



**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Χρονοπρογραμματισμός Πληρωμάτων μέσω  
Προγραμματισμού με Περιορισμούς**

**Οδυσσέας Ι. Στέφας**

**Επιβλέπων: Παναγιώτης Σταματόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής**

**ΑΘΗΝΑ**

**ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2023**

## **ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

Χρονοπρογραμματισμός Πληρωμάτων μέσω Προγραμματισμού με Περιορισμούς

**Οδυσσέας Ι. Στέφας**

A.M.: 1115201700151

**Επιβλέπων: Παναγιώτης Σταματόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής**

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο προγραμματισμός με περιορισμούς είναι μια ευέλικτη προσέγγιση για την επίλυση πολλών και διαφορετικών ειδών προβλημάτων. Η παρούσα εργασία στοχεύει σε μια σύντομη παρουσίαση αυτού, και της χρησιμότητάς του στον χρονοπρογραμματισμό πτήσεων, ένα πραγματικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, και πεδίο ενεργού έρευνας από τις αεροπορικές εταιρείες.

**ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ:** Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών

**ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:** χρονοπρογραμματισμός πτήσεων, χρονοπρογραμματισμός πληρωμάτων, πρόβλημα βελτιστοποίησης, προγραμματισμός με περιορισμούς, ακέραιος προγραμματισμός

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ .....</b>	<b>6</b>
<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....</b>	<b>7</b>
<b>2. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΠΛΗΡΩΜΑΤΩΝ .....</b>	<b>8</b>
2.1. Κατασκευή συνδυασμών πτήσεων (Crew Pairing).....	8
2.2. Ανάθεση πληρωμάτων (Crew Rostering).....	9
2.3. Μοντέλα επίλυσης .....	9
2.3.1. Μικτός-ακέραιος προγραμματισμός (Mixed-integer programming).....	9
2.3.2. Μη-γραμμικός ακέραιος προγραμματισμός (Non-linear integer programming) .....	10
2.3.3. Στοχαστικά μοντέλα (Stochastic modeling) .....	10
2.3.4. Θεωρία ασαφών συνόλων (fuzzy sets) .....	10
2.4. Μεθοδολογίες επίλυσης .....	10
2.4.1. Γραμμικός προγραμματισμός (Linear programming) .....	10
2.4.2. Ακέραιος προγραμματισμός (Integer programming) .....	10
2.4.3. Δημιουργία στηλών (Column generation).....	11
2.4.4. Μετα-ευρετικές προσεγγίσεις (Meta-heuristic approaches).....	11
<b>3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ.....</b>	<b>12</b>
3.1. Ορισμός.....	12
3.2. Παράδειγμα.....	12
3.3. Πλεονεκτήματα .....	13
3.4. Διακριτές και συνεχείς μεταβλητές .....	13
3.5. Τύποι περιορισμών .....	13
3.6. Αλγόριθμοι Επίλυσης Προβλημάτων Ικανοποίησης Περιορισμών .....	14
3.6.1. Αναζήτηση με υπαναχώρηση (Backtracking search) .....	14
3.6.2. Minimum Remaining Values - MRV.....	14
3.6.3. Degree Heuristic .....	15
3.6.4. Least Constraining Value - LCV .....	15

3.6.5. Forward Checking - FC.....	15
3.6.6. Διάδοση περιορισμών (constraint propagation) .....	15
3.6.7. Υπαναχώρηση με άλμα (backjumping).....	15
<b>3.7. Λίγα λόγια για το Naxos Solver .....</b>	<b>16</b>
<b>4. ΑΝΑΘΕΣΗ ΠΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ .....</b>	<b>18</b>
4.1. Περιγραφή προγραμματιστικού προβλήματος .....	18
4.2. Οδηγίες Χρήσης Προγράμματος .....	19
4.3. Κωδικοποίηση Περιορισμών.....	21
4.4. Κωδικοποίηση Αντικειμενικής Συνάρτησης .....	25
<b>5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ .....</b>	<b>27</b>
5.1. Απλό παράδειγμα με την πρώτη ημέρα πτήσεων μόνο. ....	27
5.2. Όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων με 51 πιλότους. ....	29
5.3. Όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων με 51 πιλότους και χρονικό όριο 12 ωρών. ....	43
5.4. Όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων με 56 πιλότους. ....	43
5.5. Όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων με 61 πιλότους και έλεγχο αποτελεσμάτων. ....	58
5.6. Όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων με 66 πιλότους και έλεγχο αποτελεσμάτων. ....	58
5.7. Όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων με 71 πιλότους και έλεγχο αποτελεσμάτων. ....	58
5.8. Όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων με 71 πιλότους, χρονικό όριο 12 ωρών και έλεγχο αποτελεσμάτων.....	58
<b>6. ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΔΟΥΛΕΙΑ .....</b>	<b>60</b>
<b>ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ .....</b>	<b>61</b>
<b>ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....</b>	<b>64</b>

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1: Χάρτης της Αυστραλίας.....σελ. 12

Εικόνα 2: Γράφημα της Αυστραλίας.....σελ. 12

## **ΠΡΟΛΟΓΟΣ**

Η παρούσα εργασία διενεργήθηκε στο πλαίσιο των προπτυχιακών σπουδών στο Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Ευχαριστώ τον καθηγητή μου, επ. καθ. Παναγιώτη Σταματόπουλο, για τη συνεργασία και την πολύτιμη συμβολή του στην ολοκλήρωσή της.

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αυτή η εργασία έχει σκοπό να διερευνήσει το πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού πληρωμάτων αεροπορικών εταιρειών (crew scheduling). Είναι ένα από τα πιο περίπλοκα προβλήματα με μεγάλο οικονομικό μέγεθος και αντίκτυπο, που καλούνται να λύσουν οι αεροπορικές εταιρείες. Ένα δύσκολο πρόβλημα βελτιστοποίησης, που περιέχει πολυάριθμους περιορισμούς [1].

Καθώς η βιομηχανία των αερομεταφορών μεγαλώνει σταθερά, ιδιαίτερα από τα μέσα του 20ου αιώνα, το πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού πτήσεων γίνεται όλο και πιο περίπλοκο. Ο αριθμός των αεροπορικών εταιρειών μεγαλώνει, όπως και ο αριθμός των πτήσεων, των αεροσκαφών, των εργαζομένων και των επιβατών. Η βιομηχανία των αερομεταφορών είναι πολύ ανταγωνιστική, συνεπώς είναι κρίσιμο για την κερδοφορία και την επιβίωση των αεροπορικών εταιρειών να βρίσκουν αποδοτικές λύσεις σε αυτό το πρόβλημα, λαμβάνοντας υπόψη τους πολλούς παράγοντες που εμπλέκονται [3].

Οι αεροπορικές εταιρείες έχουν αρχίσει να δημιουργούν τμήματα επιχειρησιακής έρευνας, τα οποία καλούνται να αντιμετωπίσουν και να βελτιστοποιήσουν πολλά αλληλοεξαρτώμενα ζητήματα [1]. Τον χρονοπρογραμματισμό πτήσεων, αεροσκαφών και πληρωμάτων, τη διαχείριση πόρων και την αντιμετώπιση απροσδόκητων καταστάσεων. Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθώ με το χρονοπρογραμματισμό πτήσεων, και θα προσπαθήσω να λύσω ένα παράδειγμα αυτού. Τα δεδομένα εισόδου του προγράμματός μου θα είναι ένα σύνολο από συνδυασμούς πτήσεων που καθορίστηκαν από μια αεροπορική εταιρεία για τη λειτουργία της σε ένα χρονικό διάστημα, και ένας αριθμός κυβερνητών/πιλότων. Ο σκοπός είναι να ανατεθούν τα σχέδια πτήσης στους κυβερνήτες τηρώντας κάποιους περιορισμούς, και όσο το δυνατόν ομοιόμορφα.

Στον πραγματικό κόσμο, το πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού συχνά μοντελοποιείται ως πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών. Θα το αντιμετωπίσω ως τέτοιο, και για να το λύσω θα χρησιμοποιήσω το Naxos Solver, μια βιβλιοθήκη επίλυσης Προβλημάτων Ικανοποίησης Περιορισμών, στη γλώσσα προγραμματισμού C++. Το Naxos Solver αναπτύχθηκε από το Νικόλαο Ποθητό, απόφοιτο του τμήματος, για τη δική του πτυχιακή εργασία.



## 2. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΠΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Ο χρονοπρογραμματισμός πληρωμάτων μπορεί να οριστεί ως την αντιστοίχιση πληρωμάτων με προγραμματισμένες πτήσεις, ώστε όλες οι πτήσεις να έχουν το απαραίτητο πλήρωμα [1]. Η λύση αυτού του προβλήματος βελτιστοποίησης αξιολογείται με ένα σύνολο από κριτήρια. Κάποια από αυτά είναι η διαφορά στις ώρες εργασίας μεταξύ των εργαζομένων, ο αριθμός διανυκτερεύσεων, οι μεταφορές τους σε άλλο αεροδρόμιο ως επιβάτες, και ο χρόνος που περνούν στο έδαφος. Είναι άκρως επιθυμητό οι τιμές αυτών των παραμέτρων να είναι όσο πιο μικρές γίνεται [1].

Λόγω της δυσκολίας του προβλήματος αυτού, συνήθως χωρίζεται σε δύο υποπροβλήματα: την κατασκευή συνδυασμών πτήσεων (crew pairing) και την ανάθεση πληρωμάτων (crew rostering). Η λύση του πρώτου είναι τα δεδομένα εισόδου για το δεύτερο. [2] Ιδανικά θα έπρεπε να αντιμετωπίζεται ως ενιαίο πρόβλημα με ένα μόνο μοντέλο. Όμως ο κύριος λόγος που διασπάται είναι ότι το ενιαίο πρόβλημα είναι πολύ μεγάλο για να λυθεί ως τέτοιο. Επίσης, όταν το πρόβλημα ανάθεσης πληρωμάτων λαμβάνει υπόψη τις προτιμήσεις των μελών του πληρώματος ως προς τους συνδυασμούς πτήσεων, τότε οι συνδυασμοί πρέπει να έχουν υπολογιστεί προηγουμένως. Επιπλέον, ο σκοπός των δύο υποπροβλημάτων είναι διαφορετικός, και γενικότερα είναι πιο εύκολο να υπολογιστούν ξεχωριστά.

### 2.1. Κατασκευή συνδυασμών πτήσεων (Crew Pairing)

Οι στόχοι του προβλήματος κατασκευής συνδυασμού πτήσεων είναι να ελαχιστοποιηθεί το κόστος και να τηρούνται όλα τα νομικά κριτήρια για τις ώρες και ημέρες εργασίας, να καλυφθούν όλες οι πτήσεις στο πρόγραμμα, και να χρησιμοποιηθούν αποδοτικά όλοι οι πόροι, για μια υψηλής ποιότητας λύση [1].

Οι πτήσεις που προγραμματίστηκαν κατά την προηγούμενη φάση, αυτή του χρονοπρογραμματισμού πτήσεων, ομαδοποιούνται σε συνδυασμούς πτήσεων. Κάθε συνδυασμός πτήσεων αποτελείται από μια σειρά πτήσεων με έναρξη και τέλος το αεροδρόμιο που είναι η βάση της εταιρείας. Η πρώτη πτήση του συνδυασμού ξεκινά από το αεροδρόμιο-βάση, και η τελευταία πτήση του συνδυασμού τελειώνει στο αεροδρόμιο-βάση. Ένας συνδυασμός πτήσεων μπορεί να είναι μια πτήση μετ' επιστροφής σε ένα μόνο προορισμό, ή να περιλαμβάνει δύο ή περισσότερες πτήσεις μετ' επιστροφής σε δύο ή περισσότερους προορισμούς. Μπορεί επίσης να περιλαμβάνει πτήσεις μεταξύ πολλαπλών προορισμών.

Η κατασκευή συνδυασμών πτήσεων είναι η φάση του χρονοπρογραμματισμού που καθορίζεται το κόστος, και είναι κρίσιμη για τις αεροπορικές εταιρείες, αφού μέσω αυτής ελαχιστοποιείται το λειτουργικό κόστος του πληρώματος και μεγιστοποιείται η αποδοτική χρήση του. Ένα αποδεκτό σύνολο συνδυασμών πτήσεων πρέπει να πληροί τους νομικούς περιορισμούς των ρυθμιστικών αρχών αεροπλοΐας, και περιορισμούς των αεροσκαφών. Υπό αυτούς τους περιορισμούς, ο κύριος στόχος είναι να βρεθούν οι πιο αποδοτικοί συνδυασμοί για όλες τις πτήσεις στο πρόγραμμα [1].

Κάποια από τα όρια που πρέπει να γίνουν σεβαστά για να είναι νόμιμοι οι συνδυασμοί, αφορούν το χρόνο ανάπαυσης, το χρόνο αναμονής από μια πτήση στην επόμενη, και τη συνολική και μεμονωμένη διάρκεια των πτήσεων.

## 2.2. Ανάθεση πληρωμάτων (Crew Rostering)

Αφού αποφασιστούν οι συνδυασμοί πτήσεων, πρέπει να γίνει η ανάθεση πληρωμάτων, το δεύτερο μέρος του χρονοπρογραμματισμού πληρωμάτων, όπου κάθε ιπτάμενος εργαζόμενος της εταιρείας αντιστοιχίζεται σε κάποιους συνδυασμούς πτήσεων. Είναι και αυτό ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα στη λειτουργία των αεροπορικών εταιρειών, αν και έχει μικρότερο οικονομικό αντίκτυπο από την κατασκευή συνδυασμών πτήσεων.

Η ανάθεση πληρωμάτων γίνεται σύμφωνα με τις απαιτήσεις των συνδυασμών πτήσεων από την προηγούμενη φάση. Για την ανάθεση πληρωμάτων χρησιμοποιείται μια από τις παρακάτω προσεγγίσεις: [2]

1. Κατασκευάζονται γραμμές προσφορών και ανακοινώνονται στα μέλη του πληρώματος. Τα μέλη του πληρώματος δηλώνουν την προτίμησή τους, και αυτή χρησιμοποιείται στην κατανομή των σχεδίων πτήσης.
2. Προσωποποιημένες αναθέσεις λαμβάνουν υπόψη τις προτιμήσεις των μελών του πληρώματος, και τις ανάγκες τους για ειδικές δραστηριότητες όπως εκπαίδευση, διακοπές και ιατρικές εξετάσεις [6]. Οι προσωποποιημένες αναθέσεις συνδυάζονται για να βγει ένα μηνιαίο πρόγραμμα που σέβεται τις επιδιώξεις της εταιρείας και παρέχει ένα επίπεδο ικανοποίησης των μελών του πληρώματος. Οι προσωποποιημένες αναθέσεις μπορεί να ικανοποιούν τις προτιμήσεις όλων στον ίδιο βαθμό (όπως το προγραμματιστικό παράδειγμα της εργασίας αυτής), ή να δίνουν προτεραιότητα στα πιο υψηλόβαθμα μέλη του πληρώματος.

Παραδοσιακά, η προσέγγιση με γραμμές προσφοράς είναι πιο συνηθισμένη στις αμερικάνικες εταιρείες, ενώ οι προσωποποιημένες αναθέσεις είναι πιο κοινές στον υπόλοιπο κόσμο. Τα τελευταία χρόνια όμως οι προσωποποιημένες αναθέσεις κερδίζουν έδαφος στη Βόρεια Αμερική επειδή έχουν πλεονεκτήματα τόσο για τα πληρώματα όσο και για τις εταιρείες. Για τα πληρώματα, αυτή η προσέγγιση λαμβάνει υπόψη τις επιθυμίες τους κατά την κατασκευή του προγράμματος. Για τις εταιρείες, αυτή η προσέγγιση λαμβάνει υπόψη τις προκαθορισμένες δραστηριότητες των μελών του πληρώματος και τις εκκρεμείς υποχρεώσεις από τον προηγούμενο μήνα. Έτσι μειώνονται οι αλλαγές στο πρόγραμμα και αυξάνεται η παραγωγικότητα.

## 2.3. Μοντέλα επίλυσης

Στη βιβλιογραφία, πολλές τεχνικές επιχειρησιακής έρευνας έχουν προταθεί για να μοντελοποιηθούν τα προβλήματα χρονοπρογραμματισμού πτήσεων [1]. Οι κυριότερες από αυτές είναι:

### 2.3.1. Μικτός-ακέραιος προγραμματισμός (Mixed-integer programming)

Σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού mixed-integer, κάποιες από τις μεταβλητές απόφασης απαιτείται να είναι ακέραιες στην ιδανική λύση. Υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι για τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού mixed-integer, αλλά συνήθως λύνονται με τον branch-and-bound αλγόριθμο. Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού αποτελείται από μια γραμμική εξίσωση που πρέπει να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί, και από ένα πλήθος γραμμικών ανισοτήτων/περιορισμών. Επειδή η λύση στο πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού πρέπει να είναι ακέραια, το μοντέλο mixed-integer στη συνέχεια μετατρέπεται σε ακέραιο.

### **2.3.2. Μη-γραμμικός ακέραιος προγραμματισμός (Non-linear integer programming)**

Στον πραγματικό κόσμο, σε πολλά προβλήματα είναι δύσκολο να βρεθούν γραμμικές σχέσεις μεταξύ των περιορισμών και των αντικειμενικών συναρτήσεων. Ο μη-γραμμικός προγραμματισμός αναπτύχθηκε για προβλήματα που τουλάχιστον ένας από τους περιορισμούς, ή η αντικειμενική συνάρτηση, είναι μη γραμμικά. Η μη γραμμική προσέγγιση επιτρέπει το μοντέλο κόστους να είναι σχετικά ευέλικτο, αλλά αυξάνει την πολυπλοκότητα του προβλήματος και το χρόνο επίλυσης. Γι'αυτό συνήθως προτιμάται ένα γραμμικό μοντέλο.

