C. R. Mecanique 330 (2002) 397–401

Nulle contrôlabilité régionale pour des équations de la chaleur dégénérées

Piermarco Cannarsa [a], **Patrick Martinez** [b], **Judith Vancostenoble** [b]

[a] **Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata", Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy**

[b] **Laboratoire MIP, UMR 5640, Université Paul Sabatier Toulouse III, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France**

Reçu le 6 mars 2002 ; accepté le 12 mars 2002

Note présentée par Évariste Sanchez-Palencia.

Résumé On s'intéresse à un problème de nulle contrôlabilité pour une classe d'équations de la chaleur fortement dégénérées (en domaine borné).

Tout d'abord, pour tout $T > 0$, on montre un résultat de *nulle contrôlabilité régionale* au temps T au moins dans la région où l'équation n'est pas dégénérée. La preuve est basée sur une inégalité d'observabilité adéquate pour le problème homogène adjoint. Cette inégalité est obtenue par application des estimations de Carleman combinée avec l'introduction de fonctions de troncature.

On améliore ensuite ce résultat : pour tout $T' > T$, on obtient un résultat de *nulle contrôlabilité régionale persistante* durant l'intervalle de temps $[T, T']$. Enfin, on donne des résultats analogues pour l'équation de la chaleur (non dégénérée) en domaine non borné. ***Pour citer cet article : P. Cannarsa et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 397–401.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

automatique / nulle contrôlabilité / équations paraboliques

Regional null controllability for degenerate heat equations

Abstract We are interested in a null controllability problem for a class of strongly degenerate heat equations.

First for all $T > 0$, we prove a *regional null controllability* result at time T at least in the region where the equation is not degenerate. The proof is based on an adequate observability inequality for the homogeneous adjoint problem. This inequality is obtained by application of Carleman estimates combined with the introduction of cut-off functions.

Then we improve this result: for all $T' > T$, we obtain a result of *persistent regional null controllability* during the time interval $[T, T']$. Finally we give similar results for the (non degenerate) heat equation in unbounded domain. ***To cite this article: P. Cannarsa et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 397–401.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

control / null controllability / parabolic equations

Adresses e-mail : cannarsa@mat.uniroma2.it (P. Cannarsa); martinez@mip.ups-tlse.fr (P. Martinez); vancoste@mip.ups-tlse.fr (J. Vancostenoble).

S1631-0721(02)01475-4/FLA

Abridged English version

In this Note, we study the null controllability of a class of degenerate parabolic equations in a bounded domain. Null controllability of non degenerate parabolic equations has been recently widely studied, using Carleman estimates (see, e.g., [2–4]). Roughly speaking, in the non degenerate case, the following result holds: given $T > 0$ and an initial condition u_0, there exists a control that drives the solution to zero on the whole domain at time T. However many physical problems are described by degenerate parabolic equations (see, e.g., [5]). The main difficulty in the study of degenerate parabolic equations comes from the fact that in general it is not possible to find a control that drives the solution to zero on the whole domain. This is why we will study *regional null controllability properties*: the problem is to find a control that drives the solution to zero on some part of the domain.

Fix α, β, δ such that $0 \leqslant \alpha < \alpha + \delta < \beta \leqslant 1$. Let $a \in \mathcal{C}^1([0,1])$ be a nonnegative function such that $a(x) > 0$ for all $x \in [\beta, 1]$. Our first result is the following:

THEOREM 0.1 ([1]). – *Given $T > 0$ and $u_0 \in L^2(0,1)$, there exists $f \in L^2((0,T) \times (0,1))$ such that the solution of*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \big(a(x)u_x(t,x)\big)_x = f(t,x)\chi_{(\alpha,\beta)}(x), & (t,x) \in (0,T) \times (0,1) \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t \in (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,1) \end{cases} \tag{0.1}$$

satisfies

$$u(T,x) = 0 \quad \textit{for all } x \in (\alpha + \delta, 1) \tag{0.2}$$

The proof follows from the observability inequality (2.2), obtained via Carleman estimates and well-chosen cut-off functions.

