

Étude de la convergence numérique d'une méthode vortex pour un écoulement a grand nombre de Reynolds dans un mélangeur

Iraj Mortazavi^a, Pierre Micheau^b, André Giovannini^c

^a Mathématiques appliquées de Bordeaux, 351, cours de la Libération, 33405 Talence, France

^b Université Lille 1, cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

^c Institut de mécanique des fluides de Toulouse, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse, France

Reçu le 21 février 2002 ; accepté le 26 février 2002

Note présentée par Michel Combarous.

Résumé

La convergence numérique de la méthode RVM (*Random Vortex Method*) pour l'écoulement complexe dans un mélangeur est étudiée, en fonction de trois paramètres de discrétisation principaux. Deux de ces paramètres sont liés à la discrétisation spatiale de la vorticité (intensité tourbillonnaire Γ et longueur du segment h) et la troisième au pas de temps (Δt). Les comportements dus au manque de précision et à l'absence de stabilité sont ainsi analysés. Une fois les conditions de stabilité satisfaites, une diminution mesurée de la valeur de Γ et de Δt nous mène vers la convergence. De plus, l'erreur due à la méthode de marche aléatoire (*Random Walk Method*) est étudiée. On s'est aussi intéressé au rôle de h sur l'évolution des calculs. *Pour citer cet article : I. Mortazavi et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 409–416.*   2002 Académie des sciences/ ditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides / méthode vortex / convergence numérique / mélangeur 2D / marches aléatoires

Numerical convergence of vortex method for a high Reynolds number 2D bluff-body flow

Abstract

In this paper the convergence of the RVM for a complex flow is studied, in function of three discretization parameters. Two of these parameters are related to the spatial discretization of the vorticity Γ (sheet or blob strength) and h (sheet length or core radius) and the third one to the time discretization Δt . Two main events are observed: first, the computation works but the convergence is not attained, secondly the computation fails. The first behaviour is attributed to a lack of accuracy and the second to a lack of numerical stability. Once the stability conditions are satisfied, decreasing the value of parameters always leads to convergence. *To cite this article: I. Mortazavi et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 409–416.*   2002 Académie des sciences/ ditions scientifiques et m dicales Elsevier SAS

fluid mechanics / vortex method / numerical convergence / 2D bluff-body / random walk

Adresses e-mail : mortaz@math.u-bordeaux.fr (I. Mortazavi); giova@cict.fr (A. Giovannini).

Abridged English version

The vortex method relies principally on a discretization of the continuous time-dependent vorticity field, for a 2D flow, into a large number of vortex “blobs” [1], whose position and strength determine the underlying velocity field [2]. This method has gained considerable popularity in recent years and has been used in a variety of settings (see [3–6]). In this paper, we present a detailed study of the numerical convergence of the random vortex method applied to a two-dimensional, viscous and incompressible flow ($Re = 7000$). The goal is to analyze the effect of the choice of time step, vortex strength and core size on the computed solution. Two of these parameters are related to the spatial discretization of the vorticity (Γ and h) and the third one to the time discretization. The test model is that of an internal jet separated from an external flow by two bluff-body flat plates (Fig. 1). The present work complements the paper of Sethian and Ghoniem who had based their validation study principally on the physical comparison between numerical and experimental results for laminar and turbulent flows. In this work our aim is primarily to find a precision and stability zone, observing and analyzing the convergence of numerical results in function of Γ , Δt and h ; furthermore, this paper contains some combined parametric studies relating the influence of discretization parameters on each other (Figs. 4–6 and 7).

Two principal events are observed: first, the computation works but the convergence is not attained, second the computation fails. The first behavior is attributed to a lack of accuracy and the second to a lack of numerical stability. Three kinds of stability conditions are detected; two of the “Courant” type: $(\Delta t \cdot \Gamma) \leq \beta h^2$ and $\Gamma/\Delta t \cong cte$, the other one related to the satisfaction of a no-slip boundary condition. To our knowledge, no complete theory has been developed to express this condition. Anyway, once the stability conditions are satisfied (which depends primarily on a convenient choice of discretization parameters compared to each other), decreasing the value of parameters always leads to convergence (Fig. 8). Additionally, we have observed a divergence of the numerical solution for a choice of very small time step (Fig. 6). This error due to the Random Walk Method, is diminished generating a higher number of particles in the computational domain.