### **2.3.3. Στοχαστικά μοντέλα (Stochastic modeling)**

Τα παραδοσιακά προβλήματα χρονοπρογραμματισμού είναι ντετερμινιστικά και γενικά δεν προβλέπουν πιθανές αναστατώσεις. Όμως οι αεροπορικές εταιρείες συχνά αντιμετωπίζουν ανωμαλίες, όπως κακοκαιρίες, καθυστερήσεις και αναγκαστικές εκτροπές των αεροσκαφών προς άλλο αεροδρόμιο. Τα στοχαστικά μοντέλα λαμβάνουν υπόψη τους τυχαίους παράγοντες, και αποσκοπούν στο να παράγουν εύρωστες λύσεις, ανθεκτικές σε απρόοπτα.

### **2.3.4. Θεωρία ασαφών συνόλων (fuzzy sets)**

Η ασαφής λογική είναι μια μέθοδος επίλυσης προβλημάτων ενσωματώνοντας αβεβαιότητες, που χρησιμοποιείται ευρέως σήμερα. Μπορεί να εκφράζει με γλωσσικές μεταβλητές κάποιες αβεβαιότητες που δεν μπορούν να εκφραστούν με αριθμητικές μεταβλητές. Έχει χρησιμοποιηθεί κυρίως ερευνητικά, καθώς σε πραγματικές εφαρμογές προτιμώνται τα στοχαστικά μοντέλα.

## **2.4. Μεθοδολογίες επίλυσης**

Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί πολλές προσεγγίσεις για τη βελτιστοποίηση του χρονοπρογραμματισμού [\[1\]](#).

### **2.4.1. Γραμμικός προγραμματισμός (Linear programming)**

Στα μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού, οι αντικειμενικές συναρτήσεις και οι περιορισμοί είναι γραμμικοί, δηλαδή πραγματικοί αριθμοί, όχι ακέραιοι. Λόγω της δυσκολίας του ακέραιου προγραμματισμού, το πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού συνήθως λύνεται με γραμμικό ή mixed-integer προγραμματισμό, και στο τέλος μετατρέπεται σε ακέραιο. Ο γραμμικός προγραμματισμός σε συνδυασμό με ευρετικές μεθόδους μειώνει το χώρο αναζήτησης και επιτρέπει να λύσουμε προβλήματα μεγάλης κλίμακας. Ένα ακόμα εργαλείο είναι η μέθοδος SPRINT, η οποία βελτιστοποιεί ένα μεγάλο πρόβλημα χωρίζοντάς το σε μικρότερα, πιο διαχειρίσιμα γραμμικά προβλήματα.

### **2.4.2. Ακέραιος προγραμματισμός (Integer programming)**

Το ακέραιο πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών, σε μεγάλα προβλήματα, οδηγεί σε πολύ μεγάλο χώρο αναζήτησης, που είναι πρακτικά αδύνατο να ερευνηθεί. Γι' αυτό είναι κρίσιμη η ενσωμάτωση ευρετικών μεθόδων ώστε να αναπτύσσονται μόνο οι κλάδοι του δέντρου αναζήτησης που περιέχουν τις καλύτερες λύσεις, όπως κάνουν οι τεχνικές branch-and-price και branch-and-cut.

### **2.4.3. Δημιουργία στηλών (Column generation)**

Η μέθοδος δημιουργίας στηλών είναι πολύ αποτελεσματική και χρησιμοποιείται ευρέως σε μεγάλης κλίμακας γραμμικά προβλήματα, στην έρευνα και στη βιομηχανία [5]. Καθώς το πρόβλημα μεγαλώνει, ο αλγόριθμος simplex μπορεί να δουλεύει με εκατομμύρια στήλες, και γι' αυτό θεωρείται ότι οι περισσότερες μεταβλητές στον αλγόριθμο simplex δεν είναι στο σύνολο των βέλτιστων λύσεων. Συνεπώς, η μέθοδος δημιουργίας στηλών βασίζεται στην ιδέα ότι, για τη λύση του προβλήματος, αρκεί να λάβουμε υπόψη μόνο ένα υποσύνολο των μεταβλητών. Οι μεταβλητές αυτές ξεχωρίζονται με τη μέθοδο reduced costs.

### **2.4.4. Μετα-ευρετικές προσεγγίσεις (Meta-heuristic approaches)**

Επειδή οι ακριβείς προσεγγίσεις δεν επαρκούν για να λυθούν τα προβλήματα μεγάλης κλίμακας, οι περισσότερες μελέτες ενσωματώνουν τη μετα-ευρετική προσέγγιση, ή και χρησιμοποιούν μόνο αυτή. Οι μετα-ευρετικοί αλγόριθμοι είναι μια εξέλιξη που σκοπεύει να βελτιώσει μια πτυχή της επίλυσης του προβλήματος. Από τη βιβλιογραφία φαίνεται πως είναι υποστηρικτικοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για κάποια σημεία του προβλήματος, όχι για τη βασική λύση. Πολλοί μετα-ευρετικοί αλγόριθμοι έχουν χρησιμοποιηθεί για το πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού. Οι γενετικοί αλγόριθμοι, ο αλγόριθμος έρευνας tabu, ο αλγόριθμος της αποικίας μυρμηγκιών και ο αλγόριθμος προσομοιωμένης απόκτησης, χρησιμοποιούνται ευρέως. Πιο καινούριοι αλγόριθμοι για περίπλοκα και συνδυαστικά προβλήματα βελτιστοποίησης, όπως ο HBMO και ο MOEA/D, δεν έχουν αξιολογηθεί ακόμα επαρκώς στο πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού [6].

### 3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ

#### 3.1. Ορισμός

Ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών είναι μια γενική δομή τυποποίησης προβλημάτων στην τεχνητή νοημοσύνη. Ορίζεται από ένα σύνολο μεταβλητών  $X_1, X_2, \dots, X_n$  και από ένα σύνολο περιορισμών  $C_1, C_2, \dots, C_3$ . Κάθε μεταβλητή  $X_i$  μπορεί να λάβει τιμές από ένα μη κενό σύνολο (domain)  $D_i$ . Κάθε περιορισμός  $C_i$  αναφέρεται σε κάποιο υποσύνολο των μεταβλητών, και καθορίζει τους επιτρεπτούς συνδυασμούς τιμών για αυτό το υποσύνολο. Μια κατάσταση του προβλήματος ορίζεται με ανάθεση τιμών σε μερικές ή όλες τις μεταβλητές  $\{X_1 = v_1, X_2 = v_2, \dots, X_n = v_n\}$ . Μια ανάθεση τιμών που δεν παραβιάζει κανένα περιορισμό ονομάζεται συνεπής (consistent) ή νόμιμη ανάθεση, και μια ανάθεση τιμών που περιλαμβάνει όλες τις μεταβλητές λέγεται πλήρης. Μια πλήρης και νόμιμη ανάθεση είναι λύση του προβλήματος. [4]

Σε κάποια προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών, αναζητούμε τη λύση που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί μια αντικειμενική συνάρτηση (objective function). Η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει μια σχέση μεταξύ κάποιων, ή όλων, των μεταβλητών. Ο στόχος είναι να βρούμε μια πλήρη, νόμιμη ανάθεση, που δίνει την καλύτερη, ή έστω μια σχετικά καλή, τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση.

#### 3.2. Παράδειγμα



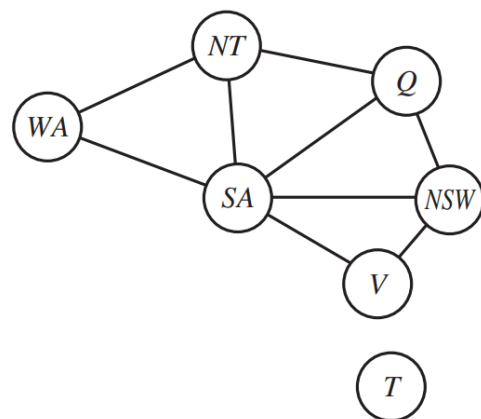
Εικόνα 1: Χάρτης της Αυστραλίας

Είναι χρήσιμο να αντιλαμβανόμαστε ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών ως ένα γράφημα. Οι κορυφές του γραφήματος αντιστοιχούν σε μεταβλητές του προβλήματος, και οι ακμές αντιστοιχούν σε περιορισμούς. Αν δεν υπάρχει ακμή μεταξύ δύο κόμβων, σημαίνει ότι δεν υπάρχει άμεσος περιορισμός μεταξύ τους, όχι τουλάχιστον στα δεδομένα εισόδου του προβλήματος [10].

Το πρόβλημα χρωματισμού του χάρτη της Αυστραλίας μπορεί να αναπαρασταθεί με το γράφημα στα δεξιά. (εικόνες: [4])

Ένα απλό παράδειγμα που συχνά χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία είναι αυτό με το χάρτη της Αυστραλίας.

Σκοπός του προβλήματος είναι να χρωματίσουμε κάθε περιοχή με ένα από τρία χρώματα, έστω κόκκινο, πράσινο, μπλε, έτσι ώστε οι περιοχές που εφάπτονται να έχουν διαφορετικό χρώμα.



Εικόνα 2: Γράφημα της Αυστραλίας

### 3.3. Πλεονεκτήματα

Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος ως πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών έχει σημαντικά πλεονεκτήματα.

Η αναπαράσταση των καταστάσεων σε ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών γίνεται σύμφωνα με ένα καθιερωμένο πρότυπο, δηλαδή με ένα σύνολο μεταβλητών στις οποίες δίνονται τιμές. Έτσι λύνονται με παρόμοια μεθοδολογία, και η διαδικασία επίλυσης και οι συναρτήσεις μπορούν να γραφούν με ένα γενικό τρόπο, ώστε να εφαρμόζονται σε όλα τα προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών. Επίσης, μπορούμε να αναπτύσσουμε αποτελεσματικούς ευρετικούς μηχανισμούς που δεν στοχεύουν σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλά. Τέλος, η δομή του γραφήματος με το οποίο αναπαρίσταται το πρόβλημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απλοποίηση της διαδικασίας επίλυσης, παρέχοντας σε μερικές περιπτώσεις εκθετική μείωση της πολυπλοκότητας. [4]

### 3.4. Διακριτές και συνεχείς μεταβλητές

Το απλούστερο είδος προβλημάτων ικανοποίησης περιορισμών χρησιμοποιεί διακριτές μεταβλητές, οι οποίες έχουν πεπερασμένα πεδία. Το πρόβλημα του χρωματισμού του χάρτη είναι αυτού του είδους, όπως και το παράδειγμα χρονοπρογραμματισμού πτήσεων που λύνεται σε αυτή την εργασία. Το πρόβλημα είναι εκθετικό ως προς τον αριθμό των μεταβλητών: αν το μέγιστο πεδίο μιας μεταβλητής του προβλήματος είναι  $d$ , τότε ο αριθμός των δυνατών πλήρων αναθέσεων τιμών είναι  $O(d^n)$ .

Οι διακριτές μεταβλητές μπορούν επίσης να έχουν άπειρα πεδία, όπως το σύνολο των ακεραίων, ή το σύνολο των συμβολοσειρών. Όταν τα πεδία είναι άπειρα, είναι αδύνατο να περιγραφούν οι περιορισμοί με απαρίθμηση όλων των δυνατών συνδυασμών τιμών. Τότε πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια γλώσσα περιορισμών (constraint language), η οποία περιγράφει τις επιτρεπτές τιμές των μεταβλητών. Αυτή μπορεί να είναι ένα σύνολο ανισοτήτων μεταξύ των μεταβλητών. [4]

Στον πραγματικό κόσμο, τα προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών με συνεχή πεδία είναι πολύ συχνά, και μελετώνται εκτεταμένα στην επιστήμη της επιχειρησιακής έρευνας. Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού ανήκουν σε αυτή την κατηγορία, και οι περιορισμοί σε αυτά εκφράζονται με γραμμικές ανισότητες. Τα προβλήματα αυτά μπορούν να επιλύονται σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς τον αριθμό των μεταβλητών. [4]

### 3.5. Τύποι περιορισμών

Εκτός από τους τύπους των μεταβλητών, τα προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών διακρίνονται και ως προς τον τύπο των περιορισμών. [4]

Ο απλούστερος τύπος είναι ο μοναδιαίος περιορισμός (unary constraint), ο οποίος περιορίζει την τιμή μιας μόνο μεταβλητής. Σε ένα πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού, ένας πιλότος μπορεί να είναι απασχολημένος για εκπαίδευση κάθε Δευτέρα και Τρίτη, και άρα να μη μπορεί να αναλάβει συνδυασμούς πτήσεων τότε. Κάθε μοναδιαίος περιορισμός μπορεί να ικανοποιηθεί με απλή προεπεξεργασία του πεδίου της αντίστοιχης μεταβλητής, ώστε να αφαιρεθούν οι τιμές που παραβιάζουν τον περιορισμό.

Ένας δυαδικός περιορισμός (binary constraint) συσχετίζει δύο μεταβλητές. Για παράδειγμα, ο περιορισμός  $NA \neq NSW$  (το χρώμα της Νότιας Αυστραλίας να είναι διάφορο του χρώματος της Νέας Νότιας Ουαλίας) είναι δυαδικός. Ένα πρόβλημα



ικανοποίησης περιορισμών που περιέχει μόνο δυαδικούς περιορισμούς ονομάζεται δυαδικό.

Οι περιορισμοί υψηλότερης τάξης (N-ary constraint) περιλαμβάνουν τρεις ή περισσότερες μεταβλητές. Το γράφημα που αναπαριστά τέτοιους περιορισμούς λέγεται υπεργράφημα [10]. Αποδεικνύεται ότι κάθε N-ary πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών μπορεί να μετατραπεί σε δυαδικό, με την εισαγωγή βοηθητικών μεταβλητών.

Πολλά προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών, όπως αυτό του χρονοπρογραμματισμού το οποίο εξετάζουμε, περιλαμβάνουν και περιορισμούς προτίμησης, που υποδεικνύουν ποιες λύσεις είναι προτιμότερες. Οι περιορισμοί προτίμησης συχνά κωδικοποιούνται ως κόστη στις αναθέσεις τιμών σε μεμονωμένες μεταβλητές.

### 3.6. Αλγόριθμοι Επίλυσης Προβλημάτων Ικανοποίησης Περιορισμών

Όλοι οι αλγόριθμοι επίλυσης χρησιμοποιούν μια καθοριστική ιδιότητα των προβλημάτων ικανοποίησης περιορισμών, την αντιμεταθετικότητα. Ένα πρόβλημα είναι αντιμεταθετικό αν η σειρά προτεραιότητας της εφαρμογής οποιουδήποτε δεδομένου συνόλου ενεργειών δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. [4]

#### 3.6.1. Αναζήτηση με υπαναχώρηση (Backtracking search)

Η αναζήτηση με υπαναχώρηση αναθέτει τιμές στις μεταβλητές σειριακά. Όταν όλες οι μεταβλητές που σχετίζονται με έναν περιορισμό έχουν λάβει τιμή, τότε ελέγχεται ο περιορισμός. Αν μια μερική ανάθεση παραβιάζει κάποιον περιορισμό, ο αλγόριθμος επιστρέφει στην πιο πρόσφατη μεταβλητή που έλαβε τιμή και έχει κι άλλες εναλλακτικές τιμές.

Η απλή υπαναχώρηση ουσιαστικά είναι μια αναζήτηση πρώτα εις βάθος (depth-first search). Έχει συνήθως εκθετική πολυπλοκότητα, και γι' αυτό δεν είναι αποτελεσματική για μεγάλα προβλήματα. Ένας λόγος για την χαμηλή της απόδοση είναι ότι διαφορετικά σημεία του χώρου αναζήτησης φτάνουν σε αδιέξοδο για τους ίδιους λόγους, ένα φαινόμενο που λέγεται thrashing [8]. Γι' αυτό είναι κρίσιμης σημασίας να χρησιμοποιήσουμε ευρετικές μεθόδους για στοχευμένες αναθέσεις τιμών, και συνεπώς μείωση του χρόνου αναζήτησης.

