MEMÓRIAS
DA
ACADEMIA DAS CIÊNCIAS
DE
LISBOA

CLASSE DE CIÊNCIAS

TOMO XLVII
Volume 2

As equações de Navier-Stokes enquanto "millennium problem"

H. BEIRÃO DA VEIGA

ACADEMIA DAS CIÊNCIAS
DE LISBOA

LISBOA • 2020

As equações de Navier-Stokes enquanto "millennium problem"

H. Beirão da Veiga

ABSTRACT

The "Clay Mathematics Institute" (CMI) has named seven "Millennium Prize Problems". The Scientific Advisory Board selected these problems, focusing on important classical questions that have resisted solution over the years. The board of Directors of CMI designated a 7 million prize fund for the solution of these problems, with 1 million allocated to each. The Millennium problems are the following: Yang--Mills and Mass Gap; Riemann Hypothesis; P vs NP Problem; Navier-Stokes Equation; Hodge Conjecture; Poincaré Conjecture; Biirch and Swinnerton-Dyer Conjecture. In the meantime the famous Poincaré Conjecture (1904) was solved by the Russian mathematician Grigoriy Perelman.

In the following we are interested on considering the above fourth problem, the Navier-Stokes existence and smoothness problem. These equations describe the motion of a viscous fluid in the three dimensional space. The existence of a regular solution, for all times, in correspondence to any smooth initial data, is not known. The resolution of this problem (or the proof of its negation) is the purpose of the prize.

A very elementary introduction to this problem, mostly to the techniques, is the aim of these notes.

For more information see the official statement of the problem http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf.

1. INTRODUÇÃO AO TEXTO ESCRITO

O "Clay Mathematics Institute" (CMI), Cambridge-Massachusetts, selecionou sete "Millennium Prize Problems", tendo em conta importantes questões clássicas em aberto de há muito no campo da Matemática. O CMI dedicou um prémio de um milhão de dólares a cada uma das soluções (completas) dum dos problemas.

Os sete problemas escolhidos foram os seguintes: Yang-Mills and Mass Gap; Riemann Hypothesis; P vs NP Problem; Navier-Stokes Equation; Hodge Conjecture; Poincaré Conjecture; Biirch and Swinnerton--Dyer Conjecture. Dos sete problemas propostos apenas um foi entretanto resolvido, a famosa conjectura de Poincaré (1904), pelo matemático russo Grigoriy Perelman. Para uma descrição mais completa recomendamos o site: http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf.

O quarto desafio, ao qual dedicamos estas notas, requer essencialmente uma demonstração da existência duma solução regular, para todos os tempos, e para quaisquer dados regulares, das equações de Navier-Stokes que descrevem o movimento dum fluido, viscoso e incomprimível, ao longo do tempo. Ou, alternativamente, uma demonstração da falsidade de tal afirmação. Não existe uma conjectura aceite pela maioria da comunidade científica a propósito deste problema, razão pela qual mereceu uma situação particular no que diz respeito a possíveis contra-exemplos. Não é possível expor tal dilema sem um qualquer recurso às técnicas usadas. Uma exposição demasiado elementar seria aqui mistificadora. Optamos pois por apresentar um programa simplificado, mas através do qual introduzir as técnicas necessárias para um estudo mais profundo do problema. Noções tais como derivada fraca, solução fraca, espaços funcionais abstractos, em particular espaços de Sobolev, etc. Esta constitui talvez a parte mais interessante para o não especialista, ao qual a comunicação foi dedicada. Entendemos um ouvinte com alguns conhecimentos da teoria elementar das equações da Física-Matemática. O texto que segue é aquele escrito antes da intervenção, e que achamos por bem não modificar. É pois, prevalentemente, uma introdução à metodologia e às técnicas necessárias para iniciar um estudo mais profundo do problema. Só no final faremos a ligação com as equações de Navier-Stokes, numa forma necessariamente sucinta. Um seu desenvolvimento, sendo inevitavelmente informal e não rigoroso, não teria cabimento em notas escritas. Por esta razão foi previsto ser apresentado apenas durante a exposição oral, com recurso a instrumentos de comunicação de maior elasticidade, ardósia e giz, ou equivalentes.

