



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών  
Τμήμα Φυσικής

## Οπτική Απόκριση Δισδιάστατων Περιοδικών Διατάξεων Στατικών και Δυναμικών Σφαιρικών Σωματιδίων

Διπλωματική Εργασία ΠΜΣ «Φυσική των Υλικών» του  
Ιωάννη Στεφάνου  
Α.Μ.: 2021000108

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικόλαος Στεφάνου

Αθήνα, Ιούνιος 2023



*Η διπλωματική εργασία αυτή ολοκληρώνει το μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών μου στο Τμήμα Φυσικής του ΕΚΠΑ. Στα δύο χρόνια αυτά είχα την χαρά να συνεργαστώ με έναν πολύ αγαπητό και αξιότιμο άνθρωπο, τον Καθηγητή Ν. Στεφάνου, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τόσο για τις γνώσεις και την βοήθεια που μου προσέφερε, όσο και για τον χαρακτήρα και την ηθική που έδειξε απέναντι σε εμένα και όλους τους φοιτητές του. Θερμές και εκ βαθέων ευχαριστίες οφείλω να αποδώσω στου Δρ. Ν. Παπανικολάου, Δρ. Ε. Αλμπάνη και Υπ. Δρ. Μ. Παναγιωτίδη για την εξαιρετική συνεργασία και την βοήθεια που μου προσέφεραν. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου τον Φώτη, την Αντιγόνη και την Αθηνά για την υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια, καθώς και την Δήμητρα για την ενθάρρυνση και τη στήριξή της.*



## Περίληψη

Στην εργασία αυτή, αναπτύσσεται αρχικά μια ακριβής μέθοδος Floquet για την περιγραφή της οπτικής απόκρισης ενός ιστροπικού και ομοιογενούς σφαιρικού αντικειμένου με περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης, μέσω ενός πίνακα  $t$  που περιγράφει πλήρως όλες τις διαδικασίες ελαστικής και μη ελαστικής σκέδασης. Χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη επέκταση της φωτονικής μεθόδου στρωματικής πολλαπλής σκέδασης για απλά και πολλαπλά δισδιάστατα πλέγματα τέτοιων δυναμικών διηλεκτρικών σκεδαστών, αναδεικνύονται ισχυρά και ελεγχόμενα φαινόμενα μη ελαστικής σκέδασης υπό τη συνθήκη τριπλού συντονισμού, που ικανοποιείται για οπτικές μεταβάσεις μεταξύ γειτονικών πλεγματικών καταστάσεων μεγάλου χρόνου ζωής, και κατάλληλης συμμετρίας, οι οποίες προέρχονται από πολυπολικούς συντονισμούς Mie.

**Λέξεις Κλειδιά:** Φωτονικοί Χρονοκρύσταλλοι. Μέθοδος Floquet στο Πεδίο του Χρόνου. Θεωρία Πολλαπλής Σκέδασης. Συντονισμοί Mie. Μη Ελαστική Σκέδαση Φωτός. Συνθήκη Τριπλού Συντονισμού.

## Abstract

In this work, initially, an exact Floquet method for the description of the optical response of an isotropic and homogeneous spherical object characterized by a periodically time varying refractive index, by means of a  $t$  matrix that fully describes all elastic and inelastic scattering processes, is developed. By employing a proper extension of the photonic layer multiple scattering method for single and multiple two-dimensional lattices of such dynamic dielectric scatterers, strong and tunable inelastic scattering effects under the triple resonance condition, fulfilled for optical transitions between neighboring long-lifetime lattice modes of the appropriate symmetry, which originate from multipolar Mie resonances, are revealed.

**Keywords:** Photonic Time-Crystals. Floquet Method in the Time Domain. Multiple Scattering Theory. Mie Resonances. Inelastic Light Scattering. Triple Resonance Condition.



# Περιεχόμενα

<b>Εισαγωγή</b>	<b>3</b>
<b>1 Σκέδαση από σφαίρα με περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης</b>	<b>5</b>
1.1 Στοιχεία ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας . . . . .	5
1.2 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε χρονοανεξάρτητα μέσα . . . . .	8
1.3 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενα μέσα . . . . .	11
1.4 Σκέδαση από σφαίρα με περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενη διηλεκτρική συνάρτηση . . . . .	12
1.5 Ενεργός διατομή σκέδασης . . . . .	16
<b>2 Σκέδαση από δισδιάστατο πλέγμα δυναμικών σφαιρών</b>	<b>19</b>
2.1 Πολλαπλή σκέδαση . . . . .	19
2.2 Πολλαπλή σκέδαση από περιοδικό πλέγμα . . . . .	21
2.3 Σκέδαση από ομοιογενές πλακίδιο . . . . .	26
2.4 Σκέδαση από σύνθετο πλακίδιο . . . . .	28
<b>3 Αποτελέσματα</b>	<b>31</b>
3.1 Δισδιάστατα πλέγματα στατικών σφαιρικών σωματιδίων . . . . .	31
3.2 Δισδιάστατα πλέγματα δυναμικών σφαιρικών σωματιδίων . . . . .	36
<b>Συμπεράσματα</b>	<b>43</b>
<b>Α΄ Μαθηματικές συναρτήσεις</b>	<b>45</b>
<b>Β΄ Ανάλυση βάσει της θεωρίας ομάδων</b>	<b>48</b>
<b>Γ΄ Συντονισμοί Fano</b>	<b>53</b>





# Εισαγωγή

Η διάδοση ηλεκτρομαγνητικής (ΗΜ) ακτινοβολίας σε περιοδικές διατάξεις μακροσκοπικών αντικειμένων, τους ονομαζόμενους *φωτονικούς κρυστάλλους*, έχει μελετηθεί διεξοδικά αποκαλύπτοντας πληθώρα φαινομένων, όπως ύπαρξη φωτονικού χάσματος, καταστολή της αυθόρμητης αποδιέγερσης, εντοπισμός του ΗΜ πεδίου, κλπ. [1, 2]. Τα τελευταία χρόνια, έχει επίσης αναθερμανθεί το ενδιαφέρον για περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενα μέσα, τα οποία εκδηλώνουν αξιοσημείωτα φαινόμενα, όπως χάσματα κυματανυσμάτων, παραμετρική ενίσχυση, μη αντιστρεπτή απόκριση και μετατροπή συχνότητας [3–18]. Ο συνδυασμός της χωρικής περιοδικότητας ενός φωτονικού κρυστάλλου με τη χρονική περιοδικότητα ενός «δυναμικού» στοιχείου ανοίγει το δρόμο στο σχεδιασμό μιας νέας κατηγορίας υλικών, τους λεγόμενους *φωτονικούς χρονοκρυστάλλους* [19–25].

Η δυνατότητα υλοποίησης τέτοιων δυναμικών στοιχείων, με εύρος λειτουργίας στο υπέρυθρο και το ορατό μέρος του ΗΜ φάσματος, εξαρτάται από τη διαθεσιμότητα υλικών και διαδικασιών που επιτρέπουν έντονες και γρήγορες μεταβολές της οπτικής απόκρισης. Μια συνήθης πρακτική για τη διαμόρφωση των οπτικών ιδιοτήτων διηλεκτρικών υλικών είναι η μεταβολή της πυκνότητας των ελεύθερων φορέων τους. Αυτό επιτυγχάνεται με ηλεκτρικές πύλες, διέγερση φωτοφορέων, και άλλες διαδικασίες που επάγουν έντονες μεταβολές, ιδιαίτερα στο μήκος κύματος που το πραγματικό μέρος της ηλεκτρικής διαπερατότητας πλησιάζει το μηδέν [26–29]. Με αυτόν τον τρόπο, η διέγερση φωτοφορέων και τα οπτικά μη γραμμικά φαινόμενα μπορούν να έχουν ενισχυμένα αποτελέσματα, με χρόνους αποδιέγερσης μικρότερους των πικο-δευτερολέπτων [30, 31]. Εναλλακτικά, η οπτική απόκριση μπορεί να διαμορφωθεί από ακουστικά κύματα ή κύματα σπιν.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια μέθοδος Floquet για τη μελέτη ομοιογενών και ισοτροπικών σφαιρικών σωματιδίων με περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης [32, 33], καθώς και η κατάλληλη γενίκευση της μεθόδου στρωματικής πολλαπλής σκέδασης για δυναμικούς φωτονικούς κρυστάλλους από τέτοια σωματίδια [34]. Ενσωματώνοντας τον πίνακα σκέδασης  $t$ , όπως υπολογίζεται με τη μέθοδο Floquet, στον υπολογιστικό κώδικα MULTEM [35, 36], μελετώνται μέσω διεξοδικών αριθμητικών υπολογισμών φαινόμενα πολλαπλής σκέδασης από δισδιάστατα πλέγματα στατικών και χρονικά μεταβαλλόμενων σφαιρικών σκεδαστών. Από τα αποτελέσματα, εξάγονται συμπεράσματα για την οπτική απόκριση αυτών των δομών, όπως συμπεριφορά ενεργού μέσου σε μεγάλα μήκη κύματος, εμφάνιση πλεγματοειδών συντονισμών με μεγάλο χρόνο ζωής, ισχυρά φαινόμενα ελαστικής και μη ελαστικής σκέδασης και απόκριση πάνω από το όριο Rayleigh - Wood, ενώ διερευνάται η επίδραση τόσο της γωνίας πρόσπτωσης όσο και της πλεγματοειδούς σταθεράς στο φάσμα διέλευσης. Τα αποτελέσματα αναλύονται και υπό το πρίσμα της θεωρίας ομάδων, η οποία προσφέρει μια συνεπή ερμηνεία της παρατηρούμενης οπτικής απόκρισης. Στο πρώτο κεφάλαιο, παρατίθενται βασικά στοιχεία της ΗΜ θεωρίας και αναπτύσσεται ένας φορμαλισμός για τον υπολογισμό του πίνακα σκέδασης ενός μεμονωμένου σκεδαστή με περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης. Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η γενίκευση της μεθόδου στρωματικής πολλαπλής σκέδασης για περιοδικές διατάξεις τέτοιων δυναμικών σκεδαστών, σε συνδυασμό και με ομοιογενή πλάκidia. Στο τρίτο κεφάλαιο, η μέθοδος εφαρμόζεται για τον υπολογισμό του φάσματος διέλευσης τετραγωνικού πλέγματος σφαιρικών σωματιδίων υψηλής διηλεκτρικής σταθεράς. Μεταβάλλοντας διάφορες γεωμετρικές παραμέτρους της δομής, παρατηρούνται ενδιαφέροντα φαινόμενα ενώ, επιτρέποντας ταυτόχρονα τη χρονική διαμόρφωση των σκεδαστών, αναδύονται ισχυρά φαινόμενα μη ελαστικής σκέδασης, τα οποία αναλύονται διεξοδικά δίνοντας μια συνεπή ερμηνεία των υποκείμενων φυσικών μηχανισμών.



# Κεφάλαιο 1

## Σκέδαση από σφαίρα με περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης

### 1.1 Στοιχεία ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας

Η διάδοση της ΗΜ ακτινοβολίας στην ύλη καθώς και όλα τα κλασικά ΗΜ φαινόμενα περιγράφονται από τις εξισώσεις Maxwell, οι οποίες στο σύστημα μονάδων SI έχουν τη μορφή [37]

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1.1.I)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.1.II)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.1.III)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (1.1.IV)$$

όπου  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  το ηλεκτρικό πεδίο,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  το μαγνητικό πεδίο,  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  η ηλεκτρική μετατόπιση,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  η μαγνητική επαγωγή,  $\rho(\mathbf{r}, t)$  η πυκνότητα φορτίου και  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  η πυκνότητα ρεύματος.

Η αρχή διατήρησης ενέργειας απαιτεί, ο ρυθμός μεταβολής της ΗΜ ενέργειας σε δεδομένο όγκο, συν το ρυθμό ροής ενέργειας από την επιφάνεια που τον περικλείει, να είναι ίσος με το έργο που παράγει το ΗΜ πεδίο σε αυτόν τον όγκο. Δεδομένου ότι ο ρυθμός παραγωγής έργου ανά μονάδα όγκου είναι  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  και χρησιμοποιώντας την Εξ. (1.1.IV) φτάνουμε στην

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (1.2)$$

όπου χρησιμοποιώντας την ταυτότητα  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$  για να αντικαταστήσουμε την Εξ. (1.1.II) παίρνουμε

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (1.3)$$

Το  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  είναι η πυκνότητα ενέργειας ανά μονάδα όγκου του ΗΜ πεδίου με χρονική παράγωγο  $\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ , το  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  ονομάζεται διάνυσμα Poynting και περιγράφει την πυκνότητα ροής ενέργειας κατά τη διεύθυνσή του ενώ το  $\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  δίνει την ΗΜ ισχύ που εκρέει από το σύστημα ανά μονάδα όγκου. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει παραγωγή ή απώλεια ενέργειας, δηλαδή  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$ , η Εξ. (1.3) ή αλλιώς το θεώρημα Poynting παίρνει τη μορφή  $\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$  η οποία αντιστοιχεί στην εξίσωση συνέχειας φορτίων και ρευμάτων.

Για τη μελέτη της διάδοσης ΗΜ ακτινοβολίας στην ύλη είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε τις καταστατικές εξισώσεις, δηλαδή τις σχέσεις που συνδέουν τα πεδία  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  και

$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  με τα  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  και  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Οι εξισώσεις αυτές έχουν τη γενική μορφή

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (1.4)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] , \quad (1.5)$$

όπου οι αγκύλες συμβολίζουν μια πιθανόν πιο σύνθετη συσχέτιση, όπως μη γραμμικότητα, υστέρηση κ.α. Για ασθενή πεδία, όπως αυτά που θα μελετήσουμε, παίρνουν τη μορφή

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (1.6)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) , \quad (1.7)$$

όπου το μέγεθος  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  ονομάζεται ηλεκτρική πόλωση και είναι μια γραμμική συνάρτηση του  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , ενώ το μέγεθος  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  ονομάζεται μαγνήτιση και είναι μια γραμμική συνάρτηση του  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Τα  $\epsilon_0, \mu_0$  είναι η ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα του κενού, αντίστοιχα, και ορίζουν την ταχύτητα του φωτός  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . Κατά συνέπεια, το  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  εξαρτάται γραμμικά από το  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  και το  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  από το  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , μέσω των

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_V d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \bar{\epsilon}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \quad (1.8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \int_V d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \bar{\mu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \mathbf{H}(\mathbf{r}', t') . \quad (1.9)$$

Οι εξισώσεις αυτές συνδέουν τα  $\mathbf{D}$  και  $\mathbf{B}$  με τα  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{H}$  μέσω των τανυστών της σχετικής διηλεκτρικής συνάρτησης  $\bar{\epsilon}$  και της σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας  $\bar{\mu}$  αντίστοιχα. Το διπλό όρισμα  $(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$  αυτών εκφράζει το γεγονός ότι η απόκριση σε ένα σημείο  $(\mathbf{r}, t)$  μπορεί να εξαρτάται από τα αντίστοιχα πεδία σε ένα άλλο σημείο  $(\mathbf{r}', t')$ . Έτσι χρειάζεται να ολοκληρώσουμε σε όλον το χώρο και χρόνο για να υπολογίσουμε τη συνολική απόκριση.

Λόγω της χρονικής ομοιογένειας προκύπτει ότι

$$\bar{\epsilon}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \bar{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') \quad (1.10)$$

$$\bar{\mu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \bar{\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') . \quad (1.11)$$

Θεωρώντας επίσης τοπική απόκριση, ότι δηλαδή σε κάθε σημείο του χώρου τα  $\mathbf{D}$  και  $\mathbf{B}$  εξαρτώνται μόνο από τα  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{H}$  στο συγκεκριμένο εκείνο σημείο, έχουμε

$$\bar{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') = \bar{\epsilon}(\mathbf{r}, t - t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.12)$$

$$\bar{\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') = \bar{\mu}(\mathbf{r}, t - t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') . \quad (1.13)$$

Οι σχέσεις αυτές, αν αντικατασταθούν στις Εξ. (1.8) και (1.9), μας δίνουν

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \bar{\epsilon}(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \quad (1.14)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \bar{\mu}(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{H}(\mathbf{r}, t') . \quad (1.15)$$

Μετασηματίζοντας κατά Fourier ως προς το χρόνο την Εξ. (1.14), έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}; \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \left[ \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \bar{\epsilon}(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \right] \\ &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i\omega t} \bar{\epsilon}(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \quad , \quad t = \tau + t' \\ &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \bar{\epsilon}(\mathbf{r}, \tau) e^{-i\omega \tau} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') e^{-i\omega t'} \\ &= \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}; \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned} \quad (1.16)$$

και κάνοντας το ίδιο για την (1.15) παίρνουμε

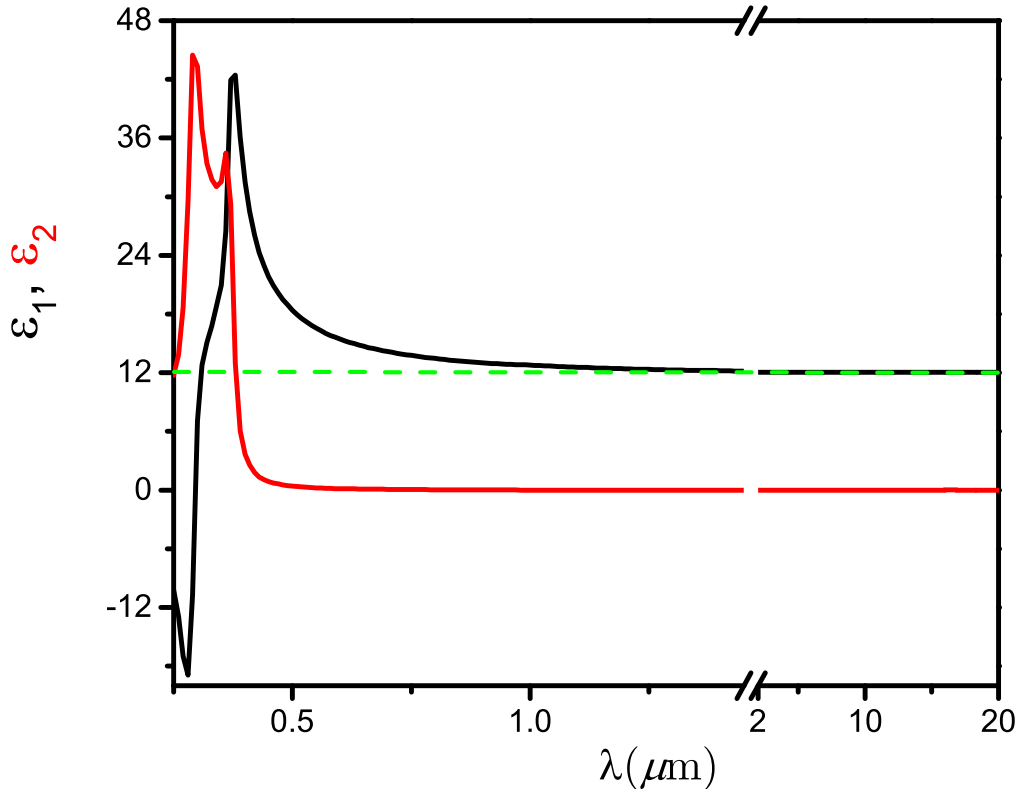
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; \omega) = \mu_0 \mu(\mathbf{r}; \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}; \omega) . \quad (1.17)$$

Για γραμμικά, ομοιογενή και ιστροπικά υλικά, όπως αυτά που θα μελετήσουμε στην παρούσα εργασία, οι συναρτήσεις απόκρισης είναι βαθμωτά μεγέθη και ανεξάρτητες της θέσης  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}; \omega) = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}; \omega) \quad (1.18)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; \omega) = \mu_0 \mu(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}; \omega) . \quad (1.19)$$

Ειδικότερα, για απλότητα, θα αγνοήσουμε και τη διασπορά των υλικών, δηλαδή την εξάρτηση της ηλεκτρικής και της μαγνητικής διαπερατότητας από τη συχνότητα. Η απλοποίηση αυτή είναι ρεαλιστική για πολλά υλικά σε ένα μεγάλο εύρος μηκών κύματος. Για παράδειγμα, στο Σχ. 1, απεικονίζεται η μιγαδική διηλεκτρική συνάρτηση του πυριτίου  $\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega)$ . Παρατηρούμε ότι για  $0.25 \mu\text{m} < \lambda < 1.4 \mu\text{m}$  [38], η διηλεκτρική συνάρτηση παρουσιάζει έντονη διασπορά και σημαντικές απώλειες λόγω οπτικών διεγέρσεων. Αντίθετα, στο υπέρυθρο, για  $2 \mu\text{m} < \lambda < 20 \mu\text{m}$  [39], το πραγματικό μέρος της διηλεκτρικής συνάρτησης σταθεροποιείται κοντά στο 12, (με ακρίβεια εκατοστού), ενώ το φανταστικό μέρος παίρνει τιμές της τάξης του  $10^{-4}$ . Έτσι, για φως με μήκος κύματος από δύο μέχρι είκοσι μικρόμετρα, θεωρούμε ότι το πυρίτιο έχει  $\epsilon = 12$  και μηδενικές απώλειες.



Σχήμα 1: Το πραγματικό  $\epsilon_1$  (μαύρη γραμμή) και το φανταστικό  $\epsilon_2$  (κόκκινη γραμμή) μέρος της μιγαδικής διηλεκτρικής συνάρτησης του πυριτίου, με βάση πειραματικά δεδομένα [38, 39], στην περιοχή του ορατού και του υπέρυθρου.

Εν γένει, στην περίπτωση περιοδικής χρονικής διαμόρφωσης της διηλεκτρικής συνάρτησης, η οποία εξελίσσεται πολύ αργά σε σχέση με την περίοδο του ΗΜ κύματος, δεχόμαστε ότι η οπτική απόκριση είναι ακαριαία, δηλαδή  $\bar{\epsilon}(t-t') = \epsilon(t)\delta(t-t')$  και έτσι η Εξ. (1.14) γίνεται  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0\epsilon(t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ .

## 1.2 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε χρονοανεξάρτητα μέσα

Ας ξεκινήσουμε από την πιο απλή περίπτωση ενός γραμμικού μέσου χωρίς φορτία και ρεύματα, για το οποίο οι καταστατικές εξισώσεις είναι  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  και  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  με  $\epsilon, \mu$  χρονοανεξάρτητες σταθερές απόκρισης. Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις Maxwell παίρνουν την απλούστερη μορφή τους

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.20.I)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0\mu \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.20.II)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.20.III)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} . \quad (1.20.IV)$$

Δρώντας με το στροβιλισμό  $\nabla \times$  στην Εξ. (1.20.II) και αντικαθιστώντας σε αυτήν την (1.20.IV) σε συνδυασμό με την (1.20.I), αφού εφαρμόσουμε την ταυτότητα  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ , καταλήγουμε στην κυματική εξίσωση

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 . \quad (1.21)$$

Ίδιας μορφής διαφορική εξίσωση μπορούμε να πάρουμε με ανάλογες πράξεις για όλα τα πεδία. Έτσι ψάχνουμε τη λύση της

$$\nabla^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) + \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = 0 , \quad (1.22)$$

όπου με  $\mathbf{F}$  πλέον συμβολίζουμε ένα οποιοδήποτε από τα πεδία  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}$  ή  $\mathbf{B}$ . Θεωρώντας λύση αρμονικού μονοχρωματικού κύματος της μορφής

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{F}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} \quad (1.23)$$

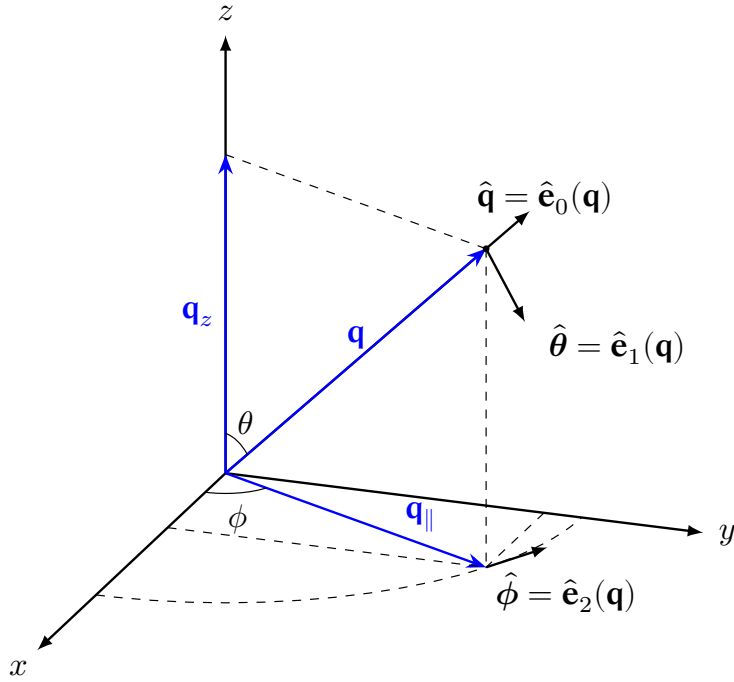
και αντικαθιστώντας την στην Εξ. (1.22), παίρνουμε

$$\nabla^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) - \omega^2 \frac{\epsilon\mu}{c^2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 . \quad (1.24)$$

Ένα πλήρες σύνολο λύσεων της κυματικής εξίσωσης αυτής είναι τα επίπεδα κύματα με κυματαριθμό  $q = \omega\sqrt{\epsilon\mu}/c$  τα οποία οδεύουν προς οποιαδήποτε κατεύθυνση

$$\mathbf{F}_{\mathbf{q}p}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_0(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} , \quad (1.25)$$

με  $\mathbf{F}_0(\mathbf{q}) = F_0(\mathbf{q}) \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{q})$ . Τα  $\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{q})$ ,  $p = 0, 1, 2$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα που καθορίζουν την πόλωση του κύματος. Το  $p = 0$ , με  $\hat{\mathbf{e}}_0(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{q}}$  αναφέρεται στη διαμήκη πόλωση ενώ τα  $p = 1, 2$  αναφέρονται στις δύο εγκάρσιες πολώσεις, για τις οποίες επιλέγουμε το πολικό και το αξιμουθιακό μοναδιαίο διάνυσμα σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων,  $\hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{q}) = \hat{\theta}$  και  $\hat{\mathbf{e}}_2(\mathbf{q}) = \hat{\phi}$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 2: Τα μοναδιαία διανύσματα της πόλωσης και οι συνιστώσες του κυματανύσματος ενός επιπέδου κύματος, σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Εναλλακτικά, οι λύσεις της Εξ. (1.24) μπορούν να αναπτυχθούν σε μια πλήρη βάση διανυσματικών σφαιρικών κυμάτων για δεδομένο  $q$  η οποία περιλαμβάνει:

- Διαμήκεις κυματοσυναρτήσεις για

$$\nabla \times \mathbf{F}_{Llm}(q, \mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{Llm}(q, \mathbf{r}) = \frac{1}{q} \nabla [f_l(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})], \quad l = 0, 1, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm l. \quad (1.26)$$

Οι διαμήκεις κυματοσυναρτήσεις με  $\hat{\mathbf{e}}_0(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{q}}$  αποτελούν λύσεις μόνο όταν  $\omega = 0$  ή  $\epsilon\mu = 0$ , επομένως δεν περιγράφουν οδεύοντα ΗΜ κύματα και είναι τετριμμένες φυσικές λύσεις, ωστόσο έχουν μαθηματική υπόσταση και για αυτό τις αναφέρουμε.

- Εγκάρσιες κυματοσυναρτήσεις για

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_{Elm}(q, \mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{Elm}(q, \mathbf{r}) = \frac{i}{q} \nabla \times f_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad l = 1, 2, \dots, \quad m = \pm 1, \dots, \pm l \quad (1.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_{Hlm}(q, \mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{Hlm}(q, \mathbf{r}) = f_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad l = 1, 2, \dots, \quad m = \pm 1, \dots, \pm l. \quad (1.28)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις συμβολίζουμε με  $f_l(qr)$  έναν οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel ( $j_l$ ) και Hankel ( $h_l^+$ ), με  $Y_{lm}$  τις σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις και με  $\mathbf{X}_{lm}$  τις διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις.

Μπορούμε πλέον να γράψουμε τη χωρική λύση ενός οποιουδήποτε εγκάρσιου κύματος που ικανοποιεί την Εξ. (1.24) ως γραμμικό συνδυασμό των εγκάρσιων κυματοσυναρτήσεων, δηλαδή

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{Elm} \mathbf{F}_{Elm}(q, \mathbf{r}) + a_{Hlm} \mathbf{F}_{Hlm}(q, \mathbf{r})], \quad (1.29)$$

όπου  $a_{Elm}$  και  $a_{Hlm}$  κατάλληλοι συντελεστές.