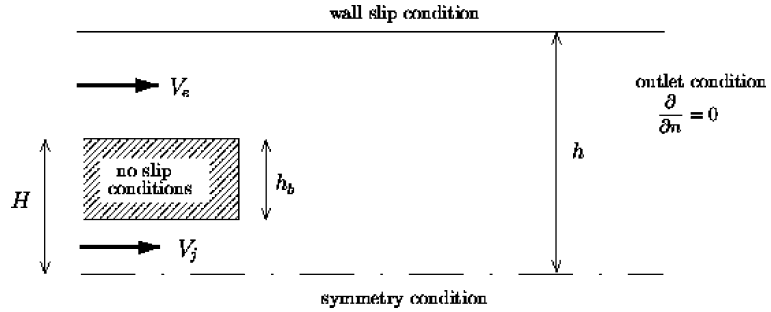
1. Introduction

Depuis Chorin [1,2], et en particulier pendant les dix dernières années, les méthodes vortex sont devenues une branche de la mécanique des fluides numérique pour la simulation directe d’écoulements complexe 2D et 3D [3–6]. Ces méthodes résolvent les équations instationnaires de la mécanique des fluides en distinguant dans l’écoulement les zones irrotationnelles et les zones rotationnelles, elles permettent de n’effectuer le gros des calculs que dans ces dernières. Cela fait que les méthodes vortex sont considérées comme appropriées pour étudier la dynamique tourbillonnaire. Cette façon « intelligente » de décrire les zones tourbillonnaires et l’économie importante de coût de calcul effectuée est un avantage non-négligeable par rapport aux méthodes qui obligent à calculer sur tout le domaine de simulation.

Dans ce travail, nous présentons une étude détaillée de la convergence numérique de l’algorithme correspondant à la méthode hybride tourbillons aléatoires-éléments finis, pour un écoulement 2D plan, instationnaire, visqueux et incompressible. Cette étude est utile pour faire le point sur le comportement numérique de ces techniques, sur leurs capacités, mais aussi sur leurs limites, tout particulièrement en sachant que leur convergence mathématique avec la condition d’adhérence pour les écoulements complexes reste un problème ouvert. La géométrie de l’écoulement, définie à la Fig. 1, est celle d’un jet séparé par deux barreaux d’un écoulement extérieur, lui-même confiné entre deux plaques parallèles (avec la condition de glissement sur ces plaques). Notre objectif principal est d’analyser les effets du choix du pas de temps Δt , de la circulation élémentaire Γ et du rayon de la fonction de noyau δ sur les résultats.

Une fois définie une zone de précision et de stabilité, le schéma de calcul sera utilisé pour étudier la structure de l’écoulement, les phénomènes observés pourront être considérés comme « réalistes ». Pour cette étude de convergence, on se base entre autres, sur l’évolution en fonction des paramètres de discrétisation des résultats moyennés dans le temps obtenus par $F(t) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt / (t_2 - t_1)$: une fois que

Figure 1. Géométrie d'écoulement.
Figure 1. Flow geometry.



l'état asymptotique est acquis, c'est-à-dire quand le nombre des tourbillons se stabilise, le processus pour moyenner les résultats sur 500 pas de temps commence.

2. Schema numérique

Les équations de Navier–Stokes bidimensionnelles, présentées sous forme adimensionnelles, écrites avec les variables $\vec{V}(u, v)$ et ω composante non nulle de $\text{rot } \vec{V}$ (vorticité) sont décrites par l'équation d'Helmholtz :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (1)$$

et l'équation de continuité $\text{div } \vec{V} = 0$. Par ailleurs, $\text{Re} = \text{Re}_H$.

Cette équation est résolue en deux pas fractionnaires, l'un traitant la convection et l'autre la diffusion :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \omega = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad (2)$$

(d/dt étant la dérivée particulaire).

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (3)$$

La vorticité est discrétisée en éléments tourbillonnaires « désingularisés » :

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i f_\delta(x, y) \quad (4)$$

avec $\frac{1}{\delta^2} \iint f_\delta(x, y) dx dy = 1$ où f est une fonction de noyau utilisée, ici le noyau de Rankine, pour éliminer la singularité des tourbillons ponctuels, δ une dimension caractéristique du noyau et Γ_i est la circulation de ces éléments.