Οι ευρετικές μέθοδοι περιστρέφονται γύρω από 3 ερωτήματα: [4]

1. Ποια είναι η επόμενη μεταβλητή στην οποία θα πρέπει να ανατεθεί τιμή, και με ποια σειρά θα πρέπει να δοκιμαστούν οι τιμές της;
2. Τι συνέπειες έχουν οι τρέχουσες αναθέσεις τιμών μεταβλητών για τις άλλες μεταβλητές στις οποίες δεν έχουν ανατεθεί τιμές;
3. Όταν μια αλληλουχία αναθέσεων φτάσει σε αδιέξοδο, μπορεί η αναζήτηση να αποφύγει αυτό το αδιέξοδο σε επόμενες αναθέσεις;

#### 3.6.2. Minimum Remaining Values - MRV

Όταν επιλέγεται μια μεταβλητή για να της ανατεθεί μια τιμή, η απλή αναζήτηση με υπαναχώρηση επιλέγει την επόμενη μεταβλητή από μια στατική λίστα. Ο ευρετικός μηχανισμός των ελάχιστων απομεινουσών τιμών επιλέγει τη μεταβλητή με τις λιγότερες νόμιμες τιμές. Αυτό θα οδηγήσει πολύ πιο σύντομα σε αδιέξοδο, με αποτέλεσμα να

κλαδευτεί το δέντρο αναζήτησης και να αποφευχθούν άσκοπες αναζητήσεις. Αν μια μεταβλητή δεν έχει καμία νόμιμη τιμή, τότε επιλέγεται αυτή, ώστε να κλαδευτεί αμέσως το δέντρο αναζήτησης. Έχει ονομαστεί επίσης και ο μηχανισμός “της πιο δεσμευμένης μεταβλητής” (most constrained variable), ή “πρώτα στην αποτυχία” (fail-first). [4]

### 3.6.3. Degree Heuristic

Στο παράδειγμα με το χάρτη της Αυστραλίας, ο μηχανισμός MRV δεν βοηθά στην επιλογή της πρώτης περιοχής που θα χρωματιστεί, επειδή αρχικά κάθε περιοχή έχει 3 νόμιμα χρώματα. Τότε είναι χρήσιμος ο ευρετικός μηχανισμός βαθμού (degree heuristic). Αυτός ο μηχανισμός επιχειρεί να μειώσει τον παράγοντα διακλάδωσης των μελλοντικών επιλογών, επιλέγοντας τη μεταβλητή που εμπλέκεται στο μεγαλύτερο αριθμό περιορισμών με άλλες μεταβλητές που δεν έχουν ακόμα πάρει τιμή. Αυτός ο μηχανισμός δεν είναι τόσο ισχυρός όσο ο MRV, αλλά συχνά χρησιμεύει στην άρση των ισοδυναμιών (tie-breaker). [4]

### 3.6.4. Least Constraining Value - LCV

Όταν επιλέγεται μια μεταβλητή  $X$  από τον αλγόριθμο backtracking για να της ανατεθεί τιμή, ο ευρετικός μηχανισμός της λιγότερο δεσμευτικής τιμής είναι συχνά αποτελεσματικός στην επιτάχυνση του προγράμματος. Στη μεταβλητή  $X$  που έχει επιλεγεί, ανατίθεται η τιμή που αποκλείει τις λιγότερες τιμές από τα πεδία ορισμού των μεταβλητών που συνδέονται με τη  $X$  μέσω περιορισμών. Έτσι υπάρχει μεγαλύτερη ευελιξία για τις επόμενες αναθέσεις τιμών σε μεταβλητές. [4]

### 3.6.5. Forward Checking - FC

Στον αλγόριθμο forward checking, όταν μια μεταβλητή  $X$  λαμβάνει τιμή, ελέγχονται οι μεταβλητές  $Y$  που συνδέονται με αυτήν με κάποιο περιορισμό, και δεν έχουν ακόμα τιμή. Οι τιμές των μεταβλητών  $Y$  που δημιουργούν ασυνέπεια με την τιμή της μεταβλητής  $X$ , αφαιρούνται προσωρινά από τα πεδία τιμών των μεταβλητών  $Y$ . Έτσι ο αλγόριθμος αξιοποιεί τους περιορισμούς για να κλαδέψει το δέντρο αναζήτησης και να αποφύγει περιττούς υπολογισμούς. [7]

### 3.6.6. Διάδοση περιορισμών (constraint propagation)

Η διάδοση περιορισμών είναι ο γενικός όρος που χρησιμοποιείται για τη διάδοση των επιπτώσεων ενός περιορισμού που ισχύει για μια μεταβλητή, σε άλλες μεταβλητές. Μια μέθοδος διάδοσης περιορισμών ονομάζεται **συνέπεια τόξου (arc consistency)**. Μπορεί να εφαρμοστεί είτε ως στάδιο προεπεξεργασίας, πριν αρχίσει η αναζήτηση, είτε ως στάδιο διάδοσης κατά την αναζήτηση, μετά από κάθε ανάθεση τιμής, όπως ο πρώιμος έλεγχος. Ισχυρότερες μορφές διάδοσης μπορούν να οριστούν με τη χρήση μιας έννοιας που ονομάζεται **k-consistency**. [4]

### 3.6.7. Υπαναχώρηση με άλμα (backjumping)



Ο αλγόριθμος `backtracking` έχει μια πολύ απλή πολιτική για το τι να κάνει όταν ένας κλάδος της αναζήτησης οδηγήσει σε αδιέξοδο: υποχωρεί στην προηγούμενη μεταβλητή και δοκιμάζει να της δώσει διαφορετική τιμή. Αυτό ονομάζεται χρονολογική υπαναχώρηση (`chronological backtracking`), επειδή επανέρχεται στο πιο πρόσφατο σημείο απόφασης. Η μέθοδος της υπαναχώρησης με άλμα μπορεί να ταυτοποιεί τη μεταβλητή που προκάλεσε το αδιέξοδο, για να δώσει άμεσα σε αυτήν διαφορετική τιμή. Η υπαναχώρηση με άλμα βασίζεται στην ιδέα των συνόλων συγκρούσεων (`conflict set`) [9]. Το σύνολο συγκρούσεων για μια μεταβλητή  $X$ , είναι το σύνολο των μεταβλητών στις οποίες έχουν ανατεθεί τιμές και συνδέονται με τη  $X$  μέσω περιορισμών. Η μέθοδος της υπαναχώρησης με άλμα υποχωρεί στην πιο πρόσφατη μεταβλητή του συνόλου συγκρούσεων.

### 3.7. Λίγα λόγια για το `Naxos Solver`

Η βιβλιοθήκη `Naxos Solver` υποστηρίζει ακέραιες μεταβλητές με πεπερασμένο πεδίο τιμών, άρα εντάσσεται στη μεθοδολογία του ακέραιου προγραμματισμού. Παρουσιάζω εν συντομία κάποιες από τις πιο βασικές λειτουργίες της.

Για να χρησιμοποιήσουμε το `Naxos Solver`, πρώτα πρέπει να ορίσουμε ένα αντικείμενο `Problem Manager`:

```
naxos::NsProblemManager pm;
```

Αν θέλουμε να αναπαραστήσουμε τα 3 χρώματα του παραπάνω παραδείγματος, πρέπει να τα αντιστοιχήσουμε σε ακέραιους αριθμούς.

Οι μεταβλητές μπορούν να οριστούν με το πεδίο ορισμού τους και το `Problem Manager` στο οποίο ανήκουν, ή μπορούν να οριστούν ως συνάρτηση άλλων μεταβλητών:

```
naxos::NsIntVar newSouthWales(pm, 1, 3);  
naxos::NsIntVar tasmania(pm, 1, 3);  
naxos::NsIntVar NSW_and_Taz_diff_color = newSouthWales != tasmania
```

Η τελευταία μεταβλητή θα πάρει την τιμή 1 αν οι άλλες δύο έχουν διαφορετική τιμή, και την τιμή 0 αν οι άλλες δύο έχουν την ίδια τιμή.

Οι μεταβλητές μπορούν να διαχειρίζονται και με τη μορφή πίνακα:

```
naxos::NsIntArray stateColors;
```

Ο πίνακας αρχικά είναι κενός. Προσθέτουμε μεταβλητές σε αυτόν, είτε στην αρχή είτε στο τέλος, όπως θα προσθέταμε στοιχεία σε μια συνδεδεμένη λίστα:

```
stateColors.push_back(NsIntVar(pm, 1, 3));  
stateColors.push_front(newSouthWales);
```

Η προσθήκη περιορισμών γίνεται κυρίως με τη συνάρτηση `add()` του `Problem Manager`.  
`pm.add(newSouthWales != tasmania);`

```
pm.add(victoria >= 2);  
pm.add(queensland == 1);  
pm.add(northernTerritory == 3 || westernAustralia == 3);
```

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αντικειμενική συνάρτηση και να την εισάγουμε με τη μέθοδο `minimize()` του `Problem Manager`. Αυτή είναι μια αντικειμενική συνάρτηση που προτιμά το χρώμα 1:

```
naxos::NsIntVar C = tasmania == 1 + victoria == 1;  
pm.minimize(-C);
```

Δύο ακόμη ενδιαφέρουσες συναρτήσεις είναι οι `NsIfThen` και `NsEquiv`.

Αυτή η έκφραση εισάγει τον περιορισμό ότι αν η `westernAustralia` έχει χρώμα 1, τότε η `northernTerritory` πρέπει να έχει χρώμα 2 ή 3:

```
pm.add(NsIfThen(westernAustralia == 1, northernTerritory == 2 || northernTerritory == 3));
```

Αυτή η έκφραση εισάγει τον περιορισμό ότι η `newSouthWales` και η `westernAustralia` έχουν το χρώμα 3, τότε πρέπει να το έχει και η `tasmania`, και αντίστροφα.

```
pm.add(naxos::NsEquiv(newSouthWales == 3 && westernAustralia == 3, tasmania == 3));
```

Με άλλα λόγια:

```
westernAustralia == 1 => northernTerritory == 2 || northernTerritory == 3  
και  
newSouthWales == 3 && westernAustralia == 3 <=> tasmania == 3
```

Αφού ορίσουμε τις μεταβλητές και τους περιορισμούς, δηλώνουμε και το `Goal` να δώσει τιμές στις μεταβλητές. Για παράδειγμα, αν έχουμε τις μεταβλητές στον πίνακα `states`:

```
pm.addGoal(new naxos::NsgLabeling(states));
```

Μετά καλούμε επαναληπτικά την αναζήτηση λύσης:

```
while (pm.nextSolution() != false) {  
    // Αντιγράφουμε τις τιμές των μεταβλητών σε ανεξάρτητες δομές  
}
```

Η συνάρτηση αναζήτησης λύσης, σε κάθε επανάληψη, επιστρέφει μια διαφορετική λύση. Αν έχουμε ορίσει αντικειμενική συνάρτηση, κάθε νέα λύση θα έχει μικρότερο κόστος. Όταν δεν υπάρχουν άλλες λύσεις, η συνάρτηση θα επιστρέψει `false`.

## 4. ΑΝΑΘΕΣΗ ΠΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

### 4.1. Περιγραφή προγραμματιστικού προβλήματος

Το προγραμματιστικό κομμάτι της εργασίας στοχεύει να λύσει μια άσκηση από το μάθημα του τμήματος “Εισαγωγή στον Προγραμματισμό”. Αντικείμενο της άσκησης είναι να υλοποιηθεί ένα πρόγραμμα στη γλώσσα C που να φέρει σε πέρας μια εκδοχή της ανάθεσης πληρωμάτων.

Για την άσκηση αυτή, ο όρος “πιλότος” χρησιμοποιείται για λόγους απλοποίησης. Προφανώς η διαδικασία της ανάθεσης πληρωμάτων αφορά όλα τα μέλη του πληρώματος, αλλά ο σκοπός της προγραμματιστικής άσκησης είναι να λυθεί ένα ενδεικτικό παράδειγμα ανάθεσης.

Τα δεδομένα εισόδου της εργασίας είναι ένα σύνολο από πτήσεις, ήδη οργανωμένες σε συνδυασμούς πτήσεων, που περιέχονται σε ένα αρχείο κειμένου με την εξής μορφή:

```
0001 950 ATH KVA 2011-11-01 03:20 2011-11-01 04:20
0001 951 KVA ATH 2011-11-01 05:00 2011-11-01 06:05
0001 504 ATH HER 2011-11-01 07:30 2011-11-01 08:20
0001 505 HER ATH 2011-11-01 09:00 2011-11-01 09:50
0002 329 ATH LCA 2011-11-01 04:50 2011-11-01 06:25
0002 332 LCA ATH 2011-11-01 07:15 2011-11-01 09:00
0002 337 ATH LCA 2011-11-01 10:00 2011-11-01 11:35
0002 338 LCA ATH 2011-11-01 12:25 2011-11-01 14:10
(2 συνδυασμοί πτήσεων που αποτελούνται από 4 πτήσεις ο καθένας)
```

Χαρακτήρες 1-4: Αύξων αριθμός συνδυασμού πτήσης

Χαρακτήρες 6-8: Αριθμός πτήσης

Χαρακτήρες 10-12: Αεροδρόμιο αναχώρησης

Χαρακτήρες 14-16: Αεροδρόμιο άφιξης

Χαρακτήρες 18-27: Ημερομηνία αναχώρησης, σε μορφή ΕΕΕΕ-ΜΜ-ΗΗ

Χαρακτήρες 29-33: Ώρα αναχώρησης, σε μορφή ΩΩ:ΛΛ

Χαρακτήρες 35-44: Ημερομηνία άφιξης, σε μορφή ΕΕΕΕ-ΜΜ-ΗΗ

Χαρακτήρες 46-50: Ώρα άφιξης, σε μορφή ΩΩ:ΛΛ

Κάθε συνδυασμός πτήσεων αποτελείται από 2 έως 4 πτήσεις, και όλες οι ώρες είναι σε UTC (Συντονισμένη Παγκόσμια Ώρα).

Μια πραγματική ανάθεση πληρωμάτων, όπως έχει εξηγηθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, πρέπει να υπόκειται σε ένα μεγάλο και περίπλοκο σύνολο από κανόνες, αλλά σε αυτή την άσκηση υπάρχουν μόνο οι εξής 3 περιορισμοί:

1. Προφανώς, δεν γίνεται ένας πιλότος να αναλάβει 2 σχέδια πτήσης που έχουν χρονική επικάλυψη.
2. Πρέπει κάθε πιλότος να έχει κενό τουλάχιστον 11 ώρες μεταξύ των σχεδίων πτήσης που θα αναλάβει.
3. Σε κάθε κυλιόμενη εβδομάδα, δηλαδή συνεχόμενο διάστημα 7 ημερών, πρέπει κάθε πιλότος να έχει τουλάχιστον 2 ημέρες ρεπό. Για να θεωρείται ρεπό μια ημέρα, πρέπει ο πιλότος να μην έχει κανένα πτητικό καθήκον εκείνη τη μέρα, από 00:00 μέχρι 23:59 η ώρα.

Τα κριτήρια βελτιστοποίησης είναι 2:

1. Οι αναθέσεις στους πιλότους να είναι πυκνές. Δηλαδή, να μην χρησιμοποιούνται πολύ περισσότεροι πιλότοι από όσους είναι απαραίτητοι για να ικανοποιηθούν οι περιορισμοί.
2. Όλοι οι πιλότοι να έχουν παρόμοιο συνολικό χρόνο πτήσης. Με τον όρο “χρόνος πτήσης” εννοούμε το χρόνο που περνάει ένας πιλότος στον αέρα, χωρίς να υπολογίζουμε το διάστημα μεταξύ πτήσεων. Αυτό υπολογίζεται ως εξής:

**α.** Βρίσκουμε τον Ιδανικό Χρόνο Πτήσης  $IFT$  για κάθε πιλότο (ένας αριθμός κοινός για όλους), που ορίζεται ως το σύνολο του χρόνου πτήσης όλων των συνδυασμών διά τον αριθμό των πιλότων.

$$IdealFlightTime = \frac{\sum_{i=1}^P (FlightTimeP_i)}{nPilots}$$

$P$  είναι ο αριθμός των συνδυασμών πτήσεων. Αυτός ο αριθμός είναι σταθερός για δεδομένους συνδυασμούς πτήσεων και αριθμό κυβερνητών, και υπολογίζεται στην αρχή του προγράμματος.

**β.** Βρίσκουμε το χρόνο πτήσης  $FT_i$  που έχει αναλάβει κάθε πιλότος  $i$ , που ορίζεται ως το άθροισμα του χρόνου πτήσης των συνδυασμών που έχει αναλάβει. Αυτοί οι αριθμοί είναι δυναμικοί και εξαρτώνται από την κατάσταση του προβλήματος (τι τιμές έχουν οι μεταβλητές του προβλήματος).

**γ.** Βρίσκουμε το μέτρο ισοκατανομής  $V$ , που ορίζεται ως:

$$V = \sum_{i=1}^{nPilots} (FT_i - IFT)^2$$

Το  $V$  είναι ο αριθμός που θα προσπαθήσουμε να ελαχιστοποιήσουμε, ώστε να έχουμε βρει μια καλή λύση.

## 4.2. Οδηγίες Χρήσης Προγράμματος

Αυτές είναι οι παράμετροι που δέχεται το πρόγραμμα:

**-p <αρχείο\_εισόδου>** (υποχρεωτικό πάντα)

**-n <αριθμός\_πιλότων>** (υποχρεωτικό στην κανονική λειτουργία)

**-s <starttime, EEEE-MM-HH/ΩΩ:ΛΛ>**: Να χρησιμοποιηθούν οι συνδυασμοί πτήσεων από το αρχείο, που η πρώτη πτήση τους ξεκινάει μετά από αυτή την ώρα/ημέρα.

Προεπιλογή: 2001-01-01/00:00

**-e <endtime, EEEE-MM-HH/ΩΩ:ΛΛ>**: Να χρησιμοποιηθούν οι συνδυασμοί πτήσεων από το αρχείο, που η πρώτη πτήση τους ξεκινάει πριν από αυτή την ώρα/ημέρα.

Προεπιλογή: 2020-12-31/23:59

Σημείωση: Με τις προεπιλεγμένες ημερομηνίες, το πρόγραμμα χρειάζεται περίπου 9 GB μνήμη RAM.

**-i**: Λειτουργία ελέγχου ανάθεσης. Το πρόγραμμα δεν υπολογίζει μια ανάθεση, αλλά διαβάζει από το stdin μια ανάθεση και ελέγχει αν είναι νόμιμη. Το μοναδικό άλλο όρισμα που είναι απαραίτητο σε αυτή τη λειτουργία, είναι το αρχείο εισόδου -p.

**-it** (προαιρετικό): Μέγιστος αριθμός βελτιωμένων λύσεων, συμπεριλαμβανομένης της πρώτης. Το πρόγραμμα βρίσκει μια νόμιμη λύση, και στη συνέχεια την βελτιστοποιεί, δηλαδή ψάχνει διαφορετικές λύσεις που να έχουν μικρότερο μέτρο ισοκατανομής V. Αρνητική τιμή σημαίνει απεριόριστες επαναλήψεις.

Προεπιλογή: 1

**-t** (προαιρετικό): Ορισμός μέγιστου χρόνου υπολογισμού. Αν το πρόγραμμα δεν έχει βρει λύση μέχρι τότε, τερματίζει. Αν έχει βρει μια ή περισσότερες λύσεις, σταματά να ψάχνει για καλύτερες.

**-d** (προαιρετικό): Εκτύπωση μεταβλητών του προβλήματος ικανοποίησης περιορισμών, στο τέλος του προγράμματος. Χωρίς αυτό το όρισμα, το πρόγραμμα εκτυπώνει μόνο τους συνδυασμούς πτήσης που αναλαμβάνει κάθε πιλότος, με τη σωστή μορφή για να γίνει ανακατεύθυνση εξόδου σε δεύτερη εκτέλεση του προγράμματος που θα ελέγξει τις αναθέσεις με το όρισμα -i.

Παραδείγματα εκτέλεσης υπάρχουν στο επόμενο κεφάλαιο.