Αν θελήσουμε να αναπτύξουμε σε σφαιρικά κύματα ένα εγκάρσιο κύμα της μορφής (1.25) το οποίο είναι πεπερασμένο παντού στο χώρο, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μόνο τις σφαιρικές συναρτήσεις Bessel, δηλαδή  $f_l(qr) = j_l(qr)$ , ώστε το ανάπτυγμα που

θα προκύψει να είναι και αυτό πεπερασμένο παντού στο χώρο. Η πολυπολική ανάπτυξη αυτή ενός ηλεκτρικού πεδίου της μορφής  $\mathbf{E}_{qp}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ , συμβολίζοντας με τον άνω δείκτη 0 τους συντελεστές ανάπτυξής της, είναι

$$\mathbf{E}_{qp}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{Elm}^0 \mathbf{J}_{Elm}(q, \mathbf{r}) + a_{Hlm}^0 \mathbf{J}_{Hlm}(q, \mathbf{r})], \quad (1.30)$$

όπου τα  $\mathbf{J}_{Elm}(q, \mathbf{r})$  και  $\mathbf{J}_{Hlm}(q, \mathbf{r})$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{J}_{Elm}(q, \mathbf{r}) = \frac{i}{q} \nabla \times j_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (1.31)$$

$$\mathbf{J}_{Hlm}(q, \mathbf{r}) = j_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (1.32)$$

και συνδέονται μεταξύ τους μέσω των

$$\nabla \times \mathbf{J}_{Hlm}(q, \mathbf{r}) = -iq \mathbf{J}_{Elm}(q, \mathbf{r}) \quad (1.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{J}_{Elm}(q, \mathbf{r}) = iq \mathbf{J}_{Hlm}(q, \mathbf{r}). \quad (1.34)$$

Αξιοποιώντας την Εξ. (1.20.IV) και τις παραπάνω σχέσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε το χωρικό μέρος του μαγνητικού πεδίου

$$\mathbf{H}_{qp}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{Elm}^0 \mathbf{J}_{Hlm}(q, \mathbf{r}) - a_{Hlm}^0 \mathbf{J}_{Elm}(q, \mathbf{r})]. \quad (1.35)$$

Έχοντας βρει τη μορφή του αναπτύγματος, απομένει να προσδιορίσουμε τους συντελεστές  $a_{Elm}^0$  και  $a_{Hlm}^0$ . Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα  $\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{q}})$  [40] στο επίπεδο κύμα  $\mathbf{E}_{qp}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ , αυτό λαμβάνει τη μορφή

$$\mathbf{E}_{qp}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{q}) 4\pi \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{q}}), \quad (1.36)$$

η οποία θα πρέπει να είναι ισοδύναμη της (1.30). Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά και τις δύο εκφράσεις (1.30), (1.36) με  $\mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}})$  και ολοκληρώνουμε σε όλη τη στερεά γωνία. Αξιοποιώντας τις ιδιότητες (Α'.24), (Α'.28) των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών για τη μορφή (1.30) ενώ, γράφοντας το  $\mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}})$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες μέσω της σχέσης (Α'.22), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ορθοκανονικότητα των σφαιρικών αρμονικών (Α'.9) για τη μορφή (1.36). Έτσι λοιπόν με αφετηρία την (1.30) φτάνουμε στην

$$\begin{aligned} \int d\hat{\mathbf{r}} \mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{E}_{qp}(\mathbf{r}) &= \int d\hat{\mathbf{r}} \mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{Elm}^0 \mathbf{J}_{Elm}(q, \mathbf{r}) + a_{Hlm}^0 \mathbf{J}_{Hlm}(q, \mathbf{r})] \right\} \\ &= a_{Hlm}^0 j_l(qr) \end{aligned} \quad (1.37)$$

ενώ από την (1.36) φτάνουμε στην

$$\begin{aligned} \int d\hat{\mathbf{r}} \mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{E}_{qp}(\mathbf{r}) &= \int d\hat{\mathbf{r}} \mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{q}) 4\pi \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{q}}) \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{l'(l'+1)}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int d\hat{\mathbf{r}} \left\{ [\alpha_{l'}^{m'} Y_{l'm'+1}^*(\hat{\mathbf{r}}) + \alpha_{l'}^{-m'} Y_{l'm'-1}^*(\hat{\mathbf{r}})] E_{0x} \right. \\ &\quad + i[\alpha_{l'}^{m'} Y_{l'm'+1}^*(\hat{\mathbf{r}}) - \alpha_{l'}^{-m'} Y_{l'm'-1}^*(\hat{\mathbf{r}})] E_{0y} \\ &\quad \left. + m' Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}) E_{0z} \right\} i^l j_l(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{q}}) \\ &= \frac{4\pi i^l}{\sqrt{l(l+1)}} \left\{ [\alpha_l^m Y_{lm+1}^*(\hat{\mathbf{q}}) + \alpha_l^{-m} Y_{lm-1}^*(\hat{\mathbf{q}})] E_{0x} \right. \\ &\quad \left. + i[\alpha_l^m Y_{lm+1}^*(\hat{\mathbf{q}}) - \alpha_l^{-m} Y_{lm-1}^*(\hat{\mathbf{q}})] E_{0y} + m Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{q}}) E_{0z} \right\} j_l(qr), \quad (1.38) \end{aligned}$$



με  $\alpha_l^m = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}/2$ . Απαιτώντας οι (1.37) και (1.38) να είναι ίσες και αφού χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα (Α.6) καταλήγουμε στη σχέση

$$a_{Hlm}^0 = \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{\sqrt{l(l+1)}} \left\{ [\alpha_l^m Y_{l-(m+1)}(\hat{\mathbf{q}}) + \alpha_l^{-m} Y_{l-(m-1)}(\hat{\mathbf{q}})] E_{0x} \right. \\ \left. + i[\alpha_l^m Y_{l-(m+1)}(\hat{\mathbf{q}}) - \alpha_l^{-m} Y_{l-(m-1)}(\hat{\mathbf{q}})] E_{0y} - m Y_{l-m}(\hat{\mathbf{q}}) E_{0z} \right\}. \quad (1.39)$$

Για τον συντελεστή  $a_{Elm}^0$  εργαζόμαστε αναλόγως, αυτή τη φορά για το μαγνητικό πεδίο, και καταλήγουμε στη σχέση

$$a_{Elm}^0 = \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{\sqrt{l(l+1)}} \left\{ [\alpha_l^m Y_{l-(m+1)}(\hat{\mathbf{q}}) + \alpha_l^{-m} Y_{l-(m-1)}(\hat{\mathbf{q}})] (\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{E}_0)_x \right. \\ \left. + i[\alpha_l^m Y_{l-(m+1)}(\hat{\mathbf{q}}) - \alpha_l^{-m} Y_{l-(m-1)}(\hat{\mathbf{q}})] (\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{E}_0)_y - m Y_{l-m}(\hat{\mathbf{q}}) (\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{E}_0)_z \right\}. \quad (1.40)$$

### 1.3 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενα μέσα

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα γραμμικό υλικό όπως στην προηγούμενη περίπτωση, αλλά αυτή τη φορά η διηλεκτρική συνάρτηση έχει περιοδική εξάρτηση από το χρόνο, της μορφής  $\epsilon(t) = \epsilon(t+T)$ , ενώ η μαγνητική διαπερατότητα  $\mu$  παραμένει σταθερή. Οι εξισώσεις Maxwell σε αυτή την περίπτωση παίρνουν τη μορφή

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.41.I)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] \quad (1.41.II)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.41.III)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1.41.IV)$$

Συνδυάζοντας τις Εξ. (1.41.II) και (1.41.IV) με τον ίδιο τρόπο όπως στη χρονοανεξάρτητη περίπτωση, καταλήγουμε σε μια διαφορική εξίσωση στην οποία υπεισέρχεται η περιοδική, στο χρόνο, διηλεκτρική συνάρτηση. Η εξίσωση αυτή δέχεται λύσεις της μορφής

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t}\} \quad (1.42)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t}\}, \quad (1.43)$$

όπου  $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$  και  $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$  περιοδικές λύσεις Floquet. Αναπτύσσοντας τις λύσεις αυτές, αλλά και τη διηλεκτρική συνάρτηση κατά Fourier έχουμε

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{L\nu} a_{L\nu} \mathbf{J}_L(q, \mathbf{r}) e^{i\nu\Omega t} \quad (1.44)$$

$$Z_0 \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{L\nu} c_{L\nu} \mathbf{J}_L(q, \mathbf{r}) e^{i\nu\Omega t} \quad (1.45)$$

$$\epsilon(t) = \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} e^{i\nu\Omega t}, \quad (1.46)$$

όπου  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  η εμπέδηση του κενού,  $\Omega = 2\pi/T$  η κυκλική συχνότητα και  $T$  η περίοδος μεταβολής της διηλεκτρικής συνάρτησης,  $L = Plm$  με  $P = E, H$  οι δύο καταστάσεις πόλωσης,  $l = 1, 2, \dots$ ,  $m = -l, \dots, l$ ,  $\nu = -N, -N+1, \dots, N$  και  $\mathbf{J}_L(q, \mathbf{r})$  οι συναρτήσεις (1.31), (1.32). Αντικαθιστώντας τις Εξ. (1.44), (1.45) στη δεύτερη εξίσωση Maxwell (1.41.II) καταλήγουμε στην

$$a_{L\nu} \nabla \times \mathbf{J}_L(q, \mathbf{r}) - i\mu \frac{\omega - \nu\Omega}{c} c_{L\nu} \mathbf{J}_L(q, \mathbf{r}) = 0, \quad (1.47)$$

η οποία για  $P = E, H$  μας δίνει

$$q a_{Hlm\nu} = -\mu \frac{\omega - \nu\Omega}{c} c_{Elm\nu} \quad (1.48)$$

$$q a_{Elm\nu} = \mu \frac{\omega - \nu\Omega}{c} c_{Hlm\nu} . \quad (1.49)$$

Ομοίως, αντικαθιστώντας τις Εξ. (1.44), (1.45), (1.46), αυτή τη φορά στην τέταρτη εξίσωση Maxwell (1.41.IV), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{1}{Z_0} \sum_{L\nu} c_{L\nu} \mathbf{J}_L(q, \mathbf{r}) e^{i(\nu\Omega - \omega)t} &= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{\nu'} \sum_{L\nu''} \epsilon_{\nu'} a_{L\nu''} \mathbf{J}_L(q, \mathbf{r}) e^{i[(\nu' + \nu'')\Omega - \omega]t} \right] \\ \Rightarrow \sum_{L\nu} \left[ \frac{1}{Z_0} c_{L\nu} \nabla \times \mathbf{J}_L(q, \mathbf{r}) + (\omega - \nu\Omega) \sum_{\nu''} i \epsilon_0 \epsilon_{\nu - \nu''} a_{L\nu''} \mathbf{J}_L(q, \mathbf{r}) \right] &= 0 , \end{aligned} \quad (1.50)$$

υπό την απαίτηση  $\nu = \nu' + \nu''$ . Η σχέση αυτή τόσο για  $P = H$  όσο και για  $P = E$ , χρησιμοποιώντας τις Εξ. (1.33), (1.34) και (1.48), (1.49) αντίστοιχα, καταλήγει στην εξίσωση

$$\mu \left( \frac{\omega - \nu\Omega}{c} \right)^2 \sum_{\nu''} \epsilon_{\nu - \nu''} a_{L\nu''} = q^2 a_{L\nu} . \quad (1.51)$$

Η Εξ. (1.51) ισχύει για κάθε τιμή του  $L = Plm$  και μπορεί να γραφεί με μορφή πίνακα ως ένα πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων

$$\mu \begin{pmatrix} \left(\frac{\omega + N\Omega}{c}\right)^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \left(\frac{\omega - N\Omega}{c}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_0 & \dots & \epsilon_{-2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{2N} & \dots & \epsilon_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{-N} \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = q^2 \begin{pmatrix} v_{-N} \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} ,$$

το οποίο όταν λυθεί θα δώσει  $(2N + 1)$  ιδιοτιμές  $q^2$  και αντίστοιχα (αδιάστατα) ιδιοδιανύσματα  $v$ . Για την αρίθμυσή τους θα χρησιμοποιήσουμε το δείκτη  $\kappa$  με τιμές  $-N, \dots, N$  ώστε η ιδιοτιμή  $q_\kappa^2$  να αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα με στοιχεία  $v_{\nu;\kappa}$ . Έτσι μπορούμε γενικά να γράψουμε  $a_{L\nu;\kappa} = a_{L;\kappa} v_{\nu;\kappa}$  και  $c_{L\nu;\kappa} = c_{L;\kappa} v_{\nu;\kappa}$ , όπου  $a_{L;\kappa}$  και  $c_{L;\kappa}$  κατάλληλα πλάτη των συνιστωσών  $L$  της  $\kappa$ -οστής κυματικής λύσης. Αντικαθιστώντας τα πλάτη αυτά στις Εξ. (1.48) και (1.49) παίρνουμε

$$q_\kappa a_{Hlm;\kappa} = -\mu \frac{\omega - \nu\Omega}{c} c_{Elm;\kappa} \quad (1.52)$$

$$q_\kappa a_{Elm;\kappa} = \mu \frac{\omega - \nu\Omega}{c} c_{Hlm;\kappa} . \quad (1.53)$$

## 1.4 Σκέδαση από σφαίρα με περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενη διηλεκτρική συνάρτηση

Θεωρούμε ένα ομοιογενές μέσο (θα το υποδιπλώνουμε με έναν δείκτη  $h$ ), το οποίο χαρακτηρίζεται από σταθερές  $\epsilon_h$  και  $\mu_h$ , μέσα στο οποίο βρίσκεται ένα σφαιρικό σωματίδιο ακτίνας  $S$  που περιγράφεται από περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενη διηλεκτρική συνάρτηση  $\epsilon(t) = \epsilon(t + T)$  και σταθερή μαγνητική διαπερατότητα  $\mu$ . Έστω ότι πολυχρωματικό ΗΜ κύμα, με συχνότητες  $\omega_{\nu'} = \omega - \nu'\Omega$ , προσπίπτει στο σωματίδιο. Αναπτύσσοντάς το σε σφαιρικά κύματα ως προς το κέντρο του σωματιδίου, το οποίο λαμβάνουμε ως αρχή των συντεταγμένων, αυτό γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \sum_{\nu'} \mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega - \nu'\Omega)t} \right\}, & \mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) &= \sum_L a_{L\nu'}^0 \mathbf{J}_L(q_{h\nu'}, \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \sum_{\nu'} \mathbf{H}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega - \nu'\Omega)t} \right\}, & Z_0 \mathbf{H}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) &= \sum_L c_{L\nu'}^0 \mathbf{J}_L(q_{h\nu'}, \mathbf{r}) . \end{aligned} \quad (1.54)$$

Η προσπίπτουσα δέσμη, σκεδαζόμενη από τη σφαίρα, θα δημιουργήσει κύματα συχνοτήτων  $\omega_\nu = \omega - \nu\Omega$  στο εσωτερικό αλλά και στο εξωτερικό της. Τα παραγόμενα κύματα στο εσωτερικό της θα έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \sum_{\nu} \mathbf{E}_{\text{in}}^{(\nu)}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega - \nu\Omega)t} \right\}, & \mathbf{E}_{\text{in}}^{(\nu)}(\mathbf{r}) &= \sum_{\kappa} \sum_L a_{L\nu;\kappa} \mathbf{J}_L(q_\kappa, \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \sum_{\nu} \mathbf{H}_{\text{in}}^{(\nu)}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega - \nu\Omega)t} \right\}, & Z_0 \mathbf{H}_{\text{in}}^{(\nu)}(\mathbf{r}) &= \sum_{\kappa} \sum_L c_{L\nu;\kappa} \mathbf{J}_L(q_\kappa, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1.55)$$

ενώ τα σκεδαζόμενα κύματα στο εξωτερικό της θα γράφονται

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \sum_{\nu} \mathbf{E}_{\text{sc}}^{(\nu)}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega - \nu\Omega)t} \right\}, & \mathbf{E}_{\text{sc}}^{(\nu)}(\mathbf{r}) &= \sum_L a_{L\nu}^+ \mathbf{H}_L(q_{h\nu}, \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_{\text{sc}}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \sum_{\nu} \mathbf{H}_{\text{sc}}^{(\nu)}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega - \nu\Omega)t} \right\}, & Z_0 \mathbf{H}_{\text{sc}}^{(\nu)}(\mathbf{r}) &= \sum_L c_{L\nu}^+ \mathbf{H}_L(q_{h\nu}, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1.56)$$

με  $q_{h\nu} = (\omega - \nu\Omega) \sqrt{\epsilon_h \mu_h} / c$ . Τα  $\mathbf{H}_L$  δίνονται από τις σχέσεις (1.31), (1.32) με τις σφαιρικές συναρτήσεις Hankel ( $h_l^+$ ) στη θέση των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel ( $j_l$ ). Αυτό απαιτείται ώστε τα σκεδαζόμενα κύματα να έχουν ασυμπτωτική μορφή εξερχόμενων σφαιρικών κυμάτων. Το ολικό πεδίο στο περιβάλλον μέσο αποτελείται από το προσπίπτον συν το σκεδαζόμενο κύμα και περιγράφεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_h(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \sum_{\nu} \mathbf{E}_h^{(\nu)}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega - \nu\Omega)t} \right\}, & \mathbf{E}_h^{(\nu)}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\nu)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{sc}}^{(\nu)}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_h(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \sum_{\nu} \mathbf{H}_h^{(\nu)}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega - \nu\Omega)t} \right\}, & \mathbf{H}_h^{(\nu)}(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}_{\text{inc}}^{(\nu)}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_{\text{sc}}^{(\nu)}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (1.57) στη δεύτερη Εξ. Maxwell (1.41.II) προκύπτουν οι σχέσεις

$$Z_0 a_{L\nu}^0 \nabla \times \mathbf{J}_L(q_{h\nu}, \mathbf{r}) = i\mu_0 \mu_h (\omega - \nu\Omega) c_{L\nu}^0 \mathbf{J}_L(q_{h\nu}, \mathbf{r}) \quad (1.58)$$

$$Z_0 a_{L\nu}^+ \nabla \times \mathbf{H}_L(q_{h\nu}, \mathbf{r}) = i\mu_0 \mu_h (\omega - \nu\Omega) c_{L\nu}^+ \mathbf{H}_L(q_{h\nu}, \mathbf{r}), \quad (1.59)$$

οι οποίες για  $P = H, E$  μας δίνουν

$$\begin{aligned} c_{Hlm\nu}^0 &= \sqrt{\frac{\epsilon_h}{\mu_h}} a_{Elm\nu}^0, & c_{Elm\nu}^0 &= -\sqrt{\frac{\epsilon_h}{\mu_h}} a_{Hlm\nu}^0 \\ c_{Hlm\nu}^+ &= \sqrt{\frac{\epsilon_h}{\mu_h}} a_{Elm\nu}^+, & c_{Elm\nu}^+ &= -\sqrt{\frac{\epsilon_h}{\mu_h}} a_{Hlm\nu}^+. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Εφόσον πλέον έχουμε δύο μέσα, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες στη διεπιφάνειά τους  $r = S$ . Οι συνοριακές συνθήκες αυτές εκφράζονται από τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών των πεδίων  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  και δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)|_{r=S} = \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{E}_h(\mathbf{r}, t)|_{r=S} \quad (1.61.I)$$

$$[\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}^*] \cdot \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)|_{r=S} = [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}^*] \cdot \mathbf{E}_h(\mathbf{r}, t)|_{r=S} \quad (1.61.II)$$

$$\mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{H}_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)|_{r=S} = \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{H}_h(\mathbf{r}, t)|_{r=S} \quad (1.61.III)$$

$$[\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}^*] \cdot \mathbf{H}_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)|_{r=S} = [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}^*] \cdot \mathbf{H}_h(\mathbf{r}, t)|_{r=S}, \quad (1.61.IV)$$

όπου τα πεδία στο εσωτερικό και το εξωτερικό της σφαίρας είναι αυτά που ορίστηκαν παραπάνω μέσω των Εξ. (1.55) και (1.57) αντίστοιχα. Για να αξιοποιήσουμε τις ολοκληρωτικές ιδιότητες των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών (A.24)-(A.29) ολοκληρώνουμε

τις Εξ. (1.61.I)-(1.61.IV) σε όλη τη στερεά γωνία και λαμβάνουμε

$$\sum_{\kappa} a_{Hlm;\kappa} \nu_{\nu;\kappa} j_l(q_{\kappa}S) - a_{Hlm\nu}^0 j_l(q_{h\nu}S) - a_{Hlm\nu}^+ h_l^+(q_{h\nu}S) = 0 \quad (1.62)$$

$$\sum_{\kappa} a_{Elm;\kappa} \nu_{\nu;\kappa} \left. \frac{[xj_l(x)]'}{x} \right|_{q_{\kappa}S} - a_{Elm\nu}^0 \left. \frac{[xj_l(x)]'}{x} \right|_{q_{h\nu}S} - a_{Elm\nu}^+ \left. \frac{[xh_l^+(x)]'}{x} \right|_{q_{h\nu}S} = 0 \quad (1.63)$$

$$\sum_{\kappa} c_{Hlm;\kappa} \nu_{\nu;\kappa} j_l(q_{\kappa}S) - c_{Hlm\nu}^0 j_l(q_{h\nu}S) - c_{Hlm\nu}^+ h_l^+(q_{h\nu}S) = 0 \quad (1.64)$$

$$\sum_{\kappa} c_{Elm;\kappa} \nu_{\nu;\kappa} \left. \frac{[xj_l(x)]'}{x} \right|_{q_{\kappa}S} - c_{Elm\nu}^0 \left. \frac{[xj_l(x)]'}{x} \right|_{q_{h\nu}S} - c_{Elm\nu}^+ \left. \frac{[xh_l^+(x)]'}{x} \right|_{q_{h\nu}S} = 0, \quad (1.65)$$

για κάθε  $\nu = -N, -N + 1, \dots, N$ , όπου ο τόνος συμβολίζει παραγώγιση ως προς  $x$ . Οι παραπάνω εξισώσεις (1.62)-(1.65) μπορούν να ομαδοποιηθούν, για κάθε τιμή του  $l$ , σε δύο γραμμικά συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων, ένα για κάθε πόλωση  $P = H$  και  $P = E$ .

Ορίζουμε τα στοιχεία του πίνακα  $\underline{r}_{\underline{L}}$  ως τον λόγο των πλατών των συνιστωσών του παραγόμενου πεδίου στο εσωτερικό της σφαίρας προς το αντίστοιχο πλάτος του κάθε προσπίπτοντος κύματος συχνότητας  $\omega_{\nu'}$ ,

$$a_{L;\kappa} = \sum_{\nu'} r_L^{(\kappa\nu')} a_{L\nu'}^0 \quad (1.66)$$

και, παρομοίως, τα στοιχεία του πίνακα  $\underline{t}_{\underline{L}}$  ως τον λόγο των πλατών των συνιστωσών του σκεδαζόμενου πεδίου στο εξωτερικό της σφαίρας προς το αντίστοιχο πλάτος του κάθε προσπίπτοντος κύματος συχνότητας  $\omega_{\nu'}$ ,

$$a_{L\nu}^+ = \sum_{\nu'} t_L^{(\nu\nu')} a_{L\nu'}^0. \quad (1.67)$$

Αντικαθιστώντας τους πίνακες αυτούς καθώς και τις σχέσεις (1.60) στο παραπάνω σύστημα οδηγούμαστε στα εξής δύο συστήματα γραμμικών εξισώσεων, ένα για κάθε πόλωση, διάστασης  $2(2N + 1)$  το καθένα

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa} r_{Hl}^{(\kappa\nu')} \nu_{\nu;\kappa} j_l(x_{\kappa}) - \sum_{\nu''} t_{Hl}^{(\nu''\nu')} h_l^+(x_{\nu}) \delta_{\nu\nu''} - j_l(x_{\nu}) \delta_{\nu\nu'} &= 0 \\ \sum_{\kappa} r_{Hl}^{(\kappa\nu')} \frac{\mu_h}{\mu} \nu_{\nu;\kappa} \frac{x_{\kappa} [x_{\kappa} j_l(x_{\kappa})]'}{x_{\nu} x_{\kappa}} - \sum_{\nu''} t_{Hl}^{(\nu''\nu')} \frac{[x_{\nu} h_l^+(x_{\nu})]'}{x_{\nu}} \delta_{\nu\nu''} - \frac{[x_{\nu} j_l(x_{\nu})]'}{x_{\nu}} \delta_{\nu\nu'} &= 0 \end{aligned} \quad (1.68)$$

και

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa} r_{El}^{(\kappa\nu')} \nu_{\nu;\kappa} \frac{[x_{\kappa} j_l(x_{\kappa})]'}{x_{\kappa}} - \sum_{\nu''} t_{El}^{(\nu''\nu')} \frac{[x_{\nu} h_l^+(x_{\nu})]'}{x_{\nu}} \delta_{\nu\nu''} - \frac{[x_{\nu} j_l(x_{\nu})]'}{x_{\nu}} \delta_{\nu\nu'} &= 0 \\ \sum_{\kappa} r_{El}^{(\kappa\nu')} \frac{\mu_h}{\mu} \nu_{\nu;\kappa} \frac{x_{\kappa} j_l(x_{\kappa})}{x_{\nu}} - \sum_{\nu''} t_{El}^{(\nu''\nu')} h_l^+(x_{\nu}) \delta_{\nu\nu''} - j_l(x_{\nu}) \delta_{\nu\nu'} &= 0, \end{aligned} \quad (1.69)$$

με  $x_{\kappa} \equiv q_{\kappa}S$  και  $x_{\nu} \equiv q_{h\nu}S$ . Η επίλυση των συστημάτων αυτών μας δίνει, για την εκάστοτε πόλωση, τα στοιχεία των πινάκων  $\underline{r}$  και  $\underline{t}$ , οι οποίοι είναι διαγώνιοι ως προς την πόλωση και τη στροφορμή, δηλαδή έχουν τη μορφή  $t_{L\nu;L'\nu'} = t_L^{(\nu\nu')} \delta_{PP'} \delta_{ll'}$ . Τονίζουμε ότι πλέον έχουμε απαλλαγεί από το δείκτη  $m$ , καθώς κανένα μέγεθος δεν εξαρτάται από αυτόν. Γίνεται επομένως σαφές ότι οι καταστάσεις του ΗΜ πεδίου έχουν συγκεκριμένο τύπο πόλωσης, που ονομάζεται εγκάρσιος ηλεκτρικός (TE : Transverse Electric) ή εγκάρσιος μαγνητικός (TM : Transverse Magnetic), αν  $P = H$  ή  $P = E$ , αντίστοιχα, και συγκεκριμένο πολυπολικό

χαρακτήρα ( $2^l$ -πολικό), ανάλογα με την τιμή του  $l$ . Τα γραμμικά συστήματα των Εξ. (1.68) και (1.69) μπορούν επίσης να γραφούν με μορφή πίνακα ως

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_{\underline{L}} & \underline{B}_{\underline{L}} \\ \underline{a}_{\underline{L}} & \underline{b}_{\underline{L}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{r}_{\underline{L}} \\ \underline{t}_{\underline{L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{C}_{\underline{L}} \\ \underline{c}_{\underline{L}} \end{pmatrix}, \quad (1.70)$$

όπου για  $P = H$  τα στοιχεία των πινάκων είναι

$$\begin{aligned} A_{HI}^{(\nu\kappa)} &= v_{\nu;\kappa} j_l(x_\kappa), & a_{HI}^{(\nu\kappa)} &= \frac{\mu_h}{\mu} v_{\nu;\kappa} \frac{x_\kappa}{x_\nu} \frac{[x_\kappa j_l(x_\kappa)]'}{x_\kappa} \\ B_{HI}^{(\nu\nu'')} &= -h_l^+(x_\nu) \delta_{\nu\nu''}, & b_{HI}^{(\nu,\nu'')} &= -\frac{[x_\nu h_l^+(x_\nu)]'}{x_\nu} \delta_{\nu\nu''} \\ C_{HI}^{(\nu\nu')} &= j_l(x_\nu) \delta_{\nu\nu'}, & c_{HI}^{(\nu\nu')} &= \frac{[x_\nu j_l(x_\nu)]'}{x_\nu} \delta_{\nu\nu'}, \end{aligned} \quad (1.71)$$

ενώ για  $P = E$  είναι

$$\begin{aligned} A_{EI}^{(\nu\kappa)} &= v_{\nu;\kappa} \frac{[x_\kappa j_l(x_\kappa)]'}{x_\kappa}, & a_{EI}^{(\nu\kappa)} &= \frac{\mu_h}{\mu} v_{\nu;\kappa} \frac{x_\kappa}{x_\nu} j_l(x_\kappa) \\ B_{EI}^{(\nu\nu'')} &= -\frac{[x_\nu h_l^+(x_\nu)]'}{x_\nu} \delta_{\nu\nu''}, & b_{EI}^{(\nu\nu'')} &= -h_l^+(x_\nu) \delta_{\nu\nu''} \\ C_{EI}^{(\nu\nu')} &= \frac{[x_\nu j_l(x_\nu)]'}{x_\nu} \delta_{\nu\nu'}, & c_{EI}^{(\nu\nu')} &= j_l(x_\nu) \delta_{\nu\nu'}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Στην περίπτωση που το πλάτος διαμόρφωσης της διπλεκτρικής συνάρτησης είναι μηδενικό, δηλαδή  $\epsilon(t) = \epsilon$ , το σύστημα εκφυλίζεται στη στατική του μορφή με τους πίνακες σκέδασης για προσπίπτον μονοχρωματικό κύμα συχνότητας  $\omega$  ( $\nu' = 0$ ) να είναι [41]

$$t_{HI} = \left\{ \frac{j_l(x)[x_h j_l(x_h)]' \mu - j_l(x_h)[x j_l(x)]' \mu_h}{h_l^+(x_h)[x j_l(x)]' \mu_h - j_l(x)[x_h h_l^+(x_h)]' \mu} \right\} \quad (1.73)$$

$$t_{EI} = \left\{ \frac{j_l(x)[x_h j_l(x_h)]' \epsilon - j_l(x_h)[x j_l(x)]' \epsilon_h}{h_l^+(x_h)[x j_l(x)]' \epsilon_h - j_l(x)[x_h h_l^+(x_h)]' \epsilon} \right\}, \quad (1.74)$$

όπου  $x_h = q_h S = \omega S \sqrt{\epsilon_h \mu_h} / c$  και  $x = q S = \omega S \sqrt{\epsilon \mu} / c$ . Οι συντονισμοί (ιδιοκαταστάσεις) του συστήματος αυτού εμφανίζονται στους πόλους του πίνακα σκέδασης  $\underline{t}$ , δηλαδή όταν

$$\left\{ h^+(x_h)[x j_l(x)]' \mu_h - j_l(x)[x_h h_l^+(x_h)]' \mu \right\} \rightarrow 0, \quad \text{για } P = H \quad (1.75)$$

$$\left\{ h^+(x_h)[x j_l(x)]' \epsilon_h - j_l(x)[x_h h_l^+(x_h)]' \epsilon \right\} \rightarrow 0, \quad \text{για } P = E. \quad (1.76)$$

Οι τιμές των συχνοτήτων οι οποίες πραγματικά μηδενίζουν αυτούς τους παρανομαστές βρίσκονται στο μιγαδικό επίπεδο με μορφή  $w = \omega - i\gamma$ . Φυσικά το φανταστικό τους μέρος θα πρέπει να είναι αρνητικό ( $\gamma > 0$ ), ώστε το πεδίο  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}e^{-\gamma t}$  να φθίνει χρονικά, όπως απαιτείται σε ένα παθητικό σύστημα με απώλειες ακτινοβολίας ή/και απορρόφησης. Το  $\gamma$  έχει μονάδες συχνότητας και εκφράζει το αντίστροφο του χρόνου ζωής της κατάστασης συντονισμού. Έτσι, για μικρές τιμές του  $\gamma$  ο εκάστοτε συντονισμός έχει μεγάλο χρόνο ζωής και εμφανίζεται οξύς ενώ αντίθετα, για μεγάλες τιμές, ο χρόνος ζωής είναι μικρός και ο συντονισμός ευρύς.

## 1.5 Ενεργός διατομή σκέδασης

Η περιγραφή της σκέδασης από ένα σώμα γίνεται συνήθως με όρους ισχύος που σκεδάζεται από το σώμα αυτό. Η ενεργός διατομή σκέδασης περιγράφει την ισχύ που σκεδάζεται και κανονικοποιείται συνήθως στη μέση ισχύ της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, η οποία διέρχεται από επιφάνεια ίση με μια τομή του σώματος με επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση πρόσπτωσης. Η προσπίπτουσα πυκνότητα ροής ενέργειας εκφράζεται από τη συνιστώσα του διανύσματος Poynting κατά τη διεύθυνση διάδοσης της ακτινοβολίας. Η μέση τιμή του διανύσματος Poynting σε ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα  $\tau \rightarrow \infty$  είναι

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (1.77)$$

ενώ η μέση τιμή της ισχύος που διέρχεται από μια επιφάνεια  $A$  είναι

$$P = \int_A d^2r \hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (1.78)$$

Αρχικά θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέση ισχύ ενός προσπίπτοντος επιπέδου μονοχρωματικού κύματος, συχνότητας  $\omega_{\nu'}$ , που διέρχεται από την τομή σφαίρας ακτίνας  $S$  με το κάθετο επίπεδο στη διεύθυνση πρόσπτωσης, δηλαδή κύκλο ακτίνας  $S$ . Το προσπίπτον κύμα διαδίδεται κατά τη διεύθυνση  $\hat{\mathbf{q}}_{h\nu'}$  και περιγράφεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega - \nu' \Omega)t} \right\}, & \mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{q}_{h\nu'}) e^{i\mathbf{q}_{h\nu'} \cdot \mathbf{r}} \\ \mathbf{H}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \mathbf{H}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega - \nu' \Omega)t} \right\}, & \mathbf{H}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{\epsilon_h \epsilon_0}{\mu_h \mu_0}} \hat{\mathbf{q}}_{h\nu'} \times \mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{q}_{h\nu'}) e^{i\mathbf{q}_{h\nu'} \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (1.79) στην (1.77), παίρνουμε

$$\langle \mathbf{S}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{\text{inc}}^{(\nu')*}(\mathbf{r}) \right\}, \quad (1.80)$$

με βάση την οποία υπολογίζουμε τη μέση προσπίπτουσα ισχύ

$$P_{\text{inc}}^{(\nu')} = \int_A d^2r \hat{\mathbf{q}}_{h\nu'} \cdot \langle \mathbf{S}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_h \epsilon_0}{\mu_h \mu_0}} \pi S^2 |\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{q}_{h\nu'})|^2. \quad (1.81)$$

Στον υπολογισμό αυτόν χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα των εγκάρσιων κυμάτων  $\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{q}_{h\nu'}) \cdot \mathbf{q}_{h\nu'} = 0$  σε συνδυασμό με τη διανυσματική ταυτότητα  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ .

Η ισχύς της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας υπολογίζεται ακολουθώντας τα ίδια βήματα, όπου αυτή τη φορά το σκεδαζόμενο κύμα δίνεται από την Εξ. (1.56). Η μέση τιμή του διανύσματος Poynting σε αυτή την περίπτωση δίνεται από τη σχέση

$$\langle \mathbf{S}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\nu, \nu''} \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_{\text{sc}}^{(\nu)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{\text{sc}}^{(\nu'')*}(\mathbf{r}) \right\} \delta_{\nu\nu''} + \frac{1}{2} \sum_{\nu, \nu''} \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_{\text{sc}}^{(\nu)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{\text{sc}}^{(\nu'')}(\mathbf{r}) \right\} \delta_{2\omega/\Omega, \nu+\nu''}. \quad (1.82)$$

Η έκφραση αυτή αποτελείται από δύο όρους, έναν για  $\nu = \nu''$  και έναν για  $2\omega/\Omega = \nu + \nu''$ . Στις εφαρμογές που θα ακολουθήσουν έχουμε την ελευθερία να επιλέξουμε τις συχνότητες  $\omega$  και  $\Omega$ , με τέτοιον τρόπο ώστε το πηλίκό τους να μην είναι ακέραιος αριθμός και κατά συνέπεια ο δεύτερος όρος, που μπορεί να περιγράψει φαινόμενα παραμετρικής ενίσχυσης,

να μην εμφανίζεται. Είναι επίσης σημαντικό να τονισθεί ότι, παίρνοντας τη μέση τιμή του διανύσματος Poynting σε ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα  $\tau \rightarrow \infty$ , απαλλασσόμαστε από ταλαντούμενες συνεισφορές, ακόμη και όταν  $\Omega/\omega \ll 1$ . Αυτό σημαίνει ότι ο ανιχνευτής έχει μικρή διακριτική ικανότητα και δεν ξεχωρίζει χρονικές διακυμάνσεις της έντασης της ακτινοβολίας. Έτσι η μέση σκεδαζόμενη ισχύς είναι

$$\begin{aligned} P_{\text{sc}} &= \int_A d^2r \hat{\mathbf{r}} \cdot \langle S_{\text{sc}}(\mathbf{r}) \rangle = \int_A d^2r \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\nu} \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_{\text{sc}}^{(\nu)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{\text{sc}}^{(\nu)*}(\mathbf{r}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_h \epsilon_0}{\mu_h \mu_0}} \sum_{L\nu} \frac{1}{(q_{h\nu})^2} |a_{L\nu}^+|^2. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του πίνακα σκέδασης (1.67) για να περιγράψουμε τις πολυχρωματικές εξερχόμενες δέσμες σε σχέση με τη μονοχρωματική προσπίπτουσα συχνότητας  $\omega_{\nu'}$ , γράφουμε

$$P_{\text{sc}}^{(\nu')} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_h \epsilon_0}{\mu_h \mu_0}} \sum_{L\nu} \frac{1}{(q_{h\nu})^2} |t_L^{(\nu\nu')}|^2 |a_{L\nu'}^0|^2. \quad (1.84)$$

Επειδή ο σκεδαστής μας είναι ισοτροπικός, δηλαδή η σκέδαση είναι ανεξάρτητη της διεύθυνσης πρόσπτωσης, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε ότι το προσπίπτον επίπεδο κύμα είναι γραμμικά πολωμένο στον άξονα  $x$  και διαδίδεται κατά τη διεύθυνση  $z$ , δηλαδή ότι  $\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{q}_{h\nu'}) = E_0^{(\nu')} \hat{\mathbf{x}}$  και  $\hat{\mathbf{q}}_{h\nu'} = \hat{\mathbf{z}}$ . Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα των σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων  $Y_{lm}(\theta = 0, \phi) = \sqrt{(2l+1)/4\pi} \delta_{m0}$  ώστε να γράψουμε τις Εξ. (1.39), (1.40) ως

$$a_{Hlm\nu'}^0 = \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{\sqrt{l(l+1)}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} [\alpha_l^m \delta_{m-1} + \alpha_l^{-m} \delta_{m1}] E_0^{(\nu')} \quad (1.85)$$

$$a_{Eilm\nu'}^0 = i \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{\sqrt{l(l+1)}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} [\alpha_l^m \delta_{m-1} - \alpha_l^{-m} \delta_{m1}] E_0^{(\nu')}. \quad (1.86)$$

Πλέον ο υπολογισμός του αθροίσματος των  $|a_{L\nu'}^0|^2$  πάνω στα  $m$  γίνεται εύκολα δίνοντας

$$\sum_m |a_{Plm\nu'}^0|^2 = 4\pi \frac{2l+1}{l(l+1)} |E_0^{(\nu')}|^2 \sum_m [(\alpha_l^m)^2 \delta_{m-1} + (\alpha_l^{-m})^2 \delta_{m1}] = 2\pi(2l+1) |E_0^{(\nu')}|^2. \quad (1.87)$$

Κανονικοποιώντας την σκεδαζόμενη ισχύ στην προσπίπτουσα παίρνουμε την ενεργό διατομή σκέδασης

$$\sigma_{\text{sc}}^{(\nu')} = \frac{P_{\text{sc}}^{(\nu')}}{P_{\text{inc}}^{(\nu')}} = \sum_{\nu} \sum_{Pl} 2(2l+1) \frac{|t_{Pl}^{(\nu\nu')}|^2}{(x_{\nu})^2} = \sum_{\nu} \sum_{Pl} \sigma_{\text{sc};Pl}^{(\nu\nu')} = \sum_{\nu} \sigma_{\text{sc}}^{(\nu\nu')}, \quad (1.88)$$

όπου  $x_{\nu} = q_{h\nu} S$ . Η ποσότητα  $\sigma_{\text{sc}}^{(\nu\nu')}$  μπορεί να ερμηνευθεί ως η ενεργός διατομή η οποία σχετίζεται με τη μη ελαστική σκέδαση  $\nu$ -οστής τάξης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας συχνότητας  $\omega - \nu'\Omega$  με αποτέλεσμα την παραγωγή εξερχόμενου κύματος συχνότητας  $\omega - \nu\Omega$ . Κατ' αντιστοιχία, συμβολίζουμε με  $\sigma_{\text{sc};Pl}^{(\nu\nu')}$  τις επί μέρους συνιστώσες της  $\sigma_{\text{sc}}^{(\nu\nu')}$ , ανά πόλωση και στροφορμή.

Λόγω της χρονικής μεταβολής της διηλεκτρικής συνάρτησης, η ΗΜ ενέργεια δεν διατηρείται, ακόμη και απουσία απωλειών λόγω απορρόφησης από το υλικό της σφαίρας, αλλά ανταλλάσσεται μεταξύ της σφαίρας και του ΗΜ πεδίου. Η ισχύς την οποία απορροφάει η σφαίρα,  $P_{\text{abs}}$  υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως η σκεδαζόμενη ισχύς, με τη διαφορά ότι αυτή τη φορά το μοναδιαίο διάνυσμα έχει κατεύθυνση προς το κέντρο

της σφαίρας και ότι αντί των σκεδαζόμενων πεδίων χρησιμοποιούμε τα ολικά πεδία της Εξ. (1.57), οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$\sigma_{\text{abs}}^{(\nu')} = \frac{P_{\text{abs}}^{(\nu')}}{P_{\text{sc}}^{(\nu')}} = - \sum_{\nu} \sum_{Pl} 2(2l+1) \frac{1}{(x_{\nu})^2} \left[ |t_{Pl}^{(\nu\nu')}|^2 + \text{Re}\{t_{Pl}^{\nu\nu'}\} \delta_{\nu\nu'} \right]. \quad (1.89)$$

Απουσία χρονικής διαμόρφωσης, το άθροισμα ως προς  $\nu$  στις Εξ. (1.88) και (1.89) περιορίζεται στο μοναδικό όρο για  $\nu = \nu'$  και οι εξισώσεις αυτές ανάγονται στις συνήθεις μορφές τους που περιγράφουν την ελαστική σκέδαση Mie [41].



## Κεφάλαιο 2

# Σκέδαση από δισδιάστατο πλέγμα δυναμικών σφαιρών

### 2.1 Πολλαπλή σκέδαση

Θα θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα μη αλληλεπικαλυπτόμενων σκεδαστών, διατεταγμένους τυχαία σε θέσεις  $\mathbf{R}_n$ , μέσα σε ομοιογενές μέσο. Χρησιμοποιώντας τις μαθηματικές ταυτότητες [40]

$$\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{q}}) \quad (2.1)$$

$$\frac{\exp(iq|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi i q \sum_{lm} j_l(qr_<) h_l^+(qr_>) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') \quad (2.2)$$

με  $r_< = \min(r, r')$  και  $r_> = \max(r, r')$ , μπορούμε να εκφράσουμε εξερχόμενα βαθμωτά σφαιρικά κύματα, συχνότητας  $\omega_\nu = \omega - \nu\Omega$ , και κυματανύσματος  $q_{h\nu} = \omega_\nu \sqrt{\epsilon_h \mu_h} / c$  γύρω από τη θέση  $\mathbf{R}_{n'}$  ως εισερχόμενα στη θέση  $\mathbf{R}_n$ , ως

$$h_{l'}^+(q_{h\nu} r_{n'}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{r}}_{n'}) = \sum_{lm} G_{l'm';lm}(q_{h\nu}, \mathbf{R}_{nn'}) j_l(q_{h\nu} r_n) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}_n), \quad (|\mathbf{r}_n| < |\mathbf{R}_{nn'}|), \quad (2.3)$$

όπου  $\mathbf{R}_{nn'} = \mathbf{R}_n - \mathbf{R}_{n'}$ ,  $\mathbf{r}_{n'} = \mathbf{r} - \mathbf{R}_{n'}$  και  $\mathbf{r}_n = \mathbf{r} - \mathbf{R}_n$ . Οι συντελεστές  $G_{l'm';lm}(q_{h\nu}, \mathbf{R}_{nn'})$  στην παραπάνω έκφραση είναι

$$G_{lm;l'm'}(q_{h\nu}, \mathbf{R}_{nn'}) = 4\pi \sum_{l''m''} (-1)^{(l-l''-l'')/2} (-1)^{(m'+m'')} B_{lm}(l''m''; l'm') \times h_{l''}^+(q_{h\nu} R_{nn'}) Y_{l''-m''}(\hat{\mathbf{R}}_{nn'}) \quad (2.4)$$

με

$$B_{lm}(l''m''; l'm') = \int d\hat{\mathbf{r}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l''-m''}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (2.5)$$

Αντίστοιχα, για εξερχόμενα διανυσματικά σφαιρικά κύματα, γράφουμε

$$\mathbf{H}_{L'}(q_{h\nu}, \mathbf{r}_{n'}) = \sum_L \Omega_{LL'}^{nn'}(q_{h\nu}) \mathbf{J}_L(q_{h\nu}, \mathbf{r}_n), \quad (|\mathbf{r}_n| < |\mathbf{R}_{nn'}|), \quad (2.6)$$

με τα στοιχεία του πίνακα  $\Omega_{LL'}^{nn'}(q_{h\nu})$ , που για προφανείς λόγους ονομάζονται διαδότες, για  $n \neq n'$  να δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \Omega_{Hlm;Hl'm'}^{nn'}(q_{h\nu}) &= \frac{1}{\psi_l \psi_{l'}} \left[ 2\alpha_l^{-m} \alpha_{l'}^{-m'} G_{l'm'-1;l'm-1}(q_{h\nu}, \mathbf{R}_{nn'}) \right. \\ &\quad \left. + mm' G_{l'm';lm}(q_{h\nu}, \mathbf{R}_{nn'}) + 2\alpha_l^m \alpha_{l'}^{m'} G_{l'm'+1;l'm+1}(q_{h\nu}, \mathbf{R}_{nn'}) \right] \\ &= \Omega_{Elm;El'm'}^{nn'}(q_{h\nu}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{Hlm;El'm'}^{nn'}(q_{h\nu}) &= \frac{2l+1}{\psi_l\psi_{l'}} \left[ -2\alpha_{l'}^{-m'}\gamma_l^m G_{l'm'-1;l-1m-1}(q_{h\nu}, \mathbf{R}_{nn'}) \right. \\
&\quad \left. + m'\zeta_l^m G_{l'm';l-1m}(q_{h\nu}, \mathbf{R}_{nn'}) + 2\alpha_{l'}^{m'}\gamma_l^{-m} G_{l'm'+1;l-1m+1}(q_{h\nu}, \mathbf{R}_{nn'}) \right] \\
&= -\Omega_{Elm;Hl'm'}^{nn'}(q_\nu), \tag{2.8}
\end{aligned}$$

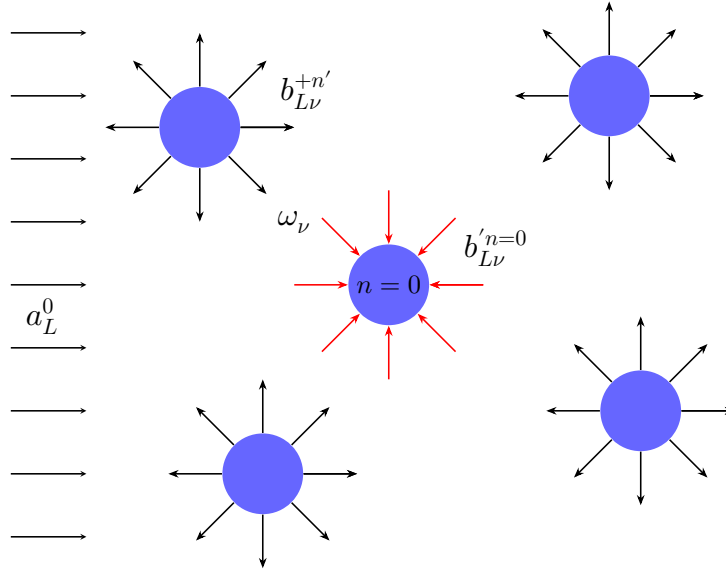
όπου

$$\begin{aligned}
\alpha_l^m &= [(l-m)(l+m+1)]^{1/2}/2, \quad \gamma_l^m = \frac{[(l+m)(l+m-1)]^{1/2}}{2[(2l-1)(2l+1)]^{1/2}} \\
\zeta_l^m &= \frac{[(l+m)(l-m)]^{1/2}}{(2l-1)(2l+1)}, \quad \psi_l = \sqrt{l(l+1)}. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Για  $n = n'$  οι διαδότες μηδενίζονται ταυτοτικά. Οι αναλυτικές αποδείξεις των παραπάνω σχέσεων υπάρχουν στη βιβλιογραφία [42–44].

Χρησιμοποιώντας τους διαδότες  $\Omega$ , μπορούμε να εκφράσουμε τους συντελεστές ανάπτυξης ενός εισερχόμενου κύματος, συχνότητας  $\omega_\nu$ , στη θέση  $\mathbf{R}_n$ ,  $\sum_{L\nu} b_{L\nu}^n(n') \mathbf{J}_L(q_{h\nu}, \mathbf{r} - \mathbf{R}_n)$ , συναρτήσει των εξερχομένων κυμάτων ίδιας συχνότητας από καθεμία από τις υπόλοιπες θέσεις  $\mathbf{R}_{n'}$ ,  $\sum_{L'\nu'} b_{L'\nu'}^{+n'} \mathbf{H}_{L'}(q_{h\nu}, \mathbf{r} - \mathbf{R}_{n'})$ , μέσω της σχέσης

$$b_{L\nu}^n(n') = \sum_{L'} \Omega_{LL'}^{nn'}(q_{h\nu}) b_{L'\nu'}^{+n'}. \tag{2.10}$$



Σχήμα 3: Το εισερχόμενο κύμα στον σκεδαστή της θέσης  $n = 0$ , ισούται με το άθροισμα του εξωτερικά προσπίπτοντος συν το άθροισμα των εξερχομένων κυμάτων από τους υπόλοιπους σκεδαστές.

Συνολικά, στη θέση  $\mathbf{R}_n$ , το ολικό προσπίπτον κύμα αποτελείται από το εξωτερικά προσπίπτον συχνότητας  $\omega_{\nu'}$  (θεωρούμε  $\nu' = 0$ ), συν το άθροισμα όλων των εξερχομένων κυμάτων συχνοτήτων  $\omega_\nu$  από τις υπόλοιπες θέσεις  $\mathbf{R}_{n'}$ . Έτσι οι συντελεστές ανάπτυξης του είναι

$$b_{L\nu}^{+n} = \sum_{L'\nu'} t_{L\nu;L'\nu'}^{(n)} \left[ a_{L'\nu'}^{0n} \delta_{\nu'0} + \sum_{n'} b_{L'\nu'}^n(n') \right], \tag{2.11}$$

όπου  $t_{L\nu;L'\nu'}^{(n)}$  ο πίνακας σκέδασης του μεμονωμένου σκεδαστή στη θέση  $\mathbf{R}_n$  και  $a_{L'\nu'}^{0n}$  οι συντελεστές του πολυπολικού αναπτύγματος του εξωτερικά προσπίπτοντος κύματος

συχνότητας  $\omega_{\nu'}$  στην ίδια θέση, που δίνονται απο τις Εξ. (1.39) και (1.40). Συνδυάζοντας τις Εξ. (2.10) και (2.11) παίρνουμε ότι για κάθε  $\nu = -N, -N + 1, \dots, N$  θα πρέπει να ισχύει

$$\sum_{n'} \sum_{L'\nu'} \left[ \delta_{nn'} \delta_{LL'} \delta_{\nu\nu'} - \sum_{L''} t_{L\nu;L''\nu'}^{(n)} \Omega_{L''L'}^{nn'}(q_{h\nu'}) \right] b_{L'\nu'}^{+n'} = \sum_{L'\nu'} t_{L\nu;L'\nu'}^{(n)} a_{L'\nu'}^{0n} \delta_{\nu'0}. \quad (2.12)$$

Στην περίπτωση που οι σκεδαστές δεν είναι τυχαία τοποθετημένοι αλλά δημιουργούν μια περιοδική δομή με διάνυσμα πλέγματος Bravais  $\mathbf{R}_n$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Bloch

$$b_{L'\nu'}^{+n'} = e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_{n'}-\mathbf{R}_n)} b_{L'\nu'}^{+n}, \quad (2.13)$$

όπου  $\mathbf{k}$  το κυματόνυσμα Bloch, και να πάρουμε

$$\sum_{L'\nu'} \left[ \delta_{LL'} \delta_{\nu\nu'} - \sum_{L''\nu''} t_{L\nu;L''\nu''} \Omega_{L''\nu'';L'\nu'}(\mathbf{k}) \right] b_{L'\nu'}^{+n} = \sum_{L'\nu'} t_{L\nu;L'\nu'}^{(n)} a_{L'\nu'}^{0n} \delta_{\nu'0}, \quad (2.14)$$

όπου

$$\Omega_{L\nu;L'\nu'}(\mathbf{k}) = \sum_{n'} \Omega_{LL'}^{nn'}(q_{h\nu}) e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_{n'})} \delta_{\nu\nu'}, \quad (2.15)$$

με τα  $\Omega_{LL'}^{nn'}(q_{h\nu})$  που δίνονται από τις Εξ. (2.7), (2.8) να συνδέονται με τα  $\Omega_{L\nu;L'\nu'}(\mathbf{k})$  μέσω του μετασχηματισμού Fourier με ένα ολοκλήρωμα εντός του όγκου  $v$  της πρώτης ζώνης Brillouin (ZB)

$$\Omega_{LL'}^{nn'}(q_{h\nu}) = \frac{1}{v} \int_{ZB} d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_{n'})} \Omega_{L\nu;L'\nu'}(\mathbf{k}). \quad (2.16)$$

Βλέπουμε ότι ο πίνακας  $\Omega$  που δίνεται από την Εξ. (2.15) είναι διαγώνιος ως προς  $\nu$  και εξαρτάται από τη γεωμετρία του επιπέδου καθώς επίσης και, μέσω του  $q_{h\nu}$ , από τη συχνότητα και τα οπτικά χαρακτηριστικά του περιβάλλοντος μέσου. Ας σημειωθεί επίσης ότι ο δείκτης  $n$  της πλεγματικής θέσης στην Εξ. (2.14) μπορεί να παραλειφθεί, διότι αναφερόμαστε σε ένα περιοδικό σύστημα όπου όλοι οι σκεδαστές είναι ίδιοι και η επιλογή της πλεγματικής θέσης  $n$  αυθαίρετη. Οι ιδιοκαταστάσεις του κρυστάλλου μπορούν να προσδιοριστούν μηδενίζοντας το εξωτερικά προσπίπτον κύμα, οπότε καταλήγουμε στη συνθήκη

$$\det \left[ \delta_{LL'} \delta_{\nu\nu'} - \sum_{L''\nu''} t_{L\nu;L''\nu''} \Omega_{L''\nu'';L'\nu'}(\mathbf{k}) \right] = 0. \quad (2.17)$$

## 2.2 Πολλαπλή σκέδαση από περιοδικό πλέγμα

Στο υπόλοιπο της εργασίας αυτής θα εξετάσουμε δομές που αναπτύσσονται κατά τη διεύθυνση  $z$  και είναι περιοδικές στο επίπεδο  $x-y$ . Ένα δισδιάστατο πλέγμα Bravais περιγράφεται από διανύσματα θέσης  $\mathbf{R}_n = \mathbf{a}_1 n_1 + \mathbf{a}_2 n_2$ , όπου  $n_1, n_2$  ακέραιοι αριθμοί και  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  τα θεμελιώδη διανύσματα πλέγματος. Ορίζουμε το αντίστοιχο αντίστροφο πλέγμα,  $\mathbf{g} = \mathbf{b}_1 m_1 + \mathbf{b}_2 m_2$ , όπου  $m_1, m_2$  ακέραιοι αριθμοί και  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  τα θεμελιώδη διανύσματα αντιστρόφου πλέγματος, που δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.18)$$

Η παράλληλη στο επίπεδο  $x-y$  συνιστώσα του κυματόνυσματος  $\mathbf{q}$  ενός προσπίπτοντος επιπέδου κύματος μπορεί πάντα να γραφεί ως

$$\mathbf{q}_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{g}', \quad (2.19)$$

όπου  $\mathbf{k}_{\parallel}$  η ανηγμένη συνιστώσα στην επιφανειακή πρώτη ζώνη Brillouin (EZB) και  $\mathbf{g}'$  κατάλληλο διάνυσμα του αντιστρόφου πλέγματος τέτοιο ώστε η διαφορά  $\mathbf{q}_{\parallel} - \mathbf{g}'$  να βρίσκεται

εντός της EZB. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (2.18) μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το  $\mathbf{g}' \cdot \mathbf{R}_n$  είναι πολλαπλάσιο του  $2\pi$  και άρα

$$\exp(i\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n) = \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n). \quad (2.20)$$

Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, πως το πλέγμα βρίσκεται στη θέση  $z = 0$ . Δεδομένου ότι το μέτρο του κυματανύσματος ενός προσπίπτοντος κύματος συχνότητας  $\omega_{\nu'}$ , είναι  $q_{h\nu'}$ , με την παράλληλη προς το  $x$ - $y$  επίπεδο συνιστώσα του να δίνεται από την Εξ. (2.19) μπορούμε να το ξαναγράψουμε ως

$$\mathbf{K}_{\mathbf{g}'\nu'}^{\pm} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{g}' \pm \sqrt{q_{h\nu'}^2 - (\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{g}')^2} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.21)$$

όπου το πρόσημο  $\pm$  αντιστοιχεί σε διάδοση του κύματος προς τα δεξιά ή τα αριστερά (θετική ή αρνητική διεύθυνση  $z$ , αντίστοιχα). Εν γένει, σε μια τέτοια γραφή, αν  $(\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{g}')^2 > q_{h\nu'}^2$ , το αντίστοιχο κύμα φθίνει εκθετικά προς τα δεξιά για θετικό πρόσημο και στα αριστερά για αρνητικό. Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.21) και επιλέγοντας ως αρχή των συντεταγμένων το κέντρο ενός οποιουδήποτε σκεδαστή, γράφουμε το προσπίπτον κύμα στη μορφή

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{\nu'} \mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega - \nu' \Omega)t} \right\}, \quad \mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) = [E_{\text{inc}}]_{\mathbf{g}'\nu'}^{s'p'} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}'\nu'}^{s'} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_{p'}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'\nu'}^{s'}), \quad (2.22)$$

όπου τα μοναδιαία διανύσματα  $\hat{\mathbf{e}}_{p'}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'\nu'}^{s'})$  αντιστοιχούν στην πολική ( $p' = 1$ , πόλωση TM) και αζιμουθιακή ( $p' = 2$ , πόλωση TE) συνιστώσα του πεδίου (Βλ. Σχ. 2), και σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων γράφονται

$$\hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'\nu'}^{s'}) = \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (2.23)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'\nu'}^{s'}) = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}, \quad (2.24)$$

με  $s = \pm$  το δείκτη που αντιστοιχεί σε πρόσπτωση από τα αριστερά ( $z < 0$ ) ή τα δεξιά ( $z > 0$ ), αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι, αν  $(\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{g}')^2 > q_{h\nu'}^2$  και η συνιστώσα  $K_{\mathbf{g}'\nu';z}^{s'}$  είναι μιγαδική, τα  $\cos \theta$  και  $\sin \theta$  στις Εξ. (2.23), (2.24) αντικαθίστανται από  $K_{\mathbf{g}'\nu';z}^{s'}/q_{h\nu'}$  και  $|\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{g}'|/q_{h\nu'}$ , αντίστοιχα, με συνέπεια το  $\hat{\mathbf{e}}_1$  να γίνεται μιγαδικό.

Για προσπίπτον κύμα της μορφής (2.22) στο πλέγμα, το σκεδαζόμενο κύμα γράφεται ως

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{\nu'} \mathbf{E}_{\text{sc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega - \nu' \Omega)t} \right\}, \quad \mathbf{E}_{\text{sc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) = \sum_n e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n} \sum_L b_{L\nu'}^{\pm} \mathbf{H}_L(q_{h\nu'}, \mathbf{r}_n), \quad (2.25)$$

και αποτελείται από ένα άθροισμα εξερχόμενων σφαιρικών κυμάτων με κέντρα τις θέσεις των σκεδαστών  $\mathbf{R}_n$ . Τα αθροιζόμενα αυτά κύματα ως προς τις θέσεις διαφέρουν από αυτό που προέρχεται από την αρχή των αξόνων  $\mathbf{R}_n = 0$ , μόνο κατά τον φασικό παράγοντα  $\exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n)$ , εξαιτίας της περιοδικότητας του πλέγματος.

Ο συντελεστής  $b_{L\nu'}^{\pm}$ , περιγράφει τη  $\nu$ -οστής τάξης παραγόμενη δέσμη από τον σκεδαστή στην αρχή των αξόνων, εξαιτίας του ολικά προσπίπτοντος κύματος σε αυτόν, το οποίο αποτελείται από το εξωτερικά προσπίπτον κύμα συν το άθροισμα των σκεδαζόμενων κυμάτων από τους υπόλοιπους σκεδαστές του πλέγματος. Για να απομονώσουμε τη συνεισφορά των υπόλοιπων σκεδαστών αυτών, αφαιρούμε από την Εξ. (2.25) τον όρο που αντιστοιχεί στο  $\mathbf{R}_n = 0$  και αναπτύσσοντας το πεδίο που προκύπτει σε σφαιρικά κύματα με κέντρο την αρχή των αξόνων, παίρνουμε

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}^{(\nu')}(\mathbf{r}) = \sum_L b'_{L\nu'} \mathbf{J}_L(q_{h\nu'}, \mathbf{r}) \quad (2.26)$$

με

$$b'_{L\nu} = \sum_{L'\nu'} \Omega_{L\nu;L'\nu'}(\mathbf{k}_{\parallel}) b_{L'\nu'}^+ . \quad (2.27)$$

Τα στοιχεία  $\Omega_{L\nu;L'\nu'}(\mathbf{k}_{\parallel})$  της Εξ. (2.27) είναι ίδια με τα  $\Omega_{L\nu;L'\nu'}(\mathbf{k})$  της Εξ. (2.15) για  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\parallel}$  που συνδέονται με τα  $\Omega_{LL'}^{nn'}(q_{h\nu})$  μέσω ολοκλήρωσης στην ΕΖΒ λόγω της διδιάστατης περιοδικότητας του πλέγματος. Ορίζοντας

$$Z_{lm}^{l'm'}(q_{h\nu}; \mathbf{k}_{\parallel}) \equiv \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n) G_{lm;l'm'}(q_{h\nu}; -\mathbf{R}_n) , \quad (2.28)$$

ως το μετασχηματισμό Fourier των  $G_{lm;l'm'}(q_{h\nu}; -\mathbf{R}_n)$  (Εξ. (2.4) με  $\mathbf{R}_{nn'} \rightarrow -\mathbf{R}_n$ ), και χρησιμοποιώντας τις Εξ. (2.7), (2.8) μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία  $\Omega_{L\nu;L'\nu'}(\mathbf{k}_{\parallel})$  να είναι

$$\begin{aligned} \Omega_{Hl m\nu;Hl' m'\nu'}(\mathbf{k}_{\parallel}) &= \frac{1}{\psi_l \psi_{l'}} \left[ 2\alpha_l^{-m} \alpha_{l'}^{-m'} Z_{lm-1}^{l'm'-1}(q_{h\nu}; \mathbf{k}_{\parallel}) \right. \\ &\quad \left. + mm' Z_{l'm}^{l'm'}(q_{h\nu}; \mathbf{k}_{\parallel}) + 2\alpha_l^m \alpha_{l'}^{m'} Z_{l'm'+1}^{l'm'+1}(q_{h\nu}; \mathbf{k}_{\parallel}) \right] \\ &= \Omega_{El m\nu;El' m'\nu'}(\mathbf{k}_{\parallel}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{Hl m\nu;El' m'\nu'}(\mathbf{k}_{\parallel}) &= \frac{2l+1}{\psi_l \psi_{l'}} \left[ -2\alpha_{l'}^{-m'} \gamma_l^m Z_{l'm'-1}^{l-1m-1}(q_{h\nu}; \mathbf{k}_{\parallel}) \right. \\ &\quad \left. + m' \zeta_l^m Z_{l'm'}^{l-1m}(q_{h\nu}; \mathbf{k}_{\parallel}) + 2\alpha_{l'}^{m'} \gamma_l^{-m} Z_{l'm'+1}^{l-1m+1}(q_{h\nu}; \mathbf{k}_{\parallel}) \right] \\ &= -\Omega_{El m\nu;Hl' m'\nu'}(\mathbf{k}_{\parallel}) , \end{aligned} \quad (2.30)$$

με τα  $\alpha_l^m, \gamma_l^m, \zeta_l^m$  και  $\psi_l$  να δίνονται από την Εξ. (2.9). Τα  $\Omega$  στις Εξ. (2.29) και (2.30) προσδιορίζονται μέσω του πίνακα  $Z$ , ο οποίος είναι γνωστός από τη θεωρία περίθλασης ηλεκτρονίων χαμηλής ενέργειας, για τον αριθμητικό υπολογισμό του οποίου χρησιμοποιούνται συνήθως τεχνικές Ewald [45, 46].

