

# Transition vers la turbulence géostrophique pour un écoulement d'air en cavité tournante différentiellement chauffée

Pierre Maubert, Anthony Randriamampianina

IRPHE, UMR 6594 CNRS, Technopôle de Château-Gombert, 49, rue Frédéric Joliot-Curie, BP 146, 13384 Marseille cedex 13, France

Reçu le 8 mars 2002 ; accepté le 12 mars 2002

Note présentée par Paul Clavin.

## Résumé

On détermine la transition vers la turbulence géostrophique d'écoulements d'air soumis à un gradient thermique en présence de rotation. L'étude est réalisée par simulation directe des équations couplées de Navier–Stokes et d'énergie à l'aide d'un code basé sur les approximations spectrales de type collocation Chebyshev et Fourier associées à un schéma temporel du second ordre. Pour un écart de température fixe,  $\Delta T = 5$  K, et pour des valeurs croissantes de la vitesse de rotation caractérisés par les paramètres de contrôle (nombre de Taylor  $Ta^*$ , nombre de Rossby thermique  $\Theta$ ) nous obtenons les différents régimes décrits dans la littérature. La transition vers la turbulence s'effectue à travers le scénario : régime axisymétrique stationnaire ( $S$ ), monopériodique ( $P_1$ ), quasipériodique ( $QP$ ), périodique ( $Pn$ ) et non périodique ( $NP$ ). *Pour citer cet article* : P. Maubert, A. Randriamampianina, C. R. Mécanique 330 (2002) 365–370. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

turbulence / turbulence géostrophique / simulation numérique directe / systèmes en rotation / ondes baroclines

## Transition to geostrophic turbulence in an air-filled differentially heated rotating annulus

## Abstract

A direct numerical simulation is carried out to determine the transition to geostrophic turbulence in an air-filled differentially heated rotating annulus. The coupled Navier–Stokes and energy equations are solved numerically with a spectral method based on collocation Chebyshev and Fourier approximations associated with a second-order time accurate scheme. For a temperature difference fixed at  $\Delta T = 5$  K, when increasing the rotation rate, we have obtained the successive occurrence of the different regimes as described in the literature. The route to turbulent flow, studied with respect to two principal dimensionless parameters, the Taylor number  $Ta^*$  and the thermal Rossby number  $\Theta$ , presents steady axisymmetric solution ( $S$ ), periodic flow ( $P_1$ ), quasi-periodic flow ( $QP$ ), periodic flow ( $Pn$ ), before transition to chaotic motion ( $NP$ ). *To cite this article*: P. Maubert, A. Randriamampianina, C. R. Mécanique 330 (2002) 365–370. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

turbulence / geostrophic turbulence / direct numerical simulation / rotating systems / baroclinic waves

---

Adresse e-mail : pierre.maubert@irphe.univ-mrs.fr (P. Maubert).

## Abridged English version

### 1. Introduction

The understanding of rotating flows is of primary concern to many fundamental and industrial applications, though the study of baroclinic waves inside a differentially heated rotating annulus is more specifically devoted to meteorology and oceanography. A direct numerical simulation is carried out to determine the transition to geostrophic turbulence in an air-filled annulus and subsequently to delineate a regime diagram for air. Indeed, available experimental and theoretical regimes diagrams have been obtained mainly for liquids. For a fixed geometry and fluid properties, the occurrence of different regimes depends on the rotation rate and the temperature difference, characterized by the Taylor ( $Ta^* = 4\Omega^2(b-a)^5/\nu^2d$ ) and the thermal Rossby ( $\Theta = gd\beta(T_b - T_a)/\Omega^2(b-a)^2$ ) numbers [4,5]. Fowles and Hide [4] observed four distinct regimes of hydrodynamic flow for fluids with Prandtl number greater than one: steady upper and lower axisymmetric, regular and irregular waves flows (see Hide and Mason [3]). On the other hand, for a low-Prandtl number fluid ( $Pr = 0.0246$ ), Fein and Pfeffer [1] reported that the flow is of a non-geostrophic turbulent nature before the transition to regular waves occurs at higher rotation rates. In the present case, the computed solutions follow the same behaviour as for the large Prandtl number flows.