Now note that when the usual notion of null controllability holds, it is sufficient to drive the solution to zero in time T (on the whole domain), and then without controlling anymore the solution remains equal to zero. This is no more true in the case of regional null controllability. Hence in the case of a degenerate parabolic equation, it is interesting to know if it is possible to *keep the solution equal to zero on some time interval*. We prove the following result of *persistent regional null controllability*:

THEOREM 0.2 ([1]). – *Given $T' > T > 0$ and $u_0 \in L^2(0,1)$, there exists $f \in L^2((0,T') \times (0,1))$ such that the solution of*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \big(a(x)u_x(t,x)\big)_x = f(t,x)\chi_{(\alpha,\beta)}(x), & (t,x) \in (0,T') \times (0,1) \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t \in (0,T') \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,1) \end{cases} \tag{0.3}$$

satisfies

$$u(t,x) = 0 \quad \textit{for all } (t,x) \in (T,T') \times (\alpha + \delta, 1) \tag{0.4}$$

The proof follows from the observability inequality (2.4), obtained via Carleman estimates and well-chosen cut-off functions.

This notion of *persistent regional null controllability* allows us also to extend classical results on the (nondegenerate) heat equation in a bounded domain when the initial condition is compactly supported in the domain, and to extend also some results on the null controllability of the heat equation in an unbounded domain, for which Micu and Zuazua [6] proved that global null controllability does not hold if the control region is bounded.

1. Introduction

Dans cette Note, on étudie d'abord la nulle contrôlabilité d'une classe d'équations de la chaleur dégénérées (en domaine borné). Soient $(\alpha, \beta) \subset (0,1)$ non vide et $\delta > 0$ (tel que $\alpha + \delta < 1$). On considère $a \in \mathcal{C}^1([0,1])$ positive telle que $a(x) > 0$ pour tout $x \in [\beta, 1]$. On s'intéresse au problème de *nulle contrôlabilité régionale* :

PROBLÈME 1. – *Pour tout* $T > 0$ *et tout* $u_0 \in L^2(0,1)$, *trouver* $f \in L^2((0,T) \times (0,1))$ *tel que la solution de*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \big(a(x)u_x(t,x)\big)_x = f(t,x)\chi_{(\alpha,\beta)}(x), & (t,x) \in (0,T) \times (0,1) \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t \in (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,1) \end{cases} \tag{1.1}$$

vérifie

$$u(T,x) = 0 \quad \textit{pour } x \in (\alpha+\delta, 1) \tag{1.2}$$

Remarques. – 1. On peut montrer que le problème est bien posé (voir [1]) au sens de la théorie des semi-groupes en travaillant dans des espaces à poids adéquats.

2. Dans le cas non dégénéré (i.e. $a > 0$ sur $[0,1]$), la nulle contrôlabilité (*globale*) est désormais bien connue : pour tout $T > 0$, il existe $f \in L^2((0,T) \times (0,1))$ tel que la solution de (1.1) vérifie $u(T,\cdot) = 0$ dans *tout* $(0,1)$. Ce résultat est en général obtenu via les estimations de Carleman (voir par exemple [2–4]).

3. On considère ici le cas d'une équation de la chaleur dégénérée, éventuellement *fortement dégénérée* puisque $a(x)$ peut s'annuler sur tout intervalle $[0,\alpha']$ pour $0 \leqslant \alpha' < \beta$. Sous cette hypothèse, avec un contrôle f localisé dans (α,β), on ne peut pas espérer amener le système à zéro dans *tout* $(0,1)$. Le domaine d'influence du contrôle est nécessairement situé dans la région $(\alpha,1)$. C'est la raison pour laquelle on s'intéresse à la nulle contrôlabilité *régionale*.