Οι συντελεστές  $b_{L\nu}^+$  της Εξ. (2.25) λοιπόν, ακολουθώντας την περιγραφή που δώσαμε παραπάνω, γράφονται ως

$$b_{L\nu}^+ = \sum_{L'\nu'} t_{L\nu;L'\nu'} \left[ a_{L'\nu'}^0 \delta_{\nu'0} + b_{L'\nu'}' \right] , \quad (2.31)$$

όπου  $a_{L'\nu'}^0$  οι συντελεστές ανάπτυξης του εξωτερικά προσπίπτοντος κύματος και  $b_{L'\nu'}'$  οι συντελεστές ανάπτυξης στην Εξ. (2.26). Αντικαθιστώντας την (2.27) στην (2.31), καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\sum_{L'\nu'} \left[ \delta_{LL'} \delta_{\nu\nu'} - \sum_{L''\nu''} t_{L\nu;L''\nu''} \Omega_{L''\nu'';L'\nu'}(\mathbf{k}_{\parallel}) \right] b_{L'\nu'}^+ = \sum_{L'\nu'} t_{L\nu;L'\nu'} a_{L'\nu'}^0 \delta_{\nu'0} , \quad (2.32)$$

που είναι αντίστοιχη της Εξ. (2.14), και μέσω αυτής είναι δυνατός ο προσδιορισμός των συντελεστών  $b_{L\nu}^+$  του σκεδαζόμενου κύματος συναρτήσει των συντελεστών  $a_{L'\nu'}^0$  του προσπίπτοντος.

Προκειμένου να περιγράψουμε τη σκέδαση ενός προσπίπτοντος επίπεδου κύματος από την περιοδική διάταξη σκεδαστών, χρησιμοποιούμε μια βάση επίπεδων κυμάτων για το προσπίπτον και το τελικά εξερχόμενο πεδίο, ενώ για την πολλαπλή σκέδαση εντός της δομής εξυπηρετεί η ανάπτυξη σε βάση σφαιρικών κυμάτων. Ορίζουμε λοιπόν τον πίνακα  $\underline{A}$ , ο οποίος αλλάζει τη βάση του προσπίπτοντος κύματος από επίπεδα σε σφαιρικά κύματα

$$a_{L\nu}^0 = \sum_{\nu'} A_{L\nu}^{s'p'g'\nu'} [E_{\text{inc}}]_{g'\nu'}^{s'p'} . \quad (2.33)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την απόδειξη των σχέσεων (1.39) και (1.40), αντικαθιστώντας την (2.33) στην (2.22) παίρνουμε

$$\begin{aligned} A_{Hlm\nu'}^{spg\nu} &= 4\pi i^l (-1)^{m+1} \mathbf{X}_{l-m}(\widehat{\mathbf{K}}_{\mathbf{g}\nu}^s) \cdot \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{K}_{\mathbf{g}\nu}^s) \delta_{\nu\nu'} \\ A_{Elm\nu'}^{spg\nu} &= 4\pi i^l (-1)^{m+1} [\mathbf{X}_{l-m}(\widehat{\mathbf{K}}_{\mathbf{g}\nu}^s) \times \widehat{\mathbf{K}}_{\mathbf{g}\nu}^s] \cdot \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{K}_{\mathbf{g}\nu}^s) \delta_{\nu\nu'} . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Λόγω της γραμμικότητας των Εξ. (2.32), μπορούμε να γράψουμε και τους συντελεστές του σκεδαζόμενου κύματος  $b_{L\nu}^+$  με τον ίδιο τρόπο

$$b_{L\nu}^+ = \sum_{\nu'} B_{L\nu}^{s'p'g'\nu'} [E_{\text{inc}}]_{\mathbf{g}'\nu'}^{s'p'} , \quad (2.35)$$

με αποτέλεσμα το σύστημα των Εξ. (2.32) να πάρει την μορφή

$$\sum_{L'\nu'} \left[ \delta_{LL'} \delta_{\nu\nu'} - \sum_{L''\nu''} t_{L\nu;L''\nu''} \Omega_{L''\nu'';L'\nu'}(\mathbf{k}_{\parallel}) \right] B_{L'\nu'}^{s'p'g'\nu'} = \sum_{L'\nu'} t_{L\nu;L'\nu'} A_{L'\nu'}^{s'p'g'\nu'} \delta_{\nu\nu'} . \quad (2.36)$$

Θυμίζουμε πως οι παράμετροι  $s'$ ,  $p'$ ,  $\mathbf{g}'$  και  $\nu'$  χαρακτηρίζουν το προσπίπτον κύμα. Το γραμμικό σύστημα των Εξ. (2.36) έχει άπειρο πλήθος εξισώσεων και λύνεται εισάγοντας δύο μέγιστες τιμές αποκοπής  $l_{\max}$  και  $N_{\max}$ , για τα αναπτύγματα των σφαιρικών κυμάτων και των μη ελαστικών δεσμών, αντίστοιχα. Έτσι η διάσταση του συνολικού συστήματος γίνεται  $2l_{\max}(l_{\max} + 2)(2N_{\max} + 1)$ . Η Εξ. (2.36) σε μορφή πίνακα γράφεται

$$\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{A}} , \quad (2.37)$$

όπου  $\underline{\mathbf{T}} = (\underline{\mathbf{t}}^{-1} - \underline{\Omega})^{-1}$  ο πίνακας που περιγράφει τη συλλογική σκέδαση από ολόκληρο το πλέγμα. Οι ιδιοκαταστάσεις του πλέγματος μπορούν να προσδιοριστούν μηδενίζοντας το εξωτερικά προσπίπτον κύμα οπότε, από την Εξ. (2.37) οδηγούμαστε στη συνθήκη  $\det[\underline{\mathbf{t}}^{-1} - \underline{\Omega}] = 0$ .

Το σκεδαζόμενο κύμα της Εξ. (2.25) μπορεί να γραφεί ως άθροισμα επιπέδων κυμάτων, στη μορφή

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}^s(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{\nu} \mathbf{E}_{\text{sc}}^{s(\nu)}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega - \nu\Omega)t} \right\}, \quad \mathbf{E}_{\text{sc}}^{s(\nu)}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}p} [E_{\text{sc}}]_{\mathbf{g}\nu}^{sp} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}\nu}^s \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{K}_{\mathbf{g}\nu}^s) , \quad (2.38)$$

με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$\sum_n \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n) h_l^+(q_{h\nu} r_n) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}_n) = \sum_{\mathbf{g}} \frac{2\pi(-i)^l}{q_{h\nu} A_0 K_{\mathbf{g}\nu; z}^+} Y_{lm}(\widehat{\mathbf{K}}_{\mathbf{g}\nu}^s) \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}\nu}^s \cdot \mathbf{r}) , \quad (2.39)$$

όπου  $s = +(-)$  για  $z > 0$  ( $z < 0$ ) και  $A_0 = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|$  η επιφάνεια της θεμελιώδους κυψελίδας του πλέγματος. Ας σημειωθεί ότι, τα κυματανύσματα  $\mathbf{K}_{\mathbf{g}\nu}^s$  της Εξ. (2.38) έχουν ίδια συχνότητα  $\omega_{\nu}$  και ίδιο  $\mathbf{k}_{\parallel}$ , το οποίο επίσης είναι κοινό με αυτό του προσπίπτοντος κύματος, λόγω της περιοδικότητας του πλέγματος. Αντιστοιχούν όμως σε περιθλώμενες δέσμες επιπέδων κυμάτων διαφορετικών  $\mathbf{g}$ . Με αυτόν τον τρόπο, το σκεδαζόμενο κύμα εκφράζεται ως επαλληλία περιθλώμενων δέσμεων από τις οποίες μόνο αυτές που αντιστοιχούν σε πραγματικό  $K_{\mathbf{g}\nu; z}^s$  περιγράφουν οδεύοντα κύματα. Οι συντελεστές  $[E_{\text{sc}}]_{\mathbf{g}\nu}^{sp}$  της Εξ. (2.38) δίνονται από τη σχέση

$$[E_{\text{sc}}]_{\mathbf{g}\nu}^{sp} = \sum_{L\nu'} \Delta_{L\nu'}^{spg\nu}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}\nu}^s) a_{L\nu'}^+ , \quad (2.40)$$

όπου μέσω των ταυτοτήτων (2.39) και (Α.22) τα στοιχεία του πίνακα  $\underline{\Delta}$  προκύπτουν να είναι

$$\begin{aligned} \Delta_{Hlm\nu'}^{spg\nu} &= \frac{2\pi(-i)^l}{q_{h\nu} A_0 K_{\mathbf{g}\nu; z}^+} \mathbf{X}_{lm}(\widehat{\mathbf{K}}_{\mathbf{g}\nu}^s) \cdot \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{K}_{\mathbf{g}\nu}^s) \delta_{\nu\nu'} \\ \Delta_{Elm\nu'}^{spg\nu} &= \frac{2\pi(-i)^l}{q_{h\nu} A_0 K_{\mathbf{g}\nu; z}^+} [\mathbf{X}_{lm}(\widehat{\mathbf{K}}_{\mathbf{g}\nu}^s) \times \widehat{\mathbf{K}}_{\mathbf{g}\nu}^s] \cdot \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{K}_{\mathbf{g}\nu}^s) \delta_{\nu\nu'} . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ας υποθέσουμε ότι ένα επίπεδο κύμα της μορφής (2.22) προσπίπτει στο πλέγμα από τα αριστερά. Τότε, το πλάτος της  $\nu$ -οστής δέσμης του διερχόμενου κύματος (προσπίπτον συν σκεδαζόμενο) στα δεξιά του πλέγματος θα δίνεται από την έκφραση

$$\mathbf{E}_{\text{tr}}^{+(\nu)}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}^p} [E_{\text{tr}}]_{\mathbf{g}^p}^{+p} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}^p}^+ \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{K}_{\mathbf{g}^p}^+), \quad z > 0, \quad (2.42)$$

όπου

$$[E_{\text{tr}}]_{\mathbf{g}^p}^{+p} = [E_{\text{inc}}]_{\mathbf{g}'^p}^{+p'} \delta_{\nu\nu'} \delta_{pp'} \delta_{\mathbf{g}\mathbf{g}'} + [E_{\text{sc}}]_{\mathbf{g}^p}^{+p} = S_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^{++} [E_{\text{inc}}]_{\mathbf{g}'^p}^{+p'}, \quad (2.43)$$

ενώ του ανακλώμενου από την

$$\mathbf{E}_{\text{rf}}^{-(\nu)}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}^p} [E_{\text{rf}}]_{\mathbf{g}^p}^{-p} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}^p}^- \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{K}_{\mathbf{g}^p}^-), \quad z < 0, \quad (2.44)$$

όπου

$$[E_{\text{rf}}]_{\mathbf{g}^p}^{-p} = [E_{\text{sc}}]_{\mathbf{g}^p}^{-p} = S_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^{-+} [E_{\text{inc}}]_{\mathbf{g}'^p}^{+p'}. \quad (2.45)$$

Οι συντελεστές  $S_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^{++}$  και  $S_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^{-+}$  ορίζουν τους πίνακες διέλευσης και ανάκλασης για προσπίπτον επίπεδο κύμα από τα αριστερά. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να ορίσουμε τους αντίστοιχους πίνακες για κύμα που προσπίπτει από τα δεξιά οπότε στη γενική περίπτωση έχουμε

$$S_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^{ss'} = \delta_{ss'} \delta_{pp'} \delta_{\mathbf{g}\mathbf{g}'} \delta_{\nu\nu'} + \sum_{L''\nu''} \sum_{L'''\nu'''} \Delta_{L''\nu''}^{sp\mathbf{g}\nu} T_{L''\nu''; L'''\nu'''} A_{L''\nu''}^{s'p'\mathbf{g}'\nu'}, \quad (2.46)$$

ή σε συμπαγή μορφή πινάκων

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{T}} \underline{\underline{A}}, \quad (2.47)$$

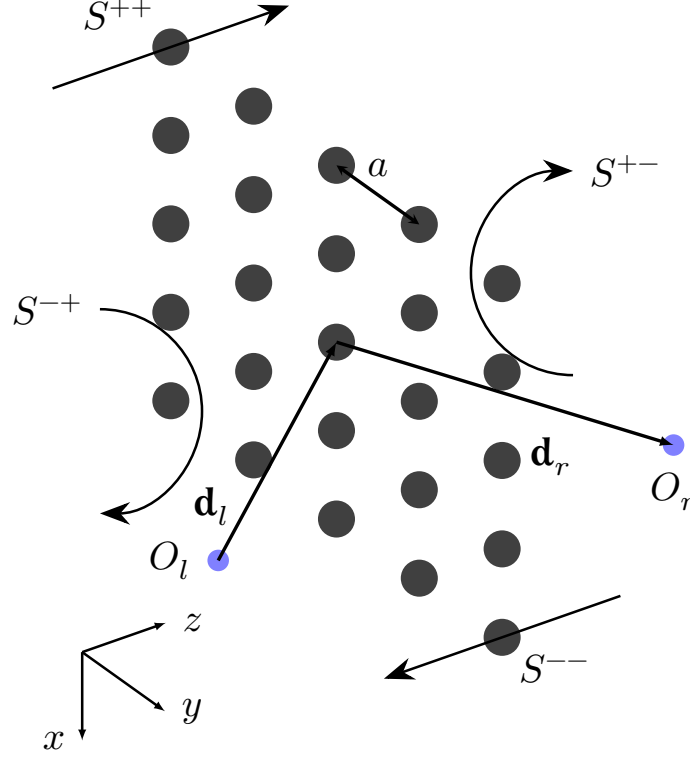
όπου  $\underline{\underline{I}}$  ο μοναδιαίος πίνακας,  $\underline{\underline{T}}$  ο τετραγωνικός πίνακας που περιγράφει το σκεδαζόμενο σε σχέση με το προσπίπτον πεδίο στην αναπαράσταση σφαιρικών κυμάτων και  $\underline{\underline{A}}$ ,  $\underline{\underline{\Delta}}$ , μη τετραγωνικοί πίνακες κατάλληλων διαστάσεων που αλλάζουν τη βάση του προσπίπτοντος κύματος από επίπεδα σε σφαιρικά κύματα και του σκεδαζόμενου από σφαιρικά σε επίπεδα, αντίστοιχα.

Το κύριο χαρακτηριστικό της μεθόδου στρωματικής πολλαπλής σκέδασης είναι η στρωματική οικοδόμηση κατά τη διεύθυνση  $z$  των δομών που περιγράφει. Μια τέτοια δομή μπορεί να αποτελείται από διάφορα στοιχεία όπως επίπεδα σκεδαστών σε ομοιογενές περιβάλλον μέσο, επίπεδες διεπιφάνειες μεταξύ διαφορετικών ομοιογενών μέσων, ομοιογενή πλακίδια και άλλα. Το καθένα από τα δομικά στοιχεία αυτά χαρακτηρίζεται από τον δικό του πίνακα σκέδασης, οι οποίοι αν συνδιαστούν κατάλληλα μπορούν να περιγράψουν τη σκέδαση από ολόκληρη τη δομή. Για αυτό είναι βολικό να εκφράσουμε τα επίπεδα κύματα στα αριστερά (δεξιά) του κάθε στοιχείου ως προς κάποιο αυθαίρετο σημείο  $O_l$  ( $O_r$ ) που είναι μετατοπισμένο κατά  $-\mathbf{d}_l$  ( $\mathbf{d}_r$ ) από το κέντρο του στοιχείου και κατά  $\mathbf{A}_l$  ( $\mathbf{A}_r$ ) από την αρχή των αξόνων όπως φαίνεται στο Σχ. 4. Έτσι, η χωρική συνιστώσα ενός κύματος στα αριστερά του επιπέδου μπορεί να πάρει τη μορφή  $\sum_{\mathbf{g}^p} [E]_{\mathbf{g}^p}^{sp} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}^p}^s \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{A}_l]) \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{K}_{\mathbf{g}^p}^s)$  ενώ, ένα στα δεξιά του επιπέδου, τη μορφή  $\sum_{\mathbf{g}^p} [E]_{\mathbf{g}^p}^{sp} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}^p}^s \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{A}_r]) \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{K}_{\mathbf{g}^p}^s)$ .

Οι πίνακες που συνδέουν το πλάτος του προσπίπτοντος με τα πλάτη του ανακλώμενου και του διερχόμενου κύματος, όταν αυτά έχουν εκφραστεί ως προς τα σημεία αναφοράς  $O$ , προκύπτουν αβίαστα από τους αντίστοιχους πίνακες  $\underline{\underline{S}}$  της Εξ. (2.46). Συμβολίζοντας τους νέους αυτούς πίνακες με  $Q$  γράφουμε

$$\begin{aligned} Q_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^I &= S_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^{++} \exp [i(\mathbf{K}_{\mathbf{g}^p}^+ \cdot \mathbf{d}_r + \mathbf{K}_{\mathbf{g}'^p}^+ \cdot \mathbf{d}_l)] \\ Q_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^{II} &= S_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^{+-} \exp [i(\mathbf{K}_{\mathbf{g}^p}^+ \cdot \mathbf{d}_r - \mathbf{K}_{\mathbf{g}'^p}^- \cdot \mathbf{d}_r)] \\ Q_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^{III} &= S_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^{-+} \exp [-i(\mathbf{K}_{\mathbf{g}^p}^- \cdot \mathbf{d}_l - \mathbf{K}_{\mathbf{g}'^p}^+ \cdot \mathbf{d}_l)] \\ Q_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^{IV} &= S_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^{--} \exp [-i(\mathbf{K}_{\mathbf{g}^p}^- \cdot \mathbf{d}_l + \mathbf{K}_{\mathbf{g}'^p}^- \cdot \mathbf{d}_r)]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Οι πίνακες  $\underline{\underline{Q}}$  έχουν την ίδια φυσική σημασία με τους αντίστοιχους  $\underline{\underline{S}}$  από τους οποίους προέρχονται. Για τον υπολογισμό των  $\underline{\underline{Q}}$  κρατάμε τα  $g_{\max}$  σε πλήθος διανύσματα  $\mathbf{g}$  με το μικρότερο μέτρο και αποκόπτουμε τις παραγόμενες δέσμες σε μια μέγιστη τιμή  $N_{\max}$ , με αποτέλεσμα οι πίνακες να αποκτούν διάσταση  $2g_{\max}(2N_{\max} + 1) \times 2g_{\max}(2N_{\max} + 1)$ .



Σχήμα 4: Πίνακες ανάκλασης και διέλευσης για ένα πλέγμα σκεδαστών καθώς και τα αυθαίρετα σημεία αναφοράς  $O_l$ ,  $O_r$ , σε θέσεις  $-\mathbf{d}_l$  και  $\mathbf{d}_r$  από το κέντρο του πλέγματος.

### 2.3 Σκέδαση από ομοιογενές πλακίδιο

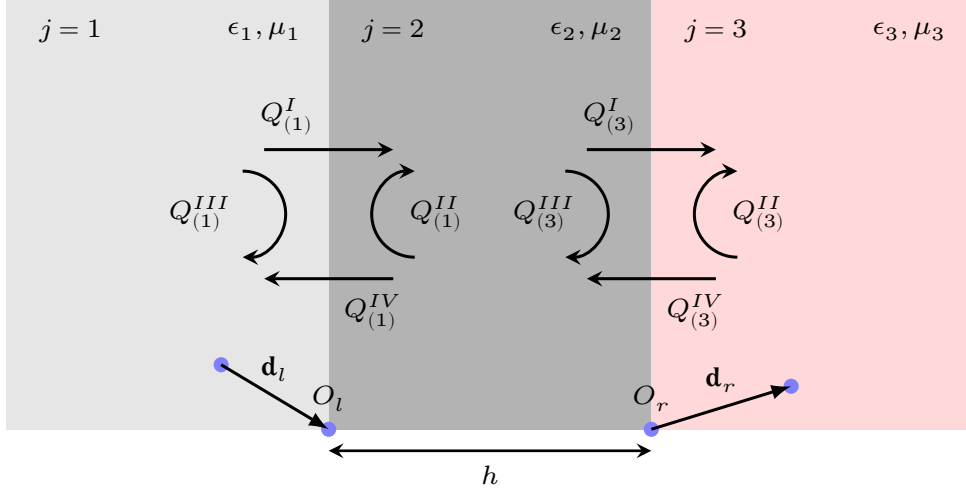
Οι περισσότερες δομές συνήθως υλοποιούνται πάνω σε κάποιο υπόστρωμα. Είναι λοιπόν χρήσιμο, η μέθοδος στρωματικής πολλαπλής σκέδασης να μπορεί να περιγράψει, εκτός από περιοδικές δομές, και ομοιογενή πλακίδια ή ημιάπειρα υποστρώματα ως στοιχεία μιας πιο σύνθετης δομής.

Έστω ένα ομοιογενές πλακίδιο, που συμβολίζεται ως μέσο  $j = 2$ , πάχους  $h$ , κάθετα στον άξονα  $z$ , το οποίο βρίσκεται μεταξύ δύο διαφορετικών μέσων,  $j = 1$  στα αριστερά του και  $j = 3$  στα δεξιά του, όπως φαίνεται στο Σχ. 5, με σχετική διηλεκτρική συνάρτηση  $\epsilon_j$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_j$  το καθένα. Λόγω της συμμετρίας μεταφοράς παράλληλα στις επιφάνειες, το κυμαάνυσμα στο μέσο  $j$  γράφεται ως

$$\mathbf{q}_j^\pm = \mathbf{q}_\parallel \pm \sqrt{(\omega/c)^2 \epsilon_j \mu_j - \mathbf{q}_\parallel^2} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.49)$$

με τον άνω δείκτη  $+(-)$ , να περιγράφει διαδιδόμενο κύμα προς τα δεξιά (αριστερά) κατά μήκος της διεύθυνσης  $z$  εάν  $(\omega/c)^2 \epsilon_j \mu_j > \mathbf{q}_\parallel^2$  και φθίνον εάν  $(\omega/c)^2 \epsilon_j \mu_j < \mathbf{q}_\parallel^2$ . Επιλέγουμε τα κέντρα ως προς τα οποία αναπτύσσουμε τα κύματα να είναι το  $\mathbf{A}_1 = (0, 0, 0)$ , για τα κύματα αριστερά του πλακιδίου και το  $\mathbf{A}_3 = (0, 0, h)$  για τα κύματα δεξιά του. Σημειώνουμε ότι μια διεπιφάνεια μεταξύ δύο διαφορετικών ημιάπειρων μέσων μπορεί να περιγραφεί ως ειδική περίπτωση πλακιδίου μηδενικού πάχους με  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_3 = (0, 0, 0)$ .





Σχήμα 5: Πίνακες ανάκλασης και διέλευσης ομοιογενούς πλακιδίου μεταξύ δύο μέσων, εκφρασμένοι ως προς τα σημεία αναφοράς  $\mathbf{A}_1 = (0, 0, 0)$  και  $\mathbf{A}_3 = (0, 0, h)$ .

Το ηλεκτρικό πεδίο που αντιστοιχεί σε ένα προσπίπτον κύμα συχνότητας  $\omega$ , βάση όσων είπαμε στο προηγούμενο εδάφιο, είναι

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = [E_{\text{inc}}]_{p'}^{s'} \exp(i\mathbf{q}_j^+ \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{A}_j]) \hat{\mathbf{e}}_{p'}, \quad (2.50)$$

με  $s' = +$ ,  $j = 1$  να αντιστοιχεί σε πρόσπτωση από τα αριστερά, και  $s' = -$ ,  $j = 3$  από τα δεξιά. Αντίστοιχα το διερχόμενο κύμα γράφεται

$$\mathbf{E}_{\text{tr}}(\mathbf{r}) = [E_{\text{tr}}]_p^s \exp(i\mathbf{q}_j^+ \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{A}_j]) \hat{\mathbf{e}}_p, \quad (2.51)$$

με  $s = +$ ,  $j = 3$  να αντιστοιχεί σε πρόσπτωση από τα αριστερά, και  $s = -$ ,  $j = 1$  από τα δεξιά. Με τον ίδιο τρόπο γράφουμε και το ανακλώμενο κύμα

$$\mathbf{E}_{\text{rf}}(\mathbf{r}) = [E_{\text{rf}}]_p^s \exp(i\mathbf{q}_j^+ \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{A}_j]) \hat{\mathbf{e}}_p, \quad (2.52)$$

με  $s = -$ ,  $j = 1$  αυτή τη φορά να αντιστοιχεί σε πρόσπτωση από τα αριστερά και  $s = +$ ,  $j = 3$  από τα δεξιά. Τα πλάτη των κυμάτων αυτών συνδέονται μεταξύ τους μέσω των εξισώσεων του Fresnel [37]

$$\begin{aligned} [E_{\text{tr}}]_p^+ &= N_p^{++} \delta_{pp'} [E_{\text{inc}}]_{p'}^+ & [E_{\text{tr}}]_p^- &= N_p^{--} \delta_{pp'} [E_{\text{inc}}]_{p'}^- \\ [E_{\text{rf}}]_p^- &= N_p^{-+} \delta_{pp'} [E_{\text{inc}}]_{p'}^+ & [E_{\text{rf}}]_p^+ &= N_p^{+-} \delta_{pp'} [E_{\text{inc}}]_{p'}^-, \end{aligned} \quad (2.53)$$

με τους συντελεστές  $N_p^{ss'}$ , να δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} N_p^{++} &= \frac{t_{23(p)} t_{12(p)} \exp(iq_{2,z} h)}{1 - r_{21(p)} r_{23(p)} \exp(iq_{2,z} h)} \\ N_p^{+-} &= r_{32(p)} + \frac{t_{23(p)} r_{21(p)} t_{32(p)} \exp(iq_{2,z} h)}{1 - r_{21(p)} r_{23(p)} \exp(iq_{2,z} h)} \\ N_p^{-+} &= r_{12(p)} + \frac{t_{21(p)} r_{23(p)} t_{12(p)} \exp(iq_{2,z} h)}{1 - r_{21(p)} r_{23(p)} \exp(iq_{2,z} h)} \\ N_p^{--} &= \frac{t_{21(p)} t_{32(p)} \exp(iq_{2,z} h)}{1 - r_{21(p)} r_{23(p)} \exp(iq_{2,z} h)}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

όπου το  $p = 1, 2$  αντιστοιχεί σε πόλωση TM, TE, αντίστοιχα, και

$$\begin{aligned} t_{jj'(1)} &= \frac{2\sqrt{\epsilon_j \epsilon_{j'}} \sqrt{\frac{\mu_{j'}}{\mu_j}} q_{j;z}}{\epsilon_{j'} q_{j;z} + \epsilon_j q_{j';z}}, & t_{jj'(2)} &= \frac{2\mu_{j'} q_{j;z}}{\mu_{j'} q_{j;z} + \mu_j q_{j';z}} \\ r_{jj'(1)} &= \frac{\epsilon_{j'} q_{j;z} - \epsilon_j q_{j';z}}{\epsilon_{j'} q_{j;z} + \epsilon_j q_{j';z}}, & r_{jj'(2)} &= \frac{\mu_{j'} q_{j;z} - \mu_j q_{j';z}}{\mu_{j'} q_{j;z} + \mu_j q_{j';z}}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Για την περιγραφή συνθετοτέρων δομών όπου ομοιογενή πλακίδια συνδιάζονται με πλέγματα σκεδαστών, είναι βολικό να γράψουμε την παράλληλη συνιστώσα του κυματανύσματος στη μορφή  $\mathbf{q}_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{g}$ , όπου  $\mathbf{g}$  ένα διάνυσμα αντιστρόφου πλέγματος της δισδιάστατης περιοδικής διάταξης. Εκφράζοντας και πάλι τα κύματα στα αριστερά (δεξιά) του πλακιδίου ως προς ένα σημείο  $O_l$  ( $O_r$ ) που είναι μετατοπισμένο κατά  $-\mathbf{d}_l$  ( $\mathbf{d}_r$ ) από το σημείο  $\mathbf{A}_1$  ( $\mathbf{A}_3$ ), παίρνουμε τους πίνακες διέλευσης και ανάκλασης

$$\begin{aligned} Q_{pg:g'p'}^I &= \delta_{\mathbf{g}\mathbf{g}'} \delta_{pp'} N_p^{++} \exp(i[\mathbf{K}_{3\mathbf{g}}^+ \cdot \mathbf{d}_r + \mathbf{K}_{1\mathbf{g}'}^+ \cdot \mathbf{d}_l]) \\ Q_{pg:g'p'}^{II} &= \delta_{\mathbf{g}\mathbf{g}'} \delta_{pp'} N_p^{+-} \exp(i[\mathbf{K}_{3\mathbf{g}}^+ \cdot \mathbf{d}_r + \mathbf{K}_{3\mathbf{g}'}^- \cdot \mathbf{d}_r]) \\ Q_{pg:g'p'}^{III} &= \delta_{\mathbf{g}\mathbf{g}'} \delta_{pp'} N_p^{-+} \exp(-i[\mathbf{K}_{1\mathbf{g}}^- \cdot \mathbf{d}_l - \mathbf{K}_{1\mathbf{g}'}^+ \cdot \mathbf{d}_l]) \\ Q_{pg:g'p'}^{IV} &= \delta_{\mathbf{g}\mathbf{g}'} \delta_{pp'} N_p^{--} \exp(-i[\mathbf{K}_{1\mathbf{g}}^- \cdot \mathbf{d}_l + \mathbf{K}_{3\mathbf{g}'}^- \cdot \mathbf{d}_r]), \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\text{με } \mathbf{K}_{j\mathbf{g}}^{\pm} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{g} \pm \sqrt{(\omega/c)^2 \epsilon_j \mu_j - (\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{g})^2} \hat{\mathbf{z}}.$$