### 2. Model equations and numerical approach

The physical model is composed of two vertical coaxial cylinders held at constant temperatures and closed by two horizontal insulating endplates distant from  $d = 2H$ . The inner cylinder at radius  $r = a$  is cooled ( $T_a$ ) and the outer cylinder at radius  $r = b$  is heated ( $T_b$ ). The whole cavity rotates at a uniform rate, where the rotation vector  $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$  is anti-parallel to the gravity vector  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$  and coincides with the axis of cylinders. In a rotating frame of reference, the Navier–Stokes and energy equations coupled via the Boussinesq approximation are solved numerically with a pseudospectral method associated with a second-order time accurate scheme. The numerical code has been previously validated for a liquid-filled cavity ( $Pr = 13.07$ ) by comparison of solutions with the detailed results reported by Hignett et al. [6] from a combined laboratory and numerical study [7]. Very close agreement has been obtained between our results and measurements for a regular wave flow. Particular attention has been paid to the grid effect on the solution, which has served as basis for the present study.

### 3. Results

The geometry considered corresponds to the one used in Fowles and Hide [4] during their experiments corresponding to  $A = d/(b-a) = 3.94$  and  $R_c = (b+a)/(b-a) = 3.74$ . The working fluid is air at ambient temperature,  $Pr = 0.707$ . The temperature difference between the cylinders is fixed at  $\Delta T = 5$  K. When increasing the rotation rate, we have obtained the successive occurrence of the different regimes as described in Fowles and Hide [4], see Fig. 1. The sequence presents steady axisymmetric solution, periodic flow  $P_1$  with frequency  $f_1$ , quasi-periodic flow  $QP$  characterized by two incommensurate frequencies  $f_1$  and  $f_2$ , with the subsequent coalescence of  $f_2$  to a subharmonic  $f_1/n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) denoted  $Pn$  regime, before transition to chaotic motion ( $NP$ ) by subharmonics cascade. These results are consistent with the findings of Buzyna et al. [2] during their experimental study of silicone fluid ( $Pr = 21$ ).

The main difficulty in rotating systems resides in the coexistence of several waves solutions for the same control parameters known as the intransitivity phenomenon [4,6]. Experiments have shown that one solution is predominant [8]. In the present case, when considering the solution built by summing the solutions obtained with  $\mu = 5, 6$  and  $7$  waves at  $Ta^* = 5 \times 10^6$  and  $\Theta = 0.07$ , we observe the predominance of wavenumber  $\mu = 6$  (see Fig. 2, with the corresponding isotherms). It is noteworthy to mention the different widths of waves, although each initial solution exhibits regular waves. The presence of subharmonic  $\mu = 3$  in the spatial analysis and such structures reflect the strong nonlinearity of the flow. Moreover, the maximum

wavenumber obtained for oscillatory flows is in agreement with the empirical relation given by Hide [5],  $\mu_{\max} \leq 0.67\pi R_c$ , giving  $\mu_{\max} \leq 8$  for the present geometry. Spatio-temporal analyses of the flow are carried out to assess the nature of these regimes (Fig. 3). It can be noted that the period  $P$  of wavenumber  $\mu$  follows approximately  $\mu P \approx Cste$  as reported in [9]. Such a behaviour indicates that the angular drift velocity of the wave is independent of its wavenumber which is characteristic of regular waves (Hide [5]).

## 1. Introduction

Une étude numérique est réalisée afin de déterminer la transition vers la turbulence géostrophique pour des écoulements d'air soumis à un gradient thermique en présence de rotation. Les applications concernent principalement la météorologie à grande échelle ainsi que l'océanographie. Les expériences avec des liquides [1–5], ont montré des comportements similaires pour des fluides à nombre de Prandtl plus grand que 1 : régimes axisymétriques, vagues régulières et irrégulières. Seule la limite de la transition vers les vagues irrégulières est principalement affectée par la variation du nombre de  $Pr$  [3,4]. Pour un liquide à bas nombre de Prandtl ( $Pr = 0,0246$ ) une différence de comportement lié à la conductivité du fluide est observée lorsque la rotation est faible [1], l'écoulement est turbulent. Un autre problème provient de l'intransitivité de l'écoulement rencontrée lors d'expériences [3–6].