Le mouvement des noyaux tourbillonnaires peut être représenté par :

$$\vec{u}_\omega = \frac{d\vec{\chi}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \vec{K}_\delta(\vec{\chi}_i - \vec{\chi}_j), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

où K_δ est la solution lissée de l'intégrale du noyau de l'équation de Poisson, et $\vec{\chi}$ représente la trajectoire de la « particule ».

Dans les couches limites, le principe de résolution reste inchangé mais à la place des noyaux, la vorticité est discrétisée par des segments tourbillonnaires (voir [2,7]).

Le principe de schéma (5) est le suivant : $\vec{\chi}$ est discrétisée par une approche Lagrangienne et l'équation de diffusion est résolue en utilisant des déplacements aléatoires, ce qui permet de préserver la propriété lagrangienne de l'algorithme.

Le déplacement total pour chaque pas de temps, est la somme des déplacements dus à la convection et à la diffusion. Ainsi, la trajectoire est obtenu par :

$$\vec{\chi}_i(x_i, y_i, t + \Delta t) = \vec{\chi}_i(x_i, y_i, t) + F[\vec{u}(x_i, y_i, t), \Delta t] + (\eta_x, \eta_y) \quad (6)$$

Le dernier terme de cette expression représente le mouvement brownien [1,8]. La vitesse \vec{u} des éléments est la somme de \vec{u}_ω et de \vec{u}_p qui représentent respectivement, les composantes rotationnelles et potentielles de la vitesse. La composante rotationnelle est obtenue analytiquement à partir du champ de ω , et la composante potentielle par une méthode d'éléments finis. Les conditions aux limites imposées à \vec{u}_p permettent de satisfaire globalement la condition de glissement aux frontières.

La condition d'adhérence est satisfaite en créant des segments tourbillonnaires (*vortex sheets*) au niveau des parois [2,7,8]. Les segments tourbillonnaires évoluent dans une couche limite « numérique » d'épaisseur $\Delta_s = 1,5\sqrt{\Delta t/\text{Re}}$ et se transforment en noyaux tourbillonnaires à la traversée de la frontière de cette couche limite. Ceci se fait avec la conservation de la circulation.

3. Variables discrètes et convergence

Les variables de discrétisation sont Γ_i , h et Δt . Le nombre de Reynolds Re est choisi égal à 7000.

La discrétisation du domaine spatial est liée essentiellement à $h = 2\delta$ qui est aussi le pas de discrétisation des frontières solides où est imposée la condition d'adhérence.

Les variables principales discrètes calculées directement sont le nombre N des noyaux tourbillonnaires et la position de ces noyaux. En un point, la valeur discrète du rotationnel, calculée par $\omega(\vec{x}) = \sum_1^N \Gamma_i f_\delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$ compte tenu de la structure de f_δ , est approximativement décrit par $\tilde{\omega}(\vec{x}) \cong \sum_1^{n(\vec{x})} \Gamma_i f_\delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$, où $n(\vec{x})$ est le nombre de noyaux tourbillonnaires situés dans un cercle de rayon δ centré en \vec{x} , $|\omega(\vec{x})| \cong n(\vec{x})[\Gamma/\pi\delta^2]$ avec $|\Gamma_i| = \Gamma = \text{cte}$ et $|f_\delta(\vec{x} - \vec{x}_i)| \cong 1/\pi\delta^2$, en admettant que dans un voisinage donné tous les noyaux tourbillonnaires ont dans le demi-espace de calcul le même sens de circulation. Les valeurs discrètes des vitesses rotationnelles \vec{u}_ω et potentielles \vec{u}_p ainsi que des autres variables (fonction de courant, pression, ...), sont calculées à partir de la donnée de $\tilde{\omega}(\vec{x})$.

L'étude numérique de la convergence a été effectuée en faisant varier les différents paramètres autour des valeurs $\Gamma = 0,00417$, $\Delta t = 0,05$ et $h = 0,05$, valeurs choisies en fonction des résultats acquis précédemment par d'autres auteurs [5,6,8,9]. Les conditions aux limites sont mentionnées sur la Fig. 1.

