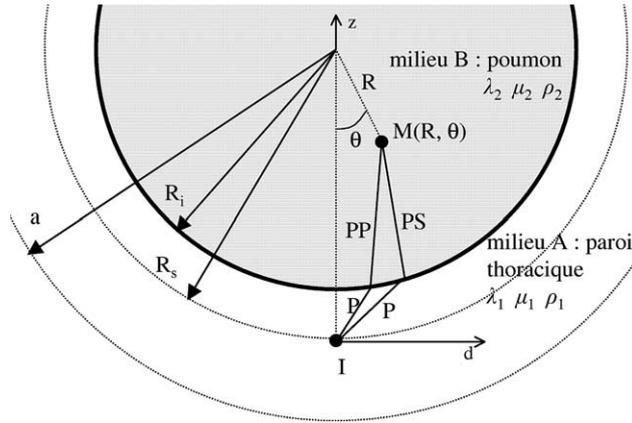
Des études sur la propagation d'une onde dans le thorax, consécutive à un choc, sont nécessaires pour améliorer la conception et la validation des protections thoraciques (e.g. gilet pare-balles) [1,2]. Cette Note vise à mettre en évidence, à l'aide d'un modèle géométrique simplifié du thorax, l'influence de la courbure de l'interface paroi thoracique (PT)-poumons, susceptible de contribuer à la focalisation de l'énergie dans une zone des poumons. Cette étude fait suite à la note [3], consacrée à l'étude du faible couplage PT-poumons, dans laquelle on trouvera des détails sur la modélisation proposée, les équations obtenues et la méthode de résolution utilisée.

**2. Modélisation**

On considère deux milieux élastiques soudés le long d'une interface sphérique (Fig. 1). Les deux milieux sont homogènes, isotropes et obéissent à la loi de Hooke. Le milieu A représente la PT et le milieu B les poumons. Une source d'ondes de pression, isotrope et ponctuelle, placée en un point  $I$  de A, simule l'onde créée au point d'impact. Les propriétés attribuées à la PT et aux poumons sont données dans le Tableau 1.

**Figure 1.** Définition de la géométrie de symétrie sphérique et des rayons généralisés PP et PS. La source est en I. Pour les calculs,  $R_s - R_i = 0,02$  m.

**Figure 1.** Definition of the spherical configuration and of the generalized rays PP and PS. The source is placed at I. For the computations,  $R_s - R_i = 0.02$  m.



**Tableau 1.** Coefficients de Lamé, masses volumiques et célérités pour les milieux A et B.  $C_S$  et  $C_P$  sont respectivement les célérités des ondes de cisaillements et longitudinales. Les indices et les exposants A et B sont relatifs aux milieux A et B.

**Table 1.** Lamé's coefficients, densities and wave speeds for media A and B.  $C_S$  and  $C_P$  are the pressure and shear waves speeds. Superscripts and subscripts A and B are associated with media A and B.

$\lambda_A$	$\mu_A$	$\rho_A$	$C_S^A$	$C_P^A$	$\lambda_B$	$\mu_B$	$\rho_B$	$C_S^B$	$C_P^B$
(MPa)	(MPa)	( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )	( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )	(MPa)	(MPa)	( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )	( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )
1126	562	1000	750	1500	0,034	0,008	500	4	10

On calculera la réponse en des points du milieu B pour  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ , et correspondant aux ondes simplement transmises à l'interface (on ne s'intéressera pas aux réflexions sur les parois du milieu B).