## 2. Modèle physique et équations du problème

Le modèle physique correspond à un domaine annulaire compris entre deux cylindres verticaux co-axiaux maintenus à températures constantes  $T_a$  pour le rayon intérieur ( $r = a$ ), et  $T_b$  ( $T_b > T_a$ ), pour le rayon extérieur ( $r = b$ ) et fermés par deux plans horizontaux adiabatiques distants de  $d = 2H$ . L'ensemble est animé d'un mouvement de rotation uniforme, le vecteur rotation  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$  est vertical ascendant opposé au vecteur gravité  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$  et coïncide avec l'axe des cylindres. Le mouvement et le transfert thermique sont régis par les équations de Navier–Stokes couplées à celle d'énergie à travers l'approximation de Boussinesq. Ces équations sont écrites dans un référentiel en rotation sous forme adimensionnelle en utilisant les grandeurs de référence :  $d/2\Omega b$  pour le temps et  $\Omega b$  pour la vitesse,  $(b - a)/2$  et  $H$ , respectivement pour les directions radiale et axiale. Le système résultant s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{R_c + 1}{A} N(\mathbf{V}) + 2\Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{V} = -\frac{R_c + 1}{2A} \nabla \Pi + \Delta \mathbf{V} + \frac{4Ra}{(R_c + 1)APrTa} \mathbf{F} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{R_c + 1}{2A} \nabla \cdot (\mathbf{V}T) = \Delta T \quad (3)$$

où

$$\Pi = \frac{p + \rho_0 g z - \frac{1}{2} \rho_0 \Omega^2 r^2}{\rho_0 \Omega^2 b^2}, \quad \mathbf{F} = \frac{T}{ATa} \mathbf{e}_z - \frac{1}{2} (r + R_c) T Fr \mathbf{e}_r$$

$N(\mathbf{V})$  correspond aux termes non linéaires. Ce système est gouverné par les paramètres suivants : le nombre de Rayleigh  $Ra = g\beta(T_b - T_a)(b - a)^3/\nu\kappa$ , le nombre de Taylor  $Ta = 4\Omega^2(b - a)^4/\nu^2$ , le nombre de Prandtl  $Pr = \nu/\kappa$ , le nombre de Froude  $Fr = \Omega^2(b - a)/g$ , le rapport de forme  $A = d/(b - a)$  et le paramètre de courbure  $R_c = (b + a)/(b - a)$ . Pour une géométrie et un fluide donnés, l'étude de la stabilité de l'écoulement s'effectue au travers de deux paramètres principaux : le nombre de Taylor  $Ta^* = Ta/A$  et le nombre de Rossby thermique  $\Theta = 4Ra/APrTa$  [4,5]. Nous avons considéré la géométrie utilisée par Fowles et Hide [4] lors de leurs expériences correspondant à un rapport de forme  $A = 3,94$  et à un paramètre de courbure  $R_c = 3,74$ . Le fluide est de l'air à température ambiante,  $Pr = 0,707$ . Les simulations ont été réalisées pour un écart de température fixé à  $\Delta T = T_b - T_a = 5$  K.

### 3. Approche numérique et méthodologie

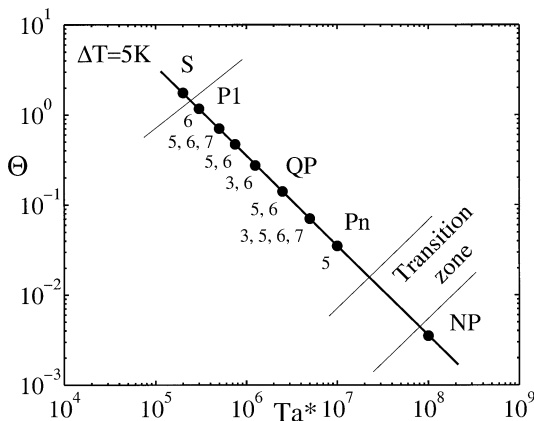
L'étude numérique est basée sur un code utilisant les approximations spectrales de type collocation Chebyshev et Fourier associées à un schéma temporel du second ordre. Le code de calcul a été validé précédemment par comparaison avec les résultats détaillés obtenus par Hignett et al. [6], pour un mélange d'eau et de glycerol ( $Pr = 13,07$ ). Un excellent accord quantitatif et qualitatif a été observé avec une meilleure prédiction de nos résultats par rapport aux données expérimentales. En particulier une étude de l'effet de maillage sur la solution a été réalisée, ce qui a servi de base pour le cas présent [7].