Il est à noter que, pour $\Delta t = 0,05$, l'épaisseur de couche limite numérique $\Delta_s = 1,5\sqrt{\Delta t/\text{Re}} = 4 \times 10^{-3}$ est très inférieure à l'épaisseur de couche limite laminaire réelle $\delta_l = 4,92/\sqrt{\text{Re}}$ pour $x = 1$, soit $\delta_l = 5,8 \cdot 10^{-2}$.

Une fois les noyaux tourbillonnaires créés à partir des *segments* tourbillonnaires (*vortex sheets*) ce sont eux qui déterminent l'écoulement. A noter que pour avoir une topologie riche de la zone de recirculation, la condition d'adhérence est imposée sur les seules parois du barreau (Fig. 1). Avant d'étudier la convergence,

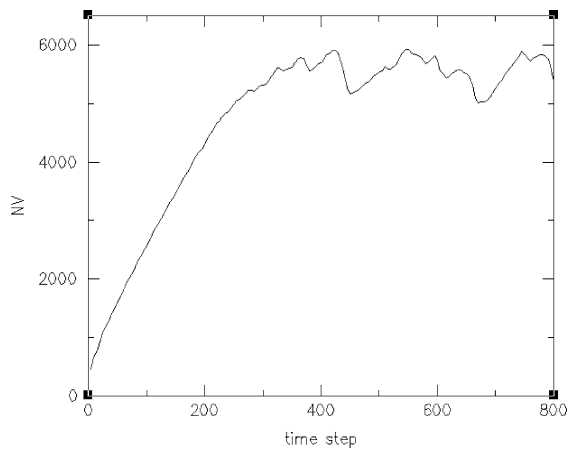


Figure 2. Évolution du nombre de particules.
Figure 2. Evolution of the number of particles.

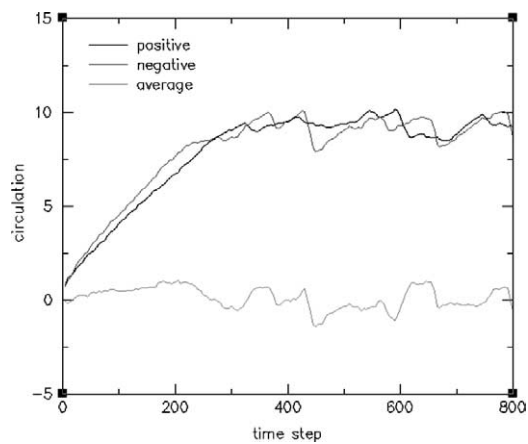


Figure 3. Conservation de la circulation.
Figure 3. Circulation conservation.

il est important de vérifier que les bilans globaux concernant le rotationnel sont vérifiés. Du fait de la stationnarité des conditions aux limites et de la symétrie de l'écoulement :

- la circulation totale doit être nulle,
- une fois l'écoulement établi en moyenne, le champ rotationnel est donné. Le nombre de noyaux tourbillonnaires doit être constant, et on doit avoir $N \cdot \Gamma = cte$. En effet au voisinage d'un point :

$$|\omega(\vec{x})| \cong n(\vec{x}) \frac{\Gamma}{\pi \delta^2} \quad (7a)$$

$$N \cong \sum \frac{S \cdot n(\vec{x})}{\pi \delta^2} \cong \frac{\int_S |\omega(\vec{x})| d\vec{x}}{\Gamma} \quad \text{soit } N \cdot \Gamma = cte \quad (7b)$$

où S est la surface totale du domaine. Ces deux conditions sont vérifiées comme on peut le constater sur les Figs. 2 d'une part et 3 d'autre part. On voit aussi que le nombre des tourbillons est en accord avec des résultats déjà publiés, e.g. [4,8,9]. Bien sûr cela nécessite qu'il y ait une approximation « suffisante » de ω , donc que Γ/δ^2 ne soit pas trop grand (voir [8] et [9]). Ce qui signifie qu'on doit avoir assez de « particules ».