4. De nombreux résultats sont connus pour les équations paraboliques non dégénérées. Mais à notre connaissance aucun résultat n'était connu pour des équations dégénérées. Récemment, un autre résultat de nulle contrôlabilité régionale a été obtenu pour une équation de type Crocco linéarisée [5]. Il s'agit d'une équation parabolique dégénérée (où sont couplés des phénomènes de diffusion et de transport) dont le type de dégénérescence est tout à fait différent de celui étudié ici.

5. La nulle contrôlabilité (*globale*) au temps T est une propriété forte. En effet, du fait de la décroissance de l'énergie, elle implique que, à partir du temps T, le système reste indéfiniment au repos (en cessant d'appliquer un contrôle à partir du temps T) : pour tout $t \geqslant T$, $u(t,\cdot) = 0$ dans $(0,1)$.

Au contraire, la nulle contrôlabilité *régionale* est une propriété beaucoup plus faible puisque, si l'on cesse d'appliquer un contrôle à partir du temps T, elle n'implique pas que le système reste au repos dans la région $(\alpha+\delta,1)$ pour $t \geqslant T$. On cherche donc à améliorer ce résultat en s'intéressant au second problème de *nulle contrôlabilité régionale persistante* :

PROBLÈME 2. – *Pour tout* $T' > T > 0$ *et tout* $u_0 \in L^2(0,1)$, *trouver* $f \in L^2((0,T') \times (0,1))$ *tel que la solution de*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \big(a(x)u_x(t,x)\big)_x = f(t,x)\chi_{(\alpha,\beta)}(x), & (t,x) \in (0,T') \times (0,1) \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t \in (0,T') \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,1) \end{cases} \tag{1.3}$$

vérifie

$$u(t,x) = 0 \quad \textit{pour } (t,x) \in (T,T') \times (\alpha+\delta,1) \tag{1.4}$$

Dans la seconde partie de cette Note, on s'intéresse à la nulle contrôlabilité de l'équation de la chaleur (non dégénérée) en domaine non borné. On donne des résultats analogues de nulle contrôlabilité régionale complétant des résultats récents de Micu et Zuazua [6] et Cabanillas, De Menezes et Zuazua [7].

2. Équation de la chaleur dégénérée

2.1. *Problème* 1. – On montre tout d'abord une inégalité d'observabilité pour le problème adjoint associé :

$$\begin{cases} v_t(t,x) + \big(a(x)v_x(t,x)\big)_x = 0, & (t,x) \in (0,T) \times (0,1) \\ v(t,0) = v(t,1) = 0, & t \in (0,T) \end{cases} \tag{2.1}$$

THÉORÈME 2.1 ([1]). – *Pour tout* $\delta > 0$ (*tel que* $\alpha + \delta < 1$), *il existe* $C > 0$ *telle que toute solution* v *de* (2.1) *vérifie*

$$\int_0^1 v(0,x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant C\int_0^T\!\!\int_\alpha^\beta v(t,x)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C\int_0^{\alpha+\delta} v(T,x)^2\,\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

On en déduit le

THÉORÈME 2.2 ([1]). – *Sous les hypothèses précédentes, il existe* $f \in L^2((0,T)\times(0,1))$ *tel que la solution de* (1.1) *vérifie* (1.2).

Remarque. – Si $\alpha = 0$, il y a en fait nulle contrôlabilité (globale) sur tout $(0,1)$ (et non pas seulement sur $(\delta,1)$).

Principe des preuves. – Pour le Théorème 2.1, on utilise des fonctions de troncature. En particulier, dans la région où a ne s'annule pas, on se ramène à une équation non dégénérée à laquelle on applique les estimations de Carleman. La preuve du Théorème 2.2 repose sur l'introduction du problème pénalisé

$$\inf_{f\in L^2((0,T)\times(0,1))}\left(\frac{1}{2}\int_0^T\!\!\int_\alpha^\beta f(t,x)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\alpha+\delta}^1 u^f(T,x)^2\,\mathrm{d}x\right)$$

où u^f est la solution de (1.1) associée à $f \in L^2((0,T)\times(0,1))$.