Οι συνδυασμοί πτήσης διαβάζονται από το αρχείο εισόδου και αποθηκεύονται με τη μορφή της δομής flightPlan:

```
typedef struct {
    int ID;
    DateTime startDateTime;
    DateTime endDateTime;
    int start;
    int end;
    int flying_time;
} flightPlan;
```

Το ID είναι ο μοναδικός αριθμός κάθε συνδυασμού πτήσης.

Το `startTime` και `endTime` είναι η ώρα και ημερομηνία που ξεκινά η πρώτη πτήση του συνδυασμού, και το `endTime` είναι η ώρα και ημερομηνία που τελειώνει η τελευταία πτήση του συνδυασμού.

Το `start` και `end` είναι ο χρόνος σε λεπτά που απέχουν οι 2 αυτές ώρες/ημερομηνίες από το όρισμα `starttime`. Χρησιμοποιούνται για εύκολες χρονικές συγκρίσεις.

Το `flying_time` είναι ο συνολικός χρόνος σε λεπτά που διαρκούν οι μεμονωμένες πτήσεις του συνδυασμού. Χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ιδανικού χρόνου πτήσης και την ισοκατανομή χρόνου πτήσης στους πιλότους.

Οι ακριβείς πτήσεις του κάθε συνδυασμού, δεν αποθηκεύονται. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του χρόνου πτήσης, κατά την ανάγνωση του αρχείου.

Από τους συνδυασμούς πτήσεων και τα ορίσματα `starttime` και `endtime`, εξάγονται οι παράμετροι `days`, `rolling_weeks` και `extra_days`. Η πρώτη είναι ο αριθμός των ημερών από την ημέρα του `starttime` μέχρι την ημέρα που τελειώνει ο τελευταίος συνδυασμός πτήσεων, και η δεύτερη είναι ο αριθμός των κυλιόμενων εβδομάδων που αντιστοιχούν σε αυτές.

Κάποιοι συνδυασμοί πτήσεων που ξεκινούν κοντά στο `endtime`, το τέλος τους είναι μετά το `endtime`. Δηλαδή, κατά κάποιο τρόπο, προσθέτουν επιπλέον ημέρες στο πρόγραμμα. Έτσι, αν υπάρχουν συνδυασμοί πτήσεων που τελειώνουν 1, 2, ή περισσότερες ημέρες μετά από το `endtime`, αυτές οι επιπλέον ημέρες περιλαμβάνονται στην παράμετρο `days`, και εκφράζονται με την παράμετρο `extra_days`.

Για τους πιλότους που δεν αναλαμβάνουν συνδυασμό πτήσεων που τελειώνει μετά το `endtime`, αυτές οι επιπλέον ημέρες θεωρούνται ρεπό. Κανονικά θα έπρεπε οι επιπλέον ημέρες να μην υπολογίζονται καθόλου για τους πιλότους που δεν έχουν συνδυασμό πτήσης που τελειώνει εκτός του `endtime`. Όμως αυτό δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα, και έτσι, για λόγους απλούστευσης του προγράμματος, υπολογίζουμε τις επιπλέον ημέρες για όλους τους πιλότους, και για όσους δεν έχουν συνδυασμό πτήσης σε αυτές, θεωρούνται ρεπό.

Ένας πιλότος μπορεί να αναλάβει πολλά σχέδια πτήσης, αλλά ένα σχέδιο πτήσης μπορεί να έχει μόνο έναν πιλότο. Γι' αυτό, αφού αποθήκευσα τα σχέδια πτήσης από το αρχείο εισόδου σε μια δομή δεδομένων ονόματι `FPvector`, ξεκίνησα φτιάχνοντας ένα πίνακα μεταβλητών `FP[i]` (από `Flight Plan`), που περιέχει δηλαδή μια μεταβλητή για κάθε συνδυασμό πτήσης. Αν `FP[i] == p`, τότε ο υπ' αριθμόν `p` πιλότος θα αναλάβει το υπ' αριθμόν `i` σχέδιο πτήσης.

### 4.3. Κωδικοποίηση Περιορισμών

Οι περιορισμοί 1 και 2 είναι σχετικά εύκολο να υλοποιηθούν.

```
for (int i = 0; i < (int) FPvector->size(); ++i) {
    for (int j = 0; j <= i; ++j) {
        if ((i == j)
```

```
    || (FPvector->at(i)->end < FPvector->at(j)->start
    && FPvector->at(j)->start - FPvector->at(i)->end >= 660)
    || (FPvector->at(j)->end < FPvector->at(i)->start
    && FPvector->at(i)->start - FPvector->at(j)->end >= 660))
        continue;
    else
        pm.add(FP[i] != FP[j]);
}
}
```

Με αυτόν τον κώδικα εξετάζουμε ανά 2 όλους τους συνδυασμούς πτήσεων.

Αν οι συνδυασμοί πτήσης  $i$  και  $j$  δεν έχουν χρονική επικάλυψη, και έχουν τουλάχιστον 11 ώρες κενό ανάμεσά τους, δεν κάνουμε τίποτα. Αλλιώς, προσθέτουμε στο Problem Manager τον περιορισμό ότι δεν επιτρέπεται να έχουν τον ίδιο πιλότο.

Όταν ξεκίνησα την άσκηση, χειρίστηκα ξεχωριστά τους περιορισμούς 1 και 2. Αυτό οδήγησε σε πλεονάζοντες περιορισμούς. Όταν συνδύασα τους 2 περιορισμούς όπως παραπάνω, ο χρόνος εκτέλεσης του προγράμματος μειώθηκε κατά 5% περίπου.

Ο 3ος περιορισμός είναι πιο περίπλοκος. Έπρεπε να περάσω στο Problem Manager κατάλληλα διαμορφωμένες μεταβλητές, ώστε να ελέγχει όλες τις κυλιόμενες εβδομάδες από το starttime μέχρι το endtime.

Χώρισα την κατασκευή των μεταβλητών σε 3 βήματα:

```
// Step 1:
naxos::NsIntVarArray PilotAssignments;
for (int ip = 0; ip < nPilots; ++ip)
    for (int ifp = 0; ifp < (int) FPvector->size(); ++ifp)
        PilotAssignments.push_back(FP[ifp] == ip + 1);
```

Εδώ φτιάχνουμε έναν πίνακα μεταβλητών, μεγέθους (αριθμός πιλότων \* αριθμός συνδυασμών πτήσεων). Αν ο συνδυασμός πτήσεων  $ifp$  έχει ανατεθεί στον πιλότο  $ip$ , τότε η αντίστοιχη μεταβλητή σε αυτόν τον πίνακα θα έχει τιμή 1, αλλιώς θα έχει τιμή 0.

Ο πίνακας αυτός είναι μονοδιάστατος, αλλά τον χρησιμοποιώ ως δισδιάστατο. Μπορούμε να τον φανταστούμε ως εξής:

```
PilotAssignments[ip][ifp] == 0 ή PilotAssignments[ip][ifp] == 1
```

Το βήμα 2 είναι το πιο περίπλοκο:

```
// Step 2:
```

```

naxos::NsIntVarArray PilotHasWorkInThatDay;
naxos::NsDeque<naxos::NsIntVarArray> temps(nPilots * days);
for (int ip = 0; ip < nPilots; ++ip) {
    for (int d = 0; d < days; ++d) {
        for (int ifp = 0; ifp < (int) FPvector->size(); ++ifp) {
            if (FP_touches_day(FPvector->at(ifp), d)) {
                temps[ip * days + d].push_back(PilotAssignments[ip * FPvector->size() + ifp]);
            }
        }
        if (temps[ip * days + d].size() > 0) // Flight plans exist that touch day d
            PilotHasWorkInThatDay.push_back(naxos::NsSum(temps[ip * days + d])); //
// Array shows how many FPs touch that day
        else { // No flight plans at all touch day d
            PilotHasWorkInThatDay.push_back(naxos::NsIntVar(pm, 0, 0));
            PilotHasWorkInThatDay[ip * days + d].set(0);
        }
    }
}

```

Ο πίνακας `PilotHasWorkInThatDay` είναι μονοδιάστατος και χρησιμοποιείται ως δισδιάστατος. Περιέχει μεταβλητές πλήθους (αριθμός πιλότων \* ημέρες από το starttime μέχρι το end time, ή μέχρι το τέλος του τελευταίου συνδυασμού πτήσεων, όποιο είναι τελευταίο χρονικά).

Η μεταβλητή `PilotHasWorkInThatDay[ip][d]` είναι άθροισμα όλων των `PilotAssignments[ip][ifp]` για κάθε `ifp` που “ακουμπάει” τη μέρα `d`. Έτσι, η μεταβλητή `PilotHasWorkInThatDay[ip][d]` αναπαριστά πόσα σχέδια πτήσης έχει αναλάβει ο πιλότος `ip` που ακουμπούν στη μέρα `d`. Αυτά μπορεί να είναι από 0 έως 3 θεωρητικά. Το πόσα είναι δεν έχει μεγάλη σημασία, αυτό που μας ενδιαφέρει κυρίως είναι αν είναι 0 ή όχι, δηλαδή αν εκείνη η μέρα είναι ρεπό ή όχι.

Ο πίνακας `temps` είναι μια βοηθητική δομή, μέσω της οποίας παίρνουμε το άθροισμα των σωστών μεταβλητών του πίνακα `PilotAssignments[ip][ifp]` και το αναθέτουμε στις μεταβλητές `PilotHasWorkInThatDay[ip][d]`.

Αν δεν υπάρχει συνδυασμός πτήσεων που ακουμπά στη μέρα `d`, τότε στη θέση `PilotHasWorkInThatDay[ip][d]` βάζουμε μια μηδενική μεταβλητή που σημαίνει ότι εκείνη η μέρα είναι ρεπό.

// Step 3:

```

naxos::NsIntVarArray PilotBusyDaysInRollingWeek;
if (days >= 6) {
    for (int ip = 0; ip < nPilots; ++ip) {
        for (int iw = 0; iw < rolling_weeks; ++iw) {

```



```

if (days >= 7)
    PilotBusyDaysInRollingWeek.push_back(
        (PilotHasWorkInThatDay[ip * days + iw] > 0)
        + (PilotHasWorkInThatDay[ip * days + iw + 1] > 0)
        + (PilotHasWorkInThatDay[ip * days + iw + 2] > 0)
        + (PilotHasWorkInThatDay[ip * days + iw + 3] > 0)
        + (PilotHasWorkInThatDay[ip * days + iw + 4] > 0)
        + (PilotHasWorkInThatDay[ip * days + iw + 5] > 0)
        + (PilotHasWorkInThatDay[ip * days + iw + 6] > 0));
else // if (days == 6)
    PilotBusyDaysInRollingWeek.push_back((PilotHasWorkInThatDay[ip * days + iw] >
0)
        + (PilotHasWorkInThatDay[ip * days + iw + 1] > 0)
        + (PilotHasWorkInThatDay[ip * days + iw + 2] > 0)
        + (PilotHasWorkInThatDay[ip * days + iw + 3] > 0)
        + (PilotHasWorkInThatDay[ip * days + iw + 4] > 0)
        + (PilotHasWorkInThatDay[ip * days + iw + 5] > 0));
pm.add(PilotBusyDaysInRollingWeek[ip * rolling_weeks + iw] <= 5);
}
}
}

```

Στο βήμα 3 χρησιμοποιούμε τον πίνακα `PilotHasWorkInThatDay[ip][d]` για να κατασκευάσουμε τον πίνακα `PilotBusyDaysInRollingWeek[ip][iw]`. Ο πίνακας αυτός είναι επίσης μονοδιάστατος που χρησιμοποιείται ως δισδιάστατος.

Η 1η κυλιόμενη εβδομάδα περιέχει τις ημέρες 1 έως 7. Η δεύτερη, τις ημέρες 2 έως 8, κ.ο.κ.. Έτσι, η `PilotBusyDaysInRollingWeek[ip][1]` αναπαριστά, για τον πιλότο `ip`, πόσες από τις ημέρες 1 έως και 7 έχει πτητικό καθήκον. Είναι το άθροισμα όσων από αυτές τις 7 ημέρες έχουν τιμή μεγαλύτερη του μηδενός.

Να διευκρινιστεί ξανά ότι αυτές οι μεταβλητές αλλάζουν ανάλογα με την κατάσταση του προβλήματος. Προγραμματίζουμε το `Problem Manager` διαμορφώνοντας κατάλληλα τις μεταβλητές και τις σχέσεις μεταξύ τους, για να κωδικοποιήσουμε τους περιορισμούς.

Επειδή ο περιορισμός των κυλιόμενων εβδομάδων δεν έχει νόημα όταν οι συνδυασμοί πτήσεων βρίσκονται όλοι εντός 5 ημερών, αυτός ο περιορισμός εφαρμόζεται μόνο όταν οι μέρες είναι 6 ή περισσότερες.

#### 4.4. Κωδικοποίηση Αντικειμενικής Συνάρτησης

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, έχουμε 2 κριτήρια βελτιστοποίησης. Τον σχετικά μικρό αριθμό πιλότων, και την ισοκατανομή. Ο αριθμός πιλότων δίνεται ως όρισμα στο πρόγραμμα. Για την ισοκατανομή, κατασκευάζουμε μια αντικειμενική συνάρτηση και την περνάμε στο Problem Manager.

Ο πίνακας μεταβλητών `PilotAssignmentsTimesFlyingTime`, μονοδιάστατος που χρησιμοποιείται ως δισδιάστατος, προέρχεται από τον πίνακα `PilotAssignments`, ο οποίος αποτελείται από τιμές 0/1, δηλαδή αν ο κάθε πιλότος έχει αναλάβει τον κάθε συνδυασμό πτήσεων ή όχι. Όμως ο πίνακας `PilotAssignmentsTimesFlyingTime`, αντί της τιμής 1, έχει το χρόνο πτήσης του κάθε συνδυασμού πτήσεων.

```
naxos::NsIntVarArray PilotAssignmentsTimesFlyingTime;
for (int ip = 0; ip < nPilots; ++ip) {
    for (int ifp = 0; ifp < (int) FPvector->size(); ++ifp) {
        PilotAssignmentsTimesFlyingTime.push_back(PilotAssignments[ip * FPvector->size()
+ ifp] * FPvector->at(ifp)->flying_time);
    }
}
```

Ο πίνακας `PilotFlyingTime`, μονοδιάστατος, παράγεται αθροίζοντας την κάθε στήλη του πίνακα `PilotAssignmentsFlyingTime`, ώστε να υπολογίζεται δυναμικά η χρόνος πτήσης κάθε πιλότου.

```
naxos::NsIntVarArray PilotFlyingTime;
for (int ip = 0; ip < nPilots; ++ip)
    PilotFlyingTime.push_back(naxos::NsSum(PilotAssignmentsTimesFlyingTime, ip *
FPvector->size(), FPvector->size()));
// Now calculate the optimization parameter V = SUM( (PilotFlyingTime(i) - IFT) ^ 2 )
```

Συνεχίζουμε την κατασκευή της αντικειμενικής συνάρτησης σύμφωνα με τους τύπους που αναφέρθηκαν νωρίτερα. Ο πίνακας `PilotFlyingTimeMinusIFTSquared`, μονοδιάστατος, περιέχει για κάθε πιλότο, την τετραγωνισμένη διαφορά του χρόνου πτήσης του από τον ιδανικό χρόνο πτήσης.

```
naxos::NsIntVarArray PilotFlyingTimeMinusIFTSquared;
for (int ip = 0; ip < nPilots; ++ip)
    PilotFlyingTimeMinusIFTSquared.push_back((PilotFlyingTime[ip] - IFT) *
(PilotFlyingTime[ip] - IFT));
```

Τελικά η παράμετρος προς ελαχιστοποίηση  $V$ , ισούται με το άθροισμα των τετραγωνισμένων διαφορών. Την εισάγουμε στο Problem Manager για ελαχιστοποίηση.

```
naxos::NsIntVar V = naxos::NsSum(PilotFlyingTimeMinusIFTSquared, 0, nPilots);
pm.minimize(V);
```

Η λειτουργία ελέγχου ανάθεσης με το όρισμα -i δεν χρησιμοποιεί το Naxos Solver και προγραμματισμό με περιορισμούς.

## 5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Αποφάσισα να περιορίσω το χρόνο κάθε εκτέλεσης στα 10 λεπτά. Περισσότερος χρόνος δεν οδηγεί σε σημαντικά καλύτερο αποτέλεσμα.

Ο χαρακτήρας “|” στις εκτυπώσεις, διαχωρίζει ποιες μέρες / κυλιόμενες εβδομάδες βρίσκονται εκτός του διαστήματος starttime - endtime. Προέρχεται από την παράμετρο extra\_days που αναφέρθηκε παραπάνω.

Στην εκτύπωση του πίνακα PilotHasWorkInThatDay, υπάρχει, για κάθε πιλότο, ένας αριθμός για κάθε ημέρα του προγράμματος, που δείχνει αν έχει σχέδιο πτήσης που “ακουμπά” εκείνη την ημέρα. Μπορεί να έχει 1, 2, ή κανένα (0).

Στην εκτύπωση του πίνακα PilotBusyDaysInRollingWeek, υπάρχει, για κάθε πιλότο, ένας αριθμός για κάθε κυλιόμενη εβδομάδα του προγράμματος, που δείχνει πόσες εργασίες ημέρες έχει εκείνη την κυλιόμενη εβδομάδα. Είναι από 0 έως 5.