4. Convergence avec Γ

Les Figs. 4 et 5 montrent l'évolution des lignes de courant moyennes et la composante u des profils de vitesses moyennes à $x = 2,0$, pour différents choix de Γ , avec $\Delta t = 0,05$ et $h = 0,05$. Comme on le

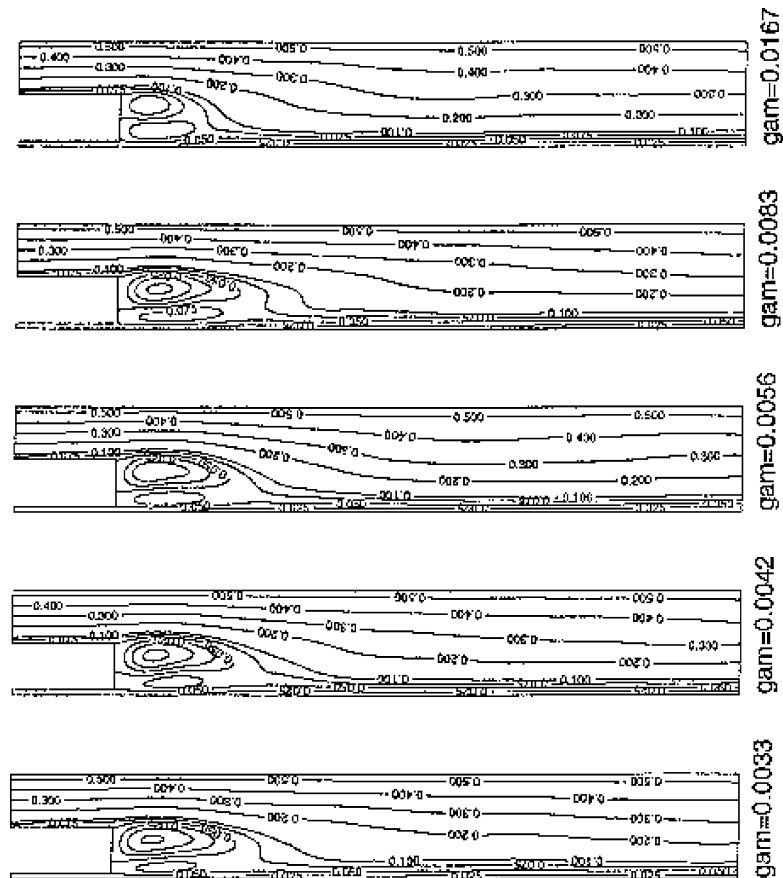


Figure 4. L'évolution des lignes de courant moyennes en fonction de Γ .

Figure 4. Evolution of the mean streamlines as a function of Γ .

constate, pour les intensités égale à 0,017, 0,008 et 0,006 (voir Fig. 4), le centre de la zone de recirculation n'est pas bien défini et les «contours» autour du gros tourbillon en aval de l'obstacle ne sont guère ressemblants. En diminuant la valeur de la circulation à 0,0042 et 0,0033, la convergence vers la formation des grosses structures tourbillonnaires, semble être acquise. Les lignes de courant ont la même position et les «contours», autour de grand tourbillon et de tourbillon secondaire (créé par l'effet du jet inférieur), sont plus lisses. La Fig. 5 confirme cette convergence des résultats numériques lorsque l'intensité tourbillonnaire diminue : les profils de vitesses se rapprochent en lorsque Γ diminue.

Alors, pour $h = 0,05$, $\Delta t = 0,05$, la convergence des résultats lorsque Γ diminue est acquise, le résultat optimal étant obtenu pour $\Gamma = 0,0033$, révélant une nette augmentation du nombre des tourbillons (voir équation (7)).

Classiquement lorsque les équations discrètes sont obtenues en appliquant aux variables discrètes les opérateurs continus, ce qui est le cas ici, l'erreur de consistance est liée à l'erreur d'interpolation.

D'autre part, comme on l'a vu :

$$\tilde{\omega}(\vec{x}) \propto \frac{n(\vec{x})\Gamma}{\delta^2} \tag{8a}$$

De façon similaire aux parois :

$$\tilde{u}(s) \cong \bar{u}_\infty(s) + \sum_1^{n_p(s)} \frac{\Gamma}{h} \delta(y - y_j) \tag{8b}$$

avec $n_p(s)$ nombre de *vortex sheets* situés dans la couche limite numérique dont les abscisses des centres sont comprises entre $s + h/2$ et $s - h/2$. $n(\vec{x})$ et $n_p(s)$ étant des valeurs entières, ceci entraîne sur $\tilde{\omega}(\vec{x})$ et $\tilde{u}(s)$ une erreur croissante avec Γ , ce qui est cohérent avec les résultats observés.