2.2. *Problème* 2. – Pour tout $t \in (0,T')$, on considère la famille de problèmes adjoints :

$$\begin{cases} v_s^t(s,x) + \big(a(x)v_x^t(s,x)\big)_x = 0, & (s,x)\in(0,t)\times(0,1)\\ v^t(s,0) = v^t(s,1) = 0, & s\in(0,t)\end{cases} \tag{2.3}$$

THÉORÈME 2.3 ([1]). – *Pour tout* $\delta > 0$ (*tel que* $\alpha+\delta<1$), *il existe* $C>0$ *telle que*

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left(\int_T^{T'} v^t(0,x)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\\ &\quad\leqslant C\int_0^{T'}\!\!\int_\alpha^\beta\left(\int_{\max(s,T)}^{T'} v^t(s,x)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + C\int_T^{T'}\!\!\int_0^{\alpha+\delta} v^s(s,x)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{2.4}$$

On en déduit le

THÉORÈME 2.4 ([1]). – *Sous les hypothèses précédentes, il existe* $f\in L^2((0,T')\times(0,1))$ *tel que la solution de* (1.3) *vérifie* (1.4).

Principe des preuves. – Pour le Théorème 2.3, on applique en particulier le Théorème 2.1 à la fonction $w(s,x) := \int_{\max(s,T)}^{T'} v^t(s,x)\,\mathrm{d}t$. La preuve du Théorème 2.4 repose sur l'introduction du problème pénalisé

$$\inf_{f\in L^2((0,T')\times(0,1))}\left(\frac{1}{2}\int_0^{T'}\!\!\int_\alpha^\beta f(t,x)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\varepsilon}\int_T^{T'}\!\!\int_{\alpha+\delta}^1 u^f(t,x)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)$$

2.3. *Autre résultat.* – La notion de *nulle contrôlabilité régionale persistante* donne également des résultats intéressants même dans le cas de l'équation de la chaleur *non dégénérée*. Par exemple, si on se donne une donnée initiale nulle sur une partie de $(0,1)$, on peut maintenir (à moindre coût) la solution égale à zéro sur cette partie (au lieu de l'amener à zéro sur tout le domaine). Plus précisement, on montre le

THÉORÈME 2.5 ([1]). – *Soient* $0\leqslant\alpha<\gamma<\alpha+\delta<\beta<1$. *Supposons que* $a\in\mathcal{C}^1([0,1])$ *est telle que* $a(x)>0$ *pour tout* $x\in[0,1]$. *Pour tout* $T>0$ *et tout* $u_0\in L^2(0,1)$ *tel que* $u_0(x)=0$ *pour* $x\in(\gamma,1)$, *il existe* $f\in L^2((0,T)\times(0,1))$ *tel que la solution de* (1.1) *vérifie* $u(t,x)=0$ *pour* $(t,x)\in(0,T)\times(\alpha+\delta,1)$.

Dans [1], on donne un autre résultat de nulle contrôlabilité régionale persistante pour l'équation de la chaleur soumise à un *terme source* localisé.

3. Équation de la chaleur en domaine non borné

On considère désormais l'équation de la chaleur (non dégénérée) sur le demi-axe positif : pour $T > 0$ et $u_0 \in L^2(0, +\infty)$,

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x)\chi_{(\alpha,\beta)}(x), & (t,x) \in (0,T) \times (0,+\infty) \\ u(t,0) = 0, & t \in (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,+\infty) \end{cases} \tag{3.1}$$

Micu et Zuazua [6] ont montré qu'il n'y a pas de donnée initiale régulière à support compact qui puisse être amenée à zéro en temps fini. Ce résultat négatif vient du fait que l'on cherche à contrôler l'équation de la chaleur en domaine non borné par un contrôle $f\chi_{(\alpha,\beta)} \in L^2((0,T) \times (\alpha,\beta))$ localisé dans un domaine borné (α, β). Cabanillas, De Menezes et Zuazua [7] ont ensuite obtenu un résultat positif de nulle contrôlabilité sous la condition d'utiliser un contrôle f localisé dans un domaine *non borné* comme $(\alpha, +\infty)$.