Les simulations sont effectuées pour un maillage  $33 \times 65 \times 80$  qui semble suffisant pour décrire les différents régimes observés. Le pas de temps est choisi comme  $5 \times 10^{-2} \leq \delta t \leq 10^{-1}$  en fonction de la valeur du nombre de Taylor considérée, dans la limite de stabilité numérique. L'approche envisagée consiste à fixer le gradient de température entre les parois cylindriques verticales et à faire varier le taux de rotation.

### 4. Résultats

L'évolution des régimes d'écoulement dans le plan des paramètres de contrôle ( $Ta^*$ ,  $\Theta$ ) est reportée sur la Fig. 1 pour  $\Delta T = 5$  K. Le nombre de vagues observé (mode  $\mu$ ) est précisé pour chaque solution. Le nombre maximum de vagues régulières obtenu est en accord avec la relation empirique donnée par Hide [5] :  $\mu_{\max} \leq 0,67\pi R_c$ , soit  $\mu_{\max} \leq 8$  pour  $R_c = 3,74$ . La succession de différents régimes observés est en concordance avec les résultats décrits pour  $Pr > 1$  dans la littérature [3,4]. La première zone d'écoulement stationnaire axisymétrique ( $S$ ) apparaît pour des valeurs de la vitesse de rotation telles que  $Ta^* < 2 \times 10^5$ ,  $\Theta > 1,76$ . Hide [5] a montré que l'écoulement reste axisymétrique pour  $\Theta > \Theta_c = 1,58 \pm 0,05$ . En dessous de cette valeur, il y a développement d'ondes baroclines, le nombre de vagues croît avec l'augmentation du nombre de Taylor [3,4]. La première transition vers le régime monopériodique de vagues régulières ( $S \Rightarrow P1$ ) est obtenue pour  $Ta^* = 5 \times 10^5$ ,  $\Theta = 0,703$  (Fig. 1). Une augmentation du taux de rotation,  $7,5 \times 10^5 < Ta^* < 2,5 \times 10^6$ ,  $0,469 > \Theta > 0,14$ , met en évidence une seconde zone dans laquelle l'écoulement devient quasipériodique ( $QP$ ). Ce régime est caractérisé par deux fréquences incommensurables  $f_1$  et  $f_2$ . Ces deux fréquences s'accrochent ensuite dans un rapport  $1/n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) pour les valeurs des paramètres  $5 \times 10^6 < Ta^* < 10^7$ ,  $0,07 > \Theta > 0,035$ , pour donner un régime oscillatoire avec la présence d'une sous harmonique (régime  $Pn$ ). Pour  $Ta^* > 3 \times 10^7$ ,  $\Theta < 0,012$ , le régime de turbulence géostrophique s'établit ( $NP$ ), caractérisé par la cascade de sous harmoniques.

L'intransitivité des écoulements est une des difficultés rencontrées dans de telles configurations [3–6]. La coexistence de plusieurs solutions, présentant des niveaux différents d'intensité, pour les mêmes valeurs de paramètres de contrôle nécessite des temps de simulations suffisamment longs afin de s'assurer de la stabilité de la solution [6]. Il existe cependant un nombre prédominant de vagues comme il a été observé



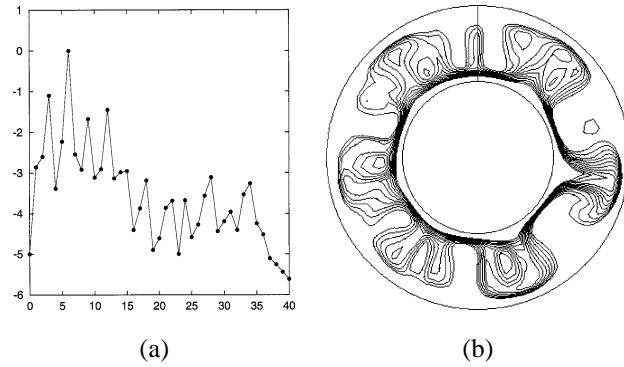
**Figure 1.** Diagramme de régimes pour  $\Delta T = T_b - T_a = 5$  K dans le plan des paramètres de contrôle ( $Ta^*$ ,  $\Theta$ ).