Les petites valeurs de l'intensité tourbillonnaire signifient aussi un grand nombre de tourbillons. Cela donne non seulement une discrétisation raffinée de la vorticité avec une augmentation sensible de la précision, mais aussi une approximation meilleure de la diffusion par la méthode de marche aléatoire.

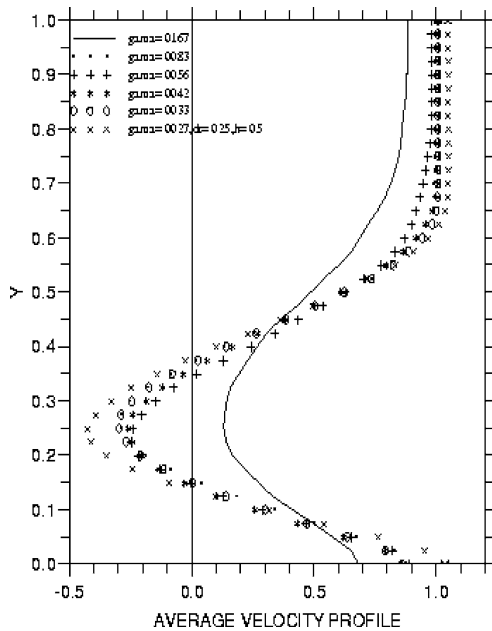


Figure 5. Profils de vitesses moyens en fonction de la circulation élémentaire.

Figure 5. Mean velocity profiles as functions of elementary circulation.

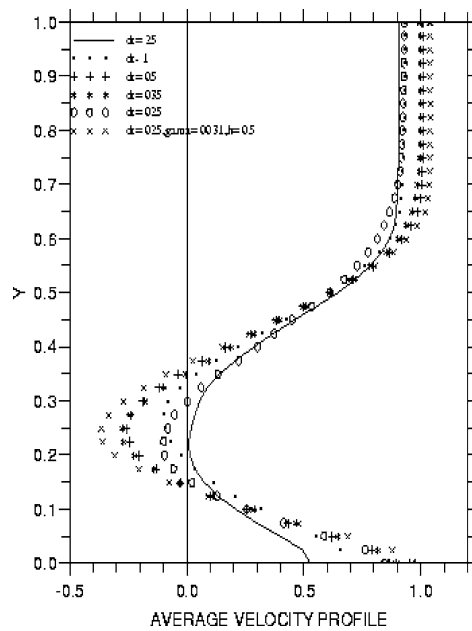


Figure 6. Profils de vitesses moyens en fonction du pas de temps.

Figure 6. Mean velocity profiles as functions of time.

Néanmoins, pour une très petite valeur de Γ ($\Gamma = 0,0027$), le processus de calcul s'est détérioré au début de la phase d'établissement. Juste avant l'interruption des calculs, le nombre des tourbillons oscillait fortement. Ce phénomène s'explique de la manière suivante : le schéma global de l'intégration du temps est de type explicite et ce comportement est apparemment dû aux instabilités numériques liées à la discrétisation dans le temps des conditions aux limites sur des parois ($u = 0$) imposées sous la forme $du/dt = 0$. En diminuant la valeur du pas de temps jusqu'à 0,025, les fluctuations ont diminué et les résultats sont plus satisfaisants (Figs. 4 et 5). On peut en déduire que pour éviter la naissance des instabilités numériques dues à la diminution de Γ , un choix adapté de Δt est indispensable. De manière heuristique, on constate une condition de type $\Gamma/\Delta t \cong cte$.