Por fim, para o estudo, e relativa bibliografia, das equações de Navier-Stokes recomendamos o artigo de G.P. Galdi "An introduction to the Navier-Stokes initial-boundary value problem", in *Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics*, Adv. Math. Fluid Mech., pág. 1-70. Birkhäuser, Basel, 2000.

2. ESPAÇOS FUNCIONAIS "ABSTRACTOS"

Vamo-nos concentrar sobre funções $u(x_1, x_2, x_3)$ de três variáveis reais que representam as usuais coordenadas cartesianas do ponto x num sistema de eixos tri-ortogonais no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Dadas duas funções quaisquer $u,\ v\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ define-se soma e produto por uma constante

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x)\,, \quad (c\,v)(x) = c\,v(x)\,.$$

Desta forma, o conjunto de todas estas funções torna-se num espaço vectorial "abstracto" de dimensão infinita.

Um exemplo fundamental. O espaço

$L^2(\mathbb{R}^3)$: Funções de quadrado integrável em $\mathbb{R}^3$, $\int |\,u(x)|^2 dx < \infty\,.$

Neste espaço definimos o PRODUTO ESCALAR de dois vectores

$$(u,\, v) =: \int u\,(x)\, v(x)\, dx\,,$$

que dá origem a uma NORMA $\|u\|$, através da clássica relação $\|u\|^2 = (u,\, u)$.

Portanto, $\|u\|^2 =: \int |\,u(x)|^2 dx$.

São verificadas todas as propriedades requeridas pela definição de norma num EV. Em particular vale a desigualdade triangular

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|\,.$$

Associada à norma fica definida uma distância entre dois "pontos" u e v: dist(u,v) = $\|u - v\|$. Dispômos assim duma noção de CONVERGÊNCIA:

$$u_N \to u \text{ se } \lim_{N \to \infty} \|u_N - u\| = 0.$$

3. PRELIMINARES

Num espaço vectorial normado X, para além da noção pré-existente de base algébrica (base de Hamel) introduzimos uma segunda noção de base (algébrico-topológica): um subconjunto B de elementos linearmente independentes de X dir-se-á aqui simplesmente uma BASE se todo o elemento de X é limite de combinações lineares finitas de elementos de B.

Por exemplo, as funções

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3, \dots, x^n, \dots$$

para todo o expoente n, são uma base algébrica para o espaço dos polinómios reais e nada mais. Mas, são uma base algébrico-topológica no espaço das funções representadas por séries de potências uniformemente convergentes num dado intervalo. O seu alcance resulta pois, deste modo, muito mais vasto.

No que se segue os símbolos $\forall$ e $\in$ significam respectivamente "qualquer que seja" e "pertencente ao conjunto".

4. DERIVADAS FRACAS

A definição clássica de derivada obtida a partir do limite da razão incremental não resulta suficientemente geral no estudo de muitos problemas, em particular no caso de equações diferenciais não lineares. Passemos pois ao estudo de tal problema.

Seja $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ o subespaço linear das funções nulas fora de um qualquer conjunto limitado, e que admitem derivadas contínuas de todas as ordens, e seja dada uma função $u \in C^1(\mathbb{R}^3)$, espaço constituído pelas funções contínuas com primeiras derivadas contínuas em $\mathbb{R}^3$. Tem-se, com uma integração por partes,

$$\int u(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} dx = -\int \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \phi(x)\, dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \tag{1}$$

e reciprocamente, se existe uma função integrável $g(x)$ tal que

$$\int u(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} dx = -\int g(x)\phi(x)\, dx, \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \tag{2}$$

tem-se necessariamente $g = \partial_i u$. É pois natural utilizar a (2) para generalizar a noção de derivada.