Avec les techniques précédemment utilisées, on montre le résultat intermédiaire suivant (voir [1]) : avec un contrôle f localisé dans le domaine borné (α, β), il y a *nulle contrôlabilité régionale* au temps T dans la région $(0, \beta - \delta)$ (pour tout $\delta > 0$). (En particulier, si $\beta = +\infty$, on retrouve le résultat de [7].) On peut également améliorer ce résultat pour obtenir la *nulle contrôlabilité régionale persistante* dans la région $(0, \beta - \delta)$ durant tout intervalle de temps (T, T').

Remarques. – 1. On donne dans [8] un autre résultat intermédiaire de nulle contrôlabilité (globale) par un contrôle f localisé dans un domaine *non borné* mais de *mesure finie*.

2. Les techniques de preuves utilisées ne sont pas propres à la dimension 1. Les résultats présentés ici peuvent faire l'objet d'un énoncé en dimension N.

Remerciements. Les auteurs tiennent à remercier J.-P. Raymond pour de nombreuses discussions sur ce sujet.

Références bibliographiques

[1] P. Cannarsa, P. Martinez, J. Vancostenoble, Persistent regional null controllability for a class of degenerate parabolic equation, en préparation.
[2] A.V. Fursikov, O.Yu. Imanuvilov, Controllability of Evolution Equations, Lect. Notes Series Vol. 34, Research Inst. of Math., Global Analysis Research Center, Seoul National University, 1996.
[3] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, The cost of approximate controllability for heat equations: The linear case, Adv. Differential Equations 5 (2000) 465–514.
[4] P. Albano, P. Cannarsa, Carleman estimates and applications to control theory, en préparation.
[5] P. Martinez, J.-P. Raymond, J. Vancostenoble, Regional null controllability of a linearized Crocco type equation, soumis.
[6] S. Micu, E. Zuazua, On the lack of null controllability of the heat equation on the half-line, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001) 1635–1659.
[7] V.R. Cabanillas, S.B. De Menezes, E. Zuazua, Null controllability in unbouded domains for the semilinear heat equation with nonlinearities involving gradient terms, J. Optim. Theory Appl. 110 (2) (2001) 245–264.
[8] P. Cannarsa, P. Martinez, J. Vancostenoble, Null controllability of the heat equation in unbounded domains by a finite measure control region, en préparation.
[9] C. Fabre, J.P. Puel, E. Zuazua, Approximate controllability for the semilinear heat equation, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 125 (1995) 31–61.
[10] H.O. Fattorini, D.L. Russell, Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension, Arch. Rational Mech. Anal. 4 (1971) 272–292.
[11] I. Lasiecka, R. Triggiani, Carleman estimates and exact boundary controllability for a system of coupled, nonconservative second order hyperbolic equations, in: PDEs Methods in Control and Shape Anal., Lect. Notes in Pure and Appl. Math., Vol. 188, Dekker, NY, 1994, pp. 215–243.
[12] G. Lebeau, L. Robbiano, Contrôle exact de l'équation de la chaleur, Comm. Partial Differential Equations 20 (1995) 335–356.
[13] P. Martinez, J.-P. Raymond, J. Vancostenoble, Nulle contrôlabilité régionale d'une équation de type Crocco linéarisée, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, à paraître.
[14] D. Tataru, Carleman estimates, unique continuation and controllability for anizotropic PDE's, Contemp. Math. 209 (1997) 267–279.