

Approche analytique de la convection forcée des fluides de Bingham dans un tube

Rabha Khatyr, Driss Ouldhadda, Ali II Idrissi

UFR d'énergétique et instrumentation, Faculté des sciences Ben M'Sik, BP 7955, Sidi Othmane, Casablanca, Maroc

Reçu le 28 juin 2001 ; accepté après révision le 8 novembre 2001

Note présentée par Sébastien Candel.

Résumé

Le comportement asymptotique de la convection forcée laminaire des fluides de Bingham en écoulement dans un tube circulaire soumis à une densité de flux de chaleur à la paroi variable est étudié analytiquement. La dissipation visqueuse est prise en considération tandis que la conduction axiale est supposée négligeable. Le profil de température asymptotique et le nombre de Nusselt asymptotique sont déterminés pour différentes distributions de la densité de flux de chaleur à la paroi. Ces distributions permettent l'existence d'une région thermique établie. Les résultats obtenus montrent une diminution du nombre de Nusselt asymptotique lorsque le nombre de Brinkman et le rayon critique du corps plastique augmentent. Des comparaisons avec les résultats de la littérature dans le cas des fluides Newtoniens montrent la validité de la présente analyse. *Pour citer cet article* : R. Khatyr et al., *C. R. Mecanique 330 (2002) 69–75*. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides / fluide de Bingham / convection forcée laminaire / comportement asymptotique / dissipation visqueuse / densité de flux de chaleur à la paroi variable

Analytical approach for forced convection of Bingham fluids in a tube

Abstract

The asymptotic behaviour of laminar forced convection for Bingham fluid in a circular tube subjected to an axially varying wall heat flux is studied analytically. The effect of viscous dissipation is taken into account while the axial heat conduction in the fluid is considered as negligible. The asymptotic temperature profile and the asymptotic Nusselt number are determined for various axial wall heat flux distributions which yield a thermally developed region. The results obtained show a diminution in asymptotic Nusselt number when the Brinkman number and the dimensionless radius of the plug flow region increase. Comparisons with the results in the literature for Newtonian fluids show the validity of the present analysis. *To cite this article*: R. Khatyr et al., *C. R. Mecanique 330 (2002) 69–75*. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

fluid mechanics / Bingham fluid / laminar forced convection / asymptotic behaviour / viscous dissipation / variable wall heat flux

Abridged English version

The present paper aims to study analytically the fully developed laminar forced convection for a Bingham fluid at constant properties in a circular tube. The wall tube is subjected to a variable wall heat flux yielding

Adresse e-mail : rkhatyr@hotmail.com (R. Khatyr).

a thermally developed region. The viscous dissipation is considered and the axial heat conduction in the fluid is neglected. Under these assumptions and after introducing appropriate non-dimensional variables, equations (8) and (9) then govern the problem. The asymptotic behaviour of the dimensionless temperature distribution $\Theta(R, X)$ is determined analytically for many axial distributions of wall heat flux, which satisfies the conditions (12) and (13). For example, these conditions are satisfied by a uniform wall heat flux, by a linearly varying wall heat flux, and by polynomial functions or by quotients of polynomials, whose numerator has a degree greater than that of the denominator (equation (14)). The solution of equations (8) and (9), for large values of X , can be given by equation (15). However, a new function $f(R)$ is calculated by a simple integration, and taking into account the fact that the bulk value of function $f(R)$ must be zero and the continuity property of $f(R)$ at $R = a$. The asymptotic temperature profile $\Theta_\infty(R)$ and the asymptotic Nusselt number Nu_∞ are expressed by equations (20) and (21) respectively. *Figures 1a–c* show that at the centerline of the duct ($R = 0$), the asymptotic temperature field increases with asymptotic Brinkman number Br_∞ , while at the vicinity of wall ($R = 1$), the value of $\Theta_\infty(R)$ decreases with Br_∞ , for a given value of the dimensionless radius a of the plug flow region. Indeed, if the radius a increases then the asymptotic temperature profile tends to be the same for larger values of Br_∞ (*figure 1c*). Equation (21) shows that the asymptotic Nusselt number depends only on the asymptotic Brinkman number Br_∞ and the dimensionless radius a of the plug flow region. If $a = 0$ (Newtonian fluid), equation (21) coincides with equation (1) which has been obtained in the case of uniform wall heat flux [2,4]. As shows in *figure 2*, the value of Nu_∞ increases with radius a when $Br_\infty = 0$. On the other hand, if the value of Br_∞ increases, the value of Nu_∞ decreases with a . Finally, note that the value of Nu_∞ always remains lower to 4.36 for $Br_\infty > 0$.