Definição de Derivada Fraca:
Sejam $u(x)$ e $g(x)$, duas funções a valores reais integráveis em $\mathbb{R}^3$. Então $g = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ *no sentido fraco* se

$$\int u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = -\int g(x) \phi(x)\, dx, \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(R^3). \tag{3}$$

Vê-se facilmente que a derivada fraca, se existe, é única.
Notação:

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

5. O ESPAÇO $H^1(\mathbb{R}^3)$

No estudo de equações diferenciais é natural, mesmo necessário, introduzir espaços funcionais que tenham em conta a noção de derivada duma função. No que se segue estamos interessados em espaços funcionais ligados ao espaço L^2:

$$f \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{se} \quad \int |f(x)|^2\, dx < \infty,$$

e

$$(f, g) = \int f(x)\, g(x)\, dx, \quad \|f\|^2 = \int |f(x)|^2\, dx.$$

Definamos pois o seguinte subespaço de $L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$f \in H^1(\mathbb{R}^3) \quad \text{se} \quad f, \partial_i f \in L^2(\mathbb{R}^3), \qquad i = 1, 2, 3,$$

munido do produto escalar

$$((f, g)) = (f, g) + \sum_{i=1}^{3} (\partial_i f, \partial_i g),$$

e portanto da norma

$$\|f\|_1^2 =: \|f\|^2 + \sum_{i=1}^{3} \| \partial_i f \|^2 = \int |f(x)|^2\, dx + \sum_{i=1}^{3} \int |\partial_i f(x)|^2\, dx.$$

Do mesmo modo, se podem definir espaços $H^k(\mathbb{R}^3), k \geq 2$, que têm em conta as derivadas parciais até à ordem k. Estes espaços admitem uma base algébrico-topológica numerável de vectores ϕ_1, ϕ_2,..., ϕ_n,.... Podemos sempre escolher uma base de vectores unitários e mutuamente ortogonais. Estes espaços são um caso particular de Espaços de Hilbert "propriamente ditos".

Demonstra-se que o subespaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ é DENSO em $H^1(\mathbb{R}^3)$, isto é, todo o elemento de $H^1(\mathbb{R}^3)$ é limite de uma sucessão de elementos de $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ (vale em qualquer $H^k(\mathbb{R}^3)$).

6. SOLUÇÃO FRACA DE UMA EDP

Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ solução clássica de

$$- \Delta u(x) + u(x) = f(x). \tag{5}$$

Evidentemente

$$\int (- \Delta u + u)\, \phi \, dx = \int f(x)\, \phi \, dx, \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(R^3).$$

E integrando por partes,

$$\begin{aligned} - \int \Delta u\, \phi \, dx &= - \int \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\, \phi \, dx = \int \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx \\ &= \int \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx. \end{aligned} \tag{6}$$

Tem-se pois

$$\int \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx + \int u\, \phi \, dx = \int f(x)\, \phi \, dx, \qquad \forall \phi \in C_0^\infty. \tag{7}$$

Reciprocamente, seguindo o caminho inverso, verifica-se que se $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ verifica a propriedade (7) então necessariamente verifica a (5).

É pois natural utilizar a relação (7) para generalizar a noção de solução do problema (2).

Definição:

Diremos que uma função $u(x) \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é uma **solução fraca** do problema (5) se vale a (7).

7. DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

Note-se que o primeiro membro da (7) é precisamente o produto escalar no espaço $H^1(\mathbb{R}^3)$. Trata-se pois de procurar uma solução u do problema

$$((u, \phi)) = (f, \phi), \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \tag{8}$$

no espaço $\mathbb{V} = H^1(\mathbb{R}^3)$, problema que é equivalente ao problema

$$((u, \phi)) = (f, \phi), \qquad \forall \phi \in \mathbb{V}, \tag{9}$$

visto $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ ser denso em $H^1(\mathbb{R}^3)$.

NOTA: O problema (9) pode-se resolver recorrendo ao teorema de representação de Riesz-Frechet. Mas tal método não se generaliza ao caso que aqui nos interessa.

A procura de **estimativas *a priori*** é, em geral, o ponto de partida nos problemas de existência de soluções. No nosso caso, posto $\phi = u$ na (9) tem-se $\|u\|_1^2 = (f, u) \leq \|f\| \|u\|$ por conseguinte

$$\|u\|_1 \leq \|f\| . \tag{10}$$

Portanto, qualquer que seja a solução u, se existe, deve verificar a estimativa (10). A sua importância ver-se-á em seguida.