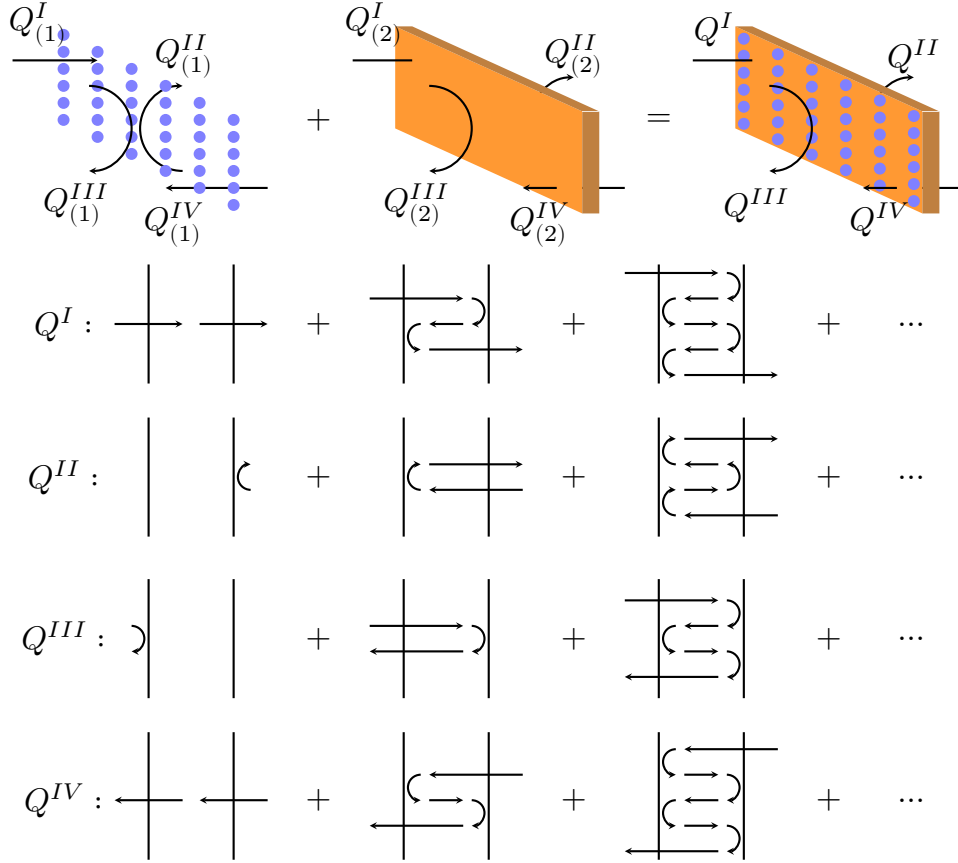
## 2.4 Σκέδαση από σύνθετο πλακίδιο

Ένα σύνθετο πλακίδιο αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, το κάθε ένα από τα οποία μπορεί να είναι επίπεδο πλέγμα σκεδαστών, ομοιογενές πλακίδιο το οποίο μπορεί να λειτουργεί ως διεπιφάνεια, ή κάποια άλλη δομή. Αν δύο διαδοχικά στοιχεία βρίσκονται σε διαφορετικά περιβάλλοντα μέσα που διαχωρίζονται από επίπεδη διεπιφάνεια τότε αυτή πρέπει να θεωρηθεί ως ένα επιπλέον στοιχείο. Οι πίνακες διέλευσης και ανάκλασης,  $\underline{Q}$ , για ένα ζευγάρι από διαδοχικά στοιχεία, έστω '1' και '2', υπολογίζονται συνδυάζοντας τους αντίστοιχους πίνακες των επιμέρους στοιχείων,  $\underline{Q}(1)$  και  $\underline{Q}(2)$ , όπως φαίνεται στο Σχ. 6. Εδώ πρέπει να διευκρινίσουμε ότι οι πίνακες  $\underline{Q}$  που έχουμε υπολογίσει για δυναμικά (π.χ. Εξ. (2.48)) και στατικά (π.χ. Εξ. (2.56)) στοιχεία δεν έχουν την ίδια διάσταση. Προκειμένου να τους συνδυάσουμε, όπως θα δούμε στη συνέχεια, πρέπει να επαυξήσουμε τη διάσταση των πινάκων κάθε στατικού στοιχείου ώστε να ταιριάζει με αυτήν των δυναμικών, γράφοντας τους πίνακες σε μορφή διαγώνια κατά τμήματα ( $\delta_{\nu\nu'}$ ) για όλες τις συχνότητες  $\omega - \nu\Omega$ . Τονίζουμε επίσης ότι, αν και η επιλογή των  $\mathbf{d}_l$  και  $\mathbf{d}_r$  για το κάθε στοιχείο είναι ως έναν βαθμό αυθαίρετη, πρέπει να είναι τέτοια ώστε το σημείο ως προς το οποίο αναπτύσσονται τα κύματα μεταξύ των διαδοχικών στοιχείων να είναι κοινό, δηλαδή  $O_r(1) = O_l(2)$ . Εύκολα αποδεικνύεται, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις πολλαπλές σκεδάσεις (βλ. Σχ. 6 για γραφική απεικόνιση) και αθροίζοντας άπειρες σειρές, ότι

$$\begin{aligned} \underline{Q}^I &= \underline{Q}^I(2)[\underline{I} - \underline{Q}^{II}(1)\underline{Q}^{III}(2)]^{-1}\underline{Q}^I(1) \\ \underline{Q}^{II} &= \underline{Q}^{II}(2) + \underline{Q}^I(2)\underline{Q}^{II}(1)[\underline{I} - \underline{Q}^{III}(2)\underline{Q}^{II}(1)]^{-1}\underline{Q}^{IV}(2) \\ \underline{Q}^{III} &= \underline{Q}^{III}(1) + \underline{Q}^{IV}(1)\underline{Q}^{III}(2)[\underline{I} - \underline{Q}^{II}(1)\underline{Q}^{III}(2)]^{-1}\underline{Q}^I(1) \\ \underline{Q}^{IV} &= \underline{Q}^{IV}(1)[\underline{I} - \underline{Q}^{III}(2)\underline{Q}^{II}(1)]^{-1}\underline{Q}^{IV}(2). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Υπενθυμίζουμε ότι τα κύματα στα αριστερά και τα δεξιά του ζεύγους των στοιχείων αναπτύσσονται ως προς το σημείο που ορίζει το διάνυσμα θέσης  $-\mathbf{d}_l = \mathbf{d}_l(1)$  από το κέντρο

του αριστερού στοιχείου και  $\mathbf{d}_r = \mathbf{d}_r(2)$  από το κέντρο του δεξιού στοιχείου, αντίστοιχα. Η ίδια διαδικασία μπορεί προφανώς να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των πινάκων διέλευσης και ανάκλασης από τρία διαδοχικά στοιχεία, συνδυάζοντας τους πίνακες του ζεύγους των δύο στοιχείων με αυτούς του τρίτου. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να βρούμε τους πίνακες σκέδασης ενός σύνθετου πλακιδίου που αποτελείται από οποιονδήποτε (πεπερασμένο) αριθμό στοιχείων.



Σχήμα 6: Υπολογισμός των πινάκων  $Q$  ενός σύνθετου πλακιδίου από αυτούς των στοιχείων που το αποτελούν.

Έτσι λοιπόν, για ένα επίπεδο κύμα  $[E_{\text{inc}}]_{\mathbf{g}'\nu'}^{+p'} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}'\nu'}^{+(L)} \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{A}_L]) \hat{\mathbf{e}}_{p'}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'\nu'}^{+(L)})$ , που προσπίπτει από τα αριστερά ενός (σύνθετου) πλακιδίου, βρίσκουμε το ανακλώμενο κύμα  $\sum_{\mathbf{g}p} [E_{\text{rf}}]_{\mathbf{g}\nu}^{-p} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}\nu}^{-(L)} \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{A}_L]) \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{K}_{\mathbf{g}\nu}^{-(L)})$  στα αριστερά του πλακιδίου, και το διερχόμενο  $\sum_{\mathbf{g}p} [E_{\text{tr}}]_{\mathbf{g}\nu}^{+p} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}\nu}^{+(R)} \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{A}_R]) \hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{K}_{\mathbf{g}\nu}^{+(R)})$  στα δεξιά του, με τους δείκτες L και R να δηλώνουν ποσότητες που αναφέρονται στα (ημι)άπειρα μέσα στα αριστερά και δεξιά του πλακιδίου, αντίστοιχα. Το  $\mathbf{A}_L$  ( $\mathbf{A}_R$ ) είναι το σημείο αναφοράς στα αριστερά (δεξιά) του πλακιδίου. Έχουμε επίσης ότι

$$[E_{\text{tr}}]_{\mathbf{g}\nu}^{+p} = Q_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^I [E_{\text{inc}}]_{\mathbf{g}'\nu'}^{+p'} \quad (2.58)$$

$$[E_{\text{rf}}]_{\mathbf{g}\nu}^{-p} = Q_{p\mathbf{g}\nu; p'\mathbf{g}'\nu'}^{III} [E_{\text{inc}}]_{\mathbf{g}'\nu'}^{+p'} \quad (2.59)$$

όπου ο πίνακας  $Q$  περιγράφει όλο το πλακίδιο, συμπεριλαμβάνοντας και τις εξωτερικές του επιφάνειες, αν υπάρχουν.

Οι πίνακες  $\underline{S}$  ορίζονται εν γένει στη θεωρία σκέδασης ως αυτοί που μετασχηματίζουν το εισερχόμενο στο εξερχόμενο πεδίο και για το σύνθετο πλακίδιο, στην αναπαρά-

σταση επίπεδων κυμάτων για δεδομένο  $\mathbf{k}_{\parallel}$ , δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
S_{pg\nu;p'g'\nu'}^{++} &= Q_{pg\nu;p'g'\nu'}^I \exp\left(-i[\mathbf{K}_{g\nu}^{+(R)} \cdot \mathbf{A}_R - \mathbf{K}_{g'\nu'}^{+(L)} \cdot \mathbf{A}_L]\right) \\
S_{pg\nu;p'g'\nu'}^{+-} &= Q_{pg\nu;p'g'\nu'}^{II} \exp\left(-i[\mathbf{K}_{g\nu}^{+(R)} \cdot \mathbf{A}_R - \mathbf{K}_{g'\nu'}^{-(R)} \cdot \mathbf{A}_R]\right) \\
S_{pg\nu;p'g'\nu'}^{-+} &= Q_{pg\nu;p'g'\nu'}^{III} \exp\left(-i[\mathbf{K}_{g\nu}^{-(L)} \cdot \mathbf{A}_L - \mathbf{K}_{g'\nu'}^{+(L)} \cdot \mathbf{A}_L]\right) \\
S_{pg\nu;p'g'\nu'}^{--} &= Q_{pg\nu;p'g'\nu'}^{IV} \exp\left(-i[\mathbf{K}_{g\nu}^{-(L)} \cdot \mathbf{A}_L - \mathbf{K}_{g'\nu'}^{-(R)} \cdot \mathbf{A}_R]\right).
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Η διαφορά του αριθμού καταστάσεων μέχρι μια συχνότητα  $\omega$  μεταξύ μιας δομής που περιβάλλεται από ομοιογενές υλικό (π.χ. πλέγμα σφαιρών σε περιβάλλον αέρα), και του υλικού αυτού εάν καταλάμβανε όλο τον χώρο, είναι [47]

$$\Delta N(\omega) = \frac{N}{A} \int \int_{EZB} d^2k_{\parallel} \Delta N(\omega, k_{\parallel}), \tag{2.61}$$

όπου  $N$  ο αριθμός των επιφανειακών μοναδιαίων κυψελίδων του πλέγματος σκεδαστών,  $A$  η επιφάνεια της πρώτης ζώνης Brillouin και

$$\Delta N(\omega, k_{\parallel}) = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \ln \det \underline{\underline{S}}, \tag{2.62}$$

με τους πίνακες  $S$  να δίνονται από την Εξ. (2.60), για δεδομένο  $\omega$  και  $k_{\parallel}$ .

Θυμίζουμε πως η σκέδαση προσπίπτοντος κύματος συχνότητα  $\omega_{\nu}$ , από ένα πλέγμα δυναμικών σκεδαστών, όπως αυτό που μελετήσαμε στο εδάφιο 2.2, παράγει εξερχόμενες δέσμες συχνότητας  $\omega_{\nu}$  κάθε μια από τις οποίες διαδίδεται στα στατικά ομοιογενή και ισοτροπικά υλικά, τα οποία είτε περιβάλλουν το πλέγμα είτε αποτελούν στοιχεία της δομής, χωρίς να μεταβάλλεται περαιτέρω η συχνότητά τους.

Ως συντελεστή διέλευσης (διελευσιμότητα)  $\mathcal{T}$  ορίζουμε το πηλίκο της ροής του διερχόμενου κύματος προς τη ροή του προσπίπτοντος, ενώ ως συντελεστή ανάκλασης (ανακλαστικότητα)  $\mathcal{R}$  το πηλίκο της ροής του ανακλώμενου κύματος προς τη ροή του προσπίπτοντος. Ολοκληρώνοντας το διάνυσμα Poynting σε όλο το επίπεδο  $x-y$  στην κατάλληλη κάθε φορά πλευρά της δομής και παίρνοντας την μέση τιμή μετά από άπειρο χρόνο καταλήγουμε ότι

$$\mathcal{T} = \sum_{\nu} \sum_{pg} |S_{pg\nu;p'g'\nu'}^{++}|^2 \frac{\text{Re}\{\mathbf{K}_{g\nu}^{+;z}\}}{\mathbf{K}_{g'\nu';z}^{+}} \equiv \sum_{\nu} \sum_{pg} \mathcal{T}_{pg\nu} \equiv \sum_{\nu} \mathcal{T}_{\nu} \tag{2.63}$$

και

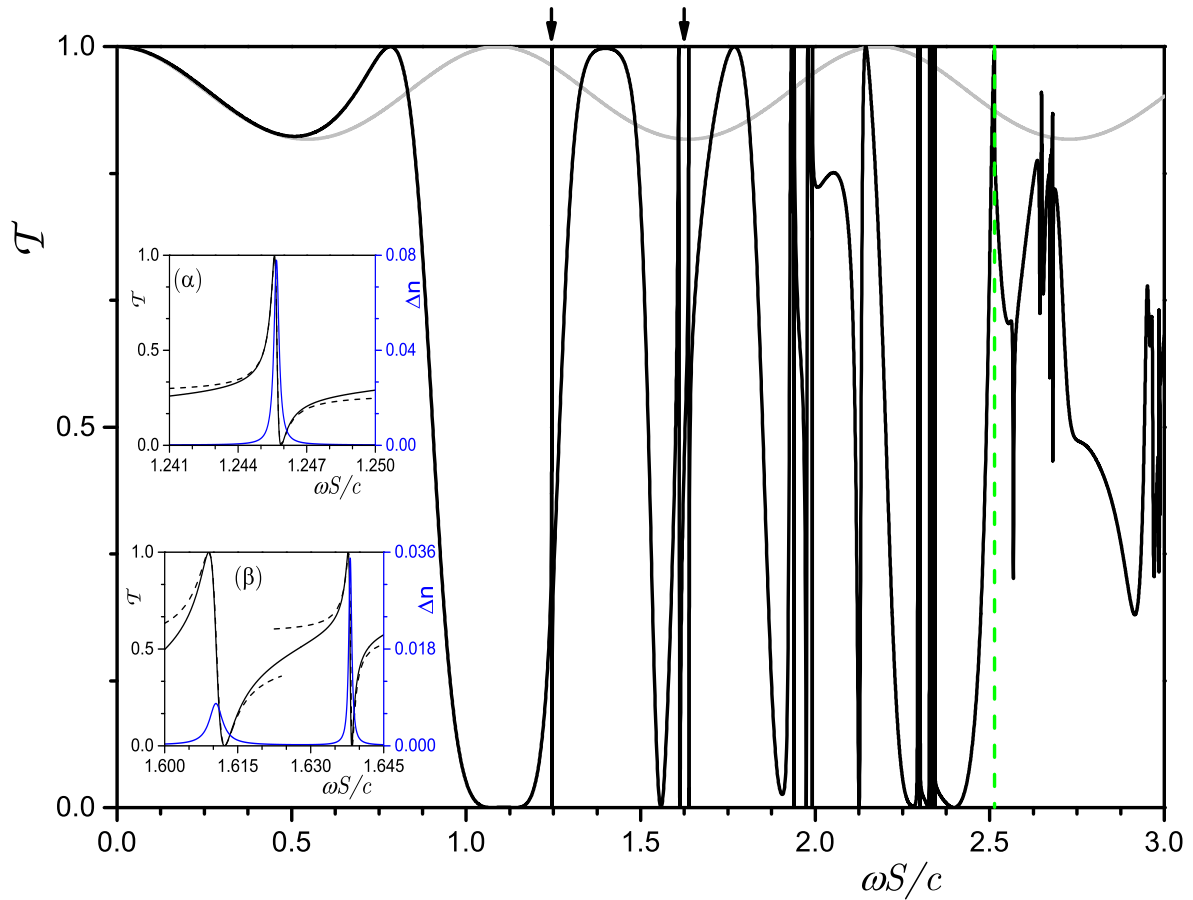
$$\mathcal{R} = \sum_{\nu} \sum_{pg} |S_{pg\nu;p'g'\nu'}^{-+}|^2 \frac{\text{Re}\{\mathbf{K}_{g\nu}^{+;z}\}}{\mathbf{K}_{g'\nu';z}^{+}} \equiv \sum_{\nu} \sum_{pg} \mathcal{R}_{pg\nu} \equiv \sum_{\nu} \mathcal{R}_{\nu}. \tag{2.64}$$

Τα  $\mathcal{T}_{\nu}$  και  $\mathcal{R}_{\nu}$ , περιγράφουν τη  $\nu$ -οστής τάξης μη ελαστική σκέδαση η οποία παράγει δέσμες συχνότητας  $\omega - \nu\Omega$ , ενώ τα  $\mathcal{T}_{pg\nu}$  και  $\mathcal{R}_{pg\nu}$  αντιστοιχούν στις συνιστώσες τους ανά πόλωση και περιθλώμενη δέσμη. Σημειώνουμε ότι, ακόμα και σε υλικά χωρίς απώλειες στα οποία μεταβάλλεται χρονικά κάποιο χαρακτηριστικό τους, η ενέργεια δεν διατηρείται. Σε αυτή την περίπτωση το  $\mathcal{A} = 1 - \mathcal{T} - \mathcal{R} > 0$  ( $< 0$ ) μεταφράζεται ως μεταφορά ενέργειας από (προς) το ΗΜ πεδίο προς (από) το δυναμικό υλικό.

# Κεφάλαιο 3

## Αποτελέσματα

### 3.1 Δισδιάστατα πλέγματα στατικών σφαιρικών σωματιδίων



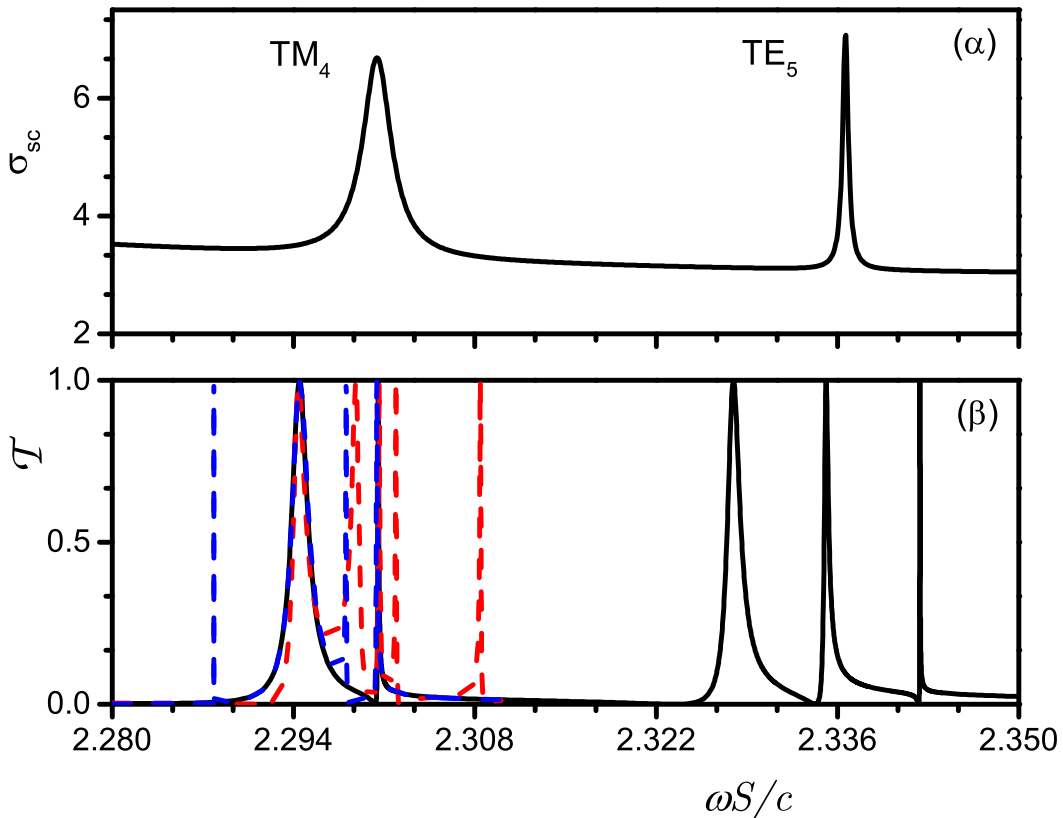
Σχήμα 7: Φάσμα διέλευσης τετραγωνικού πλέγματος, με θεμελιώδη διανύσματα  $\mathbf{a}_1 = a(1, 0)$  και  $\mathbf{a}_2 = a(0, 1)$ , από σφαιρικούς σκεδαστές ακτίνας  $S$  ( $a = 2.5S$ ) σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς  $\epsilon = 12$  και μαγνητικής διαπερατότητας  $\mu = 1$ , στον αέρα, για κάθετη πρόσπτωση. Η κατακόρυφη πράσινη διακεκομμένη γραμμή δείχνει το όριο, πάνω από το οποίο εμφανίζονται περιθλώμενες δέσμες (σημείο Rayleigh - Wood). Η γκρι καμπύλη δείχνει τη διελυσσιμότητα ενός «ισοδύναμου» ομοιογενούς πλακιδίου, πάχους  $h = 2S$ , σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας  $\mu_{\text{eff}} = 1$  και διηλεκτρικής σταθεράς  $\epsilon_{\text{eff}} = 2.07$ , όπως υπολογίζεται από την προσέγγιση ενεργού μέσου Maxwell-Garnett,  $(\epsilon_{\text{eff}} - 1)/(\epsilon_{\text{eff}} + 2) = f(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2)$  με  $f = (4\pi S^3)/(3ha^2)$  το ποσοστό κατάληψης όγκου από τις σφαίρες. Τα ένθετα (α) και (β) εστιάζουν σε δύο περιοχές του φάσματος, που σημειώνονται με μαύρα βέλη πάνω από το σχήμα και απεικονίζουν τη διελυσσιμότητα (μαύρη συνεχής γραμμή), τη μεταβολή της πυκνότητας καταστάσεων (μπλε συνεχής γραμμή) καθώς και την προσαρμογή του φάσματος διέλευσης στην Εξ. (Γ.7) (μαύρη διακεκομμένη γραμμή).

Το Σχ. 7 απεικονίζει το φάσμα διέλευσης τετραγωνικού πλέγματος, πλεγματικής σταθεράς  $a$  στο επίπεδο  $x-y$ , από σφαιρικούς σκεδαστές ακτίνας  $S$  ( $a = 2.5S$ ) σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς  $\epsilon = 12$  και μαγνητικής διαπερατότητας  $\mu = 1$ , στον αέρα, για κάθετη πρόσπτωση. Επειδή δεν λαμβάνουμε υπόψη τη διασπορά ( $\epsilon(\omega) = \epsilon$ , βλ. Σχ. 1), τα αποτελέσματα ισχύουν σε διαφορετικές περιοχές συχνοτήτων αλλάζοντας κατάλληλα την ακτίνα της σφαίρας, για αυτό και χρησιμοποιούμε την αδιάστατη συχνότητα  $\omega S/c$ . Βλέπουμε ότι, στο όριο του μεγάλου μήκους κύματος ( $\omega \rightarrow 0$ ), η συμπεριφορά είναι αυτή που αναμένεται για ένα ομοιογενές πλακίδιο από ισοδύναμο ενεργό μέσο [48], με τις ταλαντώσεις του συντελεστή διέλευσης να οφείλονται σε πολλαπλές ανακλάσεις στις επιφάνειες του πλακιδίου (ταλαντώσεις Fabry-Pérot). Σε υψηλότερες συχνότητες, η προσέγγιση αυτή καταρρέει και το πλέγμα των σφαιρών εμφανίζει καταστάσεις συντονισμού, οι οποίες προέρχονται από τις καταστάσεις Mie των μεμονωμένων σφαιρών που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Αυτοί οι πλεγματικοί συντονισμοί εκδηλώνονται με διάφορες μορφές (δομές Fano) στο φάσμα διέλευσης, ανάλογα με τις φασικές μετατοπίσεις σκέδασης όπως εξηγείται στο παράρτημα Γ'. Όπως φαίνεται στα ένθετα, οι παρατηρούμενες δομές Fano αναπαράγονται με κατάλληλη προσαρμογή των δεδομένων στην Εξ. (Γ.7). Συγκεκριμένα στο ένθετο (α) εμφανίζεται ένας πλεγματικός συντονισμός με  $\omega_1 = 1.2456c/S$ ,  $\gamma_1 = 0.00032c/S$  και  $\phi_1 = 116.8^\circ$ , ενώ στο ένθετο (β), εμφανίζονται δύο απομονωμένοι πλεγματικοί συντονισμοί, με  $\omega_2 = 1.6106c/S$ ,  $\gamma_2 = 0.00412c/S$ ,  $\phi_2 = 92.2^\circ$  και  $\omega_3 = 1.6382c/S$ ,  $\gamma_3 = 0.00094c/S$ ,  $\phi_3 = 80.7^\circ$ . Ας σημειωθεί ότι, για  $\omega a/c > 2\pi$ , που στην περίπτωσή μας αντιστοιχεί σε  $\omega S/c = 2.51$  (σημείο Rayleigh - Wood, βλ. πράσινη κατακόρυφη διακεκομμένη γραμμή στο Σχ. 7) πυροδοτούνται διαδιδόμενες περιθλώμενες δέσμες τόσο, στην ανάκλαση, όσο και στην διέλευση, με συνιστώσα  $z$  του κυματανύσματος ίση με  $\sqrt{\omega^2/c^2 - 4\pi^2/a^2}$ .

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε φαινόμενα ισχυρής μη ελαστικής σκέδασης φωτός, κυκλικής συχνότητας  $\omega$ , από δισδιάστατες περιοδικές δομές σφαιρικών σωματιδίων, των οποίων η διηλεκτρική σταθερά διεγείρεται περιοδικά στο χρόνο με κυκλική συχνότητα  $\Omega$  ( $\Omega \ll \omega$ ). Για το σκοπό αυτό, θα πρέπει να αναζητήσουμε πολύ στενούς οπτικούς συντονισμούς, κοντά ο ένας στον άλλον. Έτσι, θα μπορέσουμε να επιτύχουμε υψηλές πιθανότητες μετάβασης από μια αρχική κατάσταση συντονισμού, σε συχνότητα  $\omega_{in}$ , σε μια γειτονική της, σε συχνότητα  $\omega_{out} = \omega_{in} \pm \Omega$ , γιατί θα έχουμε μεγάλη αρχική και τελική πυκνότητα καταστάσεων του HM πεδίου, ενώ θα ικανοποιείται η αρχή διατήρησης της ενέργειας σε μια διαδικασία απορρόφησης ή εκπομπής ενός κβάντου της περιοδικής διέγερσης από ένα φωτόνιο. Όπως φαίνεται στο Σχ. 7, δισδιάστατες περιοδικές διατάξεις σωματιδίων υψηλής διηλεκτρικής σταθεράς προσφέρουν αυτή τη δυνατότητα. Συγκεκριμένα, μια φασματική περιοχή του Σχ. 7 που ικανοποιεί τα απαιτούμενα κριτήρια φαίνεται σε μεγέθυνση στο Σχ. 8.

Αντιπαραβάλλοντας με την ενεργό διατομή σκέδασης των μεμονωμένων σφαιρών, γίνεται σαφές ότι οι πλεγματικοί συντονισμοί στη συγκεκριμένη περιοχή συχνοτήτων προέρχονται από τις δεκαεξαπολικές ( $l = 4$ ) καταστάσεις Mie ηλεκτρικού τύπου ( $P = E$ ) και τις τριανταδιπολικές ( $l = 5$ ) μαγνητικού τύπου ( $P = H$ ). Η μαύρη συνεχής γραμμή στο Σχ. 8 (β) αντιστοιχεί σε κάθετη πρόσπτωση, ανεξάρτητα της διεύθυνσης πόλωσης (όπως αναμένεται σε τετραγωνικό πλέγμα), ενώ οι μπλε και κόκκινες διακεκομμένες γραμμές δείχνουν τα αποτελέσματα για πρόσπτωση στο επίπεδο  $x-z$  υπό γωνία  $\theta = 3^\circ$  και πόλωση  $s$  και  $p$ , αντίστοιχα, μόνο στην περιοχή του χαμηλότερου συντονισμού Mie, στον οποίο θα εστιάσουμε τη μελέτη μας. Ο εννεαπλός εκφυλισμός αυτού του δεκαεξαπολικού συντονισμού Mie ηλεκτρικού τύπου ( $2l+1 = 2*4+1 = 9$ ) των μεμονωμένων σφαιρών αίρεται λόγω της αλληλεπίδρασης στο πλέγμα και δημιουργούνται δύο διπλά εκφυλισμένες και πέντε μη εκφυλισμένες πλεγματικές καταστάσεις για  $\mathbf{k}_{\parallel} = 0$ . Κάθετα προσπίπτον φως συζεύγνυται λόγω συμμετρίας μόνο με τις διπλά εκφυλισμένες καταστάσεις, όπως δείχνουμε στο Παράρτημα Β', για αυτό και βλέπουμε δύο διακριτές κορυφές στο φάσμα διέλευσης. Οι

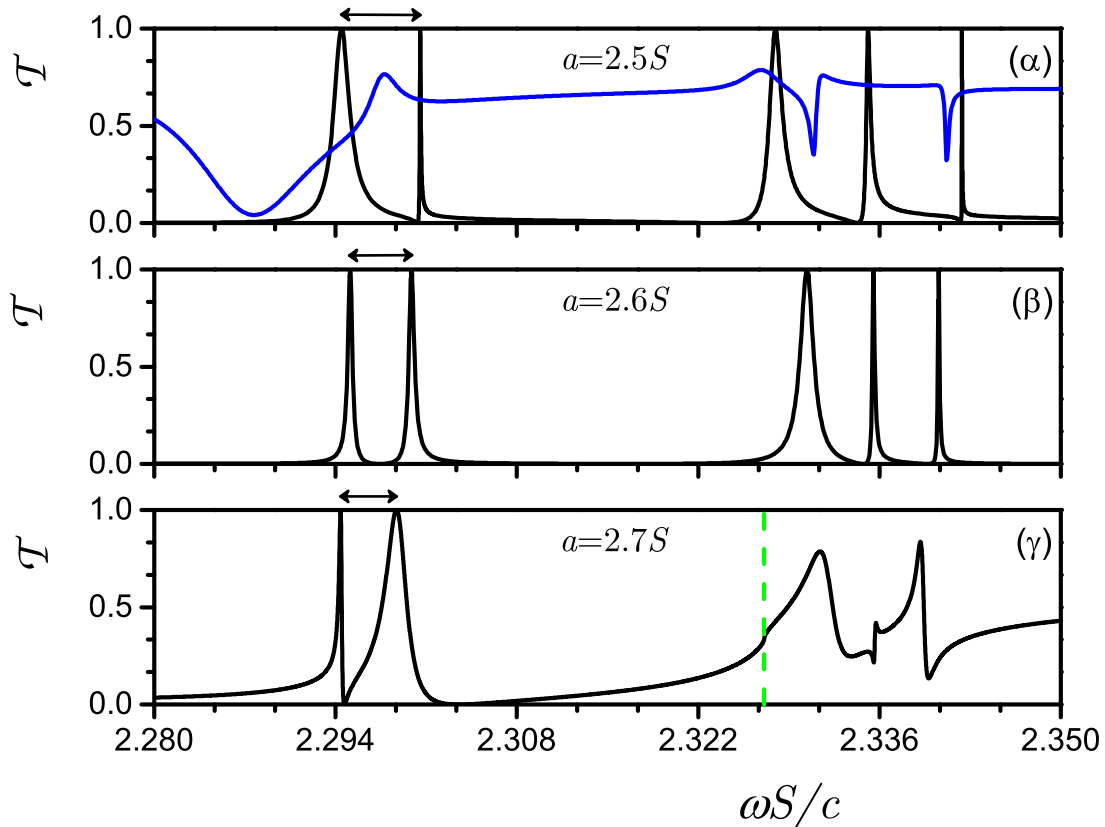
μη εκφυλισμένες καταστάσεις δεν μπορούν να διεγερθούν από κάθετα προσπίπτον κύμα και χαρακτηρίζονται ως *οπτικά ανενεργές* ή *σκοτεινές* ή *δέσμιες καταστάσεις στο συνεχές*. Όταν η πρόσπτωση γίνει υπό γωνία, η εικόνα αλλάζει σημαντικά. Για παράδειγμα, προσπίπτον φως υπό γωνία  $\theta = 3^\circ$ , στο επίπεδο  $x-z$ , διεγείρει και τις εννέα πλεγματοτικές καταστάσεις. Για  $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, 0)$  οι πλεγματοτικές καταστάσεις που προέρχονται από τους δεκαεξαπολικούς συντονισμούς Mie ηλεκτρικού τύπου έχουν τη συμμετρία των μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων της σημειακής ομάδας  $C_{2v}$  (βλ. Παράρτημα Β'). Από αυτές, οι πέντε είναι άρτιες κατά την ανάκλαση ως προς το επίπεδο  $x-z$  και οι τέσσερις περιττές. Επομένως όλες διεγείρονται από προσπίπτον κύμα της κατάλληλης συμμετρίας, με πόλωση  $p$  οι άρτιες και με πόλωση  $s$  οι περιττές.