1. Introduction

Les fluides à comportement non-Newtonien se trouvent dans de nombreux secteurs industriels tels que les processus chimiques, l'agroalimentaire, le secteur pétrolier et traitement des polymères. Parmi ces fluides, on s'intéresse au fluide de Bingham qui présente une contrainte seuil d'écoulement τ_c .

Les études de transfert de chaleur dans les conduites circulaires en présence de fluides Newtoniens ont fait l'objet de plusieurs travaux dont une revue bibliographique a été faite par Shah et London [1]. Le problème de la convection forcée laminaire des fluides Newtoniens en régime dynamique établi et à propriétés physiques constantes fut le cas le plus étudié. Parmi les travaux relatifs à ce sujet, on citera ceux effectués par Basu et Roy [2] qui ont étudié l'effet de la dissipation visqueuse sans conduction axiale dans le cas de paroi isotherme et densité de flux de chaleur constant à la paroi. La valeur asymptotique du nombre de Nusselt dépend du nombre de Brinkman lorsque la paroi est soumise à une densité de flux de chaleur constante (equation (1)). Récemment, Barletta et Zanchini [3] ont déterminé la condition nécessaire et suffisante sur le comportement asymptotique de flux de chaleur à la paroi pour avoir une région établie thermiquement avec un nombre de Nusselt non nul :

$$Nu_\infty = \frac{2}{2Br + 11/24} \quad (1)$$

Dans le cas des fluides non-Newtoniens à loi de puissance, le problème asymptotique a été étudié par Barletta [4] pour plusieurs distributions de la densité de flux de chaleur variable à la paroi. Pour les fluides de Bingham, Johnston [5] a étudié le problème de Graetz en tenant compte de la conduction axiale. Il conclue que la conduction axiale est négligeable lorsque le nombre de Peclet est supérieur à 1000. Min et al. [6] ont étudié le régime établi et le problème de Graetz à l'aide des méthodes analytiques de Frobenius et de séparation des variables. Très récemment, Olek [7] a développé une méthode analytique générale pour

obtenir le profil de température dans la région d'entrée thermique d'une conduite circulaire ou de plaques parallèles avec conditions aux limites convectives. La solution d'Olek est vérifiée même si la conduction axiale est non négligeable et peut être utilisée quel que soit le profil de vitesse établi.

L'analyse bibliographique citée ci-dessus montre qu'il n'existe pas de travaux consacrés au fluide de Bingham dans une conduite circulaire avec densité de flux de chaleur variable à la paroi. Le but de ce travail est d'étudier analytiquement le comportement asymptotique du champ de température et du nombre de Nusselt pour les fluides de Bingham avec dissipation visqueuse et une distribution de densité de flux de chaleur à la paroi variable.

2. Analyse théorique

Considérons un fluide non-Newtonien de Bingham en écoulement dans une conduite circulaire de rayon r_0 avec une densité de flux de chaleur à la paroi variable, $q_w(x)$, suivant la coordonnée axiale x . L'écoulement est supposé permanent laminaire et les propriétés physiques sont considérées constantes. En régime dynamique établi, le profil de vitesse pour un fluide de Bingham est exprimé par [6,8] :

$$u(r) = \begin{cases} u_m \frac{2(1 - (r/r_0)^2 - 2a(1 - r/r_0))}{1 - 4a/3 + a^4/3} & \text{si } r_c \leq r \leq r_0 \\ u_m \frac{2(1 - a)^2}{1 - 4a/3 + a^4/3} & \text{si } 0 \leq r \leq r_c \end{cases} \quad (2)$$

où $a = \tau_c/\tau_p = r_c/r_0$ est le rayon du corps plastique, τ_p la contrainte à la paroi, τ_c la contrainte de cisaillement critique, r_c le rayon critique, u_m la vitesse moyenne débitante et r la coordonnée radiale.

L'équation de l'énergie et les conditions aux limites, sont données par :

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \mu_p \left(\frac{du}{dr} \right)^2 - \tau_c \frac{du}{dr} \quad (3)$$

$$T(r, x=0) = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{q_w(x)}{\lambda} \quad (4)$$

où T_0 est la température à l'entrée, λ et ρ sont respectivement la conductivité thermique et la masse volumique de fluide, c_p la chaleur spécifique et μ_p la viscosité plastique pariétale.