Resolução do problema (9):

O problema (9) é equivalente ao problema

$$((u, \phi_i)) = (f, \phi_i), \qquad i = 1,2,\ldots \tag{11}$$

onde $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k, \ldots$ constitui uma base de $\mathbb{V}$.

Comecemos por resolver um problema aproximado. Definamos a sucessão (crescente) de espaços vectoriais finito-dimensionais (dim = N)

$$\mathbb{V}_N = span\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N\}.$$

Tem-se

$$\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}_2 \subset \ldots \mathbb{V}_N \subset \mathbb{V}_{N+1} \ldots \subset \mathbb{V}.$$

Procuremos um elemento $u_N \in \mathbb{V}_N$, portanto uma combinação linear da forma

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^N \phi_j(x),$$

que resolva o problema aproximado

$$((u_N, \phi_i)) = (f, \phi_i), \qquad i = 1,2,\ldots,N, \tag{12}$$

ou seja

$$\sum_{j=1}^{N} ((\phi_j, \phi_i))\, \alpha_j^N = (f, \phi_i), \qquad i = 1,2,\ldots,N.$$

Trata-se pois dum sistema linear de N equações as N incógnitas, $\alpha_1^N, \ldots, \alpha_N^N$ que se verifica imediatamente admitir uma e uma só solução.

Problemas:

a) Existe pelo menos um elemento $u \in \mathbb{V}$ tal que

$$\lim_{N\to\infty} u_N = u\,?$$

b) Um tal elemento é solução de (11)?

Em geral, as estimativas *a priori* obtidas (formalmente) para uma hipotética solução u demonstram-se facilmente, seguindo o mesmo caminho, para as aproximantes u_N. No nosso caso verifica-se banalmente que

$$\|u_N\|_1 \leq \|f\|\,, \qquad N = 1,2,\ldots \tag{13}$$

Vejamos que a estimativa (13) é suficiente a fim de obter respostas positivas aos pontos a) e b). Mas perde-se a unicidade.

8. UM MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Comecemos por recordar o Teorema de Bolzano-Weierstrass que afirma que, num espaço de dimensão finita, de uma sucessão limitada u_N se pode sempre extrair uma subsucessão u_M convergente. Mas num espaço finito-dimensional (base $\phi_1, \ldots, \phi_K$) a convergência em norma (dita forte)

$$\lim_{M\to\infty} \| u_M - u \| = 0$$

coincide com a convergência das K coordenadas (dita fraca)

$$\lim_{M\to\infty} (u_M, \phi_i) = (u, \phi_i)\,, \quad i = 1, \ldots, K\,.$$

Nos nossos espaços de dimensão infinita o teorema de Bolzano-Weierstrass é falso no que diz respeito à convergência forte mas válido relativamente à convergência fraca, o que para nós é suficiente.

De facto, passando ao limite na (12), escrita em termos da subsucessão fracamente convergente u_M,

$$((u_M, \phi_i)) = (f, \phi_i)\,, \qquad i = 1,2,\ldots,M\,,$$

para $M \to \infty$, obtem-se a (11) qualquer que seja a ϕ_i fixada, e portanto a (9). Obtemos deste modo a existência de pelo menos uma solução fraca do problema inicial

$$-\Delta u + u = f\,.$$

É de notar que o ponto de partida foi a estimativa *a priori*. O espaço funcional no qual convém vir a trabalhar é-nos sugerido por tal estimativa, e não o contrário.

Uma possível unicidade da solução tem que ser provada separadamente, assim como uma maior regularidade. No caso do problema considerado estas duas propriedades são bem conhecidas. Mas no caso das equações de Navier-Stokes os dois problemas estão em aberto como veremos.

9. AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES. A ESTIMATIVA DA ENERGIA.

Equações de Navier-Stokes em $Q_T =]\,0,\, T\,[\ \times \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \Delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u} - \nabla p = 0\,, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \qquad Q_\infty\,; \\ \boldsymbol{u}_{|t=0} = \boldsymbol{u}_0(x)\,, \quad \text{onde} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u}_0 = 0\,. \end{cases} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{u}(t,x) = (u_1, u_2, u_3)\; velocidade\,; \qquad p(t,x) = pressão\,.$$

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\,; \qquad \Delta \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i^2}\,; \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Suponhamos que $\boldsymbol{u}$ seja uma solução regular e recorramos a uma argumentação formal. Multiplicando escalarmente por $\boldsymbol{u}$ a primeira equação (14), integrando em $\mathbb{R}^3$, recorrendo a oportunas integrações por partes, e tendo presente que vale $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$, verificamos que, em cada instante $t > 0$, valem as seguintes igualdades formais (i.e., supondo as funções suficientemente regulares, o que não sucederá no que se segue):

$$\int \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{u}\, dx = \int \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}\, |\boldsymbol{u}|^2\, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{d\, t} \int |\,\boldsymbol{u}|^2\, dx\,.$$

$$- \int \Delta\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}\, dx = \int |\,\nabla \boldsymbol{u}|^2\, dx\,.$$

$$\int (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}\, dx = \int \sum_j \Big(\sum_i u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) \cdot u_j\, dx = \int \sum_i u_i \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial u_j^2}{\partial x_i}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i} |\boldsymbol{u}|^2\, dx = -\frac{1}{2} \int \Big(\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)\, |\boldsymbol{u}|^2\, dx = 0\,.$$

$$\int (\nabla p) \cdot \boldsymbol{u}\, dx = \int \sum_i \frac{\partial p}{\partial x_i} u_i\, dx = -\int p \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\, dx = 0\,.$$

Obtemos assim a igualdade formal

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\,t}\int |\boldsymbol{u}|^2\,dx\,+\,\nu\int |\nabla\,\boldsymbol{u}|^2\,dx\,=\,0\,,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\,t}\,\|\boldsymbol{u}(t)\|^2\,+\,\nu\,\|\nabla\,\boldsymbol{u}(t)\|^2\,=\,0\,.$$

Integrando em $]0,\ t[$ deduzimos a **igualdade da energia**

$$\frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{u}(t)\|^2+\,\nu\int_0^t\,\|\nabla\,\boldsymbol{u}(\tau)\|^2\,d\tau=\frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{u}(0)\|^2\,, \tag{15}$$

que não sabemos demonstrar para soluções fracas. Para estas vale apenas a correspondente desigualdade (≤ em vez de = na equação (15)). Obtemos assim as **estimativas *a priori***

$$\sup_{(0,\infty)}\ \|\boldsymbol{u}(t)\|\le\ \|\boldsymbol{u}_0\|\,;\qquad\int_0^\infty\|\,\nabla\,\boldsymbol{u}(t)\|^2\,dt\le\frac{1}{2\,\nu}\,\|\boldsymbol{u}_0\|^2\,. \tag{16}$$

Com base nas estimativas da energia (16), e seguindo a via indicada no exemplo visto precedentemente, aproximação nas variáveis espaciais através de espaços funcionais de dimensão finita $\mathbb{V}_N$, convergência fraca e passagem ao limite, demonstra-se a **existência de (pelo menos...) uma solução fraca global**. A definição de solução fraca generaliza a correspondente definição dada no parágrafo anterior. Mas a sua maior complexidade, e a finalidade destas notas, levam-nos apenas a aconselhar o leitor interessado a consultar o artigo de G. P. Galdi citado na introdução, em particular a Definição 2.1.

Note-se que as aproximantes $\boldsymbol{u}_N(t)$ são agora funções do tempo t a valores no espaco funcional finito-dimensional

$$\mathbb{V}_N\,=\,H^1(\mathbb{R}^3)\,\times\,H^1(\mathbb{R}^3)\,\times\,H^1(\mathbb{R}^3)\,,$$

visto a incógnita $\boldsymbol{u}$ ter agora 3 componentes. As $\boldsymbol{u}_N(t)$ vêm a ser soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias em $(0,\ \infty)$.