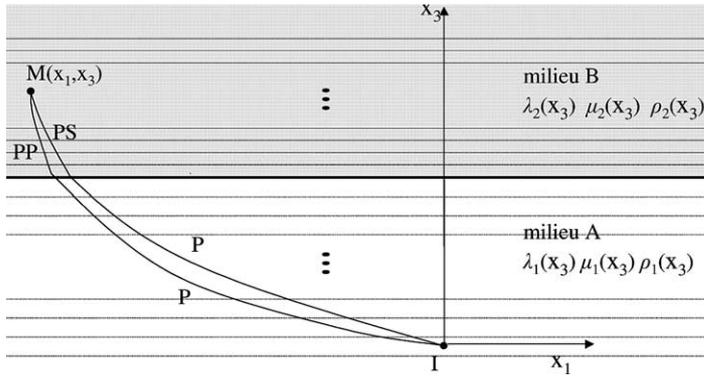
### 3. Méthode de calcul

Un programme de calculs numériques développé précédemment [3], dédié à l'étude de la propagation des ondes dans les milieux stratifiés plans (méthode des rayons généralisés/Cagniard–de Hoop [4]), a été modifié pour intégrer un ensemble de changements de variables connu des géophysiciens sous le nom de «Earth flattening transformation» (EFT) [5,6]. Les procédures EFT permettent d'utiliser dans une géométrie de symétrie sphérique (stratification concentrique), les méthodes et les programmes développés pour l'étude des milieux stratifiés plans [5,7]. En raisonnant en terme de rayons optiques, les changements de variables reviennent à remplacer l'étude de rayons rectilignes dans une géométrie de symétrie sphérique par l'étude de rayons courbes dans une géométrie plane; ceci est réalisé en remplaçant le matériau homogène de chaque strate par un matériau inhomogène, de sorte que les rayons sont continuellement réfractés.

On utilise un ensemble de transformations [6,8] qui définissent un milieu plan équivalent (indice  $f$ ) au milieu sphérique (indice  $s$ ). Les propriétés cinématiques des rayons géométriques (optiques) imposent :

$$\frac{R}{a} = e^{x_3/a}; \quad a\theta = x_1; \quad \frac{a}{R}c_{P;s} = c_{P;f}(x_3); \quad \frac{a}{R}c_{S;s} = c_{S;f}(x_3) \quad (1)$$

où  $(R, \theta, \phi)$  et  $(x_1, x_2, x_3)$  sont respectivement les coordonnées dans les géométries sphérique (Fig. 1) et plane (Fig. 2);  $a$  est un rayon de référence;  $c_P$  et  $c_S$  sont respectivement les célérités des ondes longitudinale et de cisaillement. La source isotrope utilisée rend le problème axisymétrique, de sorte qu'il



**Figure 2.** Définition de la configuration plane équivalente au problème sphérique obtenue après les transformations (Éqs. (1) à (3)).

**Figure 2.** Definition of the equivalent plane configuration obtained after the transformations (Eqs. (1) to (3)).

suffit d'étudier le problème en symétrie sphérique et son équivalent en géométrie plane, respectivement dans les plans  $\phi = 0$  et  $x_2 = 0$ . La théorie des rayons généralisés — qui donne la solution exacte en géométrie plane —, utilisée dans cette étude, nécessite pour chaque milieu de transformer les coefficients de Lamé ( $\lambda, \mu$ ), la masse volumique ( $\rho$ ) ainsi que les vitesses et les contraintes calculées en un point du milieu (respectivement notées  $\mathbf{v}$  et  $\sigma$ ) [6,8] :

$$(R/a)^m \lambda_s = \lambda_f(x_3) ; \quad (R/a)^m \mu_s = \mu_f(x_3) ; \quad (R/a)^{m+2} \rho_s = \rho_f(x_3) \quad (2)$$

$$(R/a)^l \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_f ; \quad (R/a)^{l+m+1} \sigma_s = \sigma_f \quad (3)$$

$l$  et  $m$  étant des paramètres. Müller [8] a montré que la transformation (1) est optimale pour le calcul des déplacements avec la théorie des rayons géométriques (valable pour les hautes fréquences). La solution du problème en géométrie sphérique traité ainsi est approchée du fait des changements de variables. De plus, le domaine de validité et l'estimation de l'erreur sont des questions difficiles qui n'ont pas pu être traitées de manière satisfaisante [6] ; néanmoins, la technique a été utilisée avec succès en géophysique.