La condition du transfert thermique établi pour l'écoulement laminaire dans un tube est définie par [9] :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{T_w(x) - T(r, x)}{T_w(x) - T_m(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \Theta(r/r_0, x/2r_0 Pe) = \Theta_\infty(r/r_0) \quad (5)$$

où $T_w(x)$ et $T_m(x)$ sont respectivement les températures pariétale et moyenne, $Pe = 2u_m r_0 \rho c_p / \lambda$ est le nombre de Peclet et $\Theta_\infty(r/r_0)$ représente le champ de température adimensionnel asymptotique, qui est une fonction continue et dérivable de r .

Lorsque la relation (5) est vérifiée, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt Nu_∞ existe ; elle est donnée par [9] :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Nu = 2r_0 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\partial T / \partial r)|_{r=r_0}}{T_w(x) - T_m(x)} = -2r_0 \frac{d\Theta_\infty}{dr} \Big|_{r=r_0} = Nu_\infty \quad (6)$$

En introduisant les paramètres adimensionnels suivants :

$$X = \frac{x}{2r_0 Pe}, \quad R = \frac{r}{r_0}, \quad U(R) = \frac{u(r)}{u_m}, \quad \theta = \lambda \frac{T - T_0}{\mu_p u_m^2} \quad (7)$$

L'équation de l'énergie et les conditions aux limites associées deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] = \frac{RU}{4} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{4a}{1 - 4a/3 + a^4/3} R \frac{dU}{dR} - R \left(\frac{dU}{dR} \right)^2 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_{R=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_{R=1} = \frac{1}{2Br(X)} \quad (9)$$

où $Br(X)$ est le nombre de Brinkman local donné par :

$$Br(X) = \frac{\mu_p u_m^2}{(2r_0)q_w(x)} \quad (10)$$

L'intégration de l'équation (8), pour $0 \leq R \leq 1$, compte tenu de (9) donne :

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial X} = \frac{4}{Br(X)} + \frac{32}{1 - 4a/3 + a^4/3} \quad (11)$$

où $\theta_m(X)$ est la valeur moyenne de $\theta(R, X)$.

3. Comportement asymptotique du champ thermique

Dans cet article, le champ de température asymptotique et le nombre de Nusselt asymptotique sont évalués en considérant plusieurs cas de la fonction $Br(X)$ qui assurent l'existence d'une région thermique établie asymptotiquement, avec :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} Br(X) = Br_\infty \quad (12)$$

et

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{dBr(X)}{dX} = 0 \quad (13)$$

où Br_∞ est le nombre de Brinkman asymptotique.

Les conditions (12) et (13) sont vérifiées, à titre d'exemple, par des distributions de densité de flux de chaleur à la paroi de la forme :

$$q_w(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \quad (14)$$

avec $P(X)$ et $Q(X)$ sont des polynômes tels que $d^\circ(P) \geq d^\circ(Q)$.

Lorsque les relations (12) et (13) sont vérifiées, une région établie du champ de température existe et la solution des équations (8) et (9), pour des valeurs larges de X , s'exprime par :

$$\theta(R, X) = \theta_m(X) + \frac{f(R)}{Br(X)} \quad (15)$$

où $f(R)$ est une fonction continue et dérivable de R .

La substitution de (15) dans (8) et (9) en tenant compte des équations (11), (12) et (13) donne :

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial f}{\partial R} \right] = RU \left(1 + \frac{8Br_\infty}{\omega} \right) + \left(\frac{4a}{\omega} R \frac{dU}{dR} - R \left(\frac{dU}{dR} \right)^2 \right) Br_\infty \quad (16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial R} \Big|_{R=0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial R} \Big|_{R=1} = \frac{1}{2} \quad (17)$$

où $\omega = 1 - 4a/3 + a^4/3$.

L'intégration de l'équation (16), en tenant compte de la continuité de $f(R)$ en $R = a$ et de la valeur moyenne nulle de $f(R)$, donne :

$$f(R) = \begin{cases} \frac{1-2a}{2\omega} \left(1 + \frac{8Br_\infty}{\omega}\right) R^2 + \frac{4a}{9\omega} \left(1 + \frac{12Br_\infty}{\omega}\right) R^3 \\ - \frac{1}{8\omega} \left(1 + \frac{16Br_\infty}{\omega}\right) R^4 + \frac{a^4}{6\omega} \ln(R) + C_1 & \text{si } a \leq R \leq 1 \\ \frac{1}{2\omega} \left(1 + \frac{8Br_\infty}{\omega}\right) \left((1-a)^2 R^2 - \frac{a^4}{6}\right) + \frac{a^4}{6\omega} \left(\ln(a) - \frac{7}{12}\right) + C_1 & \text{si } 0 \leq R \leq a \end{cases} \quad (18)$$

où :

$$C_1 = -\frac{a^4}{18\omega^2} \ln(a) - \frac{Br_\infty}{\omega^2} \left(1 - \frac{4a}{3} + \frac{a^4}{3}\right) - \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{7}{48} - \frac{257a}{630} + \frac{38a^2}{135} - \frac{a^4}{8} + \frac{5a^5}{27} + \frac{a^6}{15} - \frac{2a^7}{15} - \frac{13a^8}{1008}\right)$$