### 5.1. Απλό παράδειγμα με την πρώτη ημέρα πτήσεων μόνο.

```
./crewas -p ./Pairings.txt -n 24 -s 2011-11-01/00:00 -e 2011-11-01/23:59 -t 600 -it -1 -d
```

- Time: 0:00:00, iteration 1: Solution found with V = 479326
- Time: 0:00:00, iteration 2: Solution found with V = 477326
- Time: 0:00:00, iteration 3: Solution found with V = 468976
- Time: 0:00:00, iteration 4: Solution found with V = 397976
- Time: 0:00:00, iteration 5: Solution found with V = 397676

-- PilotFlyingTime and FPs --

Pilot 1 has flying time 460 and FPs: 1 11  
Pilot 2 has flying time 400 and FPs: 2  
Pilot 3 has flying time 390 and FPs: 3  
Pilot 4 has flying time 450 and FPs: 4  
Pilot 5 has flying time 310 and FPs: 5  
Pilot 6 has flying time 200 and FPs: 6  
Pilot 7 has flying time 225 and FPs: 7  
Pilot 8 has flying time 455 and FPs: 8  
Pilot 9 has flying time 210 and FPs: 9 25  
Pilot 10 has flying time 215 and FPs: 10 12  
Pilot 11 has flying time 355 and FPs: 26  
Pilot 12 has flying time 435 and FPs: 27  
Pilot 13 has flying time 445 and FPs: 28  
Pilot 14 has flying time 245 and FPs: 29

Pilot 15 has flying time 110 and FPs: 30

Pilot 16 has flying time 200 and FPs: 31

Pilot 17 has flying time 110 and FPs: 32

Pilot 18 has flying time 400 and FPs: 33

Pilot 19 has flying time 380 and FPs: 34

Pilot 20 has flying time 120 and FPs: 35

Pilot 21 has flying time 120 and FPs: 36

Pilot 22 has flying time 425 and FPs: 51

Pilot 23 has flying time 100 and FPs: 52

Pilot 24 has flying time 410 and FPs: 61

-- PilotHasWorkInThatDay --

Pilot 1 days: 2 | 1

Pilot 2 days: 1 | 0

Pilot 3 days: 1 | 0

Pilot 4 days: 1 | 0

Pilot 5 days: 1 | 0

Pilot 6 days: 1 | 0

Pilot 7 days: 1 | 0

Pilot 8 days: 1 | 1

Pilot 9 days: 2 | 1

Pilot 10 days: 2 | 1

Pilot 11 days: 1 | 0

Pilot 12 days: 1 | 0

Pilot 13 days: 1 | 0

Pilot 14 days: 1 | 0

Pilot 15 days: 1 | 0

Pilot 16 days: 1 | 0

Pilot 17 days: 1 | 0

Pilot 18 days: 1 | 0

Pilot 19 days: 1 | 0

Pilot 20 days: 1 | 0

Pilot 21 days: 1 | 0

Pilot 22 days: 1 | 0

Pilot 23 days: 1 | 0

Pilot 24 days: 1 | 0

IFT: 298.750000, days: 2, rolling weeks: 1, extra\_days: 1

Time limit reached.

Finished. Time taken: 600.46 seconds.

Βλέπουμε πως, επειδή κάποιοι συνδυασμοί πτήσεων τελειώνουν τη 2η ημέρα του Νοεμβρίου, μια επιπλέον ημέρα έχει προστεθεί στο πρόγραμμα.

Ο ιδανικός χρόνος πτήσης για όλους τους πιλότους εδώ, θα ήταν σχεδόν 299 ώρες. Με αυτούς τους συνδυασμούς πτήσεων όμως, όλους εντός 2 ημερών, δεν υπάρχει περιθώριο να κατανεμηθούν στους πιλότους έτσι ώστε όλοι να έχουν παρόμοιο χρόνο πτήσης.

## 5.2. Όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων με 51 πιλότους.

```
./crewas -p Pairings.txt -s 2011-11-01/00:00 -e 2012-02-29/23:59 -n 51 -t 600 -it -1 -d
```

- Time: 0:00:39, iteration 1: Solution found with  $V = 5366839200$
- Time: 0:00:39, iteration 2: Solution found with  $V = 5365543150$
- Time: 0:00:40, iteration 3: Solution found with  $V = 5360185000$
- Time: 0:00:40, iteration 4: Solution found with  $V = 5358097600$
- Time: 0:00:40, iteration 5: Solution found with  $V = 5355488350$
- Time: 0:00:40, iteration 6: Solution found with  $V = 5354608800$
- Time: 0:00:40, iteration 7: Solution found with  $V = 5354327050$
- Time: 0:00:40, iteration 8: Solution found with  $V = 5351894200$
- Time: 0:00:40, iteration 9: Solution found with  $V = 5351149400$
- Time: 0:00:40, iteration 10: Solution found with  $V = 5351129800$
- Time: 0:00:40, iteration 11: Solution found with  $V = 5349690900$
- Time: 0:00:40, iteration 12: Solution found with  $V = 5348811350$
- Time: 0:00:40, iteration 13: Solution found with  $V = 5348529600$
- Time: 0:00:40, iteration 14: Solution found with  $V = 5346096750$
- Time: 0:00:40, iteration 15: Solution found with  $V = 5345351950$
- Time: 0:00:40, iteration 16: Solution found with  $V = 5345332350$
- Time: 0:00:40, iteration 17: Solution found with  $V = 5344094550$
- Time: 0:00:40, iteration 18: Solution found with  $V = 5343349750$
- Time: 0:00:40, iteration 19: Solution found with  $V = 5343330150$
- Time: 0:00:40, iteration 20: Solution found with  $V = 5341591800$
- Time: 0:00:40, iteration 21: Solution found with  $V = 5340847000$
- Time: 0:00:40, iteration 22: Solution found with  $V = 5340827400$
- Time: 0:00:41, iteration 23: Solution found with  $V = 5340748150$
- Time: 0:00:41, iteration 24: Solution found with  $V = 5340003350$

- Time: 0:00:41, iteration 25: Solution found with  $V = 5339983750$
- Time: 0:00:42, iteration 26: Solution found with  $V = 5339733100$
- Time: 0:00:42, iteration 27: Solution found with  $V = 5339713500$
- Time: 0:00:42, iteration 28: Solution found with  $V = 5338308500$
- Time: 0:00:42, iteration 29: Solution found with  $V = 5337399550$
- Time: 0:00:42, iteration 30: Solution found with  $V = 5337379950$
- Time: 0:00:43, iteration 31: Solution found with  $V = 5336690050$
- Time: 0:00:43, iteration 32: Solution found with  $V = 5336665550$
- Time: 0:00:44, iteration 33: Solution found with  $V = 5336649200$
- Time: 0:00:44, iteration 34: Solution found with  $V = 5336649100$
- Time: 0:00:55, iteration 35: Solution found with  $V = 5335978150$
- Time: 0:00:55, iteration 36: Solution found with  $V = 5335958550$
- Time: 0:00:56, iteration 37: Solution found with  $V = 5335268650$
- Time: 0:00:56, iteration 38: Solution found with  $V = 5335244150$
- Time: 0:00:57, iteration 39: Solution found with  $V = 5335227800$
- Time: 0:00:57, iteration 40: Solution found with  $V = 5335227700$
- Time: 0:01:21, iteration 41: Solution found with  $V = 5334871900$
- Time: 0:01:21, iteration 42: Solution found with  $V = 5334847400$
- Time: 0:01:22, iteration 43: Solution found with  $V = 5334831050$
- Time: 0:01:22, iteration 44: Solution found with  $V = 5334830950$
- Time: 0:01:38, iteration 45: Solution found with  $V = 5334739650$
- Time: 0:01:38, iteration 46: Solution found with  $V = 5334715150$
- Time: 0:01:39, iteration 47: Solution found with  $V = 5334698800$
- Time: 0:01:39, iteration 48: Solution found with  $V = 5334698700$
- Time: 0:01:41, iteration 49: Solution found with  $V = 5334464650$
- Time: 0:01:41, iteration 50: Solution found with  $V = 5334445050$
- Time: 0:01:42, iteration 51: Solution found with  $V = 5333597700$
- Time: 0:01:42, iteration 52: Solution found with  $V = 5333573200$
- Time: 0:01:43, iteration 53: Solution found with  $V = 5333556850$
- Time: 0:01:43, iteration 54: Solution found with  $V = 5333556750$
- Time: 0:02:16, iteration 55: Solution found with  $V = 5333228300$
- Time: 0:02:16, iteration 56: Solution found with  $V = 5333207250$
- Time: 0:02:16, iteration 57: Solution found with  $V = 5333207150$
- Time: 0:08:58, iteration 58: Solution found with  $V = 5332955700$
- Time: 0:08:58, iteration 59: Solution found with  $V = 5332931200$
- Time: 0:08:58, iteration 60: Solution found with  $V = 5332914850$
- Time: 0:08:58, iteration 61: Solution found with  $V = 5332914750$

- Time: 0:09:31, iteration 62: Solution found with  $V = 5332586300$
- Time: 0:09:32, iteration 63: Solution found with  $V = 5332565250$
- Time: 0:09:32, iteration 64: Solution found with  $V = 5332565150$

-- PilotFlyingTime and FPs --

Pilot 1 has flying time 32830 and FPs: 1 11 59 66 79 83 139 170 180 249 257 270 305 330 361 371 440 448 461 496 521 552 562 631 639 652 687 712 743 753 822 830 843 878 903 934 944 1013 1021 1034 1069 1094 1125 1135 1204 1212 1225 1260 1285 1316 1326 1395 1403 1416 1451 1476 1507 1517 1586 1594 1607 1642 1667 1698 1708 1777 1785 1798 1833 1858 1889 1899 1968 1976 1989 2024 2049 2080 2090 2159 2167 2180 2215 2240 2271 2281 2350 2358 2371 2406 2431 2462 2472 2541 2549 2562 2597 2622 2653 2663 2732 2740 2753 2788 2813 2844 2854 2923 2931 2944 2979 3004 3035 3045 3114 3122 3135 3170 3195 3226 3236 3300

Pilot 2 has flying time 31650 and FPs: 2 13 24 47 99 155 177 222 234 247 258 286 368 413 425 438 449 477 559 604 616 629 640 668 750 795 807 820 831 859 941 986 998 1011 1022 1050 1132 1177 1189 1202 1213 1241 1323 1368 1380 1393 1404 1432 1514 1559 1571 1584 1595 1623 1705 1750 1762 1775 1786 1814 1896 1941 1953 1966 1977 2005 2087 2132 2144 2157 2168 2196 2278 2323 2335 2348 2359 2387 2469 2514 2526 2539 2550 2578 2660 2705 2717 2730 2741 2769 2851 2896 2908 2921 2932 2960 3042 3087 3099 3112 3123 3151 3233 3279 3296

Pilot 3 has flying time 33970 and FPs: 3 14 23 45 71 96 171 199 210 237 265 327 362 390 401 428 456 518 553 581 592 619 647 709 744 772 783 810 838 900 935 963 974 1001 1029 1091 1126 1154 1165 1192 1220 1282 1317 1345 1356 1383 1411 1473 1508 1536 1547 1574 1602 1664 1699 1727 1738 1765 1793 1855 1890 1918 1929 1956 1984 2046 2081 2109 2120 2147 2175 2237 2272 2300 2311 2338 2366 2428 2463 2491 2502 2529 2557 2619 2654 2682 2693 2720 2748 2810 2845 2873 2884 2911 2939 3001 3036 3064 3075 3102 3130 3192 3227 3255

Pilot 4 has flying time 32725 and FPs: 4 19 37 72 85 134 172 200 209 235 262 287 363 391 400 426 453 478 554 582 591 617 644 669 745 773 782 808 835 860 936 964 973 999 1026 1051 1127 1155 1164 1190 1217 1242 1318 1346 1355 1381 1408 1433 1509 1537 1546 1572 1599 1624 1700 1728 1737 1763 1790 1815 1891 1919 1928 1954 1981 2006 2082 2110 2119 2145 2172 2197 2273 2301 2310 2336 2363 2388 2464 2492 2501 2527 2554 2579 2655 2683 2692 2718 2745 2770 2846 2874 2883 2909 2936 2961 3037 3065 3074 3100 3127 3152 3228 3256

Pilot 5 has flying time 34755 and FPs: 5 20 80 173 181 205 226 263 276 325 364 396 417 454 467 516 555 587 608 645 658 707 746 778 799 836 849 898 937 969 990 1027 1040 1089 1128 1160 1181 1218 1231 1280 1319 1351 1372 1409 1422 1471 1510 1542 1563 1600 1613 1662 1701 1733 1754 1791 1804 1853 1892 1924 1945 1982 1995 2044 2083 2115 2136 2173 2186 2235 2274 2306 2327 2364 2377 2426 2465 2497 2518 2555 2568 2617 2656 2688 2709 2746 2759 2808 2847 2879 2900 2937 2950 2999 3038 3070 3091 3128 3141 3190 3229 3261 3287

Pilot 6 has flying time 25825 and FPs: 6 15 38 67 95 198 204 225 228 259 309 335 389 395 416 419 450 500 526 580 586 607 610 641 691 717 771 777 798 801 832 882 908 962 968 989 992 1023 1073 1099 1153 1159 1180 1183 1214 1264 1290 1344 1350 1371 1374 1405 1455 1481 1535 1541 1562 1565 1596 1646 1672 1726 1732 1753 1756 1787 1837 1863 1917 1923 1944 1947 1978 2028 2054 2108 2114 2135 2138 2169 2219 2245 2299 2305 2326 2329 2360 2410 2436 2490 2496 2517 2520 2551 2601 2627 2681



2687 2708 2711 2742 2792 2818 2872 2878 2899 2902 2933 2983 3009 3063 3069 3090  
3093 3124 3174 3200 3254 3260 3285

Pilot 7 has flying time 18795 and FPs: 7 18 39 49 73 119 207 214 238 253 304 310 398  
405 429 444 495 501 589 596 620 635 686 692 780 787 811 826 877 883 971 978 1002  
1017 1068 1074 1162 1169 1193 1208 1259 1265 1353 1360 1384 1399 1450 1456 1544  
1551 1575 1590 1641 1647 1735 1742 1766 1781 1832 1838 1926 1933 1957 1972 2023  
2029 2117 2124 2148 2163 2214 2220 2308 2315 2339 2354 2405 2411 2499 2506 2530  
2545 2596 2602 2690 2697 2721 2736 2787 2793 2881 2888 2912 2927 2978 2984 3072  
3079 3103 3118 3169 3175 3263 3270 3288

Pilot 8 has flying time 27585 and FPs: 8 12 44 57 68 118 144 174 201 229 239 264 290  
365 392 420 430 455 481 556 583 611 621 646 672 747 774 802 812 837 863 938 965  
993 1003 1028 1054 1129 1156 1184 1194 1219 1245 1320 1347 1375 1385 1410 1436  
1511 1538 1566 1576 1601 1627 1702 1729 1757 1767 1792 1818 1893 1920 1948 1958  
1983 2009 2084 2111 2139 2149 2174 2200 2275 2302 2330 2340 2365 2391 2466 2493  
2521 2531 2556 2582 2657 2684 2712 2722 2747 2773 2848 2875 2903 2913 2938 2964  
3039 3066 3094 3104 3129 3155 3230 3257

Pilot 9 has flying time 31325 and FPs: 9 25 60 69 97 114 202 215 230 260 288 393 406  
421 451 479 584 597 612 642 670 775 788 803 833 861 966 979 994 1024 1052 1157  
1170 1185 1215 1243 1348 1361 1376 1406 1434 1539 1552 1567 1597 1625 1730 1743  
1758 1788 1816 1921 1934 1949 1979 2007 2112 2125 2140 2170 2198 2303 2316 2331  
2361 2389 2494 2507 2522 2552 2580 2685 2698 2713 2743 2771 2876 2889 2904 2934  
2962 3067 3080 3095 3125 3153 3258 3271

Pilot 10 has flying time 21725 and FPs: 10 21 109 131 133 206 227 252 372 397 418 443  
563 588 609 634 754 779 800 825 945 970 991 1016 1136 1161 1182 1207 1327 1352  
1373 1398 1518 1543 1564 1589 1709 1734 1755 1780 1900 1925 1946 1971 2091 2116  
2137 2162 2282 2307 2328 2353 2473 2498 2519 2544 2664 2689 2710 2735 2855 2880  
2901 2926 3046 3071 3092 3117 3237 3262 3280 3289

Pilot 11 has flying time 25030 and FPs: 16 26 40 74 94 136 216 231 244 267 285 407  
422 435 458 476 598 613 626 649 667 789 804 817 840 858 980 995 1008 1031 1049  
1171 1186 1199 1222 1240 1362 1377 1390 1413 1431 1553 1568 1581 1604 1622 1744  
1759 1772 1795 1813 1935 1950 1963 1986 2004 2126 2141 2154 2177 2195 2317 2332  
2345 2368 2386 2508 2523 2536 2559 2577 2699 2714 2727 2750 2768 2890 2905 2918  
2941 2959 3081 3096 3109 3132 3150 3272 3290

Pilot 12 has flying time 23310 and FPs: 22 27 48 53 76 203 223 232 268 298 394 414  
423 459 489 585 605 614 650 680 776 796 805 841 871 967 987 996 1032 1062 1158  
1178 1187 1223 1253 1349 1369 1378 1414 1444 1540 1560 1569 1605 1635 1731 1751  
1760 1796 1826 1922 1942 1951 1987 2017 2113 2133 2142 2178 2208 2304 2324 2333  
2369 2399 2495 2515 2524 2560 2590 2686 2706 2715 2751 2781 2877 2897 2906 2942  
2972 3068 3088 3097 3133 3163 3259 3281

Pilot 13 has flying time 30430 and FPs: 28 41 62 77 107 233 242 245 289 299 424 433  
436 480 490 615 624 627 671 681 806 815 818 862 872 997 1006 1009 1053 1063 1188  
1197 1200 1244 1254 1379 1388 1391 1435 1445 1570 1579 1582 1626 1636 1761 1770  
1773 1817 1827 1952 1961 1964 2008 2018 2143 2152 2155 2199 2209 2334 2343 2346  
2390 2400 2525 2534 2537 2581 2591 2716 2725 2728 2772 2782 2907 2916 2919 2963  
2973 3098 3107 3110 3154 3164 3282 3291

Pilot 14 has flying time 27125 and FPs: 29 42 55 98 108 175 269 280 281 291 306 366  
460 471 472 482 497 557 651 662 663 673 688 748 842 853 854 864 879 939 1033 1044  
1045 1055 1070 1130 1224 1235 1236 1246 1261 1321 1415 1426 1427 1437 1452 1512  
1606 1617 1618 1628 1643 1703 1797 1808 1809 1819 1834 1894 1988 1999 2000 2010