5. Convergence avec le pas de temps

Les résultats présentés en Fig. 6 sont obtenus pour des valeurs constantes de $\Gamma = 0,0042$, $h = 0,05$ et des pas de temps variables. On peut aussi observer la convergence des profils de vitesses moyens lorsque Δt varie de 0,25 à 0,035. Par contre, lorsqu'on passe de $\Delta t = 0,035$ à $\Delta t = 0,025$ la solution diverge. On peut supposer que ceci est dû au fait que l'augmentation de l'erreur faite sur le transport diffusif est alors plus importante que le gain de précision pour la partie convective [9]. En diminuant Γ ($\Gamma = 0,0031$), ce qui conduit à une augmentation du nombre d'éléments, et donc à une meilleure approximation de la diffusion, on obtient à nouveau une solution « proche », naturellement, de celle obtenue pour $\Gamma = 0,0027$, $\Delta t = 0,025$, $h = 0,05$ fournie en Fig. 5, ce qui corrobore cette hypothèse.

6. Convergence avec le pas d'espace « h »

Le dernier paramètre étudié est le rayon de la fonction de noyau $\delta = h/2$. La Fig. 7 montre l'influence du choix de la longueur h du *segment* sur les résultats (avec $\Gamma = 0,0042$ et $\Delta t = 0,05$). On observe une tendance à la convergence quand h croît. Ceci peut paraître surprenant à première vue mais est dû en fait à la représentation approchée de ω ou de la vitesse à la paroi. Dans les deux cas, l'erreur d'« interpolation »

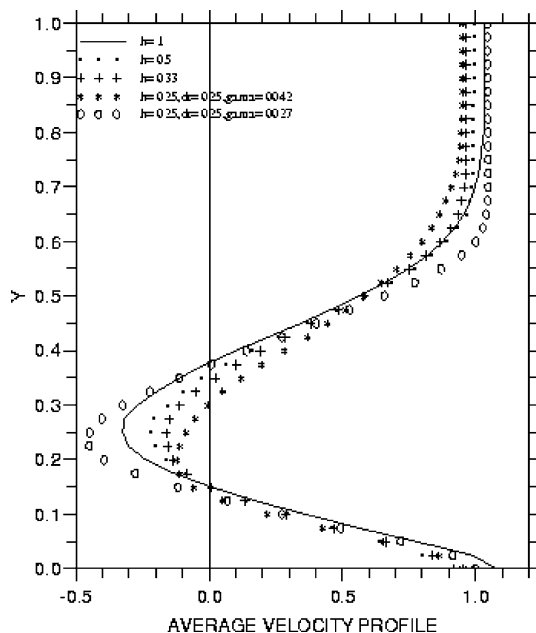


Figure 7. Profils de vitesses moyens en fonction de « h ».

Figure 7. Mean velocity profiles as functions of “h”.

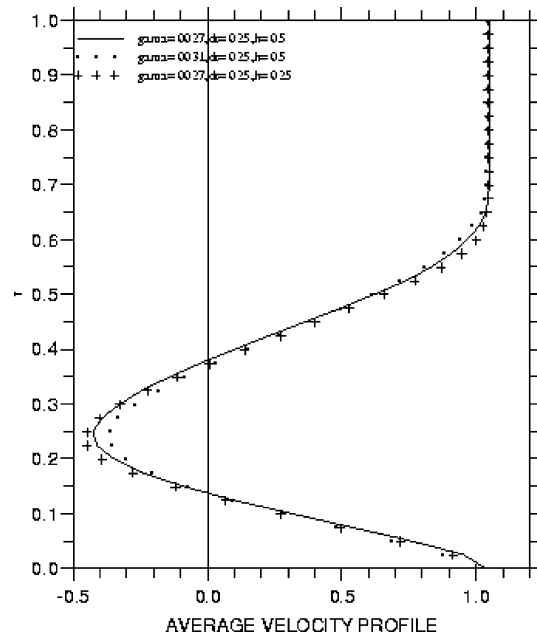


Figure 8. Convergence globale des profils de vitesses moyens en fonction des paramètres de discrétisation.

Figure 8. Global convergence of the mean velocity profiles as function of the sampling parameters.

est de deux natures : l'une « traditionnelle » liée aux gradients de ω ou de u , l'autre liée à la discrétisation par valeurs entières $\tilde{\omega}(\vec{x}) = n(\vec{x}) \cdot \Gamma/h^2$ (domaine intérieur) ou $\tilde{u}(\vec{x}) = n(s) \cdot \Gamma/h$ (paroi) pour laquelle l'augmentation de « h » a le même effet que la diminution de Γ .