Σχήμα 8: (α) Ενεργός διατομή σκέδασης σφαιρικού σκεδαστή ακτίνας  $S$ , σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς  $\epsilon = 12$  και μαγνητικής διαπερατότητας  $\mu = 1$ , στον αέρα. (β) Φάσμα διέλευσης τετραγωνικού πλέγματος με θεμελιώδη διανύσματα  $\mathbf{a}_1 = a(1, 0)$  και  $\mathbf{a}_2 = a(0, 1)$ , πλεγματοτικής σταθεράς  $a = 2.5S$ , από τους παραπάνω σκεδαστές. Με συνεχή μαύρη γραμμή απεικονίζεται η διελυσσιμότητα του πλέγματος υπό κάθετη πρόσπτωση, ενώ οι μπλε και κόκκινες διακεκομμένες γραμμές δείχνουν τα αποτελέσματα για πρόσπτωση στο επίπεδο  $x-z$ , υπό γωνία  $\theta = 3^\circ$  και πόλωση  $s$  και  $p$ , αντίστοιχα, μόνο στην περιοχή του χαμηλότερου συντονισμού Mie (δεκαεξαπολικού, ηλεκτρικού τύπου- $TM_4$ ).

Οι πλεγματοτικοί συντονισμοί μπορούν να ρυθμισθούν αν μεταβάλουμε, εκτός από τη γωνία πρόσπτωσης του ΗΜ κύματος, την πλεγματοτική σταθερά  $a$ . Στο Σχ. 9 παρουσιάζουμε το φάσμα διέλευσης του τετραγωνικού πλέγματος σφαιρών που μελετάμε, για διάφορες τιμές της πλεγματοτικής σταθεράς:  $a = 2.5S$  (α),  $a = 2.6S$  (β) και  $a = 2.7S$  (γ), για κάθετη πρόσπτωση. Όπως βλέπουμε, καθώς η πλεγματοτική σταθερά αυξάνεται και

το πλέγμα αραιώνει, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των καταστάσεων γειτονικών σφαιρών γίνονται ασθενέστερες, με αποτέλεσμα οι καταστάσεις αυτές να πλησιάζουν η μια την άλλη. Συγκεκριμένα, οι αποστάσεις,  $\Delta\omega S/c$ , μεταξύ των κορυφών συντονισμού που προέρχονται από τις δεκαεξαπολικές καταστάσεις Mie ηλεκτρικού τύπου, που σημειώνονται με διπλό βέλος, μειώνονται σταδιακά από  $6.08 \times 10^{-3}$  σε  $4.73 \times 10^{-3}$  και  $4.32 \times 10^{-3}$ , για  $a = 2.5S$ ,  $a = 2.6S$  και  $a = 2.7S$ , αντίστοιχα. Όταν η απόσταση γίνει πολύ μεγάλη ( $a \gg S$ ) η αλληλεπίδραση είναι πρακτικά αμεληταία και οι πλεγματικές καταστάσεις τείνουν να εκφυλισθούν σε αυτές του μεμονωμένου σκεδαστή.



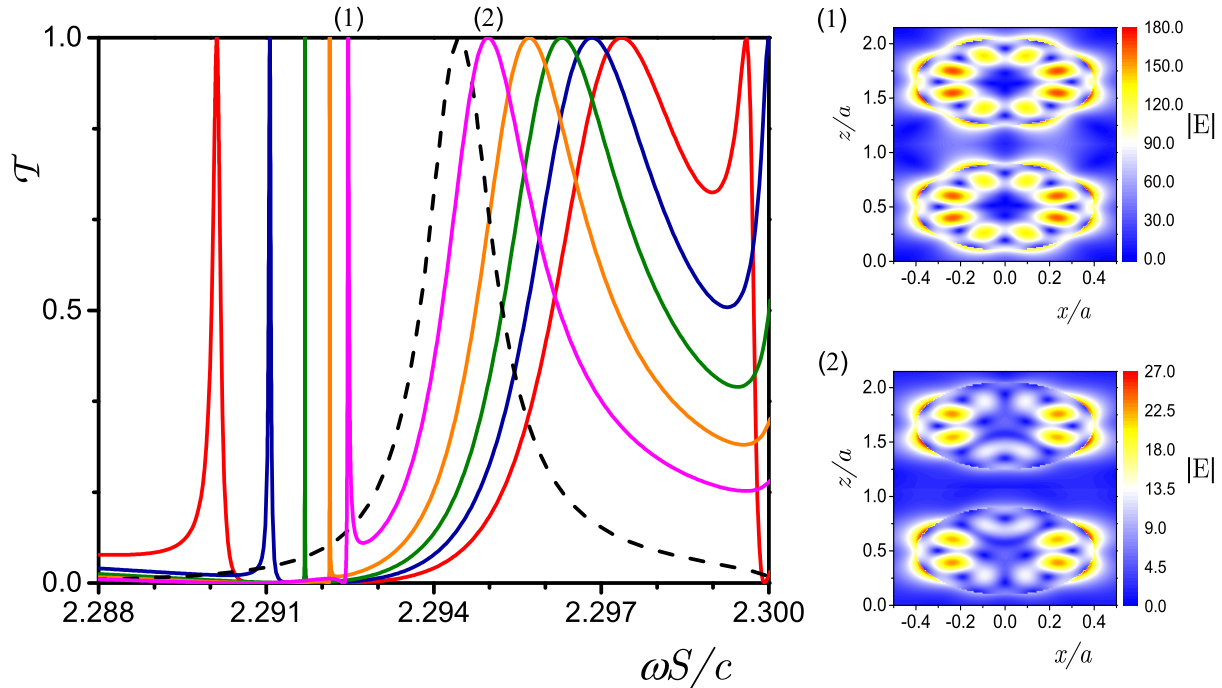
Σχήμα 9: Φάσμα διέλευσης τετραγωνικού πλέγματος σφαιρικών σκεδαστών ακτίνας  $S$ , σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς  $\epsilon = 12$  και μαγνητικής διαπερατότητας  $\mu = 1$ , στον αέρα, υπό κάθετη πρόσπτωση, για διάφορες τιμές της πλεγματικής σταθεράς  $a = 2.5S$ ,  $a = 2.6S$ ,  $a = 2.7S$ . Στο διάγραμμα (α), με μπλε γραμμή απεικονίζεται η διελουσιμότητα όταν το πλέγμα τοποθετηθεί σε υπόστρωμα γυαλιού δείκτη διάθλασης  $n = 1.5$ .

Περιθλώμενες δέσμες εμφανίζονται στην ανάκλαση ή/και στη διέλευση όταν η πλεγματική σταθερά είναι μεγαλύτερη από το μήκος κύματος του φωτός στο αντίστοιχο μέσο διάδοσης. Έτσι, στο Σχ. 9 (γ), το σημείο Rayleigh - Wood, στο οποίο εμφανίζονται οι πρώτες περιθλώμενες δέσμες, βρίσκεται σε συχνότητα  $\omega S/c = 2.3271$  που είναι εντός της φασματικής περιοχής που εξετάζουμε (βλ. πράσινη κατακόρυφη διακεκομμένη γραμμή). Βλέπουμε ότι πάνω από αυτή τη συχνότητα το φάσμα διέλευσης αλλάζει δραστικά. Σημειώνεται ότι παρόμοια φαινόμενα περίθλασης εμφανίζονται στις περιπτώσεις των Σχ. 9 (α) και (β), πάνω από τις συχνότητες  $\omega S/c = 2.5132$  (βλ. Σχ. 7) και  $2.4166$ , αντίστοιχα. Η ύπαρξη ενός υποστρώματος μειώνει τη συχνότητα στην οποία εμφανίζεται το σημείο Rayleigh - Wood για τις διερχόμενες δέσμες. Η μπλέ συνεχής γραμμή στο Σχ. 9 (α) απεικονίζει τη διελουσιμότητα του συγκεκριμένου πλέγματος σφαιρών όταν αυτό τοποθετηθεί σε



υπόστρωμα γυαλιού δείκτη διάθλασης  $n = 1.5$ . Εδώ, το σημείο Rayleigh - Wood βρίσκεται σε συχνότητα  $\omega S/c = 1.6755$ , εκτός της φασματικής περιοχής που μελετάμε.

Οι θέσεις των πλεγματικών συντονισμών μπορούν επίσης να διαμορφωθούν αποτελεσματικά ρυθμίζοντας την αλληλεπίδραση των καταστάσεων μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων από σφαιρικούς σκεδαστές, αλλάζοντας τη μεταξύ τους απόσταση. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα ζεύγος πλεγματικών επιπέδων, όμοια με αυτό του Σχ. 9 (α), σε απόσταση  $d$  μεταξύ τους. Μία πλεγματική κατάσταση του ενός επιπέδου αλληλεπιδρά με την αντίστοιχη του γειτονικού της, δημιουργώντας ένα ζεύγος καταστάσεων (με κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό των αρχικών), οι οποίες εκτείνονται και στα δύο επίπεδα. Το Σχ. 10 δείχνει τη μετακίνηση των καταστάσεων συντονισμού του ζεύγους συναρτήσει της απόστασης  $d$ , στην περιοχή συχνοτήτων του πρώτου δεκαεξαπολικού συντονισμού ηλεκτρικού τύπου. Βλέπουμε ότι, αυξάνοντας την απόσταση μεταξύ των επιπέδων από  $d = 0.95a$  (κόκκινη γραμμή) σε  $d = 1.15a$  (μωβ γραμμή), οι αλληλεπιδράσεις εξασθενούν και οι καταστάσεις πλησιάζουν σε αυτήν του ενός επιπέδου. Για μεγαλύτερες τιμές του  $d$ , εμφανίζονται και νέες καταστάσεις, όπως Fabry-Pérot μεταξύ των δύο ανακλαστικών επιπέδων, οι οποίες αλλοιώνουν την εικόνα. Είναι αξιοσημείωτο ότι η χαμηλότερη κατάσταση του ζεύγους των επιπέδων έχει πολύ μεγαλύτερο χρόνο ζωής, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται και από τις εντάσεις των πεδίων στο περιθώριο του Σχ. 10.



Σχήμα 10: Μετατόπιση καταστάσεων συντονισμού ενός ζεύγους επιπέδων σφαιρικών σκεδαστών, ακτίνας  $S$ , σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς  $\epsilon = 12$  και μαγνητικής διαπερατότητας  $\mu = 1$ , στον αέρα, στην περιοχή του πρώτου δεκαεξαπολικού συντονισμού ηλεκτρικού τύπου. Η διελυσσιμότητα του ενός επιπέδου απεικονίζεται με μαύρη διακεκομμένη γραμμή, ενώ του ζεύγους επιπέδων σε απόσταση  $d = 0.95a$ ,  $d = 1.00a$ ,  $d = 1.05a$ ,  $d = 1.10a$  και  $d = 1.15a$ , με κόκκινη, μπλε, πράσινη, πορτοκαλί και μωβ συνεχή γραμμή, αντίστοιχα. Σε κάθε επίπεδο οι σφαίρες είναι διατεταγμένες σε τετραγωνικό πλέγμα, πλεγματικής σταθεράς  $a = 2.5S$ . Στο περιθώριο του σχήματος δείχνουμε την κατανομή του μέτρου της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου (σε αυθαίρετες μονάδες) για το ζεύγος των επιπέδων απόστασης  $d = 1.15a$ , στις καταστάσεις συντονισμού (1) και (2) που βρίσκονται στις συχνότητες  $\omega S/c = 2.29247$  και  $\omega S/c = 2.29497$  αντίστοιχα.

### 3.2 Δισδιάστατα πλέγματα δυναμικών σφαιρικών σωματιδίων

Μέχρι στιγμής, έχουμε μελετήσει τη διελευσιμότητα δομών που αποτελούνται από σκεδαστές χρονοανεξάρτητης διηλεκτρικής σταθεράς. Στη συνέχεια θα δούμε τι συμβαίνει αν πυροδοτήσουμε μια περιοδική διαμόρφωση της διηλεκτρικής συνάρτησης, της μορφής

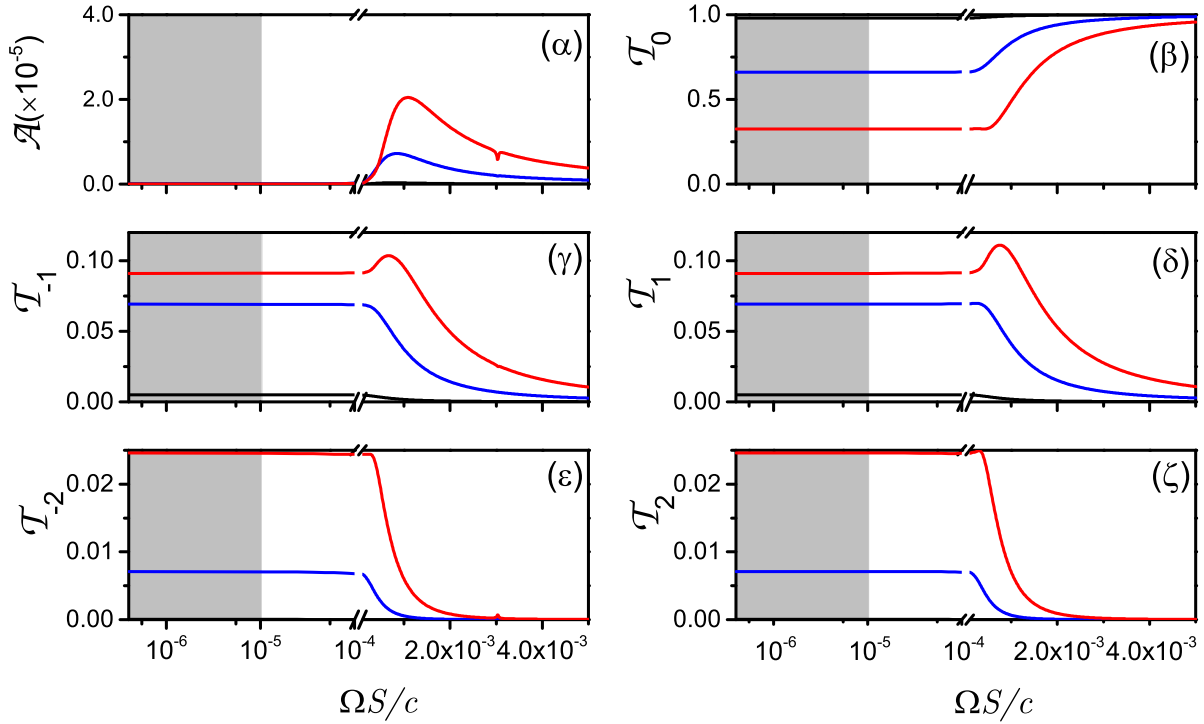
$$\epsilon(t) = \epsilon[1 + \eta \sin(\Omega t)] . \quad (3.1)$$

Στο όριο όπου η συχνότητα διαμόρφωσης,  $\Omega$ , είναι πολύ μικρότερη από αυτή του φωτός,  $\omega$  ( $\Omega/\omega \ll 1$ ), μπορούμε να ακολουθήσουμε μια αδιαβατική προσέγγιση και να περιγράψουμε τη σκέδαση σε διακριτά στιγμιότυπα εντός μιας περιόδου  $T = 2\pi/\Omega$ , θεωρώντας στο καθένα από αυτά σταθερή την τιμή της διηλεκτρικής συνάρτησης, η οποία να δίνεται από την Εξ. (3.1). Σε αυτό το αδιαβατικό όριο η συγκεκριμένη τιμή της συχνότητας  $\Omega$  δεν έχει σημασία και οι παραγόμενες δέσμες συχνότητας  $\omega - \nu\Omega$  έχουν ένταση, η οποία εξαρτάται από το πλάτος διαμόρφωσης  $\eta$  και όχι από τη συχνότητα  $\Omega$ . Επιπλέον, στην περίπτωση που δεν εμφανίζονται άλλου είδους απώλειες, η απορρόφηση είναι μηδενική, δηλαδή δεν υπάρχει μεταφορά ενέργειας μεταξύ των σκεδαστών και του ΗΜ πεδίου, που είναι χαρακτηριστικό της αδιαβατικής προσέγγισης.

Καθώς η συχνότητα διαμόρφωσης αυξάνεται και η περίοδος μεταβολής γίνεται συγκρίσιμη με το χρόνο παραμονής των φωτονίων στο πλέγμα,  $\Omega \simeq \gamma$ , παύει να είναι εφικτός ο διαχωρισμός δύο διακριτά διαφορετικών χρονικών κλιμάκων, μία για τις γρήγορες οπτικές διαδικασίες και μία για την αργή περιοδική διέγερση. Σε ένα τέτοιο καθεστώς, η αδιαβατική προσέγγιση καταρρέει και είναι αναγκαία μια αυστηρή περιγραφή που χειρίζεται με τον ίδιο τρόπο όλες τις χρονικές κλίμακες, όπως η πλήρως δυναμική μέθοδος Floquet στο πεδίο του χρόνου που περιγράψαμε στο Κεφ. 1. Σε αυτό το πλήρως δυναμικό καθεστώς, που εκδηλώνεται, π.χ., πάνω από  $\Omega S/c \simeq 10^{-5}$  στο Σχ. 11, τόσο η ελαστική όσο και η μη ελαστική σκέδαση εξαρτώνται από τη συχνότητα διαμόρφωσης  $\Omega$ . Οι εντάσεις των οπτικών δεσμών με ίδια αλλαγή της συχνότητας προς τα πάνω και προς τα κάτω (απορρόφηση και εκπομπή του ίδιου αριθμού κβάντων διέγερσης από κάθε φωτόνιο) είναι πλέον διαφορετικές, ενώ εμφανίζεται εν γένει και ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ του ΗΜ πεδίου και των δυναμικών σκεδαστών. Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά βρίσκονται σε ευθεία αντίθεση με τα αποτελέσματα της αδιαβατικής προσέγγισης.

Το Σχ. 11 απεικονίζει την ολική απορρόφηση ( $\alpha$ ), την ελαστική ( $\beta$ ) και τη μη ελαστική διελευσιμότητα πρώτης ( $\gamma$ )-(δ) και δεύτερης τάξης ( $\epsilon$ )-(ζ) τετραγωνικού πλέγματος σφαιρικών σωματιδίων ακτίνας  $S$ , με πλεγματική σταθερά  $a = 2.5S$ , στον αέρα. Τα σωματίδια χαρακτηρίζονται από περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενη σχετική διηλεκτρική συνάρτηση  $\epsilon(t) = 12[1 + \eta \sin(\Omega t)]$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu = 1$ . Φως προσπίπτει κάθετα στο πλέγμα με τη συχνότητα συντονισμού  $\omega_{in}S/c = 2.2944$ , όπου η διελευσιμότητα της στατικής δομής ισούται με τη μονάδα (βλ. Σχ. 8). Τα διαγράμματα δείχνουν τη μεταβολή των μεγεθών συναρτήσει της αδιάσταστης συχνότητας διαμόρφωσης  $\Omega S/c$ , για διάφορα πλάτη:  $\eta = 1 \times 10^{-4}$  (μαύρες γραμμές),  $\eta = 5 \times 10^{-4}$  (μπλε γραμμές) και  $\eta = 10 \times 10^{-4}$  (κόκκινες γραμμές). Το σκιασμένο τμήμα οριοθετεί την αδιαβατική περιοχή, όπου η ένταση της κάθε δέσμης παραμένει πρακτικά σταθερή. Δεν παρουσιάζουμε στο σχήμα την αντίστοιχη ανακλαστικότητα διότι έχει την ίδια συμπεριφορά με τη διελευσιμότητα. Για μικρό πλάτος διαμόρφωσης (μαύρη γραμμή), η ένταση της ελαστικής δέσμης μειώνεται ανεπαίσθητα από τη μονάδα ενώ μόνο οι μη ελαστικές δέσμες πρώτης τάξης (Stokes και anti-Stokes) είναι πρακτικά μη μηδενικές. Με την αύξηση του πλάτους διαμόρφωσης (μπλε και κόκκινη γραμμή), ενισχύεται η ένταση των μη ελαστικών δεσμών ( $\nu = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), εις βάρος της ελαστικής ( $\nu = 0$ ). Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται έντονα στη σκιασμένη (αδιαβατική) περιοχή του Σχ. 11. Εφόσον η πιθανότητα μετάβασης εξαρτάται όχι μόνο από το ολοκλήρωμα επικάλυψης αλλά και από την πυκνότητα της τελικής ( $\omega_{out} = \omega_{in} \pm \Omega$  για μεταβάσεις πρώτης τάξης) κατάσταση, αυξάνοντας το  $\Omega$  πέρα από το ημιέγρος του συντονισμού

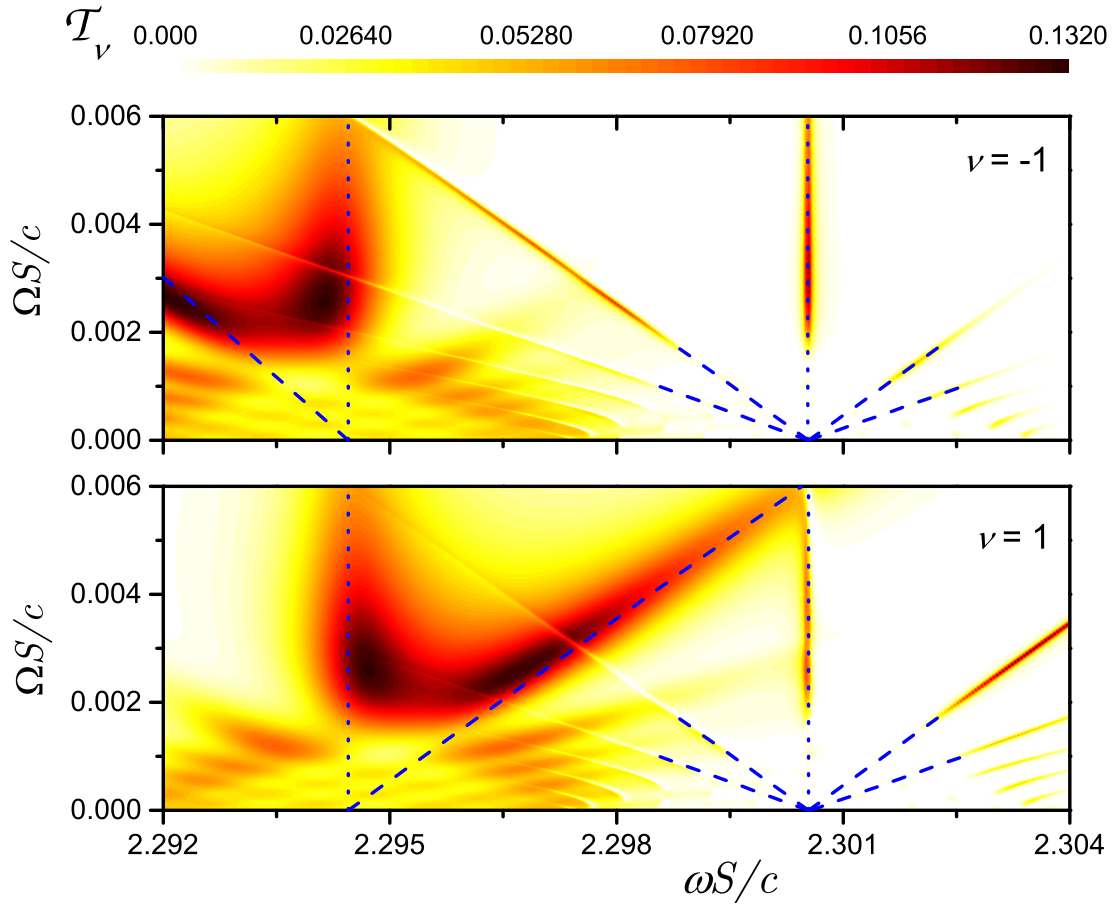
$\gamma \simeq 10^{-3}$ , έχουμε σταδιακή μείωση της έντασης των μη ελαστικών δεσμών με ταυτόχρονη αύξηση της έντασης της ελαστικής δέσμης πάλι στη μονάδα. Περαιτέρω αύξηση της συχνότητας διαμόρφωσης δεν επιφέρει σημαντικές μεταβολές στο φάσμα διέλευσης καθώς η πυκνότητα καταστάσεων εκτός του συντονισμού παραμένει μικρή. Στην περίπτωση όμως όπου υπάρχει άλλη κατάσταση εντός του εύρους μετάβασης, η εικόνα μπορεί να είναι ριζικά διαφορετική, όπως θα δούμε στη συνέχεια.



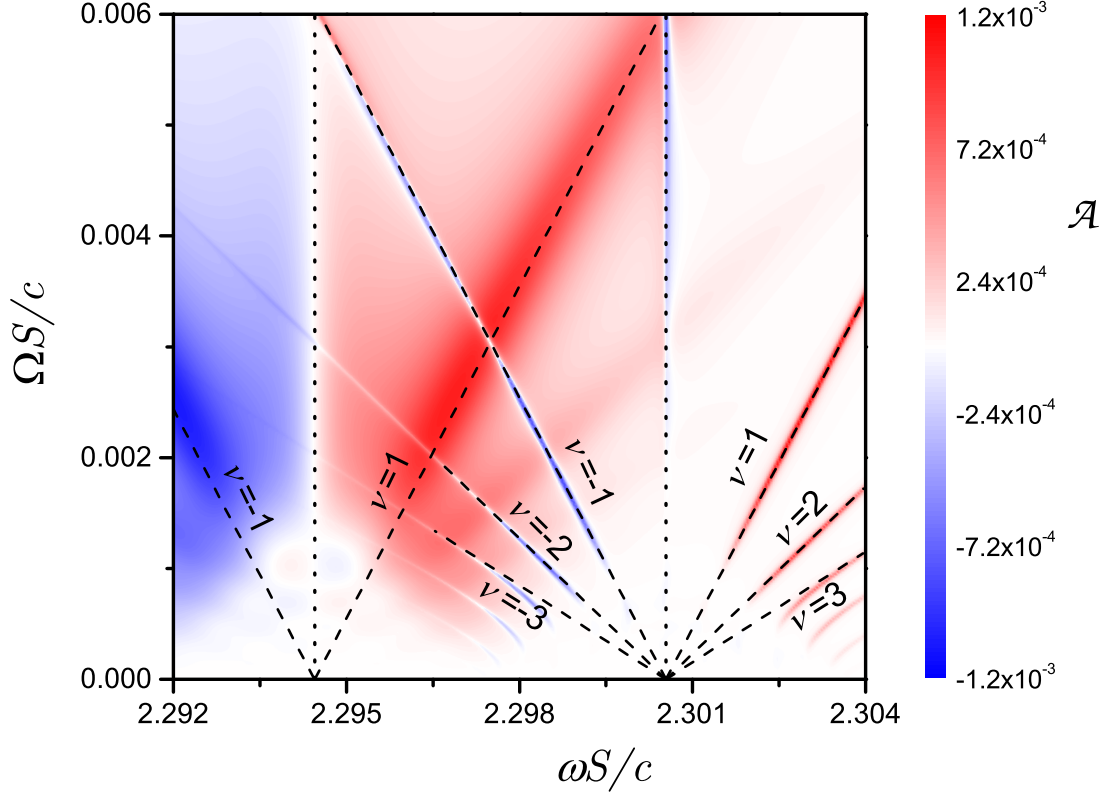
Σχήμα 11: Ολική απορρόφηση (α), ελαστική (β) και μη ελαστική διελυσσιμότητα διαφόρων τάξεων (γ)-(ζ) τετραγωνικού πλέγματος σφαιρικών σωματιδίων ακτίνας  $S$ , με πλεγματική σταθερά  $a = 2.5S$ , στον αέρα. Τα σωματίδια χαρακτηρίζονται από περιοδικά χρονικά μεταβαλλόμενη σχετική διηλεκτρική συνάρτηση  $\epsilon(t) = 12[1 + \eta \sin(\Omega t)]$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu = 1$ . Φως προσπίπτει κάθετα με τη συχνότητα συντονισμού  $\omega_{in}S/c = 2.2944$ , όπου η διελυσσιμότητα της στατικής δομής ισούται με τη μονάδα (βλ. Σχ. 8). Τα διαγράμματα δείχνουν τη μεταβολή των μεγεθών συναρτήσει της αδιάσταστης συχνότητας διαμόρφωσης  $\Omega S/c$ , για διάφορα πλάτη:  $\eta = 1 \times 10^{-4}$  (μαύρες γραμμές),  $\eta = 5 \times 10^{-4}$  (μπλε γραμμές) και  $\eta = 10 \times 10^{-4}$  (κόκκινες γραμμές). Το σκιασμένο τμήμα οριοθετεί την αδιαβατική περιοχή, όπου η ένταση της κάθε δέσμης είναι πρακτικά σταθερή.

Γενικά, ισχυρή ελαστική σκέδαση εκδηλώνεται όταν διεγείρεται μια κατάσταση συντονισμού. Αντίστοιχα, αυξημένη μη ελαστική σκέδαση αναμένεται κατά τη μετάβαση φωτονίων μεταξύ δύο συντονισμών, όπου η πυκνότητα καταστάσεων του HM πεδίου είναι υψηλή. Βέβαια, για  $\mathbf{k}_{||} = (0, 0)$ , οι δύο οπτικά ενεργές πλεγματικές καταστάσεις στη φασματική περιοχή που εξετάζουμε έχουν μια σχετική απόσταση της τάξης του  $3 \times 10^{-3}$ , η οποία είναι πολύ μεγαλύτερη από τις συχνότητες διαμόρφωσης ( $\Omega/\omega < 10^{-4}$ ) που μπορούμε να επιτύχουμε πειραματικά. Παρόλα αυτά, σχετικά ισχυρή μη ελαστική σκέδαση έχουμε και όταν μόνο η τελική κατάσταση των φωτονίων βρίσκεται σε κάποιο πλεγματικό συντονισμό. Στην περίπτωση αυτή, η διαφορά της συχνότητας του προσπίπτοντος κύματος ( $\omega_{in}$ ) από αυτήν της τελικής κατάστασης συντονισμού ( $\omega_{out}$ ) θα πρέπει να είναι ίση με ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του  $\Omega$ . Αυτό φαίνεται και στο Σχ. 12, όπου παρουσιάζεται η σχετική ένταση

των διερχόμενων μη ελαστικών δεσμών πρώτης τάξης από τετραγωνικό πλέγμα σφαιρικών σωματιδίων ακτίνας  $S$ , πλεγματικής σταθεράς  $a = 2.5S$ , σχετικής διηλεκτρικής συνάρτησης  $\epsilon(t) = 12[1 + 0.003 \sin(\Omega t)]$  και μαγνητικής διαπεραστότητας  $\mu = 1$ , στον αέρα, για κάθετη πρόσπτωση φωτός δεδομένης κυκλικής συχνότητας  $\omega$ . Θυμίζουμε ότι, με βάση τις Εξ. (1.55) και (1.56), για δεδομένο  $\nu$ , μόνο το σκεδαζόμενο πεδίο είναι επαλληλία μονοχρωματικών κυμάτων συχνότητας  $\omega_\nu$ , ενώ το πεδίο στο εσωτερικό του κάθε σκεδαστή αποτελείται από μια υπέρθεση πολυχρωματικών ιδιοκαταστάσεων, που η καθεμιά περιέχει όλες τις αρμονικές με διαφορετικά πλάτη την κάθε μία. Έτσι η παρατηρούμενη έντονη σκέδαση anti-Stokes και Stokes με κλίση διάφορη του  $\nu = \mp 1$ , αντίστοιχα, οφείλεται σε αυτές τις πολυχρωματικές καταστάσεις.