Les équations (5), (7), (15) et (18) donnent :

$$\Theta_\infty(R) = \frac{f(1) - f(R)}{f(1)}$$

avec

$$f(1) = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{11}{48} + \omega Br_\infty\right) - \frac{a^8}{18\omega^2} \ln(a) + \frac{a}{\omega^2} \left(-\frac{2}{45} + \frac{62a}{135} + \frac{a^3}{4} - \frac{10a^4}{27} - \frac{a^5}{15} + \frac{2a^6}{15} + \frac{13a^7}{1008}\right) \quad (19)$$

d'où :

$$\Theta_\infty(R) = \begin{cases} 1 - \left[\frac{1-2a}{2\omega} \left(1 + \frac{8Br_\infty}{\omega}\right) R^2 + \frac{4a}{9\omega} \left(1 + \frac{12Br_\infty}{\omega}\right) R^3 - \frac{1}{8\omega} \left(1 + \frac{16Br_\infty}{\omega}\right) R^4 + \frac{a^4}{6\omega} \ln(a) + C_1 \right] [f(1)]^{-1} & \text{si } a \leq R \leq 1 \\ 1 - \left[\frac{1}{2\omega} \left(1 + \frac{8Br_\infty}{\omega}\right) \left((1-a)^2 R^2 - \frac{a^4}{6}\right) + \frac{a^4}{6\omega} \left(\ln(a) - \frac{7}{12}\right) + C_1 \right] [f(1)]^{-1} & \text{si } 0 \leq R \leq a \end{cases} \quad (20)$$

Les équations (6) et (20) donnent la valeur asymptotique du nombre de Nusselt :

$$Nu_\infty = -2 \frac{d\Theta_\infty}{dR} \Big|_{R=1} = \frac{1}{f(1)} \quad (21)$$

L'équation (21) montre que la valeur asymptotique du nombre de Nusselt Nu_∞ dépend uniquement de la valeur asymptotique du nombre de Brinkman Br_∞ et du rayon du corps plastique a . Pour les fluides Newtoniens ($a = 0$), l'équation (21) se réduit à l'équation (1) [2,4] dans le cas d'une densité de flux de chaleur constante à la paroi. Les figures 1a–c représentent l'évolution du profil de température asymptotique $\Theta_\infty(R)$, pour différentes valeurs de a et Br_∞ . Ces figures montrent que, au centre de la conduite ($R = 0$), la température augmente avec le nombre de Brinkman, tandis qu'au voisinage de la paroi de la conduite ($R = 1$), la valeur de $\Theta_\infty(R)$ diminue en fonction de Br_∞ pour un rayon critique a donné. On constate qu'au fur et à mesure que le rayon critique augmente, le champ de température tend à être le même pour les grandes valeurs de Br_∞ (figure 1c). La figure 2 représente l'évolution du nombre de Nusselt

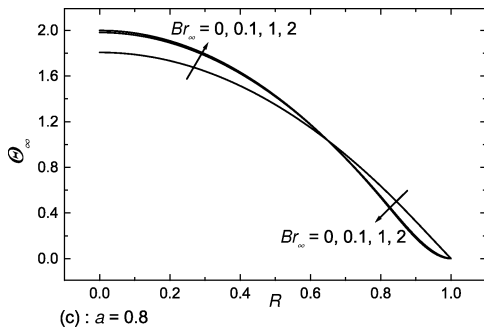
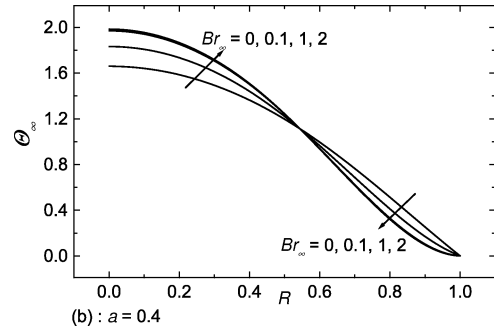
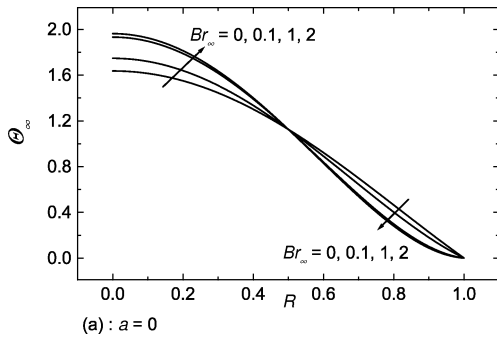