**Figure 1.** Regime diagram at  $\Delta T = T_b - T_a = 5$  K in the plane of control parameters ( $Ta^*$ ,  $\Theta$ ).

expérimentalement dans une configuration de systèmes de disques tournants [8]. Pour illustrer ce propos nous avons établi une solution moyenne des écoulements obtenus pour une valeur fixée de la rotation,  $Ta^* = 5 \times 10^6$ ,  $\Theta = 0,07$ , et pour laquelle coexistent les modes  $\mu = 5, 6$  et  $7$ . Sur l'analyse spatiale de la température relevée en un point situé à  $(r = (b - a)/2, z = 0)$ , le mode  $\mu = 6$  prédomine bien que les autres modes soient accessibles (Fig. 2a). La représentation des isothermes à mi-hauteur de la cavité montre également ce regroupement en 6 vagues (Fig. 2b). On note la dissymétrie au niveau des structures bien que les solutions initiales comportent des vagues régulières, indiquant la non linéarité de l'écoulement.

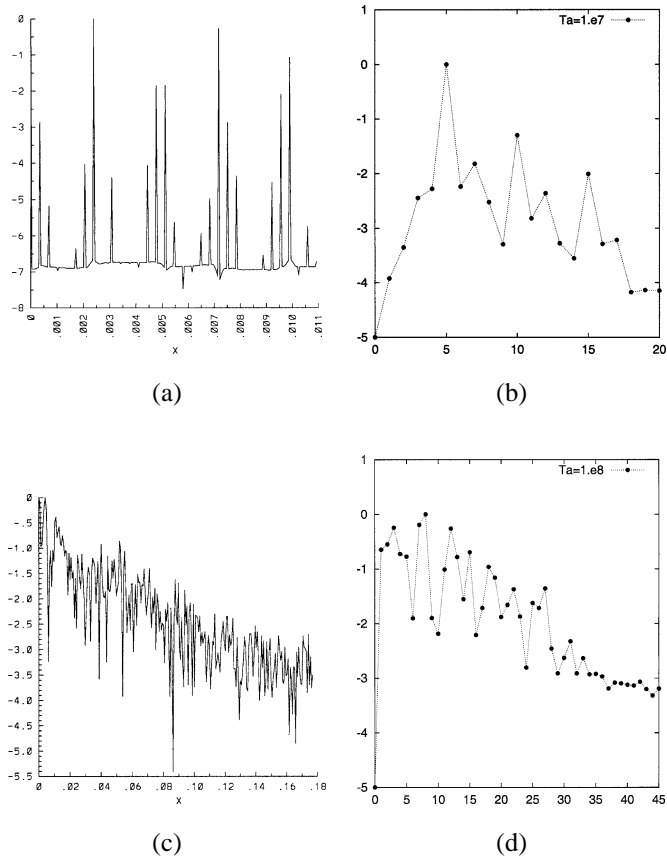
**Figure 2.** Analyse spatiale (a) et configuration d'isocontours à mi-hauteur de la cavité de la température (b) dans le cas  $Ta^* = 5 \times 10^6$ ,  $\Theta = 0,07$ . Solution construite à partir des écoulements obtenus avec  $\mu = 5, 6$  et  $7$  vagues.

**Figure 2.** Spatial analysis (a) and corresponding isocontours of the temperature (b) at mid-height of the cavity for  $Ta^* = 5 \times 10^6$ ,  $\Theta = 0,07$ . Solution built from the solutions obtained with  $\mu = 5, 6$  and  $7$  waves.



**Figure 3.** Spectres temporels et analyses spatiales pour la température au point  $(r = (b - a)/2, z = 0)$ . (a), (b) Cas du régime d'accrochage ( $Pn$ ) pour  $Ta^* = 10^7$ ,  $\Theta = 0,035$ . (c), (d) Cas du régime non-périodique ( $NP$ ) pour  $Ta^* = 10^8$ ,  $\Theta = 0,0035$ .