Dans la note [3], l'énergie totale passée en un point était utilisée pour caractériser la propagation de l'onde ; ici, on retient les valeurs correspondant au maximum de l'énergie de déformation pendant le passage de l'onde. Le vecteur de Poynting dans la direction  $x_3$ , donné par  $P_3 = v_1\sigma_{13} + v_2\sigma_{23} + v_3\sigma_{33}$ , calculé directement par le programme, donne accès de manière approchée à l'énergie de déformation. En effet, pour le cas étudié de deux milieux très faiblement couplés, le front d'onde dans le milieu B est quasi-plan ; or, on peut montrer que pour une onde plane se propageant dans la direction  $x_3$ ,  $-\partial_t E = \partial_3 P_3 = -\frac{1}{c} \partial_t P_3$ , ce qui mène à la relation  $E_d = \frac{1}{2c} P_3 + \alpha$  (on a exploité le fait que la moitié de l'énergie totale transportée par une onde plane est de l'énergie de déformation), où  $\partial_t$  et  $\partial_3$  désignent respectivement les dérivées partielles par rapport au temps et à  $x_3$ ,  $E$  et  $E_d$  sont respectivement les énergies volumiques totale et de déformation,  $c$  est la célérité de l'onde considérée et  $\alpha$  est une constante.

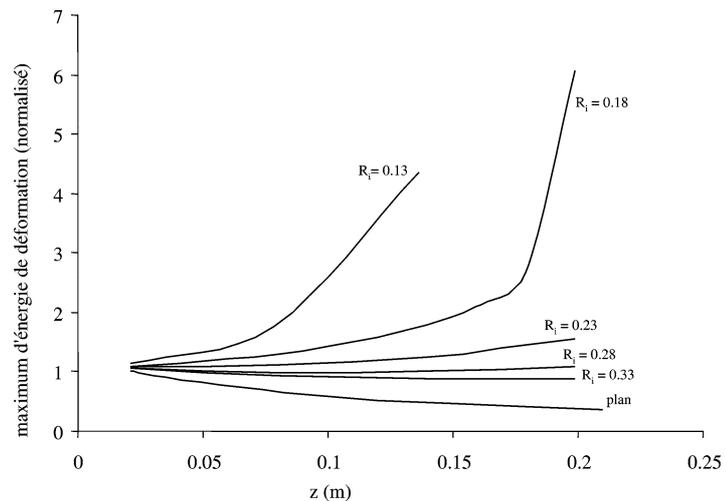
Dans notre programme, comme dans tous les codes de calculs exploitant la méthode des rayons généralisés/Cagniard–de Hoop, chaque strate a des propriétés constantes dans son épaisseur. La modélisation d'une variation continue des propriétés (Eqs. (1) et (2)) par une succession de fines strates homogènes a été largement étudiée par les géophysiciens ([5], p. 385) ; il a été prouvé que la solution converge vers la solution exacte quand le nombre de strates de la discrétisation augmente. Dans cette étude, des tests numériques ont montré qu'il n'est pas nécessaire de prendre des strates plus fines que 0.5 mm.

Les lois de puissance (2) et (3) font apparaître les paramètres  $m$  et  $l$  dont les valeurs sont à déterminer dans le cadre de chaque étude. Nous avons étudié l'influence du choix des paramètres  $m, l$  et  $a$  sur l'énergie de déformation. Dans les problèmes de géophysique, la valeur de  $a$  est généralement le rayon de la terre, dans notre étude, des tests ont montré que le meilleur choix est de fixer  $a = R_s$ . D'après Chapman [6],  $m$  et  $l$  sont liés par la relation  $l = (1 - m)/2$  ; en nous appuyant sur celle-ci et sur la définition de la transformation pour les vitesses (3), nous avons déterminé la valeur optimale  $m = 3$ , pour un point situé sur l'axe  $z$ , de