2025 2085 2179 2190 2191 2201 2216 2276 2370 2381 2382 2392 2407 2467 2561 2572  
2573 2583 2598 2658 2752 2763 2764 2774 2789 2849 2943 2954 2955 2965 2980 3040  
3134 3145 3146 3156 3171 3231 3292

Pilot 15 has flying time 32885 and FPs: 17 30 43 78 100 115 217 248 277 302 328 408  
439 468 493 519 599 630 659 684 710 790 821 850 875 901 981 1012 1041 1066 1092  
1172 1203 1232 1257 1283 1363 1394 1423 1448 1474 1554 1585 1614 1639 1665 1745  
1776 1805 1830 1856 1936 1967 1996 2021 2047 2127 2158 2187 2212 2238 2318 2349  
2378 2403 2429 2509 2540 2569 2594 2620 2700 2731 2760 2785 2811 2891 2922 2951  
2976 3002 3082 3113 3142 3167 3193 3273 3297

Pilot 16 has flying time 32495 and FPs: 31 58 70 84 135 176 255 297 323 347 367 446  
488 514 538 558 637 679 705 729 749 828 870 896 920 940 1019 1061 1087 1111 1131  
1210 1252 1278 1302 1322 1401 1443 1469 1493 1513 1592 1634 1660 1684 1704 1783  
1825 1851 1875 1895 1974 2016 2042 2066 2086 2165 2207 2233 2257 2277 2356 2398  
2424 2448 2468 2547 2589 2615 2639 2659 2738 2780 2806 2830 2850 2929 2971 2997  
3021 3041 3120 3162 3188 3212 3232 3298

Pilot 17 has flying time 28165 and FPs: 32 64 86 111 120 218 246 261 274 311 409 437  
452 465 502 600 628 643 656 693 791 819 834 847 884 982 1010 1025 1038 1075 1173  
1201 1216 1229 1266 1364 1392 1407 1420 1457 1555 1583 1598 1611 1648 1746 1774  
1789 1802 1839 1937 1965 1980 1993 2030 2128 2156 2171 2184 2221 2319 2347 2362  
2375 2412 2510 2538 2553 2566 2603 2701 2729 2744 2757 2794 2892 2920 2935 2948  
2985 3083 3111 3126 3139 3176 3274 3293

Pilot 18 has flying time 33365 and FPs: 33 54 90 110 141 224 254 275 300 324 415 445  
466 491 515 606 636 657 682 706 797 827 848 873 897 988 1018 1039 1064 1088 1179  
1209 1230 1255 1279 1370 1400 1421 1446 1470 1561 1591 1612 1637 1661 1752 1782  
1803 1828 1852 1943 1973 1994 2019 2043 2134 2164 2185 2210 2234 2325 2355 2376  
2401 2425 2516 2546 2567 2592 2616 2707 2737 2758 2783 2807 2898 2928 2949 2974  
2998 3089 3119 3140 3165 3189 3283 3294

Pilot 19 has flying time 31265 and FPs: 34 89 91 116 164 271 272 282 301 326 462 463  
473 492 517 653 654 664 683 708 844 845 855 874 899 1035 1036 1046 1065 1090  
1226 1227 1237 1256 1281 1417 1418 1428 1447 1472 1608 1609 1619 1638 1663 1799  
1800 1810 1829 1854 1990 1991 2001 2020 2045 2181 2182 2192 2211 2236 2372 2373  
2383 2402 2427 2563 2564 2574 2593 2618 2754 2755 2765 2784 2809 2945 2946 2956  
2975 3000 3136 3137 3147 3166 3191 3284 3295

Pilot 20 has flying time 21315 and FPs: 35 56 106 121 132 219 236 296 303 312 410 427  
487 494 503 601 618 678 685 694 792 809 869 876 885 983 1000 1060 1067 1076 1174  
1191 1251 1258 1267 1365 1382 1442 1449 1458 1556 1573 1633 1640 1649 1747 1764  
1824 1831 1840 1938 1955 2015 2022 2031 2129 2146 2206 2213 2222 2320 2337 2397  
2404 2413 2511 2528 2588 2595 2604 2702 2719 2779 2786 2795 2893 2910 2970 2977  
2986 3084 3101 3161 3168 3177 3275 3299

Pilot 21 has flying time 19850 and FPs: 36 46 63 112 122 178 273 278 307 313 369 464  
469 498 504 560 655 660 689 695 751 846 851 880 886 942 1037 1042 1071 1077 1133  
1228 1233 1262 1268 1324 1419 1424 1453 1459 1515 1610 1615 1644 1650 1706 1801  
1806 1835 1841 1897 1992 1997 2026 2032 2088 2183 2188 2217 2223 2279 2374 2379  
2408 2414 2470 2565 2570 2599 2605 2661 2756 2761 2790 2796 2852 2947 2952 2981  
2987 3043 3138 3143 3172 3178 3234 3303

Pilot 22 has flying time 14015 and FPs: 51 81 87 123 140 179 208 240 308 336 354 370  
399 431 499 527 545 561 590 622 690 718 736 752 781 813 881 909 927 943 972 1004  
1072 1100 1118 1134 1163 1195 1263 1291 1309 1325 1354 1386 1454 1482 1500 1516  
1545 1577 1645 1673 1691 1707 1736 1768 1836 1864 1882 1898 1927 1959 2027 2055

2073 2089 2118 2150 2218 2246 2264 2280 2309 2341 2409 2437 2455 2471 2500 2532  
2600 2628 2646 2662 2691 2723 2791 2819 2837 2853 2882 2914 2982 3010 3028 3044  
3073 3105 3173 3201 3219 3235

Pilot 23 has flying time 16220 and FPs: 52 65 92 117 124 220 250 283 331 348 359 411  
441 474 522 539 550 602 632 665 713 730 741 793 823 856 904 921 932 984 1014 1047  
1095 1112 1123 1175 1205 1238 1286 1303 1314 1366 1396 1429 1477 1494 1505 1557  
1587 1620 1668 1685 1696 1748 1778 1811 1859 1876 1887 1939 1969 2002 2050 2067  
2078 2130 2160 2193 2241 2258 2269 2321 2351 2384 2432 2449 2460 2512 2542 2575  
2623 2640 2651 2703 2733 2766 2814 2831 2842 2894 2924 2957 3005 3022 3033 3085  
3115 3148 3196 3213 3224 3276 3301

Pilot 24 has flying time 17835 and FPs: 61 88 105 113 145 163 243 256 279 346 356 434  
447 470 537 547 625 638 661 728 738 816 829 852 919 929 1007 1020 1043 1110 1120  
1198 1211 1234 1301 1311 1389 1402 1425 1492 1502 1580 1593 1616 1683 1693 1771  
1784 1807 1874 1884 1962 1975 1998 2065 2075 2153 2166 2189 2256 2266 2344 2357  
2380 2447 2457 2535 2548 2571 2638 2648 2726 2739 2762 2829 2839 2917 2930 2953  
3020 3030 3108 3121 3144 3211 3221 3286 3302

Pilot 25 has flying time 16915 and FPs: 75 82 93 211 251 266 284 402 442 457 475 593  
633 648 666 784 824 839 857 975 1015 1030 1048 1166 1206 1221 1239 1357 1397  
1412 1430 1548 1588 1603 1621 1739 1779 1794 1812 1930 1970 1985 2003 2121 2161  
2176 2194 2312 2352 2367 2385 2503 2543 2558 2576 2694 2734 2749 2767 2885 2925  
2940 2958 3076 3116 3131 3149 3267

Pilot 26 has flying time 20390 and FPs: 50 102 126 188 314 322 332 337 505 513 523  
528 696 704 714 719 887 895 905 910 1078 1086 1096 1101 1269 1277 1287 1292 1460  
1468 1478 1483 1651 1659 1669 1674 1842 1850 1860 1865 2033 2041 2051 2056 2224  
2232 2242 2247 2415 2423 2433 2438 2606 2614 2624 2629 2797 2805 2815 2820 2988  
2996 3006 3011 3179 3187 3197 3202

Pilot 27 has flying time 20310 and FPs: 101 338 345 349 355 529 536 540 546 720 727  
731 737 911 918 922 928 1102 1109 1113 1119 1293 1300 1304 1310 1484 1491 1495  
1501 1675 1682 1686 1692 1866 1873 1877 1883 2057 2064 2068 2074 2248 2255 2259  
2265 2439 2446 2450 2456 2630 2637 2641 2647 2821 2828 2832 2838 3012 3019 3023  
3029 3203 3210 3214 3220

Pilot 28 has flying time 10735 and FPs: 103 125 149 292 483 674 865 1056 1247 1438  
1629 1820 2011 2202 2393 2584 2775 2966 3157

Pilot 29 has flying time 16130 and FPs: 104 142 162 184 293 317 379 484 508 570 675  
699 761 866 890 952 1057 1081 1143 1248 1272 1334 1439 1463 1525 1630 1654 1716  
1821 1845 1907 2012 2036 2098 2203 2227 2289 2394 2418 2480 2585 2609 2671 2776  
2800 2862 2967 2991 3053 3158 3182 3244

Pilot 30 has flying time 10905 and FPs: 127 157 213 294 316 340 485 507 531 676 698  
722 867 889 913 1058 1080 1104 1249 1271 1295 1440 1462 1486 1631 1653 1677  
1822 1844 1868 2013 2035 2059 2204 2226 2250 2395 2417 2441 2586 2608 2632 2777  
2799 2823 2968 2990 3014 3159 3181 3205 3264

Pilot 31 has flying time 14330 and FPs: 138 146 158 295 333 353 375 486 524 544 566  
677 715 735 757 868 906 926 948 1059 1097 1117 1139 1250 1288 1308 1330 1441  
1479 1499 1521 1632 1670 1690 1712 1823 1861 1881 1903 2014 2052 2072 2094 2205  
2243 2263 2285 2396 2434 2454 2476 2587 2625 2645 2667 2778 2816 2836 2858 2969  
3007 3027 3049 3160 3198 3218 3240

Pilot 32 has flying time 18225 and FPs: 137 148 159 329 341 374 383 520 532 565 574  
711 723 756 765 902 914 947 956 1093 1105 1138 1147 1284 1296 1329 1338 1475

1487 1520 1529 1666 1678 1711 1720 1857 1869 1902 1911 2048 2060 2093 2102 2239  
2251 2284 2293 2430 2442 2475 2484 2621 2633 2666 2675 2812 2824 2857 2866 3003  
3015 3048 3057 3194 3206 3239 3248

Pilot 33 has flying time 15240 and FPs: 156 160 187 315 334 339 506 525 530 697 716  
721 888 907 912 1079 1098 1103 1270 1289 1294 1461 1480 1485 1652 1671 1676  
1843 1862 1867 2034 2053 2058 2225 2244 2249 2416 2435 2440 2607 2626 2631 2798  
2817 2822 2989 3008 3013 3180 3199 3204

Pilot 34 has flying time 18845 and FPs: 143 161 186 342 350 360 533 541 551 724 732  
742 915 923 933 1106 1114 1124 1297 1305 1315 1488 1496 1506 1679 1687 1697  
1870 1878 1888 2061 2069 2079 2252 2260 2270 2443 2451 2461 2634 2642 2652 2825  
2833 2843 3016 3024 3034 3207 3215 3225

Pilot 35 has flying time 9010 and FPs: 147 154 165 351 378 542 569 733 760 924 951  
1115 1142 1306 1333 1497 1524 1688 1715 1879 1906 2070 2097 2261 2288 2452 2479  
2643 2670 2834 2861 3025 3052 3216 3243

Pilot 36 has flying time 11825 and FPs: 150 166 183 352 377 543 568 734 759 925 950  
1116 1141 1307 1332 1498 1523 1689 1714 1880 1905 2071 2096 2262 2287 2453 2478  
2644 2669 2835 2860 3026 3051 3217 3242

Pilot 37 has flying time 13280 and FPs: 182 195 357 384 548 575 739 766 930 957 1121  
1148 1312 1339 1503 1530 1694 1721 1885 1912 2076 2103 2267 2294 2458 2485 2649  
2676 2840 2867 3031 3058 3222 3249

Pilot 38 has flying time 13910 and FPs: 151 169 192 373 386 564 577 755 768 946 959  
1137 1150 1328 1341 1519 1532 1710 1723 1901 1914 2092 2105 2283 2296 2474 2487  
2665 2678 2856 2869 3047 3060 3238 3251

Pilot 39 has flying time 8435 and FPs: 167 185 358 376 549 567 740 758 931 949 1122  
1140 1313 1331 1504 1522 1695 1713 1886 1904 2077 2095 2268 2286 2459 2477 2650  
2668 2841 2859 3032 3050 3223 3241

Pilot 40 has flying time 3470 and FPs: 128 152 318 404 509 595 700 786 891 977 1082  
1168 1273 1359 1464 1550 1655 1741 1846 1932 2037 2123 2228 2314 2419 2505 2610  
2696 2801 2887 2992 3078 3183 3269

Pilot 41 has flying time 3805 and FPs: 129 189 319 343 510 534 701 725 892 916 1083  
1107 1274 1298 1465 1489 1656 1680 1847 1871 2038 2062 2229 2253 2420 2444 2611  
2635 2802 2826 2993 3017 3184 3208

Pilot 42 has flying time 7635 and FPs: 130 153 320 380 511 571 702 762 893 953 1084  
1144 1275 1335 1466 1526 1657 1717 1848 1908 2039 2099 2230 2290 2421 2481 2612  
2672 2803 2863 2994 3054 3185 3245

Pilot 43 has flying time 6140 and FPs: 168 241 321 344 512 535 703 726 894 917 1085  
1108 1276 1299 1467 1490 1658 1681 1849 1872 2040 2063 2231 2254 2422 2445 2613  
2636 2804 2827 2995 3018 3186 3209

Pilot 44 has flying time 6850 and FPs: 193 412 603 794 985 1176 1367 1558 1749 1940  
2131 2322 2513 2704 2895 3086 3277

Pilot 45 has flying time 7315 and FPs: 221 385 576 767 958 1149 1340 1531 1722 1913  
2104 2295 2486 2677 2868 3059 3250

Pilot 46 has flying time 7555 and FPs: 194 403 594 785 976 1167 1358 1549 1740 1931  
2122 2313 2504 2695 2886 3077 3268

Pilot 47 has flying time 7005 and FPs: 212 432 623 814 1005 1196 1387 1578 1769 1960  
2151 2342 2533 2724 2915 3106 3278

















Time limit reached.

Finished. Time taken: 600.84 seconds.

Σε αυτή την εκτέλεση με το πλήρες σετ δεδομένων, όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων βρίσκονται εντός 124 ημερών, οι οποίες αντιστοιχούν σε 118 κυλιόμενες εβδομάδες. Συμπεριλαμβάνονται και 3 ημέρες πέραν του endtime, εξαιτίας κάποιων συνδυασμών πτήσεων που τελειώνουν μετά το endtime.

51 πιλότοι είναι οι ελάχιστοι με τους οποίους μπορεί να δώσει λύση το πρόγραμμα για όλα τα σχέδια πτήσεων. Από τον υπ' αριθμόν 1 πιλότο μέχρι και τον 25, βλέπουμε ότι οι αναθέσεις είναι πυκνές. Αυτοί οι πιλότοι έχουν 5 εργάσιμες ημέρες σε κάθε κυλιόμενη εβδομάδα. Από τον πιλότο 26 και μετά, όμως, αρχίζει να φαίνεται η αδυναμία του προγράμματος να μοιράσει δίκαια τους συνδυασμούς πτήσεων. Ειδικά οι τελευταίοι 8 πιλότοι, έχουν μόνο μια εργάσιμη ημέρα σε κάθε κυλιόμενη εβδομάδα. Αν δούμε αναλυτικά τις εργάσιμες ημέρες, οι πιλότοι αυτοί παρουσιάζουν ένα μοτίβο μίας εργάσιμης ημέρας και 6 κενών.

Κάθε μια από τις επαναλήψεις που έχουν γίνει έδωσε καλύτερο αποτέλεσμα, αλλά ο χώρος αναζήτησης είναι πάρα πολύ μεγάλος, και με την απουσία ευρετικών μηχανισμών, μπορούν να γίνουν μόνο μικρές τοπικές βελτιώσεις.

Δοκίμασα να εισάγω περιορισμούς που να μην επιτρέπουν ένας πιλότος να έχει χρόνο πτήσης περισσότερο από ένα όριο, αλλά αντί καλύτερων αποτελεσμάτων, το αποτέλεσμα ήταν να απορριφθούν από το Naxos Solver λύσεις που προηγουμένως είχαν βρεθεί. Καλύτερες λύσεις δεν θα μπορούσαν να βρεθούν σε ένα λογικό χρονικό διάστημα.

### 5.3. Όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων με 51 πιλότους και χρονικό όριο 12 ωρών.

```
./crewas -p Pairings.txt -s 2011-11-01/00:00 -e 2012-02-29/23:59 -n 51 -t 43200 -it -1 |  
./crewas -p Pairings.txt -s 2011-11-01/00:00 -e 2012-02-29/23:59 -i
```

```
----- CHECKING ASSIGNMENT
```

```
----- ASSIGNMENT OK, 51 pilots, V: 5327448576.000000
```

Όπως φαίνεται από το μέτρο ισοκατανομής  $V$ , η βελτίωση που επιτεύχθηκε μετά από 12 ώρες ήταν της τάξης του 1%.