Il est donc nécessaire de diminuer à la fois Γ et h pour qu'il y ait une convergence globale.

Par ailleurs, pour $h = 0,025$ le processus du calcul est interrompu, des noyaux tourbillonnaires sortant du domaine de calcul par la frontière amont. Cet événement correspond à une condition de stabilité locale du type Courant qui s'écrit $\Delta t \cdot \Gamma \leq \beta \cdot h^2$ où β est une constante (ici $\beta \approx 0,1$). On vérifie qu'en diminuant le pas de temps ($\Gamma = 0,00417$, $\Delta t = 0,025$ et $h = 0,025$) on obtient une solution « stable » mais non convergée en fonction de ce qui a été dit précédemment.

Une solution que l'on peut qualifier de convergée est obtenue pour $\Gamma = 0,002$, $h = 0,025$ et $\Delta t = 0,025$ (Fig. 8). Finalement, il résulte de cette étude qu'un choix des paramètres assurant une convergence numérique expérimentalement satisfaisante ($\Delta t \cdot \Gamma/h^2 \in [0,05, 0,08]$) est $\Gamma = 0,0033$, $h = 0,05$ et $\Delta t = 0,05$.

7. Conclusion

La convergence numérique de la méthode RVM pour l'écoulement complexe dans un mélangeur a été étudiée, en fonction de trois paramètres de discrétisations principaux. Deux de ces paramètres sont liés à la discrétisation spatiale de la vorticité (intensité tourbillonnaire et longueur du *segment*) et la troisième à la discrétisation dans le temps.

Deux classes de comportements parasites ont été observés : soit le calcul avance dans le temps mais la convergence n'est pas atteinte, soit le calcul est interrompu en raison de la divergence du nombre de tourbillons. Le premier comportement est attribué au manque de précision et le deuxième à une absence de stabilité.

La nécessité de la satisfaction de trois critères de stabilité a donc bien été mise en évidence. Deux sont de type critère de Courant, l'autre est lié à la satisfaction, à chaque instant, de la condition d'adhérence aux parois. Une fois les conditions de stabilité satisfaites, la diminution des valeurs de Γ/h^2 , Γ/h et Δt permet une très bonne convergence.

On a aussi observé la divergence de la solution numérique pour des valeurs trop petites du pas de temps. Cette erreur, qui est due à la *méthode de marche aléatoire*, a été éliminée en créant un nombre plus important de particules dans le domaine de calcul (et en conservant $\Gamma/\Delta t \cong cte$).

Si les méthodes particulières ont acquis une place importante en mécanique des fluides aux grands nombres de Reynolds, il reste cependant plusieurs domaines d'étude et aspects qui sont encore à développer : l'effet réel du choix des fonctions de noyaux dans le cas d'écoulements complexes, la convergence complète lorsqu'il y a création de vorticité à la paroi, ...

Remerciements. Les auteurs remercient Rémi Abgrall pour ses conseils judicieux et Sandrine Layrisse pour sa précieuse collaboration technique. Tous les calculs ont été effectués à l'IDRIS-CNRS.

Références bibliographiques

- [1] A.J. Chorin, J. Fluid Mech. 57 (1973) 785.
- [2] A.J. Chorin, J. Comput. Phys. 27 (1978) 428.
- [3] G.H. Cottet, P. Koumoutsakos, Vortex Methods: In Theory and Practice, Cambridge University Press, 2000.
- [4] J.A. Sethian, in: K. Gustafson, J.A. Sethian (Eds.), Vortex Methods and Vortex Motion, SIAM, 1991.
- [5] A. Giovannini, I. Mortazavi, Y. Tinel, ASME FED 218 (1995) 37.
- [6] I. Mortazavi, «La méthode hybride vortex-éléments finis :  tude de la convergence numérique, analyse et caractérisation d'un écoulement complexe», Thèse de doctorat de l'université de Lille 1, 1997.
- [7] E.G. Puckett, J. Sci. Statist. Comput. 10 (1989) 298.
- [8] A.F. Ghoniem, Y. Gagnon, J. Comput. Phys. 68 (1987) 346.
- [9] J.A. Sethian, A.F. Ghoniem, J. Comput. Phys. 74 (1988) 283.