manière à conserver le mieux possible la cinématique lors du passage au milieu plan équivalent. Des tests numériques ont d'autre part validé le choix de cette valeur. Le programme de calculs numériques et l'EFT ont été testés à travers l'étude de cas simples : (1) en attribuant aux deux milieux les mêmes propriétés mécaniques (celles correspondant aux poumons), de sorte que l'effet de l'interface courbe est éliminé, on vérifie que la réponse est la même que celle calculée pour un milieu homogène ; (2) en réduisant la courbure, on tend vers les résultats du cas plan [3] ; (3) les temps de parcours des ondes sont comparés à des solutions analytiques ; (4) en inversant la courbure, on vérifie que l'énergie décroît plus vite que dans le cas plan lorsque la distance à l'interface augmente.

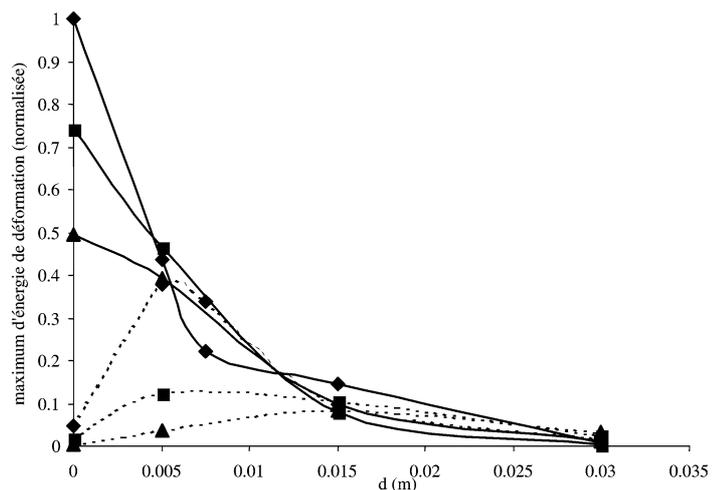
**Figure 3.** Maximum (normalisé) de l'énergie de déformation dans le milieu B pour les points de l'axe  $z$  pour différents rayons de courbure de l'interface.

**Figure 3.** Maximum of normalized strain energy in medium B for points on axis  $z$ , for various radii of curvature of the interface.



**Figure 4.** Maximum (normalisé) de l'énergie de déformation dans le milieu B. Le rayon de courbure de l'interface est fixé à  $R_i = 0,18$  cm ; les résultats sont représentés dans le repère  $(I, d, z)$  (Fig. 2). Les traits pleins et pointillés correspondent aux rayons PP et PS respectivement ;  $\blacklozenge$  :  $x_3 = 15$  cm,  $\blacksquare$  :  $x_3 = 10$  cm,  $\blacktriangle$  :  $x_3 = 4,5$  cm.

**Figure 4.** Maximum of normalized strain energy in medium B. The interface's radius of curvature is  $R_i = 0.18$  cm; plots use the frame  $(I, d, z)$  (Fig. 2). Solid and dotted lines correspond to rays PP and PS respectively;  $\blacklozenge$  :  $x_3 = 15$  cm,  $\blacksquare$  :  $x_3 = 10$  cm,  $\blacktriangle$  :  $x_3 = 4.5$  cm.



#### 4. Résultats et discussion

Comme dans [3], la source est placée dans le milieu A à 2 cm en dessous de l'interface ; son histoire est une fenêtre de Blackman [4] de durée 0,3 ms (construite comme une somme de trois fonctions cosinus de fréquences  $n \times 3333$  Hz,  $n = 1, \dots, 3$ ). Pour permettre la comparaison avec le cas plan, les résultats sont tracés dans un repère dont l'origine est la source (notée  $I$ ) et les axes orthogonaux  $d$  et  $z$  (voir Fig. 1). L'impulsion émise par la source est transmise dans le milieu B à l'interface sphérique PT-poumons. On discutera la répartition de l'énergie transportée par chacun des deux rayons généralisés PP (onde longitudinale transmise) et PS (onde longitudinale convertie en onde de cisaillement) (Fig. 1).