### 5.4. Όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων με 56 πιλότους.

```
./crewas -p Pairings.txt -s 2011-11-01/00:00 -e 2012-02-29/23:59 -n 56 -t 600 -it -1 -d
```

- Time: 0:00:49, iteration 1: Solution found with  $V = 6852112984$
- Time: 0:00:49, iteration 2: Solution found with  $V = 6850816934$
- Time: 0:00:50, iteration 3: Solution found with  $V = 6845458784$
- Time: 0:00:50, iteration 4: Solution found with  $V = 6843371384$

- Time: 0:00:50, iteration 5: Solution found with  $V = 6840762134$
- Time: 0:00:50, iteration 6: Solution found with  $V = 6839882584$
- Time: 0:00:50, iteration 7: Solution found with  $V = 6839600834$
- Time: 0:00:50, iteration 8: Solution found with  $V = 6837167984$
- Time: 0:00:50, iteration 9: Solution found with  $V = 6836423184$
- Time: 0:00:50, iteration 10: Solution found with  $V = 6836403584$
- Time: 0:00:50, iteration 11: Solution found with  $V = 6835467684$
- Time: 0:00:50, iteration 12: Solution found with  $V = 6834964684$
- Time: 0:00:50, iteration 13: Solution found with  $V = 6834085134$
- Time: 0:00:50, iteration 14: Solution found with  $V = 6833803384$
- Time: 0:00:50, iteration 15: Solution found with  $V = 6831370534$
- Time: 0:00:50, iteration 16: Solution found with  $V = 6830625734$
- Time: 0:00:50, iteration 17: Solution found with  $V = 6830606134$
- Time: 0:00:50, iteration 18: Solution found with  $V = 6829670234$
- Time: 0:00:50, iteration 19: Solution found with  $V = 6829368334$
- Time: 0:00:50, iteration 20: Solution found with  $V = 6828623534$
- Time: 0:00:50, iteration 21: Solution found with  $V = 6828603934$
- Time: 0:00:50, iteration 22: Solution found with  $V = 6827668034$
- Time: 0:00:51, iteration 23: Solution found with  $V = 6826865584$
- Time: 0:00:51, iteration 24: Solution found with  $V = 6826120784$
- Time: 0:00:51, iteration 25: Solution found with  $V = 6826101184$
- Time: 0:00:51, iteration 26: Solution found with  $V = 6825165284$
- Time: 0:00:52, iteration 27: Solution found with  $V = 6824321634$
- Time: 0:00:53, iteration 28: Solution found with  $V = 6824051384$
- Time: 0:00:53, iteration 29: Solution found with  $V = 6823582284$
- Time: 0:00:53, iteration 30: Solution found with  $V = 6822673334$
- Time: 0:00:53, iteration 31: Solution found with  $V = 6822653734$
- Time: 0:00:53, iteration 32: Solution found with  $V = 6821717834$
- Time: 0:00:55, iteration 33: Solution found with  $V = 6821003434$
- Time: 0:00:56, iteration 34: Solution found with  $V = 6820984634$
- Time: 0:00:56, iteration 35: Solution found with  $V = 6820086934$
- Time: 0:01:17, iteration 36: Solution found with  $V = 6819582034$
- Time: 0:01:18, iteration 37: Solution found with  $V = 6819563234$
- Time: 0:01:18, iteration 38: Solution found with  $V = 6818665534$
- Time: 0:02:02, iteration 39: Solution found with  $V = 6818268784$
- Time: 0:02:31, iteration 40: Solution found with  $V = 6818136534$
- Time: 0:02:38, iteration 41: Solution found with  $V = 6817911084$

- Time: 0:02:38, iteration 42: Solution found with  $V = 6817892284$
- Time: 0:02:39, iteration 43: Solution found with  $V = 6816994584$
- Time: 0:03:37, iteration 44: Solution found with  $V = 6816644984$
- Time: 0:03:52, iteration 45: Solution found with  $V = 6816635784$
- Time: 0:04:07, iteration 46: Solution found with  $V = 6816196484$

-- PilotFlyingTime and FPs --

Pilot 1 has flying time 32830 and FPs: 1 11 59 66 79 83 139 170 180 249 257 270 305 330 361 371 440 448 461 496 521 552 562 631 639 652 687 712 743 753 822 830 843 878 903 934 944 1013 1021 1034 1069 1094 1125 1135 1204 1212 1225 1260 1285 1316 1326 1395 1403 1416 1451 1476 1507 1517 1586 1594 1607 1642 1667 1698 1708 1777 1785 1798 1833 1858 1889 1899 1968 1976 1989 2024 2049 2080 2090 2159 2167 2180 2215 2240 2271 2281 2350 2358 2371 2406 2431 2462 2472 2541 2549 2562 2597 2622 2653 2663 2732 2740 2753 2788 2813 2844 2854 2923 2931 2944 2979 3004 3035 3045 3114 3122 3135 3170 3195 3226 3236 3300

Pilot 2 has flying time 31650 and FPs: 2 13 24 47 99 155 177 222 234 247 258 286 368 413 425 438 449 477 559 604 616 629 640 668 750 795 807 820 831 859 941 986 998 1011 1022 1050 1132 1177 1189 1202 1213 1241 1323 1368 1380 1393 1404 1432 1514 1559 1571 1584 1595 1623 1705 1750 1762 1775 1786 1814 1896 1941 1953 1966 1977 2005 2087 2132 2144 2157 2168 2196 2278 2323 2335 2348 2359 2387 2469 2514 2526 2539 2550 2578 2660 2705 2717 2730 2741 2769 2851 2896 2908 2921 2932 2960 3042 3087 3099 3112 3123 3151 3233 3279 3296

Pilot 3 has flying time 33970 and FPs: 3 14 23 45 71 96 171 199 210 237 265 327 362 390 401 428 456 518 553 581 592 619 647 709 744 772 783 810 838 900 935 963 974 1001 1029 1091 1126 1154 1165 1192 1220 1282 1317 1345 1356 1383 1411 1473 1508 1536 1547 1574 1602 1664 1699 1727 1738 1765 1793 1855 1890 1918 1929 1956 1984 2046 2081 2109 2120 2147 2175 2237 2272 2300 2311 2338 2366 2428 2463 2491 2502 2529 2557 2619 2654 2682 2693 2720 2748 2810 2845 2873 2884 2911 2939 3001 3036 3064 3075 3102 3130 3192 3227 3255

Pilot 4 has flying time 32725 and FPs: 4 19 37 72 85 134 172 200 209 235 262 287 363 391 400 426 453 478 554 582 591 617 644 669 745 773 782 808 835 860 936 964 973 999 1026 1051 1127 1155 1164 1190 1217 1242 1318 1346 1355 1381 1408 1433 1509 1537 1546 1572 1599 1624 1700 1728 1737 1763 1790 1815 1891 1919 1928 1954 1981 2006 2082 2110 2119 2145 2172 2197 2273 2301 2310 2336 2363 2388 2464 2492 2501 2527 2554 2579 2655 2683 2692 2718 2745 2770 2846 2874 2883 2909 2936 2961 3037 3065 3074 3100 3127 3152 3228 3256

Pilot 5 has flying time 34755 and FPs: 5 20 80 173 181 205 226 263 276 325 364 396 417 454 467 516 555 587 608 645 658 707 746 778 799 836 849 898 937 969 990 1027 1040 1089 1128 1160 1181 1218 1231 1280 1319 1351 1372 1409 1422 1471 1510 1542 1563 1600 1613 1662 1701 1733 1754 1791 1804 1853 1892 1924 1945 1982 1995 2044 2083 2115 2136 2173 2186 2235 2274 2306 2327 2364 2377 2426 2465 2497 2518 2555 2568 2617 2656 2688 2709 2746 2759 2808 2847 2879 2900 2937 2950 2999 3038 3070 3091 3128 3141 3190 3229 3261 3287

Pilot 6 has flying time 25825 and FPs: 6 15 38 67 95 198 204 225 228 259 309 335 389 395 416 419 450 500 526 580 586 607 610 641 691 717 771 777 798 801 832 882 908 962 968 989 992 1023 1073 1099 1153 1159 1180 1183 1214 1264 1290 1344 1350 1371 1374 1405 1455 1481 1535 1541 1562 1565 1596 1646 1672 1726 1732 1753 1756

1787 1837 1863 1917 1923 1944 1947 1978 2028 2054 2108 2114 2135 2138 2169 2219  
2245 2299 2305 2326 2329 2360 2410 2436 2490 2496 2517 2520 2551 2601 2627 2681  
2687 2708 2711 2742 2792 2818 2872 2878 2899 2902 2933 2983 3009 3063 3069 3090  
3093 3124 3174 3200 3254 3260 3285

Pilot 7 has flying time 18795 and FPs: 7 18 39 49 73 119 207 214 238 253 304 310 398  
405 429 444 495 501 589 596 620 635 686 692 780 787 811 826 877 883 971 978 1002  
1017 1068 1074 1162 1169 1193 1208 1259 1265 1353 1360 1384 1399 1450 1456 1544  
1551 1575 1590 1641 1647 1735 1742 1766 1781 1832 1838 1926 1933 1957 1972 2023  
2029 2117 2124 2148 2163 2214 2220 2308 2315 2339 2354 2405 2411 2499 2506 2530  
2545 2596 2602 2690 2697 2721 2736 2787 2793 2881 2888 2912 2927 2978 2984 3072  
3079 3103 3118 3169 3175 3263 3270 3288

Pilot 8 has flying time 27585 and FPs: 8 12 44 57 68 118 144 174 201 229 239 264 290  
365 392 420 430 455 481 556 583 611 621 646 672 747 774 802 812 837 863 938 965  
993 1003 1028 1054 1129 1156 1184 1194 1219 1245 1320 1347 1375 1385 1410 1436  
1511 1538 1566 1576 1601 1627 1702 1729 1757 1767 1792 1818 1893 1920 1948 1958  
1983 2009 2084 2111 2139 2149 2174 2200 2275 2302 2330 2340 2365 2391 2466 2493  
2521 2531 2556 2582 2657 2684 2712 2722 2747 2773 2848 2875 2903 2913 2938 2964  
3039 3066 3094 3104 3129 3155 3230 3257

Pilot 9 has flying time 31325 and FPs: 9 25 60 69 97 114 202 215 230 260 288 393 406  
421 451 479 584 597 612 642 670 775 788 803 833 861 966 979 994 1024 1052 1157  
1170 1185 1215 1243 1348 1361 1376 1406 1434 1539 1552 1567 1597 1625 1730 1743  
1758 1788 1816 1921 1934 1949 1979 2007 2112 2125 2140 2170 2198 2303 2316 2331  
2361 2389 2494 2507 2522 2552 2580 2685 2698 2713 2743 2771 2876 2889 2904 2934  
2962 3067 3080 3095 3125 3153 3258 3271

Pilot 10 has flying time 21725 and FPs: 10 21 109 131 133 206 227 252 372 397 418 443  
563 588 609 634 754 779 800 825 945 970 991 1016 1136 1161 1182 1207 1327 1352  
1373 1398 1518 1543 1564 1589 1709 1734 1755 1780 1900 1925 1946 1971 2091 2116  
2137 2162 2282 2307 2328 2353 2473 2498 2519 2544 2664 2689 2710 2735 2855 2880  
2901 2926 3046 3071 3092 3117 3237 3262 3280 3289

Pilot 11 has flying time 25030 and FPs: 16 26 40 74 94 136 216 231 244 267 285 407  
422 435 458 476 598 613 626 649 667 789 804 817 840 858 980 995 1008 1031 1049  
1171 1186 1199 1222 1240 1362 1377 1390 1413 1431 1553 1568 1581 1604 1622 1744  
1759 1772 1795 1813 1935 1950 1963 1986 2004 2126 2141 2154 2177 2195 2317 2332  
2345 2368 2386 2508 2523 2536 2559 2577 2699 2714 2727 2750 2768 2890 2905 2918  
2941 2959 3081 3096 3109 3132 3150 3272 3290

Pilot 12 has flying time 23310 and FPs: 22 27 48 53 76 203 223 232 268 298 394 414  
423 459 489 585 605 614 650 680 776 796 805 841 871 967 987 996 1032 1062 1158  
1178 1187 1223 1253 1349 1369 1378 1414 1444 1540 1560 1569 1605 1635 1731 1751  
1760 1796 1826 1922 1942 1951 1987 2017 2113 2133 2142 2178 2208 2304 2324 2333  
2369 2399 2495 2515 2524 2560 2590 2686 2706 2715 2751 2781 2877 2897 2906 2942  
2972 3068 3088 3097 3133 3163 3259 3281

Pilot 13 has flying time 30430 and FPs: 28 41 62 77 107 233 242 245 289 299 424 433  
436 480 490 615 624 627 671 681 806 815 818 862 872 997 1006 1009 1053 1063 1188  
1197 1200 1244 1254 1379 1388 1391 1435 1445 1570 1579 1582 1626 1636 1761 1770  
1773 1817 1827 1952 1961 1964 2008 2018 2143 2152 2155 2199 2209 2334 2343 2346  
2390 2400 2525 2534 2537 2581 2591 2716 2725 2728 2772 2782 2907 2916 2919 2963  
2973 3098 3107 3110 3154 3164 3282 3291

Pilot 14 has flying time 27125 and FPs: 29 42 55 98 108 175 269 280 281 291 306 366  
460 471 472 482 497 557 651 662 663 673 688 748 842 853 854 864 879 939 1033 1044

1045 1055 1070 1130 1224 1235 1236 1246 1261 1321 1415 1426 1427 1437 1452 1512  
1606 1617 1618 1628 1643 1703 1797 1808 1809 1819 1834 1894 1988 1999 2000 2010  
2025 2085 2179 2190 2191 2201 2216 2276 2370 2381 2382 2392 2407 2467 2561 2572  
2573 2583 2598 2658 2752 2763 2764 2774 2789 2849 2943 2954 2955 2965 2980 3040  
3134 3145 3146 3156 3171 3231 3292

Pilot 15 has flying time 32885 and FPs: 17 30 43 78 100 115 217 248 277 302 328 408  
439 468 493 519 599 630 659 684 710 790 821 850 875 901 981 1012 1041 1066 1092  
1172 1203 1232 1257 1283 1363 1394 1423 1448 1474 1554 1585 1614 1639 1665 1745  
1776 1805 1830 1856 1936 1967 1996 2021 2047 2127 2158 2187 2212 2238 2318 2349  
2378 2403 2429 2509 2540 2569 2594 2620 2700 2731 2760 2785 2811 2891 2922 2951  
2976 3002 3082 3113 3142 3167 3193 3273 3297

Pilot 16 has flying time 32495 and FPs: 31 58 70 84 135 176 255 297 323 347 367 446  
488 514 538 558 637 679 705 729 749 828 870 896 920 940 1019 1061 1087 1111 1131  
1210 1252 1278 1302 1322 1401 1443 1469 1493 1513 1592 1634 1660 1684 1704 1783  
1825 1851 1875 1895 1974 2016 2042 2066 2086 2165 2207 2233 2257 2277 2356 2398  
2424 2448 2468 2547 2589 2615 2639 2659 2738 2780 2806 2830 2850 2929 2971 2997  
3021 3041 3120 3162 3188 3212 3232 3298

Pilot 17 has flying time 28165 and FPs: 32 64 86 111 120 218 246 261 274 311 409 437  
452 465 502 600 628 643 656 693 791 819 834 847 884 982 1010 1025 1038 1075 1173  
1201 1216 1229 1266 1364 1392 1407 1420 1457 1555 1583 1598 1611 1648 1746 1774  
1789 1802 1839 1937 1965 1980 1993 2030 2128 2156 2171 2184 2221 2319 2347 2362  
2375 2412 2510 2538 2553 2566 2603 2701 2729 2744 2757 2794 2892 2920 2935 2948  
2985 3083 3111 3126 3139 3176 3274 3293

Pilot 18 has flying time 33365 and FPs: 33 54 90 110 141 224 254 275 300 324 415 445  
466 491 515 606 636 657 682 706 797 827 848 873 897 988 1018 1039 1064 1088 1179  
1209 1230 1255 1279 1370 1400 1421 1446 1470 1561 1591 1612 1637 1661 1752 1782  
1803 1828 1852 1943 1973 1994 2019 2043 2134 2164 2185 2210 2234 2325 2355 2376  
2401 2425 2516 2546 2567 2592 2616 2707 2737 2758 2783 2807 2898 2928 2949 2974  
2998 3089 3119 3140 3165 3189 3283 3294

Pilot 19 has flying time 31265 and FPs: 34 89 91 116 164 271 272 282 301 326 462 463  
473 492 517 653 654 664 683 708 844 845 855 874 899 1035 1036 1046 1065 1090  
1226 1227 1237 1256 1281 1417 1418 1428 1447 1472 1608 1609 1619 1638 1663 1799  
1800 1810 1829 1854 1990 1991 2001 2020 2045 2181 2182 2192 2211 2236 2372 2373  
2383 2402 2427 2563 2564 2574 2593 2618 2754 2755 2765 2784 2809 2945 2946 2956  
2975 3000 3136 3137 3147 3166 3191 3284 3295

Pilot 20 has flying time 21315 and FPs: 35 56 106 121 132 219 236 296 303 312 410 427  
487 494 503 601 618 678 685 694 792 809 869 876 885 983 1000 1060 1067 1076 1174  
1191 1251 1258 1267 1365 1382 1442 1449 1458 1556 1573 1633 1640 1649 1747 1764  
1824 1831 1840 1938 1955 2015 2022 2031 2129 2146 2206 2213 2222 2320 2337 2397  
2404 2413 2511 2528 2588 2595 2604 2702 2719 2779 2786 2795 2893 2910 2970 2977  
2986 3084 3101 3161 3168 3177 3275 3299

Pilot 21 has flying time 19850 and FPs: 36 46 63 112 122 178 273 278 307 313 369 464  
469 498 504 560 655 660 689 695 751 846 851 880 886 942 1037 1042 1071 1077 1133  
1228 1233 1262 1268 1324 1419 1424 1453 1459 1515 1610 1615 1644 1650 1706 1801  
1806 1835 1841 1897 1992 1997 2026 2032 2088 2183 2188 2217 2223 2279 2374 2379  
2408 2414 2470 2565 2570 2599 2605 2661 2756 2761 2790 2796 2852 2947 2952 2981  
2987 3043 3138 3143 3172 3178 3234 3303

Pilot 22 has flying time 14115 and FPs: 51 81 87 123 140 179 208 240 308 336 354 370  
399 431 499 527 545 561 590 622 690 718 736 752 781 813 881 909 927 943 972 1004



1072 1100 1118 1134 1163 1195 1263 1291 1309 1325 1354 1386 1454 1482 1500 1516  
1545 1577 1645 1673 1691 1707 1736 1768 1836 1864 1882 1898 1927 1959 2027 2055  
2073 2089 2118 2150 2218 2246 2264 2280 2309 2341 2409 2437 2455 2471 2500 2532  
2600 2628 2646 2662 2691 2723 2791 2819 2837 2853 2882 2914 2982 3010 3028 3044  
3073 3105 3173 3201 3219 3235 3264