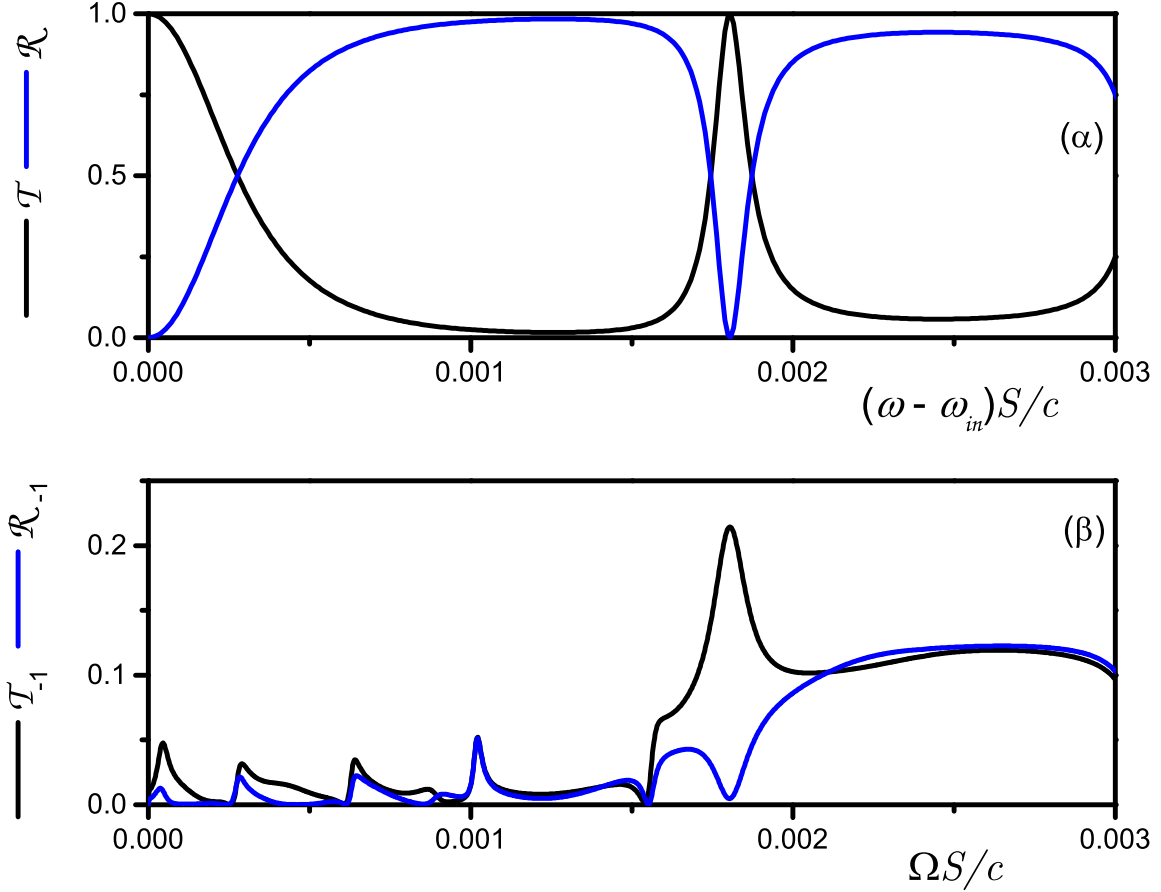


Σχήμα 12: Σχετική ένταση διερχόμενων μη ελαστικών δεσμών πρώτης τάξης, όταν φως κυκλικής συχνότητας  $\omega_{\text{in}} = \omega$ , προσπίπτει κάθετα σε τετραγωνικό πλέγμα σφαιρικών σωματιδίων ακτίνας  $S$ , πλεγματικής σταθεράς  $a = 2.5S$ , σχετικής διηλεκτρικής συνάρτησης  $\epsilon(t) = 12[1 + 0.003 \sin(\Omega t)]$  και μαγνητικής διαπεραστότητας  $\mu = 1$ , στον αέρα. Οι κατακόρυφες στικτές γραμμές δείχνουν τη θέση των πλεγματικών συντονισμών της αδιατάρακτης δομής (βλ. Σχ. 8), ενώ οι πλάγιες διακεκομμένες γραμμές εκφράζουν τις συνθήκες  $\omega_{\text{out}} = \omega_{\text{in}} \pm \Omega$ ,  $\omega_{\text{out}} = \omega_{\text{in}} \pm 2\Omega$ , ..., όταν το  $\omega_{\text{out}}$  είναι συχνότητα συντονισμού.



Σχήμα 13: Απορρόφηση φωτός, συχνότητας  $\omega_{\text{in}} = \omega$ , που προσπίπτει κάθετα σε τετραγωνικό πλέγμα σφαιρικών σωματιδίων ακτίνας  $S$ , πλεγματικής σταθεράς  $a = 2.5S$ , σχετικής διηλεκτρικής συνάρτησης  $\epsilon(t) = 12[1 + 0.003 \sin(\Omega t)]$  και μαγνητικής διαπεραστότητας  $\mu = 1$ , στον αέρα. Οι κατακόρυφες στικτές γραμμές δείχνουν τη θέση των πλεγματικών συντονισμών της αδιατάρακτης δομής χωρίς χρονική διαμόρφωση (βλ. Σχ. 8), ενώ οι πλάγιες διακεκομμένες εκφράζουν τη συνθήκη  $\omega_{\text{out}} = \omega_{\text{in}} \pm \Omega, \omega_{\text{out}} = \omega_{\text{in}} \pm 2\Omega, \dots$ , όταν το  $\omega_{\text{out}}$  είναι συχνότητα συντονισμού.

Στο πλήρως δυναμικό καθεστώς, η μη ελαστική σκέδαση συνοδεύεται από μια καθαρή μεταφορά ενέργειας από (προς) το ΗΜ πεδίο, προς (από) το πλέγμα των σκεδαστών, κάτι που δεν συμβαίνει στο αδιαβατικό όριο. Συγκεκριμένα, για τις δέσμες anti-Stokes με συχνότητα  $\omega + \nu\Omega$ ,  $\nu > 0$ , όπου στη σωματιδιακή εικόνα τα φωτόνια έχουν απορροφήσει  $\nu$  ενεργειακά κβάντα  $\hbar\Omega$ , το ΗΜ πεδίο κερδίζει ενέργεια, γεγονός που εκδηλώνεται ως αρνητική απορρόφηση. Αντίστοιχα, για τις δέσμες Stokes, όπου τα φωτόνια έχουν εκπέμψει  $\nu$  ενεργειακά κβάντα  $\hbar\Omega$ , έχουμε απώλεια ενέργειας που μεταφράζεται σε θετική απορρόφηση. Οι διαδικασίες αυτές αποτυπώνονται στο Σχ. 13 στην περιοχή των πλεγματικών συντονισμών που προέρχονται από τις δεκαεξαπολικές καταστάσεις Mie ηλεκτρικού τύπου, μεταβάλλοντας τη συχνότητα διαμόρφωσης  $\Omega$ . Αξιοσημείωτη εδώ είναι η ύπαρξη περιοχών όπου η ολική απορρόφηση είναι μηδενική, όχι λόγω απουσίας των διαδικασιών αυτών αλλά λόγω αλληλοεξουδετέρωσής τους. Φυσικά, όπως αναμένουμε, για μικρές τιμές της συχνότητας διαμόρφωσης  $\Omega$ , όπου μπορούμε να εφαρμόσουμε την αδιαβατική προσέγγιση, η ενέργεια του ΗΜ πεδίου διατηρείται.



Σχήμα 14: Φως πόλωσης  $p$ , συχνότητας  $\omega_{in}$  αυτή του συντονισμού  $\omega_{in}S/c = 2.2988$  (βλ. Σχ. 8), προσπίπτει στο επίπεδο  $x-z$  υπό γωνία  $\theta = 3^\circ$  σε τετραγωνικό πλέγμα με θεμελιώδη διανύσματα  $\mathbf{a}_1 = a(1, 0)$  και  $\mathbf{a}_2 = a(0, 1)$ , που αποτελείται από σφαιρικά σωματίδια ακτίνας  $S$  ( $a = 2.5S$ ), σχετική διηλεκτρική συνάρτηση  $\epsilon(t) = 12[1 + 0.003 \sin(\Omega t)]$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu = 1$ , σε αέρα. (α) Φάσμα διέλευσης (μαύρη γραμμή) και ανάκλασης (μπλε γραμμή) του χρονοανεξάρτητου πλέγματος, μετατοπισμένο προς τα αριστερά κατά τη συχνότητα  $\omega_{in}$ . Στο διάγραμμα (β) φαίνεται το φάσμα διέλευσης και ανάκλασης της δέσμης πρώτης τάξης anti-Stokes, συναρτήσει της αδιάστατης συχνότητας διαμόρφωσης  $\Omega S/c$ .

Φως αδιάστατης συχνότητας  $\omega_{in}S/c = 2.2988$  και πόλωσης  $p$ , διεγείρει έναν πλεγματοειδή συντονισμό του στατικού τετραγωνικού πλέγματος που περιγράψαμε στο Σχ. 8, όταν προσπίπτει στο επίπεδο  $x-z$ , υπό γωνία  $\theta = 3^\circ$ , ενώ ανακλάται σε μεγάλο ποσοστό όταν προσπίπτει κάθετα. Η διελυσιμότητα και η ανακλαστικότητα του στατικού πλέγματος του Σχ. 8 για κύμα πόλωσης  $p$  παρουσιάζεται στο Σχ. 14 (α) μετατοπισμένη προς τα αριστερά κατά τη συχνότητα  $\omega_{in}$ . Στο διάγραμμα (β), του ίδιου σχήματος, φαίνεται το φάσμα διέλευσης και ανάκλασης της μη ελαστικής δέσμης anti-Stokes πρώτης τάξης όταν πυροδοτούμε χρονική διαμόρφωση της σχετικής διηλεκτρικής συνάρτησης  $\epsilon(t) = 12[1 + 0.003 \sin(\Omega t)]$  των σφαιρικών σωματιδίων, συναρτήσει της αδιάστατης συχνότητας διαμόρφωσης  $\Omega S/c$ . Επειδή οι οπτικά ενεργές πλεγματοειδείς καταστάσεις, στη φασματική περιοχή που εξετάζουμε, για  $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, 0)$  βρίσκονται σε μικρή σχετική απόσταση μεταξύ τους, της τάξης του  $9 \times 10^{-4}$ , μπορούμε να έχουμε συνθήκη τριπλού συντονισμού  $\omega_{in} - \omega_{out} = \nu\Omega$ , για συχνότητες διαμόρφωσης  $\Omega S/c \simeq 1.8 \times 10^{-3}$ . Ταυτόχρονα, επειδή η μετάβαση γίνεται μεταξύ δύο συντονισμών, η σχετική ένταση της μη ελαστικής δέσμης anti-Stokes είναι αρκετά μεγάλη, της τάξης του 0.2. Έτσι επιλέγοντας την γωνία πρόσπτω-

σης με κατάλληλο τρόπο μπορούμε όχι μόνο να μειώσουμε την συχνότητα διέγερσης που χρειάζεται για να έχουμε έντονη μη ελαστική σκέδαση, αλλά να αυξήσουμε και την ένταση της μη ελαστικής σκέδασης. Οι κορυφές στις μικρότερες συχνότητες διέγερσης που παρατηρούνται στο Σχ. 14 (β) αποτελούν αποτύπωμα διαδικασιών απορρόφησης πολλαπλών κβάντων ταλάντωσης.





# Συμπεράσματα - Προοπτικές

Σύνθετες περιοδικές μικροσκοπικές δομές προσφέρουν εντυπωσιακές δυνατότητες για τον έλεγχο του φωτός. Η ταυτόχρονη περιοδική διαμόρφωση των οπτικών χαρακτηριστικών τέτοιων δομών και στο πεδίο του χρόνου, οι λεγόμενοι φωτονικοί χρονοκρύσταλλοι, υπόσχονται μοναδικές προοπτικές στην προσπάθεια να διαμορφώνουμε κατά βούληση τόσο τη διέλευση και τα χαρακτηριστικά μιας οπτικής δέσμης όσο και την αλληλεπίδραση ακτινοβολίας - ύλης. Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιώντας μια πλήρως δυναμική τεχνική Floquet, παρουσιάσαμε μια γενίκευση της μεθόδου στρωματικής πολλαπλής σκέδασης για φωτονικές δομές που περιλαμβάνουν σφαιρικά σωματίδια των οποίων ο δείκτης διάθλασης μεταβάλλεται περιοδικά στο χρόνο. Η μέθοδος αυτή ενδείκνυται για αριθμητικούς υπολογισμούς μεγάλης κλίμακας, λόγω της υψηλής ταχύτητας και της ελεγχόμενης ακρίβειάς της. Τα χαρακτηριστικά αυτά απορρέουν από τη βέλτιστη χρήση δύο βάσεων ανάπτυξης: (α) σε σφαιρικά κύματα για την περιγραφή της πολλαπλής σκέδασης από μια δισδιάστατη περιοδική διάταξη σκεδαστών και (β) σε επίπεδα κύματα για την περιγραφή της πολλαπλής σκέδασης από διαδοχικά σκεδαστικά επίπεδα με την ίδια δισδιάστατη περιοδικότητα. Επιπροσθέτως, σε αντίθεση με άλλες πλήρως αριθμητικές μεθόδους, προσφέρεται η δυνατότητα άμεσης φυσικής ερμηνείας και κατανόησης των αποτελεσμάτων, διότι οι ιδιότητες του σύνθετου συστήματος προκύπτουν από αυτές των δομικών του μονάδων, με αποτέλεσμα να μπορούν εύκολα να αναλυθούν οι υπεύθυνοι φυσικοί μηχανισμοί. Κάνοντας συστηματικούς αριθμητικούς υπολογισμούς, μελετήσαμε το φάσμα διέλευσης ενός τετραγωνικού πλέγματος σφαιρικών σωματιδίων υψηλής διπλεκτρικής σταθεράς, όπου εμφανίζονται πλεγματικοί συντονισμοί μεγάλου χρόνου ζωής, τη θέση και τα χαρακτηριστικά των οποίων μπορούμε να ελέγξουμε κατά βούληση με κατάλληλη επιλογή των γεωμετρικών παραμέτρων της δομής. Η εφαρμογή περιοδικής διαμόρφωσης στην οπτική απόκριση των σωματιδίων ανέδειξε ισχυρά φαινόμενα μη ελαστικής σκέδασης, συνοδευόμενα από μεταφορά ενέργειας μεταξύ της χρονικά μεταβαλλόμενης δομής και του ΗΜ πεδίου, σε καθεστώς τριπλού συντονισμού, που ικανοποιείται για οπτικές μεταβάσεις μεταξύ γειτονικών πλεγματικών καταστάσεων, της κατάλληλης συμμετρίας, οι οποίες προέρχονται από πολυπολικούς συντονισμούς Mie. Η γενίκευση της μεθόδου στρωματικής πολλαπλής σκέδασης, ώστε να περιγράφει και μη σφαιρικά σωματίδια υπό περιοδική διαμόρφωση, π.χ. χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των επεκταμένων συνοριακών συνθηκών, θα επιτρέψει να μελετηθούν και νέες δομές, με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας στο σχεδιασμό τους, οι οποίες θα είναι και ευκολότερα υλοποιήσιμες.



# Παράρτημα Α΄

## Μαθηματικές συναρτήσεις

### Σφαιρικές αρμονικές

Η διαφορική εξίσωση Helmholtz για βαθμωτά πεδία  $\nabla^2 F(\mathbf{r}) + q^2 F(\mathbf{r}) = 0$ , επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$F(\mathbf{r}) = \sum_{lm} f_l(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{A}'1)$$

όπου  $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ , είναι οι σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις, με το  $\hat{\mathbf{r}}$  να δηλώνει την εξάρτηση του διανύσματος  $\mathbf{r}$  από τις γωνίες  $\theta, \phi$  στις σφαιρικές συντεταγμένες, και  $f_l(qr)$  είναι το ακτινικό τμήμα των λύσεων της εξίσωσης. Οι σφαιρικές αρμονικές,  $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$  αποτελούν το γωνιακό τμήμα των λύσεων της Εξ. (A'.1) και ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$\nabla^2 Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{A}'2)$$

δίνονται δε από την έκφραση

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (\text{A}'3)$$

όπου  $l = 0, 1, \dots, m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$  και  $P_l^m(\cos\theta)$  τα προσαρτημένα πολυώνυμα Legendre

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{2/m} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \quad x = \cos\theta \quad (\text{A}'4)$$

για  $m > 0$ , ενώ για  $m < 0$  ορίζονται από την

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (\text{A}'5)$$

Για τις σφαιρικές αρμονικές ισχύει

$$Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^m Y_{l-m}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{A}'6)$$

$$Y_{lm}(-\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{A}'7)$$

$$Y_{lm}(\theta=0, \phi) = \delta_{m0} \sqrt{(2l+1)/4\pi}, \quad (\text{A}'8)$$

καθώς και η σχέση ορθοκανονικότητας

$$\int d\hat{\mathbf{r}} Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \quad (\text{A}'9)$$

## Συναρτήσεις Bessel

Με  $f_l(qr)$  συμβολίζονται οι λύσεις του ακτινικού τμήματος της Εξ. (Α'.1)

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + q^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_l(qr) = 0. \quad (\text{Α'.10})$$

Για κάθε τιμή του  $l$  η εξίσωση αυτή έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Μορφές τέτοιων λύσεων είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel, Neumann και Hankel πρώτου ή δεύτερου είδους, που δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$j_l(x) = (-x)^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sin x}{x} \quad (\text{Α'.11})$$

$$n_l(x) = -(-x)^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\cos x}{x} \quad (\text{Α'.12})$$

$$h_l^+(x) = j_l(x) + in_l(x) \quad (\text{Α'.13})$$

$$h_l^-(x) = j_l(x) - in_l(x), \quad (\text{Α'.14})$$

όπου  $x = qr$ . Από τις λύσεις αυτές μόνο η  $j_l(x)$  δεν απειρίζεται για  $x = 0$ , ενώ για όλες ισχύουν οι αναδρομικές σχέσεις

$$x f_l'(x) = l f_l(x) - x f_{l+1}(x) \quad (\text{Α'.15})$$

$$(2l+1) f_l(x) = x f_{l-1}(x) + x f_{l+1}(x) \quad (\text{Α'.16})$$

$$x f_{l-1}(x) = x f_l'(x) + (l+1) f_l(x) \quad (\text{Α'.17})$$

$$(2l+1) f_l'(x) = l f_{l-1}(x) - (l+1) f_{l+1}(x). \quad (\text{Α'.18})$$

Συχνά είναι χρήσιμη επίσης και η ορίζουσα Wronski

$$\begin{vmatrix} j_l(x) & n_l(x) \\ j_l'(x) & n_l'(x) \end{vmatrix} = j_l(x) n_l'(x) - n_l(x) j_l'(x) = \frac{1}{x^2}. \quad (\text{Α'.19})$$

## Διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές

Οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις  $\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$  ορίζονται μέσω της δράσης του τελεστή στροφορμής,  $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$ , στις σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις ως

$$\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{L} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{\sqrt{l(l+1)}} = \frac{-i \mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{\sqrt{l(l+1)}}, \quad (\text{Α'.20})$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\mathbf{X}_{lm}(-\mathbf{r}) = (-1)^l \mathbf{X}_{lm}(\mathbf{r}). \quad (\text{Α'.21})$$

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων γράφονται ως

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left\{ \left[ \alpha_l^m Y_{lm+1}(\hat{\mathbf{r}}) + \alpha_l^{-m} Y_{lm-1}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \hat{\mathbf{x}} \right. \\ \left. - i \left[ \alpha_l^m Y_{lm+1}(\hat{\mathbf{r}}) - \alpha_l^{-m} Y_{lm-1}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \hat{\mathbf{y}} \right. \\ \left. + m Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{z}} \right\}, \quad (\text{Α'.22}) \end{aligned}$$

ενώ στο σφαιρικό ως

$$\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left\{ \left[ \alpha_l^{-m} \cos \theta e^{i\phi} Y_{lm-1}(\hat{\mathbf{r}}) - m \sin \theta Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + \alpha_l^m \cos \theta e^{-i\phi} Y_{lm+1}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right. \\ \left. + i \left[ \alpha_l^{-m} e^{i\phi} Y_{lm-1}(\hat{\mathbf{r}}) - \alpha_l^m e^{-i\phi} Y_{lm+1}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \right\}, \quad (\text{A'.23})$$

όπου  $\alpha_l^m = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}/2$ . Οι  $\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ , πληρούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\int d\hat{\mathbf{r}} \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad (\text{A'.24})$$

$$\int d\hat{\mathbf{r}} \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}})] = 0, \quad (\text{A'.25})$$

όπου με  $\int d\hat{\mathbf{r}} \dots = \int d\phi d\theta \sin \theta \dots$  συμβολίζει ολοκλήρωση στη στερεά γωνία. Ικανοποιούν επίσης πολλές άλλες ταυτότητες από τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής

$$\int d\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \cdot [\mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}) \times \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] = 0 \quad (\text{A'.26})$$

$$\int d\hat{\mathbf{r}} [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}})] \cdot \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = 0 \quad (\text{A'.27})$$

$$\int d\hat{\mathbf{r}} \mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot [\nabla \times z_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] = 0 \quad (\text{A'.28})$$

$$\int d\hat{\mathbf{r}} [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}})] \cdot [\nabla \times z_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r z_l(qr)] \delta_{l'l} \delta_{m'm'} \quad (\text{A'.29})$$

$$\int d\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \cdot [\nabla \times g_{l'}(qr) \mathbf{X}_{l'm'}(\hat{\mathbf{r}})]^* \times [\nabla \times z_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] = 0 \quad (\text{A'.30})$$

$$\int d\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \cdot [g_{l'}(qr) \mathbf{X}_{l'm'}(\hat{\mathbf{r}})]^* \times [\nabla \times z_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] = g_{l'}^*(qr) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r z_l(qr)] \delta_{l'l} \delta_{m'm'}, \quad (\text{A'.31})$$

όπου με  $z_l$  και  $g_l$  συμβολίζουμε έναν οποιοδήποτε γραμμικοί συνδυασμοί των σφαιρικών συναρτίσεων Bessel και Neumann.

## Παράρτημα Β΄

# Ανάλυση βάσει της θεωρίας ομάδων

Ένα τετραγωνικό πλέγμα σφαιρών, που ορίζεται από τα θεμελιώδη διανύσματα  $\mathbf{a}_1 = a(1, 0)$  και  $\mathbf{a}_2 = a(0, 1)$ , μένει αναλλοίωτο σε στροφές,  $\phi$ , κατά  $\pi/2$  ( $2\hat{C}_4$ ) και  $\pi$  ( $\hat{C}_2$ ) περί τον άξονα  $z$ , σε στροφές κατά  $\pi$  περί τους άξονες  $x$  και  $y$  ( $2\hat{C}'_2$ ) καθώς και περί τις διαγωνίους του τετραγώνου ( $2\hat{C}''_2$ ). Μένει επίσης αναλλοίωτο κατά την αντιστροφή ( $\hat{I}$ ) καθώς και στους συνδυασμούς των μετασχηματισμών στροφής με την αντιστροφή. Οι πίνακες αναπαράστασης αυτών των μετασχηματισμών συμμετρίας στον ευκλείδιο χώρο είναι

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{E}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \underline{\underline{C_{4z}}} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \underline{\underline{C_{4z}^{-1}}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \underline{\underline{C_{2z}}} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \underline{\underline{C_{2x}}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \underline{\underline{C_{2y}}} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 \underline{\underline{C_{2a}}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \underline{\underline{C_{2b}}} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \underline{\underline{I}} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 \underline{\underline{IC_{4z}}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \underline{\underline{IC_{4z}^{-1}}} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \underline{\underline{IC_{2z}}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 \underline{\underline{IC_{2x}}} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \underline{\underline{IC_{2y}}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \underline{\underline{IC_{2a}}} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \underline{\underline{IC_{2b}}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .
 \end{aligned}$$

Το σύνολο αυτών των μετασχηματισμών ορίζει τη σημειακή ομάδα συμμετρίας  $D_{4h}$ , της οποίας ο πίνακας χαρακτήρων φαίνεται στον Πίνακα Β.1. Βασικά στοιχεία της θεωρίας ομάδων βρίσκονται, π.χ., στο βιβλίο του Cornwell [49].

Οι καταστάσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο τετραγωνικό πλέγμα σφαιρικών σκεδαστών χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένη τιμή του  $\mathbf{k}_{\parallel}$  και έχουν τη συμμετρία των μη αναγωγίων αναπαραστάσεων εκείνης της υποομάδας της  $D_{4h}$  που αφήνει το  $\mathbf{k}_{\parallel}$  αναλλοίωτο. Προφανώς, αν  $\mathbf{k}_{\parallel} = (0, 0)$ , αυτή είναι η ίδια η  $D_{4h}$ . Επομένως, από τις πολυπολικές καταστάσεις Mie των μεμονωμένων σφαιρών θα προκύψουν πλεγματικές καταστάσεις οι οποίες, για  $\mathbf{k}_{\parallel} = (0, 0)$ , θα έχουν τη συμμετρία των μη αναγωγίων αναπαραστάσεων της  $D_{4h}$ .

Σε περιβάλλον σφαιρικής συμμετρίας, οι ιδιοκαταστάσεις ενός βαθμωτού πεδίου χαρακτηρίζονται από τις σφαιρικές αρμονικές,  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  ή ισοδύναμα  $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ , που είναι βάσεις των μη αναγωγίων αναπαραστάσεων της ομάδας  $O(3)$  (συνεχείς στροφές στον ευκλείδιο χώρο σε συνδυασμό με την αντιστροφή). Οι χαρακτήρες αυτών των αναπαραστάσεων σε μετασχηματισμούς στροφής κατά  $\phi$ , περί οιονδήποτε άξονα,  $\hat{\mathbf{P}}_{\phi}$ , δίνονται από τη σχέση

$$\chi^{(l)}(\hat{\mathbf{P}}_{\phi}) = \frac{\sin[(2l+1)\phi/2]}{\sin(\phi/2)} \quad (\text{B.1})$$

ενώ, για ένα μετασχηματισμό στροφής σε συνδυασμό με αντιστροφή έχουμε

$$\chi^{(l)}(\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{P}}_\phi) = (-1)^l \chi^{(l)}(\hat{\mathbf{P}}_\phi), \quad (\text{B'.2})$$

όπως προκύπτει από την ιδιότητα των σφαιρικών αρμονικών  $Y_{lm}(-\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ . Σε περιβάλλον χαμηλότερης συμμετρίας, που περιγράφεται από μια υποομάδα  $\mathcal{G}$ , τάξης  $g$ , της  $O(3)$ , οι καταστάσεις συγκεκριμένου  $l$  ανάγονται σε καταστάσεις που έχουν τη συμμετρία των μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων,  $\Gamma_\lambda$ , της  $\mathcal{G}$ . Το πόσες φορές, υπεισέρχεται η  $\Gamma_\lambda$ , στην αναγωγή δίνεται από τη σχέση

$$p_\lambda = \frac{1}{g} \sum_{\hat{\mathbf{P}} \in \mathcal{G}} \chi^{\Gamma_\lambda}(\hat{\mathbf{P}}) \chi^{(l)}(\hat{\mathbf{P}}). \quad (\text{B'.3})$$

$D_{4h}$	$\hat{\mathbf{E}}$	$2\hat{\mathbf{C}}_4$	$\hat{\mathbf{C}}_2$	$2\hat{\mathbf{C}}_2'$	$2\hat{\mathbf{C}}_2''$	$\hat{\mathbf{I}}$	$2\hat{\mathbf{S}}_4$	$\hat{\sigma}_h$	$2\hat{\sigma}_v$	$2\hat{\sigma}_d$
$A_{1g}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$A_{2g}$	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
$B_{1g}$	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1
$B_{2g}$	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1
$E_g$	2	0	-2	0	0	2	0	-2	0	0
$A_{1u}$	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
$A_{2u}$	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
$B_{1u}$	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
$B_{2u}$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$E_u$	2	0	-2	0	0	-2	0	2	0	0

Πίνακας Β'.1: Πίνακας χαρακτήρων των μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων της ομάδας  $D_{4h}$ . Με  $\sigma$  συμβολίζουμε κατοπτρικά επίπεδα και με  $S_4$  άξονα συμμετρίας τέταρτης τάξης συνοδευόμενο από κατοπτρισμό ως προς επίπεδο κάθετο στον άξονα αυτόν.

Τα πράγματα βέβαια είναι λίγο διαφορετικά για τις καταστάσεις ενός διανυσματικού πεδίου σε περιβάλλον σφαιρικής συμμετρίας. Η δράση ενός μετασχηματισμού  $\hat{\mathbf{P}}$  σε μια διανυσματική συνάρτηση  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\mathbf{P}}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \underline{\underline{\mathbf{P}}}\mathbf{F}(\underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1}\mathbf{r}), \quad (\text{B'.4})$$

όπου  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$  ο αντίστοιχος πίνακας μετασχηματισμού στον ευκλείδειο χώρο. Όπως έχουμε δει στο Κεφάλαιο 1.2, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αναπτύσσεται σε βάση εγκάρσιων σφαιρικών κυμάτων ηλεκτρικής πόλωσης (εγκάρσιου μαγνητικού τύπου TM),  $\mathbf{E}_{lm}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) = i\nabla \times \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})f_l(qr)/q$ , και μαγνητικής πόλωσης (εγκάρσιου ηλεκτρικού τύπου TE),  $\mathbf{E}_{lm}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) = \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})f_l(qr)$ . Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των σφαιρικών αρμονικών  $\mathbf{X}_{lm}(-\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^l \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$  βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός αντιστροφής ( $\hat{\mathbf{I}}$ ) δρα με διαφορετικό τρόπο στα σφαιρικά κύματα TM και TE. Πράγματι

$$\hat{\mathbf{I}}\mathbf{E}_{lm}^{\text{TM}} = \hat{\mathbf{I}}[i\nabla \times \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})f_l(qr)/q] = (-1)^l \mathbf{E}_{lm}^{\text{TM}} \quad (\text{B'.5})$$

$$\hat{\mathbf{I}}\mathbf{E}_{lm}^{\text{TE}} = \hat{\mathbf{I}}[\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})f_l(qr)] = -(-1)^l \mathbf{E}_{lm}^{\text{TE}}. \quad (\text{B'.6})$$

Επομένως, ενώ ένα πολύπολο TM έχει την αρτιότητα των σφαιρικών αρμονικών, δηλαδή μετασχηματίζεται όπως ένα αντίστοιχο βαθμωτό πεδίο, ένα πολύπολο TE έχει αντίθετη αρτιότητα.