La Fig. 3 montre l'influence du rayon de courbure de l'interface sur la valeur du maximum de l'énergie de déformation pour le rayon PP, le long de l'axe  $z$ . La courbe correspondant au cas plan sert de référence. Alors que l'énergie décroît quand la distance à l'interface augmente dans le cas plan, on observe, dans le cas sphérique, un effet de focalisation : pour des rayons de courbure de l'interface inférieurs à 23 cm, l'énergie ne décroît plus le long de l'axe ; elle augmente assez fortement pour les faibles rayons de courbure.

La Fig. 4 donne la répartition du maximum de l'énergie de déformation pour les rayons PP et PS, dans le milieu B avec  $R_i = 18$  cm. Les résultats donnés dans [3] ont montré que le faible couplage entre les deux milieux favorisait la concentration de l'énergie autour de l'axe  $z$ , dans une zone de deux centimètres de rayon ; la courbure de l'interface a pour effet de diminuer le rayon de cette zone à approximativement un centimètre. Les deux ondes propagées dans le milieu B (rayons PP et PS) sont concernées par la focalisation.

#### 5. Conclusion

La propagation d'une onde transitoire dans un modèle simplifié du thorax prenant en compte la courbure de l'interface paroi thoracique-poumon a été étudiée à l'aide d'une méthode analytique approchée (méthode des rayons généralisés/Cagniard de-Hoop, associée à des changements de variables dits « earth flattening transformations ») puis mise en œuvre numériquement. L'utilisation des changements de variables a nécessité de déterminer les paramètres les mieux adaptés au problème traité. Fung [1] soupçonnait que le mécanisme de focalisation pouvait jouer un rôle dans l'apparition des blessures. Nous avons montré que les courbures de l'ordre de grandeur de celle de l'interface paroi thoracique-poumon chez l'humain contribuent, avec les effets dus au faible couplage acoustique entre les deux milieux, à focaliser l'énergie autour d'un axe passant par la source et perpendiculaire à la stratification. Pour des courbures suffisamment importantes, le maximum d'énergie transmise augmente avec la distance à la source.

**Remerciements.** Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un contrat avec la Délégation Générale pour l'Armement.

#### Références bibliographiques

- [1] Y.C. Fung, Strength, trauma and tolerance, in: Biomechanics Motion, Flow, Stress, and Growth, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [2] G.J. Cooper, B.P. Pearce, A.J. Sedman, I.S. Bush, C.W. Oakley, Experimental evaluation of a rig to simulate the response of the thorax to blast loading, J. Trauma 40 (1996) S38–S41.
- [3] Q. Grimal, A. Watzky, S. Naïli, Impact non-pénétrant sur le thorax : une contribution à l'étude de la propagation des ondes, C. R. Acad. Sci. Paris, Série Iib 329 (2001) 655–662.
- [4] J.H.M.T. Van Der Hijden, Propagation of Transient Elastic Waves in Stratified Anisotropic Media, North-Holland Ser. Appl. Math. Mech., Vol. 32, 1987.
- [5] K. Aki, P.G. Richard, Quantitative Seismology: Theory and Methods, Freeman, San Fransico, 1980.
- [6] C.H. Chapman, Earth flattening transformation in the body wave theory, Geophys. J. R. Astr. Soc. 35 (1973) 55–70.
- [7] B.L.N. Kennett, Seismic Wave Propagation in Stratified Media, Cambridge University Press, 1983.
- [8] G. Müller, Approximate treatment of elastic body waves in media with spherical symetry, Geophys. J. R. Astr. Soc. 23 (1971) 435–449.