Pilot 23 has flying time 16220 and FPs: 52 65 92 117 124 220 250 283 331 348 359 411  
441 474 522 539 550 602 632 665 713 730 741 793 823 856 904 921 932 984 1014 1047  
1095 1112 1123 1175 1205 1238 1286 1303 1314 1366 1396 1429 1477 1494 1505 1557  
1587 1620 1668 1685 1696 1748 1778 1811 1859 1876 1887 1939 1969 2002 2050 2067  
2078 2130 2160 2193 2241 2258 2269 2321 2351 2384 2432 2449 2460 2512 2542 2575  
2623 2640 2651 2703 2733 2766 2814 2831 2842 2894 2924 2957 3005 3022 3033 3085  
3115 3148 3196 3213 3224 3276 3301

Pilot 24 has flying time 17835 and FPs: 61 88 105 113 145 163 243 256 279 346 356 434  
447 470 537 547 625 638 661 728 738 816 829 852 919 929 1007 1020 1043 1110 1120  
1198 1211 1234 1301 1311 1389 1402 1425 1492 1502 1580 1593 1616 1683 1693 1771  
1784 1807 1874 1884 1962 1975 1998 2065 2075 2153 2166 2189 2256 2266 2344 2357  
2380 2447 2457 2535 2548 2571 2638 2648 2726 2739 2762 2829 2839 2917 2930 2953  
3020 3030 3108 3121 3144 3211 3221 3286 3302

Pilot 25 has flying time 16915 and FPs: 75 82 93 211 251 266 284 402 442 457 475 593  
633 648 666 784 824 839 857 975 1015 1030 1048 1166 1206 1221 1239 1357 1397  
1412 1430 1548 1588 1603 1621 1739 1779 1794 1812 1930 1970 1985 2003 2121 2161  
2176 2194 2312 2352 2367 2385 2503 2543 2558 2576 2694 2734 2749 2767 2885 2925  
2940 2958 3076 3116 3131 3149 3267

Pilot 26 has flying time 20390 and FPs: 50 102 126 188 314 322 332 337 505 513 523  
528 696 704 714 719 887 895 905 910 1078 1086 1096 1101 1269 1277 1287 1292 1460  
1468 1478 1483 1651 1659 1669 1674 1842 1850 1860 1865 2033 2041 2051 2056 2224  
2232 2242 2247 2415 2423 2433 2438 2606 2614 2624 2629 2797 2805 2815 2820 2988  
2996 3006 3011 3179 3187 3197 3202

Pilot 27 has flying time 20310 and FPs: 101 338 345 349 355 529 536 540 546 720 727  
731 737 911 918 922 928 1102 1109 1113 1119 1293 1300 1304 1310 1484 1491 1495  
1501 1675 1682 1686 1692 1866 1873 1877 1883 2057 2064 2068 2074 2248 2255 2259  
2265 2439 2446 2450 2456 2630 2637 2641 2647 2821 2828 2832 2838 3012 3019 3023  
3029 3203 3210 3214 3220

Pilot 28 has flying time 10735 and FPs: 103 125 149 292 483 674 865 1056 1247 1438  
1629 1820 2011 2202 2393 2584 2775 2966 3157

Pilot 29 has flying time 16130 and FPs: 104 142 162 184 293 317 379 484 508 570 675  
699 761 866 890 952 1057 1081 1143 1248 1272 1334 1439 1463 1525 1630 1654 1716  
1821 1845 1907 2012 2036 2098 2203 2227 2289 2394 2418 2480 2585 2609 2671 2776  
2800 2862 2967 2991 3053 3158 3182 3244

Pilot 30 has flying time 10805 and FPs: 127 157 213 294 316 340 485 507 531 676 698  
722 867 889 913 1058 1080 1104 1249 1271 1295 1440 1462 1486 1631 1653 1677  
1822 1844 1868 2013 2035 2059 2204 2226 2250 2395 2417 2441 2586 2608 2632 2777  
2799 2823 2968 2990 3014 3159 3181 3205

Pilot 31 has flying time 14330 and FPs: 138 146 158 295 333 353 375 486 524 544 566  
677 715 735 757 868 906 926 948 1059 1097 1117 1139 1250 1288 1308 1330 1441  
1479 1499 1521 1632 1670 1690 1712 1823 1861 1881 1903 2014 2052 2072 2094 2205  
2243 2263 2285 2396 2434 2454 2476 2587 2625 2645 2667 2778 2816 2836 2858 2969  
3007 3027 3049 3160 3198 3218 3240

Pilot 32 has flying time 18225 and FPs: 137 148 159 329 341 374 383 520 532 565 574  
711 723 756 765 902 914 947 956 1093 1105 1138 1147 1284 1296 1329 1338 1475  
1487 1520 1529 1666 1678 1711 1720 1857 1869 1902 1911 2048 2060 2093 2102 2239  
2251 2284 2293 2430 2442 2475 2484 2621 2633 2666 2675 2812 2824 2857 2866 3003  
3015 3048 3057 3194 3206 3239 3248

Pilot 33 has flying time 15240 and FPs: 156 160 187 315 334 339 506 525 530 697 716  
721 888 907 912 1079 1098 1103 1270 1289 1294 1461 1480 1485 1652 1671 1676  
1843 1862 1867 2034 2053 2058 2225 2244 2249 2416 2435 2440 2607 2626 2631 2798  
2817 2822 2989 3008 3013 3180 3199 3204

Pilot 34 has flying time 18845 and FPs: 143 161 186 342 350 360 533 541 551 724 732  
742 915 923 933 1106 1114 1124 1297 1305 1315 1488 1496 1506 1679 1687 1697  
1870 1878 1888 2061 2069 2079 2252 2260 2270 2443 2451 2461 2634 2642 2652 2825  
2833 2843 3016 3024 3034 3207 3215 3225

Pilot 35 has flying time 9010 and FPs: 147 154 165 351 378 542 569 733 760 924 951  
1115 1142 1306 1333 1497 1524 1688 1715 1879 1906 2070 2097 2261 2288 2452 2479  
2643 2670 2834 2861 3025 3052 3216 3243

Pilot 36 has flying time 11825 and FPs: 150 166 183 352 377 543 568 734 759 925 950  
1116 1141 1307 1332 1498 1523 1689 1714 1880 1905 2071 2096 2262 2287 2453 2478  
2644 2669 2835 2860 3026 3051 3217 3242

Pilot 37 has flying time 13280 and FPs: 182 195 357 384 548 575 739 766 930 957 1121  
1148 1312 1339 1503 1530 1694 1721 1885 1912 2076 2103 2267 2294 2458 2485 2649  
2676 2840 2867 3031 3058 3222 3249

Pilot 38 has flying time 13910 and FPs: 151 169 192 373 386 564 577 755 768 946 959  
1137 1150 1328 1341 1519 1532 1710 1723 1901 1914 2092 2105 2283 2296 2474 2487  
2665 2678 2856 2869 3047 3060 3238 3251

Pilot 39 has flying time 8435 and FPs: 167 185 358 376 549 567 740 758 931 949 1122  
1140 1313 1331 1504 1522 1695 1713 1886 1904 2077 2095 2268 2286 2459 2477 2650  
2668 2841 2859 3032 3050 3223 3241

Pilot 40 has flying time 3470 and FPs: 128 152 318 404 509 595 700 786 891 977 1082  
1168 1273 1359 1464 1550 1655 1741 1846 1932 2037 2123 2228 2314 2419 2505 2610  
2696 2801 2887 2992 3078 3183 3269

Pilot 41 has flying time 3805 and FPs: 129 189 319 343 510 534 701 725 892 916 1083  
1107 1274 1298 1465 1489 1656 1680 1847 1871 2038 2062 2229 2253 2420 2444 2611  
2635 2802 2826 2993 3017 3184 3208

Pilot 42 has flying time 7635 and FPs: 130 153 320 380 511 571 702 762 893 953 1084  
1144 1275 1335 1466 1526 1657 1717 1848 1908 2039 2099 2230 2290 2421 2481 2612  
2672 2803 2863 2994 3054 3185 3245

Pilot 43 has flying time 6140 and FPs: 168 241 321 344 512 535 703 726 894 917 1085  
1108 1276 1299 1467 1490 1658 1681 1849 1872 2040 2063 2231 2254 2422 2445 2613  
2636 2804 2827 2995 3018 3186 3209

Pilot 44 has flying time 6850 and FPs: 193 412 603 794 985 1176 1367 1558 1749 1940  
2131 2322 2513 2704 2895 3086 3277

Pilot 45 has flying time 7315 and FPs: 221 385 576 767 958 1149 1340 1531 1722 1913  
2104 2295 2486 2677 2868 3059 3250

Pilot 46 has flying time 7555 and FPs: 194 403 594 785 976 1167 1358 1549 1740 1931  
2122 2313 2504 2695 2886 3077 3268



















του προγράμματος. Μάλιστα, αν βλέπαμε τις αναθέσεις μετά από 1 επανάληψη, οι 5 επιπλέον πιλότοι δεν θα είχαν καμία ανάθεση. Συμπεραίνουμε ότι το πρόγραμμα προσπαθεί να βελτιώσει το κριτήριο V του αποτελέσματος μετατίθοντας κάποιους συνδυασμούς πτήσης, αλλά αυτό έχει μικρή επίδραση στις τελικές αναθέσεις.

#### **5.5. Όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων με 61 πιλότους και έλεγχο αποτελεσμάτων.**

```
./crewas -p Pairings.txt -s 2011-11-01/00:00 -e 2012-02-29/23:59 -n 61 -t 600 -it -1 |  
./crewas -p Pairings.txt -s 2011-11-01/00:00 -e 2012-02-29/23:59 -i
```

----- CHECKING ASSIGNMENT

----- ASSIGNMENT OK, 61 pilots, V: 8057981440.000000

#### **5.6. Όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων με 66 πιλότους και έλεγχο αποτελεσμάτων.**

```
./crewas -p Pairings.txt -s 2011-11-01/00:00 -e 2012-02-29/23:59 -n 66 -t 600 -it -1 |  
./crewas -p Pairings.txt -s 2011-11-01/00:00 -e 2012-02-29/23:59 -i
```

----- CHECKING ASSIGNMENT

----- ASSIGNMENT OK, 66 pilots, V: 9111622656.000000

#### **5.7. Όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων με 71 πιλότους και έλεγχο αποτελεσμάτων.**

```
./crewas -p Pairings.txt -s 2011-11-01/00:00 -e 2012-02-29/23:59 -n 71 -t 600 -it -1 |  
./crewas -p Pairings.txt -s 2011-11-01/00:00 -e 2012-02-29/23:59 -i
```

----- CHECKING ASSIGNMENT

----- ASSIGNMENT OK, 71 pilots, V: 10017656832.000000

Φαίνεται πως η αύξηση του αριθμού των πιλότων οδηγεί σε χειρότερο αποτέλεσμα. Σε δικές μου εκτελέσεις του προγράμματος επίσης παρατήρησα ότι οι επιπλέον πιλότοι μένουν ανεκμετάλλευτοι.

#### **5.8. Όλοι οι συνδυασμοί πτήσεων με 71 πιλότους, χρονικό όριο 12 ωρών και έλεγχο αποτελεσμάτων.**

```
./crewas -p Pairings.txt -s 2011-11-01/00:00 -e 2012-02-29/23:59 -n 71 -t 43200 -it -1 |  
./crewas -p Pairings.txt -s 2011-11-01/00:00 -e 2012-02-29/23:59 -i
```

----- CHECKING ASSIGNMENT

----- ASSIGNMENT OK, 71 pilots, V: 10014055424.000000

Βλέπουμε ότι, με περισσότερους πιλότους από όσους είναι απαραίτητοι, η βελτίωση μετά από 12 ώρες είναι ακόμα μικρότερη, σε σύγκριση με τον απαραίτητο αριθμό.

## 6. ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΔΟΥΛΕΙΑ

Το Naxos Solver είναι μια ενδιαφέρουσα βιβλιοθήκη, και συγχαίρω το Νίκο Ποθητό για την ανάπτυξή της. Το πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού πτήσεων σίγουρα είναι δύσκολο και πολύπλοκο, και οι λύσεις που βρήκα δεν είναι οι βέλτιστες. Μια ισχυρότερη βιβλιοθήκη για προβλήματα περιορισμών πιθανόν να έβρισκε καλύτερες λύσεις. Όμως η ανάπτυξη ενός προγράμματος ποτέ δεν τελειώνει, και το δικό μου δεν αποτελεί εξαίρεση. Νιώθω πως δεν έχω εκμεταλλευτεί στο έπακρο τις δυνατότητες του Naxos Solver, και αν αφιέρωνα αρκετό επιπλέον χρόνο, θα μπορούσα να φτάσω σε καλύτερα αποτελέσματα.

Μια σημαντική δυνατότητα του Naxos Solver, την οποία το πρόγραμμά μου αφήνει ανεκμετάλλευτη, λέγεται Search via Goals. Θα ήταν ενδιαφέρουσα η υλοποίηση ενός προγράμματος όπως το δικό μου, σχεδιασμένο να χρησιμοποιεί αυτή τη δυνατότητα. Πέραν αυτού, και η προσέγγιση του δικού μου προγράμματος, πιθανότατα μπορεί να βελτιωθεί. Ο τρόπος ορισμού των μεταβλητών, η κωδικοποίηση των περιορισμών και ο τρόπος χειρισμού των δεδομένων, ήταν σχεδιαστικές επιλογές που έπαιξαν σημαντικό ρόλο στα αποτελέσματα και τη συμπεριφορά του προγράμματος.

**ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ**

<b>Ξενόγλωσσος όρος</b>	<b>Ελληνικός όρος</b>
Crew scheduling	Χρονοπρογραμματισμός πληρωμάτων
Crew pairing	Κατασκευή συνδυασμών πτήσεων
Crew rostering	Ανάθεση πληρωμάτων
Mixed-integer programming	Μικτός-ακέραιος προγραμματισμός
Non-linear integer programming	Μη-γραμμικός ακέραιος προγραμματισμός
Stochastic modeling	Στοχαστικά μοντέλα
Fuzzy sets	Θεωρία ασαφών συνόλων
Linear programming	Γραμμικός προγραμματισμός
Integer programming	Ακέραιος προγραμματισμός
Column generation	Δημιουργία στηλών
Meta-heuristic approaches	Μετα-ευρετικές προσεγγίσεις
Domain	Σύνολο δυνατών τιμών
Consistent	Συνεπής
Objective function	Αντικειμενική συνάρτηση
Unary constraint	Μοναδιαίος περιορισμός
Binary constraint	Διαδικός περιορισμός
N-ary constraint	Περιορισμός ανώτερης τάξης
Backtracking search	Αναζήτηση με υπαναχώρηση
Depth-first search	Αναζήτηση πρώτα εις βάθος
Minimum remaining values	Ελάχιστες απομένουσες τιμές

Most constrained variable	Πιο δεσμευμένη μεταβλητή
Fail-first	Πρώτα στην αποτυχία
Degree heuristic	Ευρετικός μηχανισμός βαθμού
Least constraining value	Λιγότερο δεσμευτική τιμή
Forward checking	Πρώιμος έλεγχος
Constraint propagation	Διάδοση περιορισμών
Arc consistency	Συνέπεια τόξου
Backjumping	Υπαναχώρηση με άλμα
Chronological backtracking	Χρονολογική υπαναχώρηση
Conflict set	Σύνολο συγκρούσεων

## ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ - ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ - ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ

CSP	Constraint Satisfaction Problem
HBMO	Honey-Bees Mating Optimization
MOEA/D	Multi-Objective Evolutionary Algorithm based on Decomposition
MRV	Minimum Remaining Values
LCV	Least Constrained Variable
FC	Forward Checking
WA	Western Australia
NT	Northern Territory
SA	South Australia
Q	Queensland
NSW	New South Wales
V	Victoria
T	Tasmania



## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Muhammet Deveci, Nihan Çetin Demirel, A survey of the literature on airline crew scheduling, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Volume 74, 2018, Pages 54-69, ISSN 0952-1976
- [2] Atoosa Kasirzadeh, Mohammed Saddoune, François Soumis, Airline crew scheduling: models, algorithms, and data sets, *EURO Journal on Transportation and Logistics*, Volume 6, Issue 2, 2017, Pages 111-137, ISSN 2192-4376
- [3] Xin Wen, Xuting Sun, Yige Sun, Xiaohang Yue, Airline crew scheduling: Models and algorithms, *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Volume 149, 2021, 102304, ISSN 1366-5545
- [4] Stuart Russell και Peter Norvig, Τεχνητή Νοημοσύνη, Μια σύγχρονη προσέγγιση, δεύτερη αμερικανική έκδοση, Κλειδάριθμος, 2005, σ. 179-189
- [5] Xin Wen, Hoi-Lam Ma, Sai-Ho Chung, Waqar Ahmed Khan, Robust airline crew scheduling with flight flying time variability, *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Volume 144, 2020, 102132, ISSN 1366-5545
- [6] Parames Chutima, Kanokbhorn Arayikanon, Many-objective low-cost airline cockpit crew rostering optimisation, *Computers & Industrial Engineering*, Volume 150, 2020, 106844, ISSN 0360-8352
- [7] Sally C. Brailsford, Chris N. Potts, Barbara M. Smith, Constraint satisfaction problems: Algorithms and applications, *European Journal of Operational Research*, Volume 119, Issue 3, 1999, Pages 557-581, ISSN 0377-2217
- [8] Kumar, V. (1992). Algorithms for Constraint-Satisfaction Problems: A Survey. *AI Magazine*, 13(1), 32.
- [9] Rina Dechter, Daniel Frost, Backjump-based backtracking for constraint satisfaction problems, *Artificial Intelligence*, Volume 136, Issue 2, 2002, Pages 147-188, ISSN 0004-3702
- [10] Rina Dechter, *Constraint Processing*, A volume in The Morgan Kaufmann Series in Artificial Intelligence, 2003, σ. 123-179