Ας δούμε για παράδειγμα πώς προβάλλεται μια δεκαεξαπολική ( $l = 4$ ) κατάσταση Mie, ηλεκτρικού (εγκάρσιου μαγνητικού - TM) και μαγνητικού (εγκάρσιου ηλεκτρικού - TE) τύπου, στις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της  $D_{4h}$ . Με βάση όσα είπαμε προηγουμένως, μπορούμε να υπολογίσουμε τους χαρακτήρες αυτών των αναγώγιμων αναπαραστάσεων στην ομάδα  $D_{4h}$  και τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα Β'.2.

$D_{4h}$	$\hat{E}$	$2\hat{C}_4$	$\hat{C}_2$	$2\hat{C}'_2$	$2\hat{C}''_2$	$\hat{I}$	$2\hat{S}_4$	$\hat{\sigma}_h$	$2\hat{\sigma}_v$	$2\hat{\sigma}_d$
TM <sub>4</sub>	9	1	1	1	1	9	1	1	1	1
TE <sub>4</sub>	9	1	1	1	1	-9	-1	-1	-1	-1

Πίνακας Β'.2: Πίνακας χαρακτήρων μιας δεκαεξαπολικής κατάστασης ( $l = 4$ ) Mie, ηλεκτρικού και μαγνητικού τύπου, για τις πράξεις συμμετρίας της ομάδας  $D_{4h}$ .

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (Β'.3), από τους Πίνακες Β'.1 και Β'.2 βρίσκουμε ότι οι δεκαεξαπολικές καταστάσεις ηλεκτρικού και μαγνητικού τύπου ανάγονται στις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της ομάδας  $D_{4h}$  ως εξής

$$\begin{aligned} \text{TM}_4 &= 2A_{1g} \oplus A_{2g} \oplus B_{1g} \oplus B_{2g} \oplus 2E_g \\ \text{TE}_4 &= 2A_{1u} \oplus A_{2u} \oplus B_{1u} \oplus B_{2u} \oplus 2E_u. \end{aligned} \quad (\text{B'.7})$$

Παρατηρούμε ότι στην αναγωγή της TM<sub>4</sub> υπεισέρχονται μόνον άρτιες αναπαραστάσεις (*g* - *gerade*) ενώ στην TE<sub>4</sub> μόνον περιττές (*u* - *ungerade*), σε συμφωνία με την ομοτιμία των συγκεκριμένων καταστάσεων Mie.

Μια πλεγματική κατάσταση με συγκεκριμένο  $\mathbf{k}_{\parallel}$  μπορεί να διεγερθεί από προσπίπτον επίπεδο κύμα με το ίδιο  $\mathbf{k}_{\parallel}$ , το οποίο έχει συμμετρία συμβατή με αυτή της πλεγματικής κατάστασης. Η συμβατότητα αυτή βρίσκεται χρησιμοποιώντας τον προβολικό τελεστή

$$\hat{\mathcal{P}}^{\Gamma_\lambda} = \frac{d_\lambda}{g} \sum_{\hat{P}} \chi^{\Gamma_\lambda}(\hat{P}) \hat{P}, \quad (\text{B'.8})$$

όπου  $d_\lambda$  η διάσταση της μη αναγώγιμης αναπαράστασης  $\Gamma_\lambda$ , τη συμμετρίας της οποίας έχει η πλεγματική κατάσταση, στην οποία θέλουμε να προβάλλουμε τη συνάρτηση που περιγράφει το προσπίπτον κύμα. Για παράδειγμα, το ηλεκτρικό πεδίο ενός κάθετα προσπίπτοντος κύματος ( $\mathbf{k}_{\parallel} = (0, 0)$ ), πολωμένο κατά τη διεύθυνση  $x$ , έχει μορφή  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{x} \exp(ik_z z)$ . Δρώντας με τον προβολικό τελεστή βρίσκουμε ότι  $\hat{\mathcal{P}}^{\Gamma_\lambda} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \neq 0$  μόνο όταν  $\Gamma_\lambda = E_g, E_u$ , δηλαδή η συνάρτηση του προσπίπτοντος κύματος έχει μη μηδενική προβολή μόνο στις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις  $E_g$  και  $E_u$  της ομάδας  $D_{4h}$ . Επομένως, φως που προσπίπτει κάθετα στο επίπεδο των σφαιρών και είναι πολωμένο κατά τη διεύθυνση  $x$  μπορεί να διεγείρει μόνον εκείνες τις πλεγματικές καταστάσεις που προέρχονται από το δεκαεξαπολικό συντονισμό Mie ηλεκτρικού τύπου, οι οποίες για  $\mathbf{k}_{\parallel} = (0, 0)$  έχουν συμμετρία  $E_g$ . Σύμφωνα με τη σχέση αναγωγής (Β'.7), αυτές είναι δύο σε αριθμό και, με βάση το χαρακτήρα τους, διπλά εκφυλισμένες. Πράγματι λοιπόν, αυτές είναι που εμφανίζονται ως δύο ξεχωριστές κορυφές στο φάσμα διέλευσης του Σχ. 15. Επιπλέον, λόγω της συμμετρίας του τετραγωνικού πλέγματος στην εναλλαγή μεταξύ των αξόνων  $x$  και  $y$ , αν το κύμα είναι πολωμένο κατά τον άξονα  $y$ , θα έχει την ίδια επίδραση με αυτή του πολωμένου κατά τον άξονα  $x$ .

Για  $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, 0)$ , οι πλεγματικές καταστάσεις έχουν τη συμμετρία της υποομάδας  $C_{2v}$  της  $D_{4h}$ , οι μετασχηματισμοί της οποίας διατηρούν το  $k_x$ . Ο πίνακας των χαρακτήρων της  $C_{2v}$  φαίνεται στον Πίνακα Β'.3.



$C_{2v}$	$\hat{E}$	$\hat{C}_{2x}$	$\hat{\sigma}_{xz}$	$\hat{\sigma}_{yz}$
$A_1$	1	1	1	1
$A_2$	1	1	-1	-1
$B_1$	1	-1	-1	1
$B_2$	1	-1	1	-1

Πίνακας Β'.3: Πίνακας χαρακτήρων των μη αναγωγίμων αναπαραστάσεων της ομάδας  $C_{2v}$ . Με  $\sigma$  συμβολίζουμε κατοπτρικά επίπεδα.

Ανάγοντας τις μη αναγωγίμες αναπαραστάσεις της  $D_{4h}$  σε αυτές της  $C_{2v}$ , με βάση την Εξ. (Β'.3), βρίσκουμε τον ακόλουθο πίνακα συμβατότητας

$D_{4h}$	$A_{1g}$	$A_{2g}$	$B_{1g}$	$B_{2g}$	$E_g$	$A_{1u}$	$A_{2u}$	$B_{1u}$	$B_{2u}$	$E_u$
$C_{2v}$	$A_1$	$B_2$	$A_1$	$B_2$	$A_2 \oplus B_1$	$A_2$	$B_1$	$A_2$	$B_1$	$A_1 \oplus B_2$

ο οποίος υποδεικνύει πόσες και ποιας συμμετρίας πλεγματικές καταστάσεις θα έχουμε για  $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, 0)$ . Για παράδειγμα, κάνοντας την αναγωγή της κατάστασης  $TM_4$  στις μη αναγωγίμες αναπαραστάσεις της  $C_{2v}$  (οι χαρακτήρες που χρειάζονται υπάρχουν στον Πίνακα Β'.2), βρίσκουμε

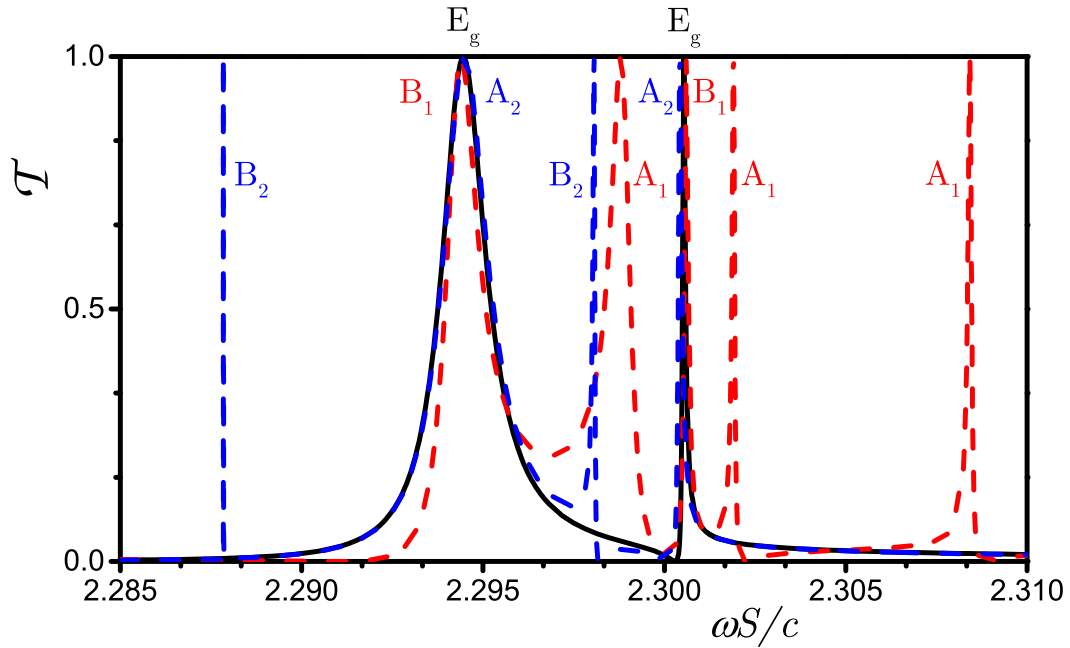
$$TM_4 = 3A_1 \oplus 2A_2 \oplus 2B_1 \oplus 2B_2 . \quad (B'.9)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι, για  $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, 0)$ , αίρεται ο διπλός εκφυλισμός της κατάστασης  $E_g$ , σε συμφωνία με τον παραπάνω πίνακα συμβατότητας.

Οι πλεγματικές καταστάσεις για  $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, 0)$  μπορούν να διεγερθούν από προσπίπτον κύμα που διαδίδεται στο επίπεδο  $x-z$  (πρόσπτωση υπό γωνία  $\theta = \arcsin\left(\frac{k_x a}{\omega a/c}\right)$ ) και έχει την κατάλληλη πόλωση. Για παράδειγμα, κύμα πόλωσης  $s$ , που έχει μορφή  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{y}} \exp\{i(k_x x + k_z z)\}$ , έχει μη μηδενική προβολή στις μη αναγωγίμες αναπαραστάσεις  $A_2, B_2$  της ομάδας  $C_{2v}$ , ενώ κύμα πόλωσης  $p$ , που έχει μορφή  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (a\hat{\mathbf{x}} + b\hat{\mathbf{z}}) \exp\{i(k_x x + k_z z)\}$ , έχει μη μηδενική προβολή στις  $A_1, B_1$ . Σύμφωνα με τη σχέση αναγωγής (Β'.9),  $s$  πολωμένο προσπίπτον κύμα με  $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, 0)$  διεγείρει συνολικά τέσσερις καταστάσεις, δύο από την κάθε συμμετρία,  $A_2$  και  $B_2$ , ενώ  $p$  πολωμένο κύμα διεγείρει συνολικά πέντε, τρεις συμμετρίας  $A_1$  και δύο συμμετρίας  $B_1$ . Συνολικά λοιπόν, και οι  $2l + 1 = 2 * 4 + 1 = 9$  πλεγματικές καταστάσεις που προέρχονται από το δεκαεξαπολικό συντονισμό Mie ηλεκτρικού τύπου, για  $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, 0)$ , θα είναι οπτικά ενεργές.

Το Σχ. 15 αποτελεί μεγέθυνση του Σχ. 8 στην περιοχή του χαμηλότερου συντονισμού Mie (δεκαεξαπολικού, ηλεκτρικού τύπου- $TM_4$ ) και απεικονίζει το φάσμα διέλευσης τετραγωνικού πλέγματος με θεμελιώδη διανύσματα  $\mathbf{a}_1 = a(1, 0)$ ,  $\mathbf{a}_2 = a(0, 1)$ , σφαιρικών σκεδαστών ακτίνας  $S$  ( $a = 2.5S$ ), σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς  $\epsilon = 12$  και μαγνητικής διαπερατότητας  $\mu = 1$ , στον αέρα. Η μαύρη συνεχής γραμμή αντιστοιχεί σε κάθετη πρόσπτωση φωτός, ανεξάρτητα της διεύθυνσης πόλωσης του (όπως αναμένεται σε τετραγωνικό πλέγμα), ενώ οι μπλε και κόκκινες διακεκομμένες γραμμές δείχνουν τα αποτελέσματα για πρόσπτωση στο επίπεδο  $x-z$ , υπό γωνία  $\theta = 3^\circ$  και πόλωση  $s$  και  $p$ , αντίστοιχα. Δίπλα από κάθε οπτικά ενεργή πλεγματική κατάσταση σημειώνουμε με κατάλληλο χρώμα τη συμμετρία της. Παρατηρούμε ότι, πράγματι, κάθετα προσπίπτον φως διεγείρει μόνο δύο πλεγματικές καταστάσεις, ενώ για  $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, 0)$  διεγείρονται τέσσερις καταστάσεις από κύμα πόλωσης  $s$  και πέντε από κύμα πόλωσης  $p$ . Όπως περιμέναμε από τον πίνακα συμβατότητας, οι διπλά εκφυλισμένες καταστάσεις συμμετρίας  $E_g$ , για  $k_{\parallel} = (0, 0)$ , δίνουν τη θέση τους σε μία κατάσταση συμμετρίας  $A_2$  και μία  $B_1$ , οι οποίες εκδηλώνονται στο φάσμα

διέλευσης όταν κύμα πόλωσης  $s$  και  $p$ , αντίστοιχα, προσπίπτει υπό κατάλληλη γωνία (στο επίπεδο  $x-z$ ) στο πλέγμα.



Σχήμα 15: Φάσμα διέλευσης τετραγωνικού πλέγματος με θεμελιώδη διανύσματα  $\mathbf{a}_1 = a(1, 0)$  και  $\mathbf{a}_2 = a(0, 1)$ , σφαιρικών σκεδαστών ακτίνας  $S$  ( $a = 2.5S$ ), σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς  $\epsilon = 12$  και μαγνητικής διαπερατότητας  $\mu = 1$ , στον αέρα. Με συνεχή μαύρη γραμμή απεικονίζεται η διελυσσιμότητα του πλέγματος υπό κάθετη πρόσπτωση, ενώ οι μπλε και κόκκινες διακεκομμένες γραμμές δείχνουν τα αποτελέσματα για πρόσπτωση στο επίπεδο  $x-z$ , υπό γωνία  $\theta = 3^\circ$  και πόλωση  $s$  και  $p$ , αντίστοιχα, στην περιοχή του χαμηλότερου δεκαεξαπολικού συντονισμού Mie, ηλεκτρικού τύπου.

## Παράρτημα Γ'

# Συντονισμοί Φανο

Όπως αναφέραμε στο Κεφ. 2, τα πλάτη των εισερχόμενων και εξερχόμενων κυμάτων μιας δομής συνδέονται μεταξύ τους μέσω του πίνακα σκέδασης  $\underline{\underline{S}}$ , ο οποίος είναι μοναδιακός όταν διατηρείται η ενέργεια και συμμετρικός όταν η δομή έχει κατοπτρική συμμετρία. Για συχνότητες κάτω του ορίου περίθλασης, όπου το σκεδαζόμενο κύμα αποτελείται μόνο από μία διαδιδόμενη δέσμη, και για  $\mathbf{k}_{\parallel}$  να βρίσκεται σε επίπεδο κατοπτρικής συμμετρίας (κάθετο στο πλέγμα), ώστε οι πολώσεις  $s$  και  $p$  να διαχωρίζονται, ο πίνακας σκέδασης έχει τη μορφή

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} t_s & r_s & 0 & 0 \\ r_s & t_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_p & r_p \\ 0 & 0 & r_p & t_p \end{pmatrix}, \quad (\Gamma.1)$$

όπου  $t_{s(p)}$  και  $r_{s(p)}$  τα πλάτη των διερχόμενων και ανακλώμενων κυμάτων, πόλωσης  $s(p)$ . Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\underline{\underline{S}}$  εύκολα υπολογίζονται να είναι  $t_s + r_s, t_s - r_s, t_p + r_p, t_p - r_p$  και, εφόσον ο πίνακας είναι μοναδιακός, μπορούμε να τις γράψουμε ως

$$\begin{aligned} t_s + r_s &= \exp\{2i\delta_{s+}\}, & t_s - r_s &= \exp\{2i\delta_{s-}\} \\ t_p + r_p &= \exp\{2i\delta_{p+}\}, & t_p - r_p &= \exp\{2i\delta_{p-}\}, \end{aligned} \quad (\Gamma.2)$$

με  $\delta_{s+}, \delta_{s-}, \delta_{p+}, \delta_{p-}$  φασικές μετατοπίσεις, οι οποίες είναι πραγματικές συναρτήσεις της συχνότητας. Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (Γ.2), η διελυσιμότητα της δομής για κύματα πόλωσης  $s(p)$  γράφεται συναρτήσει των φασικών μετατοπίσεων ως εξής

$$\mathcal{T} \equiv |t_{s(p)}|^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[ 2(\delta_{s(p)+} - \delta_{s(p)-}) \right] \right\}. \quad (\Gamma.3)$$

Εξάλου, η μεταβολή του αριθμού καταστάσεων μέχρι μια συχνότητα, δίνεται από τη σχέση [50]

$$\Delta N = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \ln \det \underline{\underline{S}} = \frac{1}{\pi} (\delta_{s+} + \delta_{s-} + \delta_{p+} + \delta_{p-}). \quad (\Gamma.4)$$

Στο εδάφιο 1.4 αναφερθήκαμε στους πόλους του πίνακα σκέδασης ενός μεμονωμένου σκεδαστή. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, ο πίνακας σκέδασης του πλέγματος μπορεί να έχει πόλους σε μιγαδικές συχνότητες  $\omega_i - i\gamma_i$ , με  $\gamma_i > 0$ . Εάν ένας τέτοιος πόλος εμφανίζεται στη συχνότητα  $\omega_1 - i\gamma_1$  και είναι απομονωμένος από τους υπόλοιπους (απέχει από αυτούς μεγάλη απόσταση στον πραγματικό άξονα), τότε η αντίστοιχη ιδιοτιμή είναι της μορφής  $\exp(2ia)(\omega - \omega_1 - i\gamma_1)/(\omega - \omega_1 + i\gamma_1)$ . Υποθέτουμε πως η φάση  $a$ , καθώς και οι φασικές μετατοπίσεις που προέρχονται από τις υπόλοιπες ιδιοτιμές του πίνακα, δεν μεταβάλλονται σημαντικά στην περιοχή του πόλου αυτού, όπου η εξάρτηση από τη συχνότητα βρίσκεται στον όρο  $\delta_1(\omega)$ , της σχετικής φασικής μετατόπισης, με

$$\begin{aligned} \cos [2\delta_1(\omega)] &= \frac{(\omega - \omega_1)^2 - \gamma_1^2}{(\omega - \omega_1)^2 + \gamma_1^2} \\ \sin [2\delta_1(\omega)] &= \frac{-2\gamma_1(\omega - \omega_1)}{(\omega - \omega_1)^2 + \gamma_1^2}. \end{aligned} \quad (\Gamma.5)$$

Η μεταβολή της πυκνότητας καταστάσεων στην περιοχή του πόλου προκύπτει από τις Εξ. (Γ.4) και (Γ.5) να είναι

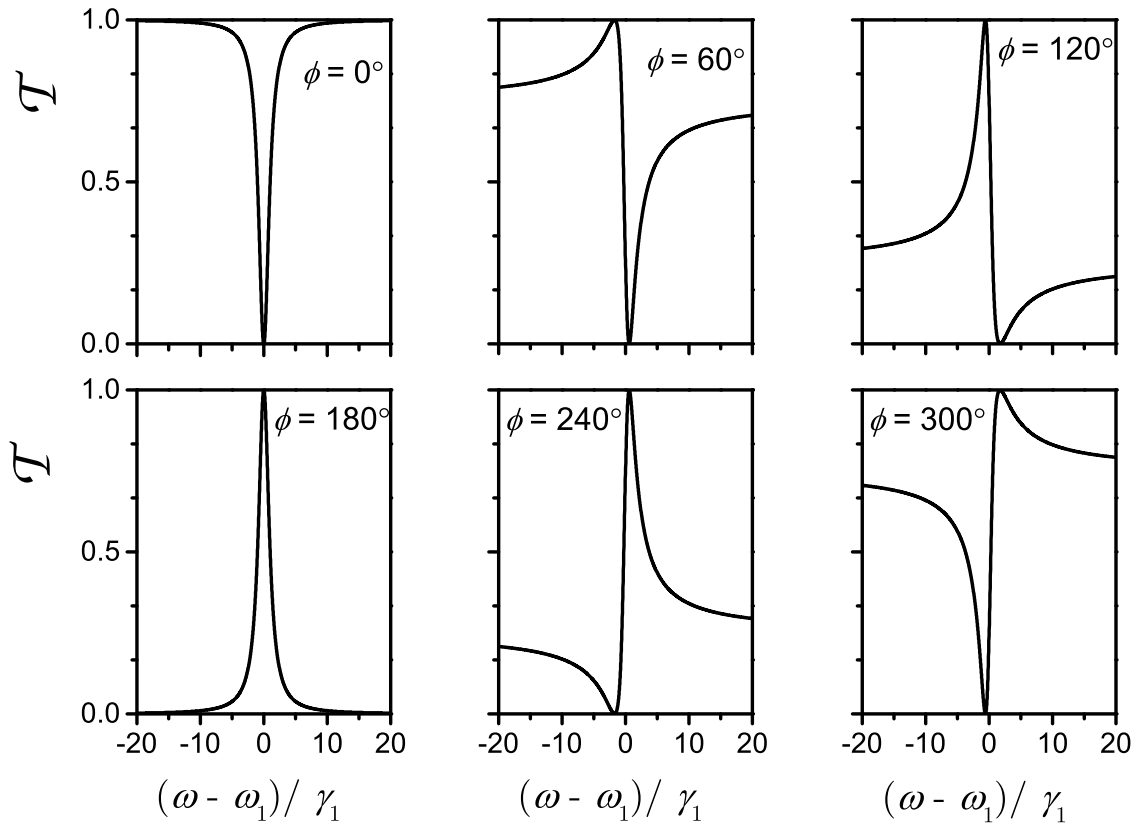
$$\Delta n(\omega) = \frac{d\Delta N(\omega)}{d\omega} \approx \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_1}{(\omega - \omega_1)^2 + \gamma_1^2}, \quad (\Gamma.6)$$

έχει δηλαδή μορφή Λορενζιανής καμπύλης με κέντρο τη συχνότητα  $\omega_1$ , ημιεύρος τον αντίστροφο χρόνο ζωής  $\gamma_1$  και ολοκληρώνεται στη μονάδα. Όταν το  $\gamma_1/\omega_1 \ll 1$  η κατάσταση συντονισμού έχει μεγάλο (αλλά όχι άπειρο) χρόνο ζωής, η ένταση του πεδίου της συγκεντρώνεται κατά κύριο λόγο εντός της δομής (αν και διαφεύγει σε μικρό ποσοστό στο περιβάλλον μέσο) και ονομάζεται ψευδοδέσμια κατάσταση.

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (Γ.3) και (Γ.5) αποδεικνύεται ότι η διελυσιμότητα κοντά στην περιοχή συχνοτήτων μιας τέτοιας ψευδοδέσμιας κατάστασης περιγράφεται ικανοποιητικά από τη σχέση

$$\mathcal{T} \approx \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{(\omega - \omega_1)^2 - \gamma_1^2}{(\omega - \omega_1)^2 + \gamma_1^2} \cos \phi - \frac{2\gamma_1(\omega - \omega_1)}{(\omega - \omega_1)^2 + \gamma_1^2} \sin \phi \right], \quad (\Gamma.7)$$

όπου  $\phi$  μια σχεδόν σταθερή φάση, η οποία περιέχει το τιμήμα των φασικών μετατοπίσεων που δεν προέρχονται από τον εν λόγω συντονισμό.



Σχήμα 16: Μορφές συντονισμού Fano στο φάσμα διέλευσης, βασισμένες στην Εξ. (Γ.7), για γωνίες  $\phi$  από  $0^\circ$  μέχρι  $300^\circ$ , με βήμα  $60^\circ$ .

# Βιβλιογραφία

- [1] K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals* (Springer, Heidelberg, 2001).
- [2] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, and R. D. Meade, *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light* (Princeton University Press, Princeton, 2008).
- [3] F. R. Morgenthaler, IRE Trans. Microw. Theory Tech. **6**, 167 (1958).
- [4] A. Oliner and A. Hessel, IRE Trans. Antennas Propag. **7**, 201 (1959).
- [5] J. C. Simon, IRE Trans. Microw. Theory Tech. **8**, 18 (1960).
- [6] A. Oliner and A. Hessel, IRE Trans. Microw. Theory Tech. **9**, 337 (1961).
- [7] E. S. Cassedy and A. Oliner, Proc. IEEE **51**, 1342 (1963).
- [8] E. S. Cassedy, Proc. IEEE **112**, 269 (1965).
- [9] D. Holberg and K. Kunz, IEEE Trans. Antennas Propag. **14**, 183 (1966).
- [10] E. S. Cassedy, Proc. IEEE **55**, 1154 (1967).
- [11] R. L. Fante, Appl. Sci. Res. **27**, 341 (1973).
- [12] F. A. Harfoush and A. Taflove, IEEE Trans. Antennas Propag. **39**, 898 (1991).
- [13] J. R. Zurita-Sánchez, P. Halevi, and J. C. Cervantes-González, Phys. Rev. A **79**, 053821 (2009).
- [14] J. R. Zurita-Sánchez and P. Halevi, Phys. Rev. A **81**, 053834 (2010).
- [15] J. R. Zurita-Sánchez, J. H. Abundis-Patiño, and P. Halevi, Opt. Express **20**, 5586 (2012).
- [16] S. Taravati, N. Chamanara, and C. Caloz, Phys. Rev. B **96**, 165144 (2017).
- [17] N. Chamanara, Z. L. Deck-Léger, C. Caloz, and D. Kalluri, Phys. Rev. A **97**, 063829 (2018).
- [18] T. T. Koutserimpas and R. Fleury, IEEE Trans. Antennas Propag. **66**, 5300 (2018).
- [19] A. M. Shaltout, V. M. Shalaev, and M. L. Brongersma, Science **364**, eaat3100 (2019).
- [20] S. Taravati and A. A. Kishk, IEEE Microwave Mag. **21**, 30 (2020).
- [21] X. Wang, G. Ptitcyn, V. S. Asadchy, A. Díaz-Rubio, M. S. Mirmoosa, S. Fan, and S. A. Tretyakov, Phys. Rev. Lett. **125**, 266102 (2020).
- [22] Q. Xiao, Q. Ma, L. W. Wu, Y. Gou, J. W. Wang, W. H. Li, R. Z. Jiang, X. Wan, and T. J. Cui, J. Appl. Phys. **130**, 235103 (2021).
- [23] N. Engheta, Nanophotonics **10**, 639 (2021).
- [24] E. Galiffi, R. Tirole, S. Yin, H. Li, S. Vezzoli, P. A. Huidobro, M. G. Silveirinha, R. Sapienza, A. Alù, and J. B. Pendry, Adv. Photonics **4**, 014002 (2022).
- [25] S. Taravati and G. V. Eleftheriades, ACS Photonics **9**, 305 (2022).
- [26] P. Dong, S. F. Preble, J. T. Robinson, S. Manipatrani, and M. Lipson, Phys. Rev. Lett. **100**, 033904 (2008).
- [27] Z. Yu and S. Fan, Nat. photonics **3**, 91 (2009).
- [28] H. Lira, Z. Yu, S. Fan, and M. Lipson, Phys. Rev. Lett. **109**, 033901 (2012).
- [29] R. Soref and B. Bennett, IEEE J. Quantum Electron. **23**, 123 (1987).
- [30] M. Z. Alam, I. De Leon, and R. W. Boyd, Science **352**, 795 (2016).
- [31] M. Clerici, N. Kinsey, C. DeVault, J. Kim, E. G. Carnemolla, L. Caspani, A. Shaltout, D. Faccio, V. Shalaev, A. Boltasseva, and M. Ferrera, Nat. Commun. **8**, 15829 (2017).
- [32] I. Stefanou, P. A. Pantazopoulos, and N. Stefanou, J. Opt. Soc. Am. B **38**, 407 (2021).
- [33] E. Panagiotidis, E. Almpanis, N. Papanikolaou, and N. Stefanou, Phys. Rev. A **106**, 013524 (2022).
- [34] E. Panagiotidis, E. Almpanis, N. Papanikolaou, and N. Stefanou, Adv. Optical Mater. DOI: 10.1002/adom.202202812.
- [35] N. Stefanou, V. Yannopapas, and A. Modinos, Comput. Phys. Commun. **113**, 49 (1998).
- [36] N. Stefanou, V. Yannopapas, and A. Modinos, Comput. Phys. Commun. **132**, 189

- (2000).
- [37] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1998).
  - [38] C. Schinke, P. C. Peest, J. Schmidt, R. Brendel, K. Bothe, M. R. Vogt, I. Kröger, S. Winter, A. Schirmacher, S. Lim, H. T. Nguyen, and D. MacDonald, *AIP Adv.* **5**, 067168 (2015).
  - [39] E. Shkondin, O. Takayama, M. E. Aryaee Panah, P. Liu, P. V. Larsen, M. D. Mar, F. Jensen, and A. V. Lavrinenko, *Opt. Mater. Express* **7**, 1606 (2017).
  - [40] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, Cambridge, 2005).
  - [41] C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (Wiley-VCH, Weinheim, 1998).
  - [42] P. A. Pantazopoulos, *Controlling Light with Novel Static and Dynamic Magnetophotonic Structures* (Διδακτορική Διατριβή, Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, 2020).
  - [43] Α. Χριστοφί, *Ανισοτροπικά νανοσύνθετα φωτονικά υλικά* (Διδακτορική Διατριβή, Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, 2014).
  - [44] Χ. Τσερκέζης, *Εκπομπή και Διάδοση Φωτός σε Νανοδομημένα Πλασμαονικά Μεταλλικά* (Διδακτορική Διατριβή, Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, 2012).
  - [45] J. B. Pendry, *Low Energy Electron Diffraction : The Theory and Its Application to Determination of Surface Structure* (Academic Press, Cambridge, 1974).
  - [46] K. Kambe, *Zeitschrift für Naturforschung A* **22**, 322 (1967).
  - [47] R. Sainidou, N. Stefanou, and A. Modinos, *Phys. Rev. B* **69**, 064301 (2004).
  - [48] N. Stefanou, V. Karathanos, and A. Modinos, *J. Phys.: Cond. Matt.* **4**, 7389 (1992).
  - [49] J. F. Cornwell, *Group Theory and Electronic Energy Bands in Solids* (North-Holland Pub. Co, Amsterdam, 1969).
  - [50] K. Ohtaka, Y. Suda, S. Nagano, T. Ueta, A. Imada, T. Koda, J. S. Bae, K. Mizuno, S. Yano, and Y. Segawa, *Phys. Rev. B* **61**, 5267 (2000).