As **soluções fracas** que obtemos verificam evidentemente a **estimativa da energia**

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|\le\ \|\boldsymbol{u}_0\|\,;\qquad\int_0^\infty\|\,\nabla\,\boldsymbol{u}(t)\|^2\,dt\le\frac{1}{2\,\nu}\,\|\boldsymbol{u}_0\|^2\,.$$

Definição:

Diremos que $\boldsymbol{u}$ é uma **Solução Forte** em $[0,\ T]$ se existe uma constante C tal que

$$\sup_{(0,\infty)}\ \|\boldsymbol{u}(t)\|_1\le C\,;\qquad\int_0^\infty\|\,\nabla^2\,\boldsymbol{u}(t)\|^2\,dt\le\ C\,, \tag{17}$$

que se pode escrever

$$\boldsymbol{u} \in L^{\infty}(0, T; H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^3)) .$$

Demonstram-se em particular os seguintes pontos, que devem ser ilustrados durante a exposição oral:

a) Uma solução **forte** num dado intervalo de tempo $[0, T]$, é **regular** e **única**, nesse mesmo intervalo.
b) Dado $\boldsymbol{u}_0 \in H^1$ existe $T^* > 0$ tal que a solução é **forte**, e portanto **regular** e **única**, no intervalo $(0, T^*)$.
c) Existe uma constante positiva K tal que, se $\|\nabla \boldsymbol{u}_0\| < K$, a solução é forte em $[0, \infty[$, e verifica $\|\nabla \boldsymbol{u}(t)\| < K$.

Do ponto c) e da estimativa da energia segue que:

d) Dada uma solução fraca global existe um instante de tempo $T^{**} > 0$ que depende da norma do dado inicial, após o qual a solução é necessariamente forte (logo, regular e única).

De facto, se num intervalo $(0, T^{**})$ se tem sempre $\|\nabla \boldsymbol{u}(t)\| \geq K$, segue da desigualdade da energia que

$$\frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}(0)\|^2 \geq \nu \int_0^{T^{**}} \|\nabla \boldsymbol{u}(\tau)\|^2 \, d\tau \geq \nu K^2 T^{**} ,$$

e portanto $T^{**} \leq \frac{1}{2} \nu K^2 \||\boldsymbol{u}(0)\|^2$.

10. O "MILLENNIUM PROBLEM"

Do que ficou estabelecido na secção anterior segue, em particular, que qualquer que seja o dado inicial $\boldsymbol{u}_0$ nas condições estabelecidas, existe pelo menos uma solução fraca, que é global relativamente à variável temporal. Mas fica em aberto a sua regularidade, e mesmo a sua unicidade. Por outro lado, em correspondência com o dado inicial regular $\boldsymbol{u}_0$, existe uma solução forte, única e regular, durante um intervalo de tempo finito. Durante tal intervalo qualquer solução fraca coincide com a solução forte. Esta situação deu origem ao quarto "Millennium Problem", a saber:

Demonstrar ou apresentar um contra-exemplo à seguinte afirmação:

No caso de três dimensões espaciais, dada uma velocidade inicial regular, com divergência nula, existe um vector velocidade, com divergência nula, e uma pressão escalar, ambos regulares e definidos globalmente (i.e., sem um limite temporal), que resolvem as equações de Navier-Stokes (14).

Note-se que se requer que a solução persista para todos os tempos.

Há duas opções: Problema em todo o espaço $\mathbb{R}^3$ e problema periódico nas variáveis espaciais. Vejamos o primeiro caso. Os dados admitem, e as soluções possíveis têm que admitir, derivadas contínuas de todas as ordens, e obedecer a certas condições de decrescimento no infinito, estabelecidas no edital.

Além disso, a energia cinética deve ser globalmente limitada, ou seja, deve existir uma constante positiva E tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,\, t)|\, dx < \, E\,,$$

para todo o $t\ \geq 0$.

Alternativamente, demonstrar a existência de pelo menos um dado inicial para o qual não exista uma solução forte global, dados e solução obedecendo às condições de regularidade acima estabelecidas. Neste caso aceita-se o contributo duma força externa f, sob análogas condições de regularidade e comportamento no infinito.

(Comunicação apresentada à Classe de Ciências
na sessão de 17 de maio de 2018)