Figure 1. Evolution de $\Theta_\infty(R)$ pour différentes valeurs de Br_∞ et du rayon a du corps plastique. (a) $a = 0$; (b) $a = 0,4$; (c) $a = 0,8$.

Figure 1. Evolution of $\Theta_\infty(R)$ for various values of Br_∞ and radius a of plug core. (a) $a = 0$; (b) $a = 0.4$; (c) $a = 0.8$.

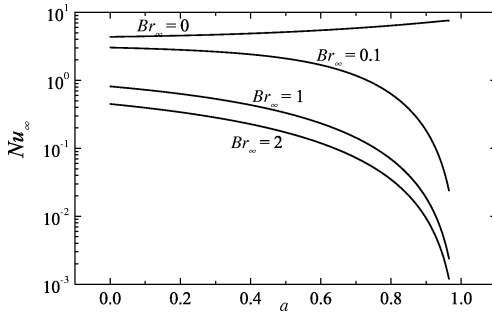


Figure 2. Evolution de Nu_∞ en fonction du rayon a du corps plastique.

Figure 2. Evolution of Nu_∞ versus radius a of plug core.

asymptotique Nu_∞ en fonction du rayon critique du corps plastique a pour différentes valeurs du nombre de Brinkman asymptotique Br_∞ . Elle montre que Nu_∞ augmente avec a lorsque $Br_\infty = 0$ (dissipation visqueuse négligeable). Par contre, si la valeur Br_∞ croît, le nombre de Nusselt asymptotique Nu_∞ est une fonction décroissante de a . Notons finalement que la valeur de Nu_∞ reste toujours inférieure à 4.36 pour $Br_\infty > 0$.

4. Conclusion

La convection forcée laminaire établie pour les fluides de Bingham en écoulement dans une conduite cylindrique a été étudiée analytiquement avec des distributions de densité de flux de chaleur à la paroi variables. Les effets de la dissipation visqueuse et de la contrainte seuil sur les profils de température asymptotique et le nombre de Nusselt asymptotique sont analysés dans le cas où la valeur asymptotique de la densité de flux de chaleur à la paroi $q_w(x)$ est non nul avec $(1/q_w(x))(dq_w(x)/dx)$ tendant vers zéro. La valeur asymptotique du nombre de Nusselt est différente de zéro et dépend uniquement du nombre de Brinkman asymptotique Br_∞ et du rayon critique a du corps plastique. Cependant, la dissipation visqueuse

et le phénomène de seuil jouent un rôle prédominant dans la détermination des caractéristiques du transfert de chaleur de l'écoulement établi thermiquement.

Références bibliographiques

- [1] Shah R.K., London A.L., Laminar Flow Forced Convection in Ducts, Academic Press, New York, 1978.
- [2] Basu T., Roy D.N., Laminar heat transfer in a tube with viscous dissipation, Int. J. Heat Mass Transfer 28 (1985) 699–701.
- [3] Barletta A., Zanchini E., The existence of an asymptotic thermally developed region for laminar forced convection in a circular duct, Int. J. Heat Mass Transfer 39 (1996) 2735–2744.
- [4] Barletta A., Fully developed laminar forced convection in circular ducts for power-law fluids with viscous dissipation, Int. J. Heat Mass Transfer 40 (1997) 15–26.
- [5] Johnston P.R., Axial conduction and the Graetz problem for a Bingham plastic in laminar tube flow, Int. J. Heat Mass Transfer 34 (1991) 1209–1217.
- [6] Min T., Yoo J.Y., Choi H., Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe – I. Analytical approach – thermally developed flow and thermally developing flow (the Graetz problem extended), Int. J. Heat Mass Transfer 40 (1997) 3025–3037.
- [7] Olek S., Heat transfer in duct flow of non-Newtonian fluids with axial conduction, Int. Comm. Heat Mass Transfer 25 (1998) 929–938.
- [8] Midoux N., Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique, Technique et Documentation Lavoisier, Paris, 1985.
- [9] Bejan A., Convection Heat Transfer, Wiley, New York, 1984.