**Figure 3.** Power spectra and spatial analyses of the temperature at  $(r = (b - a)/2, z = 0)$ . (a), (b)  $Pn$  regime for  $Ta^* = 10^7$ ,  $\Theta = 0,035$ . (c), (d)  $NP$  regime for  $Ta^* = 10^8$ ,  $\Theta = 0,0035$ .



La valeur de la fréquence croît avec la vitesse de rotation quelque soit le mode obtenu. Il est à noter, qu'à valeur du nombre de Taylor fixée, le produit  $\mu P \approx Cste$  où  $\mu$  est le nombre de vagues et  $P$  la période d'oscillation, comme cela a été mentionné dans [9]. Ceci indique que la vitesse angulaire de déplacement des vagues est indépendante du nombre de vagues, caractéristique de vagues régulières [5].

Les spectres temporels pour la température relevée en un point situé à  $(r = (b - a)/2, z = 0)$  sont présentés sur la Fig. 3a dans le cas du régime  $(Pn)$ ,  $Ta^* = 10^7$ ,  $\Theta = 0,035$  et sur la Fig. 3c pour le cas du régime non-périodique  $(NP)$ ,  $Ta^* = 10^8$ ,  $\Theta = 0,0035$ . L'analyse spatiale correspondante montre dans le cas  $Ta^* = 10^7$  la dominance du mode  $\mu = 5$  (Fig. 3b) alors que pour  $Ta^* = 10^8$  (Fig. 3d) le mode  $\mu = 8$  est associé à la présence de niveaux élevés d'autres valeurs de modes  $\mu = 3, 12, 15$  suggérant fortement la possibilité d'existence de solutions avec différents nombres de vagues.

En accord avec les études expérimentales de Hide [3–5], la transition vers la turbulence géostrophique apparaît bien plus tôt comparativement à des fluides ayant un nombre de Prandtl plus grand.

**Remerciements.** Les auteurs tiennent à remercier le Professeur R. Hide (University of Oxford, UK) pour ses discussions fructueuses et ses conseils dans la manière de mener ces travaux. Ces résultats ont été obtenus sur NEC-SX5 de l'IDRIS (CNRS), Orsay.

### Références bibliographiques

- [1] J.S. Fein, R.L. Pfeffer, An experimental study of the effects of Prandtl number on thermal convection in a rotating, differentially heated cylindrical annulus of fluid, *J. Fluid Mech.* 75 (1976) 81–112.
- [2] G. Buzyna, R.L. Pfeffer, R. Kung, Transition to geostrophic turbulence in a rotating differentially heated annulus of fluid, *J. Fluid Mech.* 145 (1984) 377–403.
- [3] R. Hide, P.J. Mason, Sloping convection in a rotating fluid, *Adv. Phys.* 24 (1975) 47–100.
- [4] W.W. Fowles, R. Hide, Thermal convection in a rotating annulus of liquid: effect of viscosity on the transition between axisymmetric and non-axisymmetric flow regimes, *J. Atmospheric Sci.* 22 (1965) 541–558.
- [5] R. Hide, An experimental study of thermal convection in a rotating fluid, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 250 (1958) 441–478.
- [6] P. Hignett, A.A. White, R.D. Carter, W.D.N. Jackson, R.M. Small, A comparison of laboratory measurements and numerical simulations of baroclinic wave flows in a rotating cylindrical annulus, *Quart. J. R. Met. Soc.* 111 (1985) 131–154.
- [7] A. Randriamampianina, E. Leonardi, P. Bontoux, in: G. De Vahl Davis, E. Leonardi (Eds.), A numerical study of the effects of Coriolis and centrifugal forces on buoyancy driven flows in a vertical rotating annulus, *Advances in Computational Heat Transfer, CHT 97*, Begell House, Cese, Turkey, 1997.
- [8] S.D. Abrahamson, J.K. Eaton, D.J. Koga, The flow between shrouded corotating disks, *Phys. Fluids A* 1 (1989) 241–251.
- [9] P. Le Quééré, J. Pécheux, A three-dimensional pseudo-spectral algorithm for the computation of convection in a rotating annulus, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 80 (1990